Università di Verona
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica Applicata

Esercitazioni del corso di Analisi Matematica 2

Antonio Marigonda

Anno Accademico 2009-2010

Indice

Introduzione

Queste note offrono un supporto per *alcune parti* del programma delle Esercitazioni del corso di Analisi Matematica 2 (Corso di Laurea Triennale in Matematica Applicata). **In particolare esse non sono intese per sostituire il libro di testo** [1] **adottato per tale corso o le lezioni di teoria.** Nelle appendici sono contenuti alcuni utili suggerimenti per affrontare le prove di Analisi Matematica 2 per il Corso di Laurea in Matematica Applicata dell'Università di Verona. Non intendono sostituire né lo studio sui testi, né la frequenza a lezioni ed esercitazioni. Non si può neppure pensare ad esse come ad un formulario buono per affrontare con successo *qualsiasi* esercizio possa capitare allo scritto: il fattore umano rimane fondamentale, e ciò significa, in ogni momento, capire e rendersi conto di quello che si sta facendo e del motivo per cui lo si fa. Si prega di segnalarmi per e-mail eventuali errori o inesattezze.

In occasione dell'orale, è richiesta la conoscenza di tutte le definizioni e di tutti gli enunciati delle parti non espressamente indicate come facoltative. Sarà inoltre richiesta la conoscenza *completa* delle seguenti dimostrazioni:

- Lemma delle contrazioni (Diario del Corso prof. Orlandi 14/10/2009, VII.36 p. 345 del libro di testo)
- Massimi e minimi liberi di funzioni regolari di più variabili. (Diario del corso prof. Orlandi 26/10/09, testo pp. 296,297,298)
- Teorema di Dini (Diario del Corso prof. Orlandi 6/11/2009, VII.63 p. 366 del libro di testo e relativo es. 38 p. 386)
- Teorema della divergenza (X.45 p. 547 del libro di testo)
- Teorema di Esistenza e Unicità di Cauchy-Lipschitz (Diario del Corso prof. Baldo 2/12/2009, VIII.9 p. 394 e VIII.10 p.395 del testo, le dimostrazioni si trovano a p. 399 e p. 402)
- Convergenza uniforme della serie di Fourier per funzioni regolari. (Diario del corso prof. Baldo 15/1/2010 p.45, II.48 p.72 del testo)

Antonio Marigonda

Ultimo aggiornamento del 26 gennaio 2010.

CAPITOLO 1

Lezione del giorno giovedì 1 ottobre 2009 (1 ora)
Richiami sulla topologia di $\mathbb{R}$

Cominciamo questa sezione richiamando alcune nozioni di topologia della retta reale viste all'interno del precedente corso di Analisi. I nostri riferimenti sono [3, Cap. 6,10,12] e [4, Sezione II.4].

Definizione 1.1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definiamo i seguenti insiemi:
(1) l'*intervallo aperto* $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;
(2) l'*intervallo chiuso* $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
(3) l'*intervallo* $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;
(4) l'*intervallo* $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;
(5) l'*intervallo degenere chiuso* $[a, a] := \{a\}$;
(6) l'*intervallo degenere aperto* $]a, a[:= \emptyset$;
(7) la *semiretta aperta illimitata superiormente* $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;
(8) la *semiretta aperta illimitata inferiormente* $]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$;
(9) la *semiretta chiusa illimitata superiormente* $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$;
(10) la *semiretta chiusa illimitata inferiormente* $]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$;
(11) la *retta* $]-\infty, +\infty[:= \mathbb{R}$;

Chiameremo *intervalli aperti*[1] di $\mathbb{R}$ gli insiemi del tipo $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ e i due insiemi $\emptyset$ e $\mathbb{R}$.

Definizione 1.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Diremo che tale sottoinsieme è *aperto* se si può scrivere come unione finita o infinita di intervalli aperti. Un sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{R}$ si dice *chiuso* se il suo complementare $\mathbb{R} \setminus B$ è aperto. L'insieme

$$\tau := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ è aperto di } \mathbb{R}\}$$

prende il nome di *topologia usuale* di $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.3. Si provino i seguenti asserti basandosi sulle definizioni date:
(1) A è aperto se e solo se A concide con l'unione degli intervalli aperti contenuti in A;
(2) A è aperto se e solo se il suo complementare è chiuso;
(3) ogni intervallo chiuso è un chiuso di $\mathbb{R}$;
(4) $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono sia chiusi che aperti;
(5) $\mathbb{Q}$ non è né chiuso né aperto in $\mathbb{R}$;
(6) $\mathbb{Z}$ è chiuso in $\mathbb{R}$.

