Esercitazioni Analisi 2, corso avanzato, Lun 14/01/08, ore 1-2

- Definizione di serie di potenze complessa, cerchio di convergenza, raggio di convergenza.
- Teoremi di Abel, convergenza puntuale, assoluta e uniforme.
- Convergenza sulla circonferenza del cerchio di convergenza. Teorema di Abel e convergenza sul segmento condotto dal centro. Possibile raffinamento del risultato.
- Calcolo del raggio di convergenza. Criteri di Cauchy-Hadamard e del rapporto.
- **Esercizio risolto in aula.** Si determinino gli insiemi di convergenza semplice, assoluta e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\log(1+n)}.$$

- **Esercizio risolto in aula.** Studiare convergenza puntuale ed uniforme della serie di potenze reale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k^2}{2^k k^4 + 1} \left(\frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \right)^k.$$

- **Esercizio risolto in aula.** Si determinino gli insiemi di convergenza semplice, assoluta ed uniforme della serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{3n + \log(n)}.$$

- **Homework.** Nella risoluzione dell'esercizio precedente é stato utilizzato il criterio di Abel-Dirichlet per la convergenza di serie numeriche. Cercarlo su testi e/o internet.
- Derivazione termine a termine della somma di una serie di potenze. Conservazione del raggio di convergenza.
- Definizione di funzione analitica in un punto e analitica in un aperto.
- **Esempio visto in aula.** La funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é analitica in $x = 0$. La sua espansione in serie ha raggio di convergenza 1.
- **Homework.** Mostrare che la funzione f dell'esempio é analitica anche in $x = 1/2$ e in $x = 2$ e determinare il raggio di convergenza della relativa espansione.
- Formula di Taylor per funzioni analitiche. Espansione di Taylor di e^x e di $\log(1 + x)$.

- **Homework.** Cercare e/o produrre un esempio di funzione infinitamente derivabile su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ per la quale non si applichi la formula di Taylor in I.

- **Esercizio svolto in aula.** Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(1+n)}$$
e calcolarne la somma per $|x| < R$.

- Ricerca di soluzioni di equazioni differenziali con serie di potenze.

- **Esempio svolto in aula** Trovare una soluzione di $y' = 5y$ utilizzando le serie di potenze.

- **Homework.** Utilizzando le serie di Taylor viste prima, dimostrare l'identitá
$$\int_0^1 x^{\alpha x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{(n+1)^{n+1}}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$