

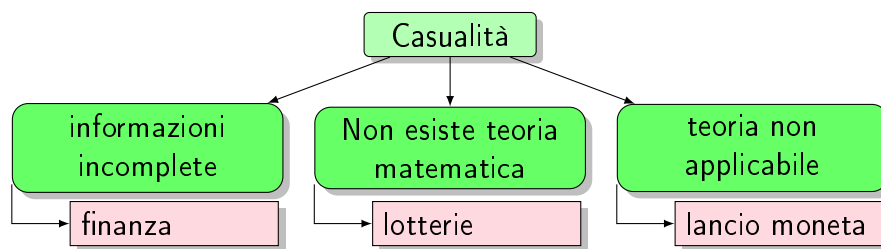
# Appunti di Probabilità e Statistica

a.a. 2014/2015 C.d.L. Informatica –  
Bioinformatica  
I. Oliva

## Lezione 3

### 1 Probabilità

**Calcolo delle probabilità:** studio e formalizzazione matematica di fenomeni “casuali”, per i quali non è possibile predire l’esito.



Storicamente, si sono succeduti tre modi distinti di definire la probabilità:

**frequentista:** si misura sulla base di osservazioni statistiche, sulla frequenza con cui un evento si verifica.

$$P(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(A)}{n}$$

Una definizione del genere potrebbe valere solo se si effettua un numero assai elevato di prove, tutte uguali e nelle stesse condizioni.

**Esempio 1.1.** *Qual è la probabilità che un lavoratore sia vittima di un incidente sul lavoro?*

**soggettivista:** si misura sulla base del grado di fiducia che una persona ha nel verificarsi di un certo evento. Si definisce come il prezzo equo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica e 0 se non si verifica.

**Esempio 1.2.** *Chi vincerà la partita tra la squadra A e la squadra B?*

**classico:** si calcola, in maniera oggettiva, come rapporto tra il numero di casi favorevoli ed il numero di casi possibili:

$$P(A) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}.$$

**Esempio 1.3.** *qual è la probabilità che esca 6 nel lancio di un dado?*

## 1.1 Formulazione assiomatica della probabilità

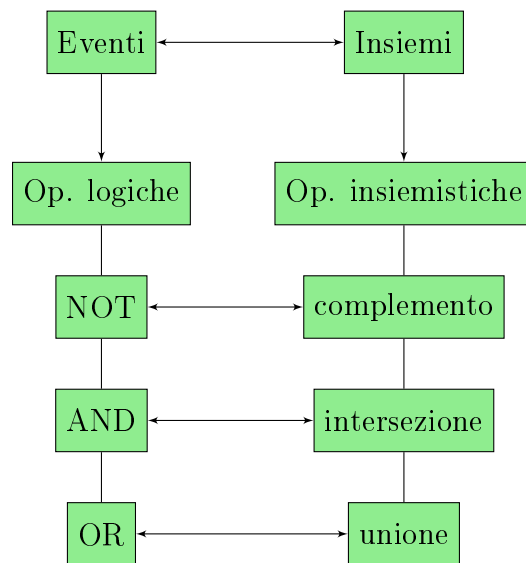
Supponiamo di condurre un **esperimento aleatorio**, ossia un esperimento il cui esito non è possibile prevedere a priori. Tali esperimenti sono caratterizzati da *incertezza* del risultato, *ripetibilità* dell'esperimento ed *equiprobabilità* dei risultati.

Ogni possibile risultato dell'esperimento si chiama **evento**  $\omega$  e l'insieme degli eventi costituisce lo **spazio campionario**  $\Omega$ .

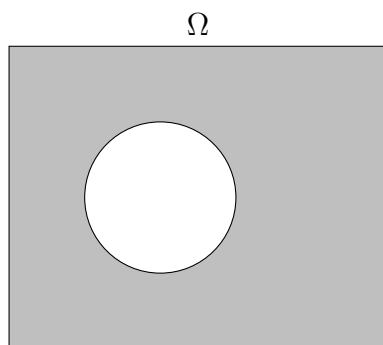
Esperimento	Evento	Spazio campionario
Lancio del dado	"il dado mostra la faccia 6"	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Lancio della moneta	"è uscita testa"	$\Omega = \{T, C\}$
Stato di un interruttore elettrico	"ON"	$\Omega = \{ON, OFF\}$
Tempo che intercorre tra l'inizio del funzionamento di un dispositivo ed il suo primo guasto	"sono intercorsi 10 sec"	$\Omega = \mathbb{R}^+$

**Esempio 1.4.**

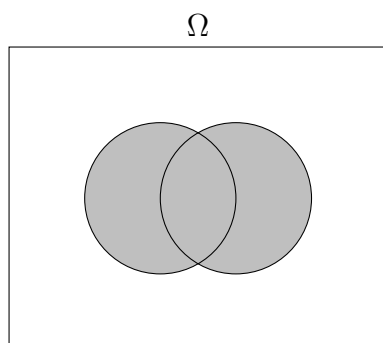
Gli eventi si rappresentano attraverso gli insiemi:



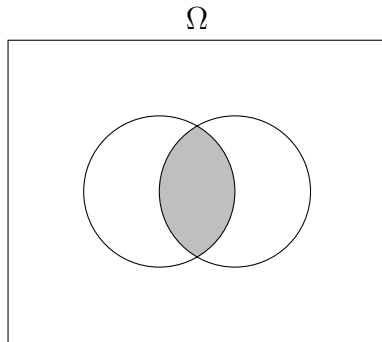
- $\bar{A} := \Omega/A = A^c$  (insieme complementare): evento che si verifica quando non si verifica  $A$



- $A \cup B$  evento che si verifica quando si verifica A, oppure B, oppure entrambi



- $A \cap B$  evento che si verifica quando si verificano contemporaneamente A e B



### Proprietà delle operazioni tra insiemi

1. Prop. commutativa:  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$
2. Prop. associativa:  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ ;  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
3. Prop. distributiva:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Leggi di De Morgan:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ;  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Nel 1933, Kolmogorov ha dato una definizione assiomatica della probabilità.

**A.1** Ad ogni evento  $A$ , corrisponde un certo numero  $P(A)$ , chiamato *probabilità di A*, tale che  $0 \leq P(A) \leq 1$

**A.2**  $P(\Omega) = 1$

**A.3** se gli eventi  $A_i, A_j$  sono disgiunti ( $A_i \cap A_j = \emptyset$ ), allora

$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j)$$

La terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si chiama *spazio di probabilità*, dove  $\Omega$  è lo spazio campionario,  $\mathcal{F}$  è una collezione di sottoinsiemi, contenente lo spazio stesso e chiusa rispetto all'unione (numerabile) ed al complementare, detta  $\sigma$ -algebra, e  $P$  è la funzione di probabilità  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$ .

Cosa rappresentano questi assiomi?

**A.1** vuol dire che la probabilità associata ad un evento è un numero non negativo e rappresenta la probabilità che esso si verifichi. **A.2** implica che l'evento certo (che si verifica sicuramente) ha il valore massimo assunto dalla probabilità. **A.3** è l'assioma della  $\sigma$ -additività.

### Proprietà della probabilità

**Proposizione 1.1.** *Se  $A, B$  sono eventi dello spazio campionario  $\Omega$ , allora si ha:*

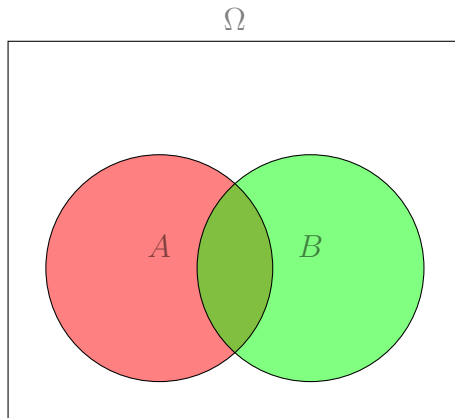
1.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. se  $B \subset A$ , allora  $P(B) \leq P(A)$

*Proof.* Consideriamo gli eventi  $A$  e  $B$ .

1. Per definizione di insieme complementare,  $A \cup \bar{A} = \Omega$  e  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , dunque

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) .$$

2. facciamo riferimento al seguente diagramma:



Si ricava che:

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \\ B &= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \\ A \cup B &= (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \end{aligned}$$

Gli eventi ora descritti sono tutti incompatibili (i.e., hanno intersezione vuota). Se passiamo alla probabilità, avremo:

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)\end{aligned}$$

Sommiamo membro a membro le prime due equazioni:

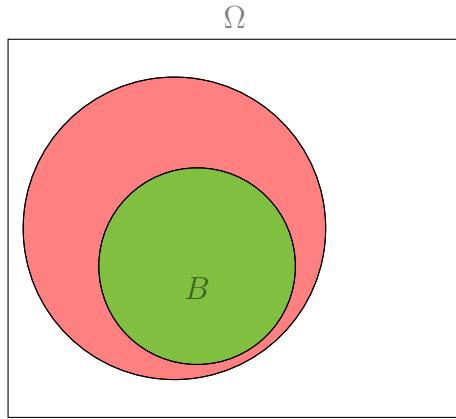
$$\begin{aligned}P(A) + P(B) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\&= 2P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)\end{aligned}$$

dunque,

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = P(A \cup B) .$$

3. Se  $B \subset A$ , allora  $B = B \cap A$ , quindi  $A = (B \cap A) \cup (\bar{B} \cap A) = B \cup (\bar{B} \cap A)$ , con  $B \cap (\bar{B} \cap A) = \emptyset$ , così

$$P(A) = P(B) + P(\bar{B} \cap A) \geq P(B) .$$



□

**Esempio 1.5.** *Nel gioco dei dadi, si consideri il lancio contemporaneo di due dadi equi. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:*