Definizione 1.4. Sia $r \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ e definiamo i seguenti insiemi:
(1) la *palla aperta di raggio r centrata in a*:

$$B(a, r[:= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} =]a - r, a + r[;$$

(2) la *palla chiusa di raggio r centrata in a*:

$$B(a, r] := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r].$$

A volte la palla aperta è indicata con $B(a, r)$

Definizione 1.5. Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato* se esiste $R > 0$ tale che $E \subseteq B(0, R]$.

Teorema 1.6. *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è aperto se e solo se per ogni $a \in A$ esiste $\delta_a > 0$ tale che $B(a, \delta_a[\subseteq A$*

DIMOSTRAZIONE. Esercizio facile. □

Diamo ora un quadro delle proprietà dei sottoinsiemi aperti:

[1] Si noti che talvolta gli intervalli aperti in letteratura vengono indicati con (a, b), oppure con $(a, +\infty)$. Il contesto è fondamentale per capire se con la scrittura (a, b) si intenda l'intervallo reale $]a, b[$ oppure il punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 1.7. *Gli aperti di $\mathbb{R}$ soddisfano le seguenti proprietà:*

(1) *$\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono aperti;*
(2) *unioni arbitrarie di aperti sono aperte: se $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia finita o infinita di aperti di $\mathbb{R}$, allora $A := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ è aperto di $\mathbb{R}$;*
(3) *intersezioni finite di aperti sono aperte: se $A_1, ..., A_m$ è una famiglia finita di aperti di $\mathbb{R}$, allora $A = A_1 \cap ... \cap A_m$ è aperto.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Passando ai complementari si ottengono le proprietà dei sottoinsiemi chiusi:

Teorema 1.8. *I chiusi di $\mathbb{R}$ soddisfano le seguenti proprietà:*

(1) *$\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono chiusi;*
(2) *intersezioni arbitrarie di chiusi sono chiuse: se $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia finita o infinita di chiusi di $\mathbb{R}$, allora $C := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ è chiuso di $\mathbb{R}$;*
(3) *unioni finite di chiusi sono chiuse: se $C_1, ..., C_m$ è una famiglia finita di chiusi di $\mathbb{R}$, allora $C = C_1 \cup ... \cup C_m$ è chiuso.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Esercizio 1.9. Si provino i seguenti asserti:

(1) ogni sottoinsieme finito è chiuso;
(2) in generale, intersezioni di una famiglia infinita di aperti non sono aperte (sugg. si consideri $\{A_n = B(0, 1/n[\}_{n\in\mathbb{N}})$;
(3) in generale, unioni di una famiglia infinita di chiusi non sono chiuse (sugg. si consideri $\{A_n = B(0, 1 - 1/n]\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Definizione 1.10. Sia $x \in \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che V è *intorno* di x se esiste A aperto di $\mathbb{R}$ tale che $x \in A$ e $A \subseteq V$. Ricordando le proprietà degli aperti, si ha che ogni intorno di x contiene x, se V è intorno di x e $V \subseteq U$ allora U è intorno di x, ogni intersezione di una famiglia finita di intorni di x è intorno di x. A volte l'insieme di tutti gli intorni di x viene chiamato *filtro degli intorni* di x. La nozione di intorno formalizza la nozione di "vicinanza": diremo che una proprietà è vera abbastanza vicino ad x se è vera in un intorno di x.

Definizione 1.11. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo la *chiusura* di E come l'intersezione di tutti i chiusi di $\mathbb{R}$ contenenti E. Tale famiglia di chiusi non è vuota perché $\mathbb{R}$ è chiuso e contiene E. Essendo un'intersezione di chiusi, la chiusura di E è un chiuso ed è il più piccolo chiuso di $\mathbb{R}$ contenente E:

$$\bar{E} := \bigcap\{C \subseteq \mathbb{R} : C \supseteq E,\, C \text{ chiuso}\}.$$

Un'altra scrittura usata per $\bar{E}$ è $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(E)$.

