Capitolo 4

Calcolo integrale

1 Breve premessa

Le radici del calcolo integrale sono da ricercarsi in un metodo per il calcolo di aree e di volumi, detto metodo di esaustione, usato da Archimede nel III secolo a.C. Il procedimento è simile a quello descritto all'inizio del capitolo sui limiti, dove abbiamo riempito il cerchio (appunto 'esaurito') con una successione di poligoni regolari inscritti di n lati, facendo poi tendere n all'infinito. Più in generale, per calcolare l'area di una regione piana delimitata da una curva si considera una successione di rettangoli inscritti e una successione di rettangoli circoscritti, facendo poi tendere a zero lunghezza dei lati di base. Supponiamo ad esempio di voler calcolare l'area S sottesa dalla funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Fissato $n \geq 2$, dividiamo allora l'intervallo $[0, 1]$ in n parti di uguale lunghezza $[x_{j-1}, x_j]$, con $x_j = j/n$, per $j = 0, \ldots, n$. In corrispondenza di ogni j, si possono considerare i rettangoli inscritti (rispettivamente circoscritti) nella regione piana di base $[x_{j-1}, x_j]$ ed altezza x_{j-1}^2 (rispettivamente x_j^2). Tenuto conto della formula elementare della somma dei quadrati dei primi n numeri naturali, risulta che l'area totale dei rettangoli inscritti vale

$$I_n = \sum_{j=1}^{n} x_{j-1}^2 (x_j - x_{j-1}) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3},$$

mentre l'area totale dei rettangoli circoscritti vale

$$C_n = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 (x_j - x_{j-1}) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Per costruzione, l'area S della regione piana verifica $I_n < S < C_n$, per ogni $n \geq 1$ ed è inoltre evidente che, all'aumentare di n, ovvero al raffinarsi della suddivisione dell'intervallo unitario, I_n (rispettivamente C_n) fornisce una approssimazione per difetto (rispettivamente per eccesso) di errore sempre più piccolo. Poichè si ha

$$\lim_n I_n = \lim_n C_n = \frac{1}{3},$$

dal teorema del confronto dei limiti di ottiene subito $S = \frac{1}{3}$. L'area della figura piana è stata quindi 'esaurita' per difetto con i rettangoli inscritti e per eccesso con i rettangoli circoscritti. Nelle sezioni successive cercheremo di formalizzare questo semplice esempio definendo il concetto di integrale definito per alcune classi di funzioni limitate.

Il procedimento che seguiremo nello studio dell'integrale secondo Riemann per funzioni limitate su intervalli limitati può essere così schematizzato:

1. definizione di somme inferiori e superiori;
2. proprietà di ordinamento delle somme inferiori e superiori rispetto alla partizione;
3. definizione di integrale inferiore e superiore;
4. definizione di funzione integrabile;
5. criterio di integrabilità in termini delle somme inferiori e superiori;
6. individuazione di alcune classi notevoli di funzioni integrabili.

Estenderemo infine la nozione di integrabilità secondo Riemann alle funzioni illimitate o definite su intervalli illimitati.

2 Integrale inferiore superiore

(2.1) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e siano $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Denotiamo con S l'insieme $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ e poniamo*

$$\Sigma'(f, S) := \sum_{j=1}^{n} \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}) ,$$
$$\Sigma''(f, S) := \sum_{j=1}^{n} \left(\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}) .$$

Diciamo che S è una suddivisione *di $[a, b]$ e chiamiamo $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$* somma inferiore *e* somma superiore *associate alla funzione f ed alla suddivisione S. Quando non vi sia rischio di confusione, scriveremo semplicemente $\Sigma'(S)$ e $\Sigma''(S)$.*

Dal momento che

$$\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \le \sup_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

è evidente che $\Sigma'(S) \le \Sigma''(S)$.

(2.2) Proposizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e S, T due suddivisioni di $[a, b]$ con $S \subseteq T$. Allora si ha*

$$\Sigma'(S) \le \Sigma'(T) \le \Sigma''(T) \le \Sigma''(S)\,.$$

Dimostrazione. Sia $S = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ e sia $T = S \cup \{\xi\}$ con $\xi \in]x_{k-1}, x_k[$ per qualche $k = 1, \dots, n$. Risulta

$$\begin{aligned}
\Sigma'(S) &= \sum_{j=1}^{k-1} \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(x_j - x_{j-1}) + \left(\inf_{[x_{k-1},x_k]} f\right)(\xi - x_{k-1}) + \\
&\quad + \left(\inf_{[x_{k-1},x_k]} f\right)(x_k - \xi) + \sum_{j=k+1}^{n} \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(x_j - x_{j-1}) \le \\
&\le \sum_{j=1}^{k-1} \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(x_j - x_{j-1}) + \left(\inf_{[x_{k-1},\xi]} f\right)(\xi - x_{k-1}) + \\
&\quad + \left(\inf_{[\xi,x_k]} f\right)(x_k - \xi) + \sum_{j=k+1}^{n} \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(x_j - x_{j-1}) = \Sigma'(T)\,.
\end{aligned}$$