1. *almeno un dado dà 6*
2. *nessun dado dà 6*
3. *solo il primo dado dà 6*

4. solo il secondo dado dà 6

5. solo un dado dà 6

Se lanciamo due dadi, lo spazio campionario sarà costituito da tutte le coppie  $\{(i, j) : i, j = 1, \dots, 6\}$ , ossia

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$   
 $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$   
 $(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Sia  $A$  l'evento "il primo dado dà 6" e sia  $B$  l'evento "il secondo dado dà 6". Si ha:

$$P(A) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = P(B) .$$

1.  $A \cap B$  = "entrambi i dadi danno 6" e  $A \cup B$  = "almeno un dado dà 6", allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

2.  $\overline{A \cup B}$  = "nessun dado dà 6", allora

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{25}{36}$$

3.  $A \cap \bar{B}$  = "solo il primo dado dà 6"; inoltre,  $A \cup B = B \cup (A \cap \bar{B})$  (incompatibili), allora

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A \cup B) - P(B) = \frac{5}{36}$$

4. Come nel punto precedente.

5.  $C = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$  (incompatibili), allora

$$P(C) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{10}{36} .$$

## 1.2 Probabilità condizionata e indipendenza

La probabilità condizionata è la probabilità che un evento si verifichi, sapendo che se ne è già verificato un altro.

Dati due eventi  $A, B$ , con  $P(B) > 0$ , la probabilità condizionata si definisce come segue:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$A$  si chiama *evento condizionato* e  $B$  *evento condizionante*.

**Esempio 1.6.** *Quanto vale la probabilità che la somma delle facce di due dadi sia 12, sapendo che su uno dei due è uscita la faccia 6?*

*Consideriamo i seguenti eventi:  $A$  = “somma pari a 12” e  $B$  = “un dado mostra la faccia 6”. Allora,*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{11/36} = \frac{1}{11},$$

*essendo  $A \cap B = \{(6, 6)\}$  e*

*$B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (5, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1)\}$ .*

### Proprietà della probabilità condizionata

1. Legge delle probabilità composte:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

*Proof.* Si ricava direttamente dalla definizione di probabilità condizionata □

2. Formula della moltiplicazione:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P[(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n] \\ &= P[A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})] \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ &= P[A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2} \cap A_{n-1})] \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \\ &\quad \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \\ &= \dots = P(A_n|A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) \dots P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) \end{aligned}$$

□



3. Due eventi sono *independenti* se  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . In questo caso,  $P(A|B) = P(A)$ .

*Proof.* Per definizione di probabilità condizionata, si ha

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

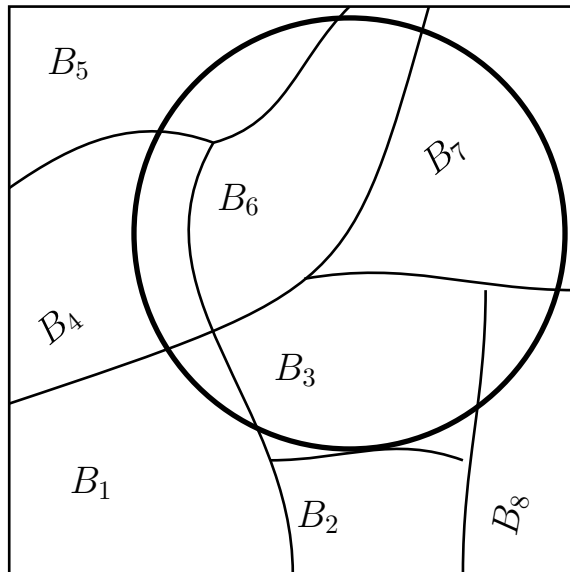
□

4. Formula delle probabilità totali:

se  $B_1, \dots, B_n$  sono eventi tali che  $\Omega = \bigcup_{k=1}^n B_k$ ,  $B_h \cap B_k = \emptyset$  e  $P(B_k) > 0$ , per ogni  $k = 1, \dots, n$ , allora, per ogni evento  $A$ , si ha

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k) \cdot P(B_k) .$$

*Proof.* Facciamo riferimento al seguente diagramma:



Si ricava che:

$$A = \bigcup_{k=1}^n (A \cap B_k)$$

allora

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n (A \cap B_k)\right) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k) \end{aligned}$$