Proposizione 1.12. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si ha che $x \in \mathbb{R}$ appartiene a $\bar{E}$ se e solo se per ogni intorno U di x in $\mathbb{R}$ si ha $U \cap E \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Si provi che $x \notin \bar{E}$ se e solo se esiste un intorno di x in $\mathbb{R}$ disgiunto da E. □

Definizione 1.13. Siano F, G sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Diremo che F è *denso* in G se $\bar{F} \subseteq G$. In particolare se F è denso in G, ogni intorno di ogni punto di G contiene punti di F.

CAPITOLO 2

Lezione del giorno venerdì 2 ottobre 2009 (2 ore) Alcune nozioni di topologia di $\mathbb{R}^n$

Definizione 2.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $p \in \mathbb{R}$ si dice *di accumulazione* per E in $\mathbb{R}$ se in ogni intorno di p in $\mathbb{R}$ cadono punti di E distinti da p. Se $q \in E$ non è di accumulazione per E si dice *punto isolato* di E. Un sottoinsieme i cui punti siano tutti isolati si dice *discreto.*

Esercizio 2.2. Si provino i seguenti asserti:

(1) La chiusura di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è formata dai punti di E e dai punti di accumulazione di E.
(2) Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.
(3) Un insieme privo di punti di accumulazione è chiuso.

Teorema 2.3. *Sia E sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti:*

(1) *c è di accumulazione per E;*
(2) *esiste una successione $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di punti di E diversi da c che converge a c;*
(3) *in ogni intorno di c cadono infiniti punti di E.*

Proposizione 2.4. *Sia $c \in R$, $E \subseteq \mathbb{R}$. Allora $c \in \bar{E}$ se e solo se esiste una successione $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di punti di E che converge a c. Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}$ è chiuso se e solo se per ogni successione $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a $c \in \mathbb{R}$ si ha $c \in E$.*

Definizione 2.5. Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}$ si dice *sequenzialmente compatto* o *compatto per successioni* se ogni successione $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in K possiede una sottosuccessione $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $x \in K$.

Teorema 2.6. *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Definizione 2.7. Sia E sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Definiamo l'*interno* di E nel modo seguente:

$$\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(E) := \{x \in \mathbb{R} : \, E \text{ è intorno di } x\}.$$

Esso è il più grande (nel senso dell'inclusione) aperto contenuto in E, ovvero l'unione di tutti gli aperti contenuti in E.

Definizione 2.8. Sia E sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Diremo che $p \in \mathbb{R}$ è *di frontiera* per E se p non è interno né ad E, né al suo complementare. Equivalentemente, ogni intorno di p contiene punti di E e di $\mathbb{R} \setminus E$, ovvero p appartiene alla chiusura di E e alla chiusura del complementare. L'insieme dei punti di frontiera di E viene indicato con $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}}(E)$, ∂E o $\mathrm{bdry}(E)$.

Definizione 2.9. Sia D sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $c \in D$. Diremo che f è continua in c se e solo se per ogni intorno V di $f(c)$ esiste un intorno U di c tale che $f(U \cap D) \subset V$.

Osservazione 2.10. Si noti come molte delle definizioni e delle proprietà date *non siano legate in modo particolare* a $\mathbb{R}$, quanto piuttosto alla possibilità di operare alcune operazioni insiemistiche nelle classi degli insiemi aperti e chiusi. A tal proposito, individuate le proprietà opportune, sarà possibile adattare le definizioni date di aperto, chiuso eccetera ai sottoinsiemi di un *qualunque* insieme, non necessariamente dei numeri reali.

Definizione 2.11. Siano X un insieme, τ una collezione di sottinsiemi di X. Diremo che τ è una *topologia* su X se:

(1) $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;
(2) se $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia finita o infinita di elementi di τ, allora $A := \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$;
(3) se $A_1, ..., A_m$ è una famiglia finita di elementi di τ, allora $A := A_1 \cap ... \cap A_m \in \tau$.