In modo simile si prova che $\Sigma''(S) \ge \Sigma''(T)$. La tesi segue applicando ripetutamente il passo precedente (ossia ragionando per induzione sul numero di elementi di $T \setminus S$). ■

(2.3) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Poniamo*

$$\mathcal{I}'(f) := \sup\left\{\Sigma'(S) : \ S \text{ è una suddivisione di } [a, b]\right\}\,,$$

$$\mathcal{I}''(f) := \inf\left\{\Sigma''(S) : \ S \text{ è una suddivisione di } [a, b]\right\}\,.$$

Come vedremo fra un momento, $\mathcal{I}'(f)$ ed $\mathcal{I}''(f)$ sono numeri reali. Si chiamano rispettivamente integrale inferiore *ed* integrale superiore *di f.*

(2.4) Proposizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora*

$$\left(\inf_{[a,b]} f\right)(b - a) \le \mathcal{I}'(f) \le \mathcal{I}''(f) \le \left(\sup_{[a,b]} f\right)(b - a)\,.$$

Dimostrazione. Se consideriamo la suddivisione S con $a = x_0 < x_1 = b$, risulta

$$\mathcal{I}'(f) \geq \Sigma'(S) = \left(\inf_{[a,b]} f\right)(b-a)\,,$$

$$\mathcal{I}''(f) \leq \Sigma''(S) = \left(\sup_{[a,b]} f\right)(b-a)\,.$$

Inoltre per ogni coppia di suddivisioni S, T di $[a,b]$ si ha

$$\Sigma'(S) \leq \Sigma'(S \cup T) \leq \Sigma''(S \cup T) \leq \Sigma''(T)\,.$$

Per il Principio di Dedekind esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che $\Sigma'(S) \leq z \leq \Sigma''(T)$ per ogni coppia di suddivisioni S, T di $[a,b]$. Ne segue

$$\mathcal{I}'(f) \leq z \leq \mathcal{I}''(f)\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.5) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni limitate e sia $\lambda \in [0, +\infty[$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *la funzione $(f+g)$ è limitata e si ha*

$$\mathcal{I}'(f+g) \geq \mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g)\,,$$

$$\mathcal{I}''(f+g) \leq \mathcal{I}''(f) + \mathcal{I}''(g)\,;$$

(b) *la funzione (λf) è limitata e si ha*

$$\mathcal{I}'(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}'(f)\,,$$

$$\mathcal{I}''(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}''(f)\,;$$

(c) *se $f \leq g$, risulta*

$$\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}'(g)\,,$$

$$\mathcal{I}''(f) \leq \mathcal{I}''(g)\,;$$

(d) *per ogni $c \in]a,b[$ si ha*

$$\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right)\,,$$

$$\mathcal{I}''(f) = \mathcal{I}''\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}''\left(f_{|[c,b]}\right)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo le affermazioni che riguardano l'integrale inferiore. Le proprietà dell'integrale superiore possono essere dimostrate per esercizio in modo simile.
(a) Si verifica facilmente che $f + g$ è limitata. Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni S, T di $[a, b]$ tali che

$$\Sigma'(f, S) > \mathcal{I}'(f) - \varepsilon\,,$$
$$\Sigma'(g, T) > \mathcal{I}'(g) - \varepsilon\,.$$

Se $S \cup T = \{x_0, \ldots, x_n\}$, risulta

$$\forall x \in [x_{j-1}, x_j] : \inf_{[x_{j-1},x_j]} f + \inf_{[x_{j-1},x_j]} g \le f(x) + g(x)\,,$$

da cui

$$\inf_{[x_{j-1},x_j]} f + \inf_{[x_{j-1},x_j]} g \le \inf_{[x_{j-1},x_j]} (f + g)\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g) - 2\varepsilon < \Sigma'(f, S) + \Sigma'(g, T) \le \Sigma'(f, S \cup T) + \Sigma'(g, S \cup T) \le \\ \le \Sigma'(f + g, S \cup T) \le \mathcal{I}'(f + g)\,.\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε, si deduce che

$$\mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g) \le \mathcal{I}'(f + g)\,.$$

(b) Si verifica facilmente che λf è limitata. Se $\lambda = 0$, si ha per la Proposizione (2.4) $\mathcal{I}'(\lambda f) = 0$. Ne segue $\mathcal{I}'(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}'(f)$. Sia quindi $\lambda > 0$ e sia $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Poiché

$$\forall x \in [x_{j-1}, x_j] : \lambda \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \le \lambda f(x)\,,$$

risulta

$$\lambda \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \le \inf_{[x_{j-1},x_j]} (\lambda f)\,.$$

Ne segue

$$\lambda \Sigma'(f, S) \le \Sigma'(\lambda f, S) \le \mathcal{I}'(\lambda f)\,,$$

da cui $\lambda \mathcal{I}'(f) \le \mathcal{I}'(\lambda f)$. Ragionando su λ^{-1} e (λf), si deduce che

$$\lambda^{-1} \mathcal{I}'(\lambda f) \le \mathcal{I}'\left(\lambda^{-1}(\lambda f)\right) = \mathcal{I}'(f)\,,$$

da cui la disuguaglianza opposta.