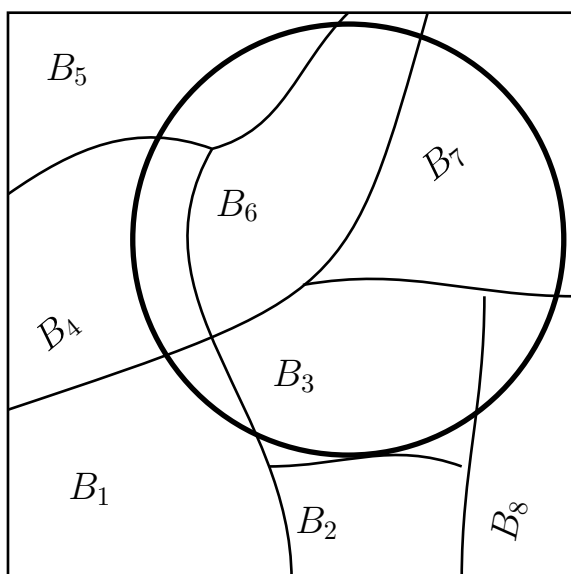
□

La seguente proprietà va sotto il nome di *formula di Bayes* ed è molto utile nelle applicazioni

**Proposizione 1.2.** *Siano  $B_1, \dots, B_n$  eventi tali che  $\Omega = \bigcup_{k=1}^n B_k$ ,  $B_h \cap B_k = \emptyset$  e  $P(B_k) > 0$ , per ogni  $k = 1, \dots, n$ . Allora, per ogni evento  $A$  con  $P(A) > 0$ , si ha*

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}.$$

*Proof.* Gli eventi  $B_1, \dots, B_n$  formano una partizione di  $\Omega$  :



Dalla legge delle probabilità composte e dalla definizione di probabilità condizionata, si ha

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}.$$

Inoltre,  $A \subset \Omega = \bigcup_{i=1}^n B_j$ , dunque

$$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i=1}^n B_j = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_j) ,$$

che è unione disgiunta, essendo  $A \cap B_j$  incompatibili. Allora,

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{j=1}^n P(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^n P(A|B_k) \cdot P(B_k) \\ \Rightarrow P(B_k|A) &= \frac{P(B_k|A)P(A)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_k) \cdot P(B_k)} . \end{aligned}$$

□

**Esercizio 1.1.** *Da un mazzo di 52 carte se ne sceglie una a caso.*

1. Qual è la probabilità di estrarre una figura oppure una carta di fiori?

**Esercizio 1.2.** *Un'azienda viti-vinicola possiede 2 diversi vigneti, ciascuno dei quali concorre alla produzione totale di vino. Il primo vigneto, costituito al 70% da Cabernet-Sauvignon ed al 30% da Barbera, è collocato in una posizione collinare molto favorevole dal punto di vista enologico, che garantisce un elevato livello di qualità. Il secondo vigneto si trova invece in pianura, è votato alla produzione di vini da tavola, ed è composto al 55% da Pignoletto, al 25% da Barbera, ed il restante uvaggio è Albana. Dai dati relativi alla vendemmia 2007 è stato riscontrato che il primo vigneto ha fornito il 35% della produzione totale di uva dell'azienda.*

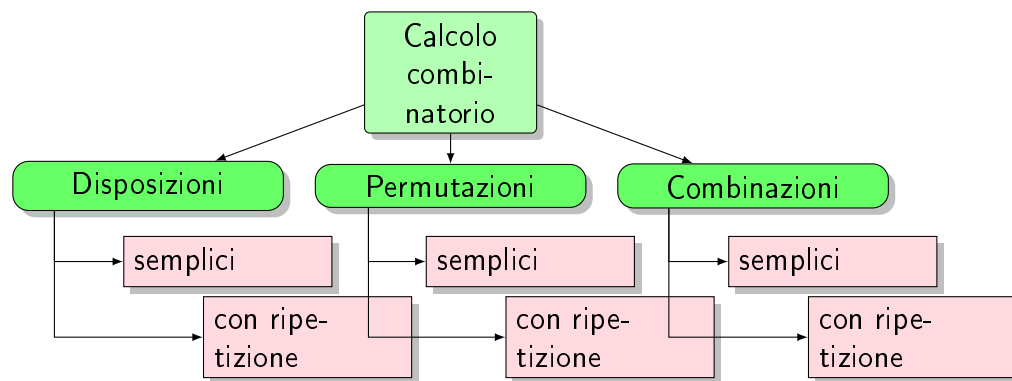
1. Se un vostro amico decide di regalarvi una bottiglia scelta a caso tra quelle prodotte dalla ditta nel 2007, qual è la probabilità che vi regali un Pignoletto?
2. Qual è la probabilità che vi regali una bottiglia di vino bianco (Pignoletto o Albana)?
3. Se all'interno della confezione regalata trovate una bottiglia di Barbera, qual è la probabilità che essa sia stata prodotta dal vigneto collinare?