Chiameremo *aperti* gli elementi di τ, e la coppia (X, τ) sarà detta *spazio topologico.* Per esercizio, si adattino a questo contesto le definizioni già date di chiuso, chiusura, intorno, frontiera, ecc... Si tenga presente che altre nozioni, come quelle di palla aperta o chiusa, non sono disponibili perché in uno spazio topologico generale non si ha una nozione di *modulo* o di *distanza* tra punti. Similmente, non può essere data una nozione di insieme limitato in un contesto così generale.

Definizione 2.12. Siano (X,τ_1) e (X,τ_2) due spazi topologici sopra lo stesso insieme X. Diremo che τ_1 è *più fine* di τ_2 se $\tau_1 \supseteq \tau_2$, diremo che è *strettamente* più fine se tale inclusione è stretta. Le due topologie si dicono *equivalenti* se $\tau_1 = \tau_2$. Si osservi che un intersezione finita di topologie è una topologia.

ESEMPIO 2.13. Sia X un insieme. Poniamo $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ *topologia banale* e $\tau_2 = \{A : A \subseteq X\}$ *topologia discreta*. Tali insiemi sono topologie su X e sono rispettivamente la meno fine e la più fine topologia che si possa mettere su X.

OSSERVAZIONE 2.14. Una descrizione completa di tutti gli aperti di un generico spazio topologico è spesso impossibile. A tal proposito si individua una particolare classi di aperti in grado di *ricostruire* l'intera topologia. Nel caso di $\mathbb{R}$, questa classe era data dagli intervalli aperti, o dalle palle centrate nei punti.

Definizione 2.15. Sia (X,τ) uno spazio topologico. Diremo che $\mathcal{B} \subseteq \tau$ è una *base* per la topologia τ se ogni aperto di τ può essere scritto come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Ci si può porre anche il problema inverso: data una collezione $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X, quali proprietà deve avere affinché esista una topologia τ su X tale che $\mathcal{B}$ ne sia una base?

Proposizione 2.16. *Sia X insieme e sia data una collezione $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X. Allora $\mathcal{B}$ è base per una topologia su X se e solo se dati $A, B \in B$ e $x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C$ e $C \subseteq A \cap B$. Gli aperti di tale topologia sono X, $\emptyset$ e le unioni arbitrarie di elementi di $\mathcal{B}$.*

Definizione 2.17. Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ è continua in $a \in X$ se e solo se per ogni intorno V di $f(a)$ si ha che la controimmagine $f^{-1}(V) := \{x \in X : f(x) \in V\}$ è intorno di a in X. Se f è continua in ogni punto, diremo che è continua in X. Si ha che f è continua in X se e solo se la controimmagine di ogni aperto è aperta, o equivalentemente se la controimmagine di ogni chiuso è chiusa.

OSSERVAZIONE 2.18. Non è detto invece che se U è aperto e $f : X \to Y$ è continua si abbia $f(U)$ aperto!

Ci poniamo ora il problema di porre una topologia su $X = \mathbb{R}^n$ che in qualche modo abbia le proprietà della topologia usuale di $\mathbb{R}$ e possa essere descritta allo stesso modo. La costruzione che presenteremo è valida per spazi più generali di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 2.19. *Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$. La* distanza euclidea *di $x = (x_1, ..., x_n)$ da $y = (y_1, ..., y_n)$ è data da:*

$$d(x,y) := \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Si ha $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,y) \geq 0$ e se $d(x,y) = 0$ allora $x = y$, inoltre se $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ si ha $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Definiamo per ogni $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$:

(1) *la* palla aperta di raggio r centrata in a *$B(a,r[:= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$;*
(2) *la* palla chiusa di raggio r centrata in a *$B(a,r] := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq r\}$.*

Si prova che l'insieme delle palle aperte è base per una topologia su $\mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $B(x_1,r_1)$ e $B(x_2,r_2)$ due palle aperte. Sia $x \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$ e proviamo che esiste $\delta_x > 0$ tale che $B(x,\delta_x) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$. Dato $z \in B(x,\delta_x)$ si ha $d(z,x_1) \leq d(z,x) + d(x,x_1) = \delta_x + d(x,x_1)$ e $d(z,x_2) \leq d(z,x) + d(x,x_2) = \delta_x + d(x,x_2)$. Affinché si abbia $z \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$ si deve avere $d(z,x_1) < r_1$ e $d(z,x_2) < r_2$, e quindi è sufficiente scegliere $\delta_x < \min\{r_1 - d(x,x_1), r_2 - d(x,x_2)\}$. Si noti che $r_1 > d(x,x_1)$ e $r_2 > d(x,x_2)$, quindi $\delta_x > 0$. $\square$