(c) Se S è una suddivisione di $[a, b]$, risulta

$$\Sigma'(f, S) \leq \Sigma'(g, S) \leq \mathcal{I}'(g)\,,$$

da cui $\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}'(g)$.
(d) Se S è una suddivisione di $[a, b]$, poniamo

$$T = S \cup \{c\}\,,$$

$$T_1 = T \cap [a, c]\,,$$

$$T_2 = T \cap [c, b]\,.$$

Risulta

$$\Sigma'(S) \leq \Sigma'(T) = \Sigma'(T_1) + \Sigma'(T_2) \leq \mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right)\,,$$

per cui

$$\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right)\,.$$

D'altronde per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una suddivisione S_1 di $[a, c]$ ed una suddivisione S_2 di $[c, b]$ tali che

$$\Sigma'(S_1) > \mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) - \varepsilon\,,$$

$$\Sigma'(S_2) > \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right) - \varepsilon\,.$$

Poiché $S_1 \cup S_2$ è una suddivisione di $[a, b]$, ne segue

$$\mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right) - 2\varepsilon < \Sigma'(S_1) + \Sigma'(S_2) = \Sigma'(S_1 \cup S_2) \leq \mathcal{I}'(f)\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, si deduce che

$$\mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right) \leq \mathcal{I}'(f)\,,$$

per cui vale anche la disuguaglianza opposta. ∎

3 Funzioni integrabili

(3.1) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è* integrabile *(*secondo Riemann*), se f è limitata e $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$. Se f è integrabile, denotiamo con uno dei simboli*

$$\int_a^b f\,, \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

il comune valore di $\mathcal{I}'(f)$ *e* $\mathcal{I}''(f)$. *Il numero reale* $\int_a^b f$ *si chiama* integrale *di* f *da* a *a* b.

(3.2) Proposizione *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Allora* f *è integrabile se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una suddivisione* S *di* $[a, b]$ *tale che* $\Sigma''(S) - \Sigma'(S) < \varepsilon$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni S, T di $[a, b]$ tali che

$$\Sigma'(S) > \mathcal{I}'(f) - \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\Sigma''(T) < \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poiché $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$, ne segue

$$\Sigma''(S \cup T) - \Sigma'(S \cup T) \leq \Sigma''(T) - \Sigma'(S) < \varepsilon.$$

Viceversa, sia $\varepsilon > 0$ e sia S una suddivisione di $[a, b]$ con $\Sigma''(S) - \Sigma'(S) < \varepsilon$. Risulta

$$\mathcal{I}''(f) \leq \Sigma''(S) < \Sigma'(S) + \varepsilon \leq \mathcal{I}'(f) + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε, ne segue $\mathcal{I}''(f) \leq \mathcal{I}'(f)$, quindi $\mathcal{I}''(f) = \mathcal{I}'(f)$. ■

(3.3) Osservazione *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione. Allora* f *è integrabile se e solo se, per ogni* $\varepsilon > 0$, *esistono due funzioni continue* $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\forall x \in [a, b] : \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \qquad \int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon.$$

(3.4) Osservazione *Sia* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora f *non è integrabile. Infatti, per ogni suddivisione* $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ *di* $[0, 1]$, *si ha*

$$\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f = -1, \qquad \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f = 1, \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

per cui $\Sigma'(f, S) = -1$, $\Sigma''(f, S) = 1$ *e* f *non può essere integrabile per la Proposizione* (3.2).

Vediamo ora una prima importante classe di funzioni integrabili.

(3.5) Teorema *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione monotona. Allora* f *è integrabile.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente. Se f è decrescente, il ragionamento è simile. Poiché

$$\forall x \in [a,b]: \; f(a) \leq f(x) \leq f(b)\,,$$

la funzione f è limitata. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(b-a)(f(b)-f(a)) < n\varepsilon$. Poniamo $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$, dove $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$, $0 \leq j \leq n$. Essendo f crescente, risulta

$$\inf_{[x_{j-1},x_j]} f = f(x_{j-1})\,,$$

$$\sup_{[x_{j-1},x_j]} f = f(x_j)\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\Sigma''(S) - \Sigma'(S) &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\frac{b-a}{n} - \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\frac{b-a}{n} = \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}\big(f(x_j) - f(x_{j-1})\big) = \\
&= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Per la proposizione precedente f è integrabile. ■

Vediamo ora una seconda importante classe di funzioni integrabili.