**Esercizio 1.3.** *Una azienda produttrice di computer possiede 3 stabilimenti in Italia, uno a Milano, uno ad Ancona ed uno a Bari, che producono, rispettivamente, il 20%, il 30% ed il 50% del totale. Studi di settore hanno mostrato che i tre stabilimenti presentano percentuali di dispositivi difettosi pari a 10%, 5% e 1%, rispettivamente.*

1. *Determinare la probabilità che un computer estratto a caso dalla produzione sia difettoso.*
2. *Il sig. Rossi acquista un computer, che risulta essere difettoso. Qual è la probabilità che tale computer provenga dallo stabilimento di Milano?*

### 1.3 Il calcolo combinatorio

Tecniche per determinare, senza enumerazione diretta, il numero di possibili risultati di un dato esperimento il numero di elementi in un dato insieme.



**Disposizioni semplici:** contano i gruppi di  $k$  elementi, di un insieme di cardinalità  $n$ , che differiscono tra loro per almeno un elemento oppure per l'ordine con il quale gli elementi sono disposti

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} .$$

**Disposizioni con ripetizione:** contano i gruppi di  $k$  elementi, di un insieme di cardinalità  $n$ , che differiscono tra loro per almeno un elemento oppure per l'ordine con il quale gli elementi sono disposti ed uno stesso elemento può comparire nello stesso gruppo fino a  $k$  volte

$$D'_{n,k} = n^k .$$

**Permutazioni semplici:** disposizioni semplici, con  $k = n$

$$P_n = n! .$$

**Permutazioni con ripetizione:** permutazioni in cui un elemento può comparire fino a  $\alpha$  volte

$$P_n^{(\alpha)} = \frac{n!}{\alpha!} .$$

**Combinazioni semplici:** contano i gruppi di  $k$  elementi, di un insieme di cardinalità  $n$ , che differiscono tra loro per almeno un elemento, ma non importa l'ordine con il quale gli elementi sono disposti

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

**Combinazioni con ripetizione:** contano i gruppi di  $k$  elementi, di un insieme di cardinalità  $n$ , che differiscono tra loro per almeno un elemento, ma non importa l'ordine con il quale gli elementi sono disposti ed uno stesso elemento può comparire nello stesso gruppo fino a  $k$  volte

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

**Remark 1.1.** • *Fattoriale:*  $n! := n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$

*Per esempio,  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$*

• *Coefficiente binomiale:*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

*Per esempio,  $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 20$*

**Esempio 1.7.** *Nel gioco del poker, ciascun giocatore ha in mano 5 carte, servite da un mazzo di 52 carte francesi. Calcolare:*

1. *il numero di mani distinte che un giocatore può ricevere.*

*Dobbiamo contare in quanti modi 5 delle 52 carte possono essere distribuite. Ciascuna carta non viene reintrodotta nel mazzo e l'ordine delle carte ricevute non è importante. Dunque, il numero di mani che si possono ricevere è*

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 2598960.$$

2. *la probabilità di avere un poker d'assi servito.*

*Possiamo calcolare tale probabilità ricorrendo alla definizione classica di rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.*

*Avere un poker servito vuol dire avere, tra le 5 carte ricevute all'inizio, 4 assi ed una carta diversa. Dunque, i casi favorevoli si calcolano come*

il numero di modi di ricevere la quinta carta, dalle  $52 - 4 = 48$  carte rimanenti nel mazzo, ossia,  $C_{48,1} = 48$  modi.

I casi possibili sono dati da tutti i possibili modi di ricevere le 5 carte, che abbiamo calcolato nel punto precedente.

Alla fine, si ha:

$$P(aaaa) = \frac{48}{2598960} = 1.8469 \cdot 10^{-5}$$

3. la probabilità di avere un poker servito.

Come per il punto precedente, la probabilità si ottiene dalla definizione classica come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili. In questo caso, i casi favorevoli sono dati da tutti i possibili modi di avere 4 carte uguali ed una diversa. Essendo il mazzo di carte costituito da 52 pezzi, divisi in 4 semi, la quantità cercata è

$$P(\text{poker}) = \frac{13 \times 48}{2598960} = 0.000240096038415366$$

4. la probabilità di avere esattamente una coppia.

La probabilità cercata è:

$$P(\text{coppia}) = \frac{\binom{13}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3}{2598960} = 0.4226 ,$$

dove  $\binom{13}{1}$  è il numero di carte per ciascun seme (quindi il numero di coppie che si possono formare),  $\binom{4}{2}$  conta il numero di modi di scegliere due carte uguali,  $\binom{12}{3}$  conta il numero di modi di scegliere le tre carte restanti e diverse,  $4^3$  conta i modi per scegliere il seme.

**Esercizio 1.4.** Sia dato l'insieme  $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ . Se non sono permesse ripetizioni,

1. quanti numeri di tre cifre si possono comporre, avendo a disposizione le cifre di  $A$ ?
2. quanti, tra i numeri ottenuti al punto 1, sono minori di 400?
3. quanti, tra i numeri ottenuti al punto 1, sono pari? E quanti sono dispari?
4. quanti, tra i numeri ottenuti al punto 1, sono multipli di 5?