(3.6) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass f è limitata. Inoltre f è uniformemente continua per il Teorema (8.14). Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi', \xi'' \in [a,b]: \; |\xi' - \xi''| < \delta \implies |f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $(b-a) < n\delta$ e sia $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$, dove $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$, $0 \leq j \leq n$. Per il Teorema di Weierstrass esistono $\xi_j', \xi_j'' \in [x_{j-1}, x_j]$ tali che

$$f(\xi_j') = \min_{[x_{j-1},x_j]} f\,, \qquad f(\xi_j'') = \max_{[x_{j-1},x_j]} f\,.$$

Poiché $|\xi_j'' - \xi_j'| \leq \frac{b-a}{n} < \delta$, risulta

$$f(\xi_j'') - f(\xi_j') < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\Sigma''(S) - \Sigma'(S) &= \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j'')(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j')(x_j - x_{j-1}) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(f(\xi_j'') - f(\xi_j')\right)(x_j - x_{j-1}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Per la Proposizione (3.2) f è integrabile. ■

(3.7) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\varphi \circ f$ è integrabile.*

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(3.8) Osservazione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Valgono allora i seguenti fatti. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione, $c \in]a, b[$, e le funzioni $f_{|[a,c]}$ e $f_{|[c,b]}$ sono integrabili, allora f è integrabile. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, allora f^2 è integrabile. Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili, allora fg è integrabile.*

(3.9) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *la funzione $(f + g)$ è integrabile e si ha*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,;$$

(b) *la funzione (λf) è integrabile e si ha*

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f\,;$$

(c) *se $f \leq g$, risulta*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g\,;$$

(*d*) *per ogni* $c \in]a,b[$ *le funzioni* $f_{|[a,c]}$ *e* $f_{|[c,b]}$ *sono integrabili e si ha*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,;$$

(*e*) *la funzione* $|f|$ *è integrabile e si ha*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

Dimostrazione.
(*a*) Risulta

$$\mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g) \leq \mathcal{I}'(f+g) \leq \mathcal{I}''(f+g) \leq \mathcal{I}''(f) + \mathcal{I}''(g)\,.$$

Dal momento che il primo e l'ultimo membro sono uguali, si ha $\mathcal{I}'(f+g) = \mathcal{I}''(f+g)$, ossia $f+g$ è integrabile. Inoltre risulta

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,.$$

(*b*) Evidentemente la funzione φ definita da $\varphi(y) = \lambda y$ è continua. Dal teorema precedente si deduce che $\lambda f = \varphi \circ f$ è integrabile. Se $\lambda \geq 0$, l'uguaglianza

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$$

discende dalla corrispondente proprietà di integrale inferiore e superiore. Se $\lambda < 0$, risulta

$$0 = \int_a^b (\lambda f) + \int_a^b (-\lambda f) = \int_a^b (\lambda f) - \lambda \int_a^b f\,,$$

da cui la tesi.
(*c*) Si tratta di un'ovvia conseguenza della corrispondente proprietà di integrale inferiore e superiore.
(*d*) Osserviamo anzitutto che, se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono quattro numeri reali con $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \delta$ e $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, si ha necessariamente $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$. Poiché

$$\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right) \leq \mathcal{I}''\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}''\left(f_{|[c,b]}\right) = \mathcal{I}''(f)\,,$$

risulta

$$\mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right) = \mathcal{I}''\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}''\left(f_{|[c,b]}\right)\,.$$

Ne segue che $f_{|[a,c]}$ e $f_{|[c,b]}$ sono integrabili e

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f .$$

(e) Poiché la funzione valore assoluto è continua, segue dal teorema precedente che $|f|$ è integrabile. Dalle disuguaglianze

$$\forall x \in [a,b] : -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

si deduce che

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| ,$$

da cui la tesi.■

(3.10) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Il numero reale*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

si chiama media integrale *di f.*

Per la Proposizione (2.4) si ha evidentemente

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \sup_{[a,b]} f .$$

Di conseguenza, se f è continua su $[a,b]$, esiste $\xi \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(\xi) .$$

4 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

(4.1) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ con $\alpha > \beta$ poniamo*

$$\int_\alpha^\beta f := -\int_\beta^\alpha f ,$$

$$\int_\gamma^\gamma f := 0\,.$$

(4.2) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ si ha*

$$\int_\alpha^\gamma f = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f\,.$$

Dimostrazione. Se $\alpha < \beta < \gamma$, la proprietà è già nota. Se $\alpha < \gamma < \beta$, risulta

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f\,,$$

da cui

$$\int_\alpha^\gamma f = \int_\alpha^\beta f - \int_\gamma^\beta f = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f\,.$$

Gli altri casi possono essere trattati per esercizio. ■

(4.3) Teorema (fondamentale del calcolo integrale) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e $c, x \in [a, b]$. Supponiamo che f sia continua in x. Allora la funzione $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$A(\xi) = \int_c^\xi f$$

è derivabile in x e $A'(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in]x - \delta, x + \delta[\cap [a, b] : \ |f(\xi) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Se $\xi \in]x, x + \delta[\cap [a, b]$, ne segue

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(\xi) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

quindi

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi f \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Se invece $\xi \in]x - \delta, x[\cap [a, b]$, risulta

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{x - \xi} \int_\xi^x f \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Pertanto per ogni $\xi \in]x-\delta, x+\delta[\cap[a,b]$ con $\xi \neq x$ si ha

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi f \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Poiché

$$\frac{A(\xi)-A(x)}{\xi - x} = \frac{1}{\xi - x}\left(\int_c^\xi f - \int_c^x f\right) = \frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi f\,,$$

per ogni $\xi \in]x-\delta, x+\delta[\cap[a,b]$ con $\xi \neq x$ risulta

$$\left|\frac{A(\xi)-A(x)}{\xi - x} - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi■

(4.4) Osservazione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora la funzione $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$A(x) = \int_a^x f$$

è continua. Infatti, fissato $x \in [a,b]$, osserviamo anzitutto che

$$|A(\xi) - A(x)| \leq \int_x^\xi |f|,$$

per cui la tesi equivale a provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\xi - x| < \delta \implies \int_x^\xi |f| < \varepsilon.$$

Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon_0 > 0$ ed una successione $\xi_n \subset [a,b]$ tale che

$$|\xi_n - x| < \frac{1}{n} \quad e \quad \int_x^{\xi_n} |f| \geq \varepsilon_0.$$

Tenuto conto che f è limitata, se poniamo $M = \sup_{[a,b]} f$, si ha

$$\frac{M}{n} > M|\xi_n - x| \geq \int_x^{\xi_n} |f| \geq \varepsilon_0,$$

che, per n sufficientemente grande, produce una contraddizione.

(4.5) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f, F : E \to \mathbb{R}$ due funzioni. Diciamo che F è* una primitiva *di f, se F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$.*

(4.6) Osservazione *Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale ogni funzione integrabile e continua ammette primitiva. Inoltre la continuità è una condizione necessaria, come si vede dal seguente esempio: sia* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *la funzione, discontinua in* 0*, definita ponendo*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & se\ x < 0\,, \\ 0 & se\ x = 0\,, \\ 1 & se\ x > 0\,. \end{cases}$$

Allora f *non ammette primitiva. Infatti, se per assurdo esistesse una funzione primitiva* $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$*, si avrebbe* $F'(x) = -1$ *per ogni* $x < 0$ *e* $F'(x) = 1$ *per ogni* $x > 0$*, per cui* $F(x) = -x + c$ *per ogni* $x < 0$ *e* $F(x) = x + c$ *per ogni* $x > 0$ *e* $F(0) = c$*. Allora, si ha*

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

per cui F *non è derivabile in* 0*, contro l'ipotesi che* F *sia una primitiva di* f*.*

(4.7) Teorema *Siano* I *un intervallo in* $\mathbb{R}$ *e* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora esiste una primitiva* $F : I \to \mathbb{R}$ *per* f*. Inoltre, se* $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ *sono due primitive per* f*, la funzione* $(F_1 - F_2)$ *è costante.*

Dimostrazione. Fissiamo $c \in I$. La funzione $A : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$A(x) = \int_c^x f$$

è una primitiva di f per il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Se F_1 e F_2 sono due primitive di f, la funzione $(F_1 - F_2) : I \to \mathbb{R}$ è derivabile e

$$(F_1 - F_2)'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

per ogni $x \in I$. Ne segue che $(F_1 - F_2)$ è costante. ■

(4.8) Definizione *Siano* I *un intervallo in* $\mathbb{R}$ *e* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. La scrittura simbolica*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

significa che F *è una primitiva di* f*, per cui ogni primitiva di* f *è del tipo* $F + c$*.*

(4.9) Teorema *Siano* I *un intervallo in* $\mathbb{R}$*,* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e* $F : I \to \mathbb{R}$ *una qualunque primitiva di* f*. Allora per ogni* $a, b \in I$ *si ha*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$A(x) = \int_a^x f\,.$$

Poiché A è una primitiva di f, la funzione $(A - F)$ è costante. Ne segue

$$\int_a^b f = A(b) = A(b) - A(a) = F(b) - F(a)\,,$$

da cui la tesi. ■

L'incremento $F(b) - F(a)$ viene spesso denotato con uno dei simboli

$$F\Big|_a^b\,, \qquad \big[F\big]_a^b\,, \qquad \big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}\,.$$

5 Formule di integrazione

(5.1) Teorema **(Formula di integrazione per sostituzione)** *Siano* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e* $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile con derivata continua tale che* $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$. *Sia inoltre* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una primitiva di* f. *Allora* $F \circ \varphi$ *è una primitiva della funzione*

$$\left\{x \mapsto f(\varphi(x))\varphi'(x)\right\}\,.$$

In particolare risulta

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,dy = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema sulla derivata di una composizione si ha

$$(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)\,.$$

Ne segue

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,dy = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dt\,,$$

da cui la tesi. ■

La prima parte della tesi del teorema precedente viene spesso scritta nella seguente forma un po' imprecisa:

$$\int f(y)\,dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx\,.$$

(5.2) Osservazione *Nel caso in cui la funzione f da integrare è dispari o pari ed è definita su un intervallo simmetrico $[-a, a]$, $a > 0$, allora il calcolo dell'integrale si semplifica. Sia infatti $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$\forall x \in [-a, a] : \quad f(-x) = -f(x).$$