**Esercizio 1.5.** *Ogni anno si sceglie una delegazione di 4 studenti che partecipa ad una conferenza nazionale.*

1. *In quanti modi può essere formata la delegazione, se gli studenti eleggibili sono 12?*
2. *In quanti modi può essere formata la delegazione, se, dei 12 studenti eleggibili, due non vogliono partecipare insieme?*
3. *In quanti modi può essere formata la delegazione, se dei 12 studenti eleggibili, due vogliono partecipare insieme?*

**Esercizio 1.6.** *Quanti sono gli anagrammi, non necessariamente di senso compiuto, della parola TAVOLE? E quanti quelli della parola MATEMATICA?*

## 1.4 Le variabili aleatorie

Strumento introdotto dai matematici per lavorare sugli eventi di un dato fenomeno aleatorio con strumenti “classici”.

Rappresentano un modo per uniformare la teoria della probabilità, in modo che si possano utilizzare le stesse tecniche per tutti gli eventi.

Una **variabile aleatoria** (v.a.) è una funzione misurabile  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$X(\omega) = x, \forall \omega \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Esempio 1.8.** *Lancio di una moneta 3 volte,  $X$  conta il numero di teste, dunque  $X \in \{0, 1, 2, 3\}$ .*

$$\Omega = \{(CCC), (TCC), (CTC), (CCT), (TTC), (TCT), (CTT), (TTT)\}$$

$$P(X = 2) = P(\{(TTC), (TCT), (CTT)\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X \leq 1) = P(\{(CCC), (TCC), (CTC), (CCT)\}) = \frac{4}{8}$$

Nella pratica, non si conosce lo spazio di probabilità originario, né la  $X$  come applicazione misurabile, ma si conosce la *legge* della v.a., intesa come la sua *misura di probabilità*.

Tale legge è espressa attraverso la *funzione di ripartizione* associata alla v.a., ossia, la funzione

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \text{ t.c. } F_X(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$F_X$  definisce la distribuzione delle probabilità di eventi in un esperimento casuale.

**Proprietà della funzione di distribuzione:** (senza dimostrazione)

1.  $F_x$  è una funzione monotona non decrescente
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$ , per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4.  $P(X > x) = 1 - F_X(x)$
5.  $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$

Le v.a. sono classificate in *discrete* e (*assolutamente*) *continue*.

**v.a. discreta:**  $X$  si dice discreta se il suo supporto (i.e., l'insieme dei valori assunti) è discreto. Esempi di v.a. discrete sono: il numero di volte che bisogna lanciare una moneta prima di ottenere testa, il numero di domande corrette in un quiz vero/falso, il numero di teste nel lancio di 3 monete.

Per calcolare la probabilità associata ad una v.a., si introduce la seguente funzione  $p(x) := P(X = x)$

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } 0 \leq p(x) \leq 1, p(x) = 0 \forall x \notin S, \sum_{k \in I} p(x_k) = 1$$

Essa è detta *funzione di probabilità* sul supporto  $S = \{x_k : k \in I\} \subset \mathbb{R}$ , con  $I \subset \mathbb{Z}$ .

$X$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_k$
Prob.	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_k)$

con le condizioni:

$$p(x_i) \geq 0, \forall i = 1, \dots, k \text{ e } \sum_{i=1}^k p(x_i) = 1 .$$



**Esempio 1.9.** *Lancio di tre monete.*

$$\Omega = \{CCC, CCT, CTC, TCC, CTT, TCT, TTC, TTT\}$$

$X$	0	1	2	3
$p(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

**Esempio 1.10.** *Lancio di due dadi.*

$$\Omega = \{(i, j) : i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 6\}$$

$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

• **V.a. binomiale.**

Consideriamo un esperimento aleatorio con due soli esiti, *successo*  $S$  e *fallimento*  $F$ . Si ripete l'esperimento un numero  $n \in \mathbb{N}$  di volte, in condizioni identiche, in modo che ciascuna prova non influenzi le altre (e.g., lancio della moneta).

Costruiamo un opportuno spazio di probabilità.