Allora, con la formula di integrazione per sostituzione, si verifica facilmente che

$$\int_{-a}^{a} f = 0.$$

Similmente, se $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che

$$\forall x \in [-a, a] : \quad f(-x) = f(x)$$

allora si verifica facilmente che

$$\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f.$$

(5.3) Teorema (Formula di integrazione per parti) *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, siano $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ due primitive di f e g, rispettivamente, e sia $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di fG. Allora $FG - H$ è una primitiva di Fg. In particolare risulta*

$$\int_{a}^{b} F(x)g(x)\,dx = \big[F(x)G(x)\big]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f(x)G(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}(FG - H)'(x) &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - H'(x) = \\ &= f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x) = F(x)g(x)\,.\end{aligned}$$

Ne segue

$$\int_{a}^{b} F(x)g(x)\,dx = \big[F(x)G(x)\big]_{a}^{b} - \big[H(x)\big]_{a}^{b} = \big[F(x)G(x)\big]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f(x)G(x)\,dx\,,$$

da cui la tesi. ■

La prima parte della tesi del teorema precedente viene usualmente scritta nella seguente forma:

$$\int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,dx\,.$$

6 Integrali impropri

(6.1) Definizione *Siano $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$ e $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Se*

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int_a^\xi f = y\,,$$

poniamo

$$\int_a^{+\infty} f := y\,.$$

Se $y \in \mathbb{R}$, diciamo che f è integrabile in senso improprio *e che* l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f$$

è convergente. *Se $y = +\infty$ o $y = -\infty$, diciamo che l'integrale improprio è* positivamente divergente *o* negativamente divergente. *Se la funzione*

$$\left\{\xi \mapsto \int_a^\xi f\right\}$$

non ammette limite a $+\infty$, diciamo che l'integrale improprio è indeterminato.

Naturalmente, se $b \in \mathbb{R}$ e $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[c, b]$ per ogni $c < b$, si possono considerare anche integrali impropri del tipo

$$\int_{-\infty}^b f\,.$$

Le definizioni sono analoghe.

(6.2) Teorema *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

è convergente per $\alpha > 1$ e positivamente divergente per $\alpha \leq 1$.

Dimostrazione. Risulta

$$\forall \alpha \neq 1 : \int_1^\xi \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{(\alpha - 1)\xi^{\alpha - 1}}\,,$$

$$\int_1^\xi \frac{1}{x}\,dx = \log \xi\,,$$

da cui la tesi. ■

(6.3) Teorema *Siano $a \in \mathbb{R}$, $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili su $[a, c]$ per ogni $c > a$, $y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Supponiamo che si abbia*

$$\int_a^{+\infty} f = y\,, \qquad \int_a^{+\infty} g = z\,.$$

Allora:

(a) *se la somma $y + z$ è definita, si ha*

$$\int_a^{+\infty} (f + g) = y + z\,;$$

(b) *se il prodotto λy è definito, si ha*

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f) = \lambda y\,;$$

(c) *se $f \leq g$, si ha*

$$\int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g\,.$$

Dimostrazione. Basta passare al limite per $\xi \to +\infty$ nelle relazioni

$$\int_a^{\xi} (f + g) = \int_a^{\xi} f + \int_a^{\xi} g\,,$$

$$\int_a^{\xi} (\lambda f) = \lambda \int_a^{\xi} f\,,$$

$$\int_a^{\xi} f \leq \int_a^{\xi} g$$

ed applicare i teoremi sui limiti di somma e prodotto. ■

(6.4) Teorema *Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$. Allora l'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} f$$

può essere solo convergente o positivamente divergente.

Dimostrazione. Basta osservare che la funzione

$$\left\{\xi \mapsto \int_a^\xi f\right\}$$

è crescente. ■

Come per le serie numeriche, anche per gli integrali impropri esiste un criterio del confronto per stabilirne il carattere.

(6.5) Teorema (del confronto) *Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $f, g : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ due funzioni integrabili su $[a, c]$ per ogni $c > a$ con $g(x) > 0$ per ogni $x \geq a$. Supponiamo che l'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} g$$

sia convergente e che

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty\,.$$

Allora anche l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f$ è convergente.

Dimostrazione. Sia $M \in \mathbb{R}$ un maggiorante definitivo per $\frac{f(x)}{g(x)}$ a $+\infty$ e sia $c > a$ tale che $\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$ per ogni $x \geq c$. Allora per ogni $\xi \geq c$ risulta

$$\int_a^\xi f = \int_a^c f + \int_c^\xi f \leq \int_a^c f + M\int_c^\xi g \leq \int_a^c f + M\int_a^\xi g\,.$$

Passando al limite per $\xi \to +\infty$, si ottiene la tesi. ■

(6.6) Definizione *Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$. Diciamo che l'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} f$$

è assolutamente convergente*, se l'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} |f|$$

è convergente.

(6.7) Teorema *Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$. Supponiamo che l'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} f$$

sia assolutamente convergente. Allora

$$\int_a^{+\infty} f$$

è convergente.

Dimostrazione. La funzione $|f| + f$ è evidentemente positiva. Poiché

$$\forall x \geq a : \ |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)| \,,$$

risulta

$$\int_a^{+\infty} (|f| + f) \leq 2 \int_a^{+\infty} |f| < +\infty \,.$$

Dal momento che $f = (|f| + f) - |f|$, la tesi discende dal Teorema (6.3). ■

Il seguente criterio di convergenza per le serie numeriche a termini positivi è detto anche criterio dell'integrale.

(6.8) Teorema *Sia $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione decrescente e sia $x_n = f(n)$. Allora la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

è convergente se e solo se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f$$

è convergente.

Dimostrazione. Essendo decrescente, f è integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > 0$. Inoltre risulta

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f \leq x_n \,.$$

Ne segue

$$\sum_{h=0}^{n} x_h \leq x_0 + \int_0^n f \,, \qquad \int_0^{n+1} f \leq \sum_{h=0}^{n} x_h \,,$$

da cui la tesi. ■

(6.9) Esempio *Per il criterio precedente la serie a termini positivi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$$

è convergente se $\lambda > 1$ *mentre è positivamente divergente se* $\lambda \leq 1$. *Infatti,*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda} dx < +\infty$$

se e soltanto se $\lambda > 1$, *per il Teorema* (6.2).

(6.10) Definizione *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, *sia* $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile su* $[c, b]$ *per ogni* $c \in]a, b[$ *e sia* $y \in \overline{\mathbb{R}}$. *Se*

$$\lim_{\xi \to a} \int_\xi^b f = y \,,$$

poniamo

$$\int_a^b f := y \,.$$

Se $y \in \mathbb{R}$, *diciamo che* f *è* integrabile in senso improprio *e che* l'integrale improprio

$$\int_a^b f$$

è convergente. *Se* $y = +\infty$ *o* $y = -\infty$, *diciamo che l'integrale improprio è* positivamente divergente *o* negativamente divergente. *Se la funzione*

$$\left\{ \xi \mapsto \int_\xi^b f \right\}$$

non ammette limite in a, diciamo che l'integrale improprio è indeterminato.

Nel caso in cui $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a, c]$ per ogni $c \in]a, b[$ le definizioni sono analoghe.

(6.11) Teorema *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Allora l'integrale improprio*

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$$

è convergente per $\alpha < 1$ *e positivamente divergente per* $\alpha \geq 1$.

Dimostrazione. Risulta

$$\forall\alpha \neq 1 : \int_\xi^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\, dx = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(\xi-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,,$$

$$\int_\xi^b \frac{1}{x-a}\, dx = \log(b-a) - \log(\xi-a)\,,$$

da cui la tesi. ■

Per integrali impropri della forma

$$\int_a^b f$$

con $f\, :]a,b] \to \mathbb{R}$ o $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ valgono risultati analoghi al caso

$$\int_a^{+\infty} f\,.$$

(6.12) Osservazione *L'integrale improprio*

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

è convergente, ma non è assolutamente convergente.

7 Esercizi

(7.1) Esercizio *Risolvere i seguenti integrali:*

1. $\int (\sin x)^5 \cos x dx$
2. $\int e^{\sin x} \cos x dx$
3. $\int x\sqrt{9-x^2}dx$
4. $\int \frac{x^2+2x}{1+(x^3+3x^2+1)^2}dx$
5. $\int \frac{\sqrt{3+\tan x}}{(cosx)^2}dx$
6. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+9}dx$
7. $\int \frac{\log(x)}{x}dx$
8. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$
9. $\int \frac{\sin(2x)}{1+(\sin x)^2}dx$
10. $\int x(x^2+7)^5 dx$

(7.2) Esercizio *Risolvere i seguenti integrali facendo opportune manipolazioni algebriche:*

1. $\int \frac{x}{1+x}dx$
2. $\int (\tan x)dx$
3. $\int (\cot x)dx$
4. $\int \frac{1}{(\sin x)^2(\cos x)^2}dx$

5. $\int (\cos x)^2 dx$

6. $\int (\sin x)^2 dx$

7. $\int (1/\sin x) dx$

8. $\int (1/\cos x) dx$

9. $\int \frac{1 + (\log x)^3}{x} dx$

10. $\int \frac{e^{\tan x} - 1}{(\cos x)^2} dx$

(7.3) Esercizio *Risolvere i seguenti integrali utilizzado il metodo di sostituzione:*

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{1 - (\log x)^2}} dx;$

2. $\int \sqrt{a^2 - x^2}$

3. $\int (\tan x)^4 dx$

4. $\int \frac{(\log x)^3 - 3}{3x((\log x)^2 - 1} dx$

5. $\int \frac{x^3}{x^8 + 1} dx$

6. $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}} dx$

8. $\int \sqrt{e^x - 1} dx$

9. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

10. $\int \frac{1}{x} \sin(\log x) dx$

(7.4) Esercizio *Risolvere i seguenti integrali utilizzando l'integrazione per parti:*

1. $\int (\log x) dx$
2. $\int x(\sin x) dx$
3. $\int x^2 e^x dx$
4. $\int e^x (\sin x) dx$
5. $\int x(\arctan x) dx$
6. $\int x^3 (\log x) dx$
7. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
8. $\int \frac{x}{(\cos(2x))^2} dx$
9. $\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$
10. $\int x^2 \arcsin x \, dx$