**Spazio campionario:**

$$\Omega := \{(a_1, \dots, a_n) : a_k \in \{0, 1\}, \forall k = 1, \dots, n\}$$

**$\sigma$ -algebra:**  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  (insieme delle parti)

**Esempio 1.11.** *Sia  $A = \{a, b, c\}$ . Allora, l'insieme delle parti di  $A$  è*

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

**Probabilità:** sia

$$E_i = \{\text{l}'i\text{-sima prova è un successo}\}, \forall i = 1, \dots, n,$$

dove gli eventi non si influenzano reciprocamente e sono equiprobabili, in simboli

$$E_i \cap E_j = \emptyset, P(E_i) := p, \forall i = 1, \dots, n.$$

Allora, si ha:

$$\{\omega\} = \{(a_1, \dots, a_n)\} = \left( \bigcap_{h|a_h=1} E_h \right) \cap \left( \bigcap_{k|a_k=0} \bar{E}_k \right).$$

Infatti:  $a_h = 1$  se si verifica l'evento  $E_h$  e sarà pari a 0 se, invece, si verifica il suo complementare; questo accade per  $n$  eventi distinti. Per esempio:

$$\omega = (1, 0, 0, 1) \Rightarrow E_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3 \cap E_4 .$$

La probabilità corrispondente è:

$$\begin{aligned} P(\{\omega\}) &= \prod_{h|a_h=1} P(E_h) \cdot \prod_{k|a_k=0} P(\bar{E}_k) \\ &= \underbrace{[p \cdot p \cdots p]}_{k \text{ volte}} \cdot \underbrace{[(1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p)]}_{n-k \text{ volte}} , \end{aligned}$$

se indichiamo con  $k$  il numero di successi che si sono verificati in  $n$  prove.

La probabilità di osservare  $k$  successi in  $n$  prove si calcola attraverso la seguente

**Proposizione 1.3.** *Sia  $n \in \mathbb{N}$  e sia  $k \leq n$ . La probabilità di osservare  $k$  successi in  $n$  prove, ciascuna con probabilità  $p \in (0, 1)$ , è*

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

*Proof.* Sia  $B_k$  l'evento “si osservano  $k$  successi”, allora:

$$\begin{aligned} P(B_k) &= \sum_{\omega \in B_k} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in B_k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= |B_k| p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} . \end{aligned}$$

□

La v.a. che conta il numero di successi in  $n$  prove di Bernoulli si chiama *v.a. binomiale*

$$X \sim \text{Bin}(n, p), \quad P(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & k \in \{1, \dots, n\} \\ 0, & k \notin \{1, \dots, n\} \end{cases} .$$

Quando il numero di prove si riduce ad una soltanto, la v.a. si chiama *bernoulliana* di parametro  $p$ ,  $X \sim B(p)$ .

**Esercizio 1.7.** *Presso uno sportello Bancomat di una banca, 4 persone su 5 fanno operazioni di prelievo.*

1. Supponendo di scegliere, a caso e con reposizione, 10 persone che si sono recate allo sportello, calcolare la probabilità, che il numero totale di operazioni di prelievo sia maggiore di 9.
2. Se, su 6 estrazioni a caso e con reposizione, almeno tre persone hanno effettuato un prelievo, calcolare la probabilità che il numero totale di operazioni di prelievo sia maggiore di 4.

**Esercizio 1.8.** Una compagnia aerea lancia una offerta promozionale, che consiste nel rilasciare un buono per un viaggio gratuito A/R, per una destinazione a scelta. Per il lancio promozionale, vengono emessi 8 buoni ogni 100 biglietti stampati.

1. Se decidete di effettuare 5 acquisti presso tale compagnia aerea, qual è la probabilità che non vinciate nemmeno un viaggio?
2. Se decidete di effettuare 5 acquisti presso tale compagnia aerea, qual è la probabilità di vincere 3 o 4 viaggi?
3. Quanti acquisti sono necessari, perché la probabilità di vincere almeno un viaggio sia superiore al 50%?

• **V.a. geometrica**

Supponiamo di avere un apparecchio, non soggetto ad usura, e di controllarne lo stato (funzionante/non funzionante) ad istanti successivi discreti (per es, ogni ora).

Sia  $X$  l'istante in cui avviene il guasto; qual è il modello probabilistico più adatto a descrivere  $X$ ?

$$P(X > k + 1 | X > k) = P(X > 1), \quad k \geq 1,$$

i.e., la probabilità che l'apparecchio si rompa all'istante  $k + 1$ , sapendo che ha funzionato fino all'istante  $k$ , è la stessa di trovare l'apparecchio funzionante all'istante iniziale (*assenza di memoria*).

Supponiamo di conoscere  $P(X > 1) := q$ , allora si ha:

$$\begin{aligned} q &= P(X > k + 1 | X > k) = \frac{P(X > k + 1, X > k)}{P(X > k)} = \frac{P(X > k + 1)}{P(X > k)} \\ \Rightarrow P(X > k + 1) &= qP(X > k), \quad \forall k \geq 1 \\ \Rightarrow P(X > 2) &= qP(X > 1) = q^2 \\ \Rightarrow P(X > 3) &= qP(X > 2) = q^3 \\ &\vdots \\ \Rightarrow P(X > k + 1) &= qP(X > k) = q^{k+1} \end{aligned}$$

D'altro canto, noi siamo interessati a  $P(X = k)$ , ossia, la probabilità che si verifichi un guasto esattamente all'istante  $k$ . Allora, si ha:

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = 1 - q^k - (1 - q^{k-1}) = q^{k-1}(1 - q) .$$

Poniamo  $p := 1 - q$ , dove  $p$  è la probabilità che si verifichi un guasto prima dell'istante  $X$ , allora

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k \geq 1 .$$

La v.a. che descrive l'istante del primo guasto si chiama *v.a. geometrica* e

$$P(X = k) = \begin{cases} p(1 - p)^{k-1}, & k \geq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

**Esercizio 1.9.** Consideriamo un'urna contenente 10 palline bianche e 15 nere ed effettuiamo estrazioni con reinserimento. In particolare, estraiamo le palline finché non otteniamo una pallina nera.

1. Calcolare la probabilità che la pallina nera sia estratta, per la prima volta, dopo 20 estrazioni.
2. Calcolare la probabilità che per estrarre una pallina nera per la prima volta servano almeno 10 estrazioni.

**Esercizio 1.10.** Un amico ci sfida a giocare a tiro al bersaglio. Abbiamo a disposizione un certo numero di tiri e sappiamo che gli esiti di tali tiri sono tra loro indipendenti. Inoltre, la probabilità di fare centro è 0.3.

Calcolare:

1. la probabilità di fare centro in 6 tiri;
2. la probabilità di fare centro per la prima volta esattamente al sesto tiro;
3. la probabilità di sbagliare non più di 5 volte, prima di fare centro;
4. la probabilità di centrare il bersaglio per la prima volta al settimo tiro, sapendo che almeno 5 tiri sono stati sbagliati.

• **V.a. di Poisson.**

Ad un centralino, sia  $X$  il numero di telefonate che arrivano ad un operatore in un fissato intervallo di tempo, sia  $n$  il numero di

utenti che cercano di contattare il centralino e sia  $p \in (0, 1)$  la probabilità che ciò accada. Generalmente, si ha  $n \gg p$ .

Dunque,  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . D'altra parte, se  $n$  è molto più grande di  $p$ , non è facile calcolare la probabilità  $P(X = k)$ , sfruttando la legge di probabilità binomiale. Operiamo, allora, in un modo diverso. Poniamo  $\lambda := n \cdot p$ , che implica  $p = \lambda/n$  e

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{n!}{n^k(n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Passiamo al limite, per  $n$  che tende all'infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} P(X = k) &= \lim_{n \rightarrow 0} \left[ \frac{n!}{n^k(n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \left[ \frac{n!}{n^k(n-k)!} \right] \lim_{n \rightarrow 0} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \right] \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow 0} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \right] \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} . \end{aligned}$$

La v.a. che conta quanti eventi si verificano in un dato intervallo (discreto) di tempo si chiama *v.a. di Poisson* e si ha

$$X \sim \text{Po}(\lambda), \quad P(X = k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & k \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

**Esercizio 1.11.** Un computer ha una probabilità  $p = 10^{-3}$  di ricevere un bit errato. Sia  $X$  il numero di errori ricevuti su 1000 caratteri. Calcolare la probabilità che si ricevano almeno 2 errori.

**Esercizio 1.12.** Tra le 11 e le 13 passano, in media, da un casello autostradale, 2.5 auto al minuto.

Determinare la probabilità che, in un minuto:

1. non passino auto;
2. passino esattamente due auto;

3. *passino al più 4 auto;*

4. *passino più di 6 auto.*

- **V.a. ipergeometrica.**

Consideriamo un'urna, contenente  $N$  palline, di cui  $r$  rosse e le restanti bianche, ed effettuiamo  $n$  estrazioni, senza rimessa. Sia  $X$  la v.a. che conta il numero di palline rosse estratte dal blocco di  $n$  palline.

La probabilità che vengano estratte  $k$  palline rosse la si calcola come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, dove i casi favorevoli rappresentano tutti i possibili modi di scegliere  $k$  palline rosse da insiemi di  $n$  palline, mentre i casi possibili sono tutti i possibili modi di selezionare le  $n$  biglie.

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} .$$

La v.a.  $X$  appena definita si chiama v.a. *Ipergeometrica di parametri*  $N, r, n$ ,  $X \sim \text{Iperg}(N, r, n)$ .

**Esercizio 1.13.** *Una ditta produttrice di pezzi per calcolatori li predispone in lotti da 10 elementi ciascuno, che verranno immessi sul mercato. L'addetto al controllo della qualità seleziona 3 pezzi da ogni lotto e dichiara l'intero lotto difettoso se, tra i pezzi scelti, ce n'è almeno uno difettoso.*

*Se il 70% dei lotti contiene un pezzo difettoso ed il rimanente 30% ne contiene 4, calcolare la proporzione dei lotti rimossi dal mercato.*