(7.5) Esercizio *Risolvere i seguenti integrali di funzioni razionali fratte:*

1. $\int \frac{3x+5}{x^2+x+2} dx$
2. $\int \frac{x-7}{x^2+3x+5} dx$
3. $\int \frac{2x-3}{x^2-x-2} dx$
4. $\int \frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3} dx$
5. $\int \frac{3x-1}{x^3-5x^2+8x-4} dx$

6. $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 3}{x^3(x-1)} dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x(1+x^2)} dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x^5 + 3x^3 + 3}{(1+x^2)^2} dx$

(7.6) Esercizio *Decomporre in frazioni semplici le seguenti funzioni razionali fratte, e integrarle:*

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2(x-1)^4}$$
$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^3 x^5}$$
$$h(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^3}$$

(7.7) Esercizio *Risolvere i seguenti integrali:*

1. $\displaystyle\int \sin(\log x) dx$

2. $\displaystyle\int x \arctan(x^2) dx$

3. $\displaystyle\int x(\arctan x)^2 dx$

4. $\displaystyle\int (\cos x)^3 dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

6. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

9. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1+(\sin x)^2}dx$

10. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+8e^x+5}{e^x+7}dx$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

12. $\displaystyle\int \frac{2-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{4^{x/3}+1}dx$

16. $\displaystyle\int \frac{(\cos x)^3}{\sqrt{\sin x}}dx$

17. $\displaystyle\int \frac{2\log x+1}{x((\log x)^2+\log x+1)}dx$

18. $\displaystyle\int e^x(x^2+x-1)dx$

19. $\displaystyle\int e^x(\arcsin(e^x))dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+1}{x(x+1)^3}dx$

(7.8) Esercizio *Risolvere i seguenti integrali definiti:*

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

3. $\int_0^1 \frac{1}{2-x} dx$

4. $\int_0^1 \frac{x^2-4}{x^2+5x+4} dx$

5. $\int_0^3 |x-2| dx$

6. $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx$

7. $\int_1^2 x\sqrt{x^2-1} dx$

8. $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1} dx$

9. $\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$

10. $\int_{-2}^1 \frac{3+x}{\sqrt{1+|x|}} dx$

(7.9) Esercizio *Trovare l'area della regione di piano limitata dalle due parabole di equazioni:*

$$y = x^2 - 3x + 2, \qquad y = -x^2 + x + 2.$$

(7.10) Esercizio *Trovare l'area della regione di piano compresa tra la parabola:* $y^2 = 4x$*, la retta:* $2x + y - 4 = 0$*, e l'asse delle* x*.*

(7.11) Esercizio *Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:*

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$

2. $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$

3. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a} dx$

4. $\int_0^{1/2} \frac{1}{x(\log x)^a} dx$

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x}dx$

6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan(1/x)}{\sqrt{1+x^4}}dx$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x+1)^2x^{5/2}}dx$

9. $\displaystyle\int_0^{3} \frac{\log x}{x\sqrt{x}}dx$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}dx$

(7.12) Esercizio *Dopo aver verificato la convegenza dei seguenti integrali determinarne il valore:*

1. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-x^2}dx$

3. $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{x(\log x)^2}dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x}}dx$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-x}{e^x}dx$

7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}dx$

8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{|x|}}{x^2-2x}dx$

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$

(7.13) Esercizio *Trovare l'area della regione limitata dall'ellisse di equazione:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(7.14) Esercizio *Discutere al variare di a la convergenza del seguente integrale:*

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

(7.15) Esercizio *Discutere al variare di a la convergenza del seguente integrale:*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^a - (x-1)^a} dx.$$

(7.16) Esercizio *Discutere al variare di a la convergenza del seguente integrale:*

$$\int_1^{+\infty} (\pi/2 - \arctan x)^a dx.$$

(7.17) Esercizio *Discutere al variare di a la convergenza del seguente integrale:*

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(\log(1+x))^a - \log(1+x^a)} dx.$$

(7.18) Esercizio *Discutere al variare di a la convergenza del seguente integrale in senso proprio o improprio:*

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x^2 - a} dx.$$

Altri riferimenti bibliografici

1. E. ACERBI, G. BUTTAZZO, Primo corso di Analisi matematica, Pitagora Editrice, Bologna 1997.

2. J.P. CECCONI, G. STAMPACCHIA, Analisi matematica I: Funzioni di una variabile, Liguori, Napoli 1974.

3. C. CITRINI, Analisi matematica I, Boringhieri, Torino 1991.

4. M. CONTI, D.L. FERRARIO, S. TERRACINI, G. VERZINI, Analisi matematica. Dal calcolo all'analsi Vol. 1, Apogeo 2006.

5. G. GILARDI, Analisi Uno, McGraw-Hill Italia, Milano 1992.

6. E. GIUSTI, Analisi matematica I, Boringhieri, Torino 1984.

7. C.D. PAGANI, S. SALSA, Analisi matematica volume 1, Masson, Milano 1990.

8. G. PRODI, Analisi matematica, Boringhieri, Torino 1970.