Definizione 2.20. Diremo che la successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\mathbb{R}^n$ *converge a* $x \in \mathbb{R}^n$ se si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Con queste nozioni di palle e convergenza di successioni si vede che gli asserti enunciati per $\mathbb{R}$ rimangono validi anche in $\mathbb{R}^n$, inoltre è possibile dire quando un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è sequenzialmente compatto:

Teorema 2.21 (Heine-Borel). *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato (per la distanza euclidea).*

In $\mathbb{R}^n$ è possibile definire un'altra distanza:

Definizione 2.22. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$. La *distanza* ℓ^∞ di $x = (x_1, ..., x_n)$ da $y = (y_1, ..., y_n)$ è data da:

$$d_{\ell^\infty}(x, y) := \|x - y\|_{\ell^\infty} = \max\{|x_i - y_i|\}.$$

Valgono ancora $d_{\ell^\infty}(x, y) = d_{\ell^\infty}(y, x)$, $d_{\ell^\infty}(x, y) \geq 0$ e se $d_{\ell^\infty}(x, y) = 0$ allora $x = y$, inoltre se $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ si ha $d_{\ell^\infty}(x, y) \leq d_{\ell^\infty}(x, z) + d_{\ell^\infty}(z, y)$. Definiamo per ogni $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$:

(1) la *palla* ℓ^∞*-aperta di raggio* r *centrata in* a:

$$B_{\ell^\infty}(a, r[:= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_{\ell^\infty} < r\} =]x_1 - r, x_1 + r[\times \cdots \times]x_n - r, x_n + r[;$$

(2) la *palla* ℓ^∞*-chiusa di raggio* r *centrata in* a:

$$B_{\ell^\infty}(a, r] := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_{\ell^\infty} \leq r\} = [x_1 - r, x_1 + r] \times \cdots \times [x_n - r, x_n + r].$$

Se disegnamo le palle di questa topologia, ci accorgiamo che hanno l'aspetto di *ipercubi* (quadrati se $n = 2$, cubi se $n = 3$) di spigolo $2r$ centrati in x. Esattamente come prima, si prova che l'insieme delle palle ℓ^∞-aperte è base per una topologia su $\mathbb{R}^n$.

Ci si può chiedere quale sia il legame tra la topologia indotta dalla distanza euclidea e quella indotta dalla distanza ℓ^∞:

Teorema 2.23. *La distanza euclidea e quella* ℓ^∞ *su* $\mathbb{R}^n$ *sono topogicamente equivalenti, ovvero inducono topologie equivalenti su* $\mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Ciascuna palla aperta contiene un cubo aperto ed è contenuta in un altro cubo aperto. Pertanto dato un aperto euclideo A e un suo punto x, per definizione esiste una palla euclidea aperta centrata in x e contenuta in A, ma tale palla contiene un cubo aperto centrato in x che, pertanto, risulta essere contenuto in A. Pertanto dato un punto $x \in A$, esiste un cubo aperto centrato in x contenuto in A, quindi A è intorno nella topologia indotta da ℓ^∞. Il viceversa è analogo. In verità si può provare che gli elementi di un'ampia classe di distanze possibili su $\mathbb{R}^n$ inducono la stessa topologia (tutte le distanze provenienti da una *norma*). □

Una conseguenza di tale fatto, in realtà equivalente ad esso, è la seguente:

Proposizione 2.24. *Siano* $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *successione di* $\mathbb{R}^n$ *e* $x = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$. *Allora si ha*

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_k - x\|_{\ell^\infty} = 0 \text{ se e solo se } \lim_{k \to +\infty} \|x_k - x\| = 0$$

e ciò è equivalente a dire che per ogni $j = 1, ..., n$ *si ha* $\lim_{k \to +\infty} x_k^{(j)} = x^{(j)}$. *Pertanto una successione in* $\mathbb{R}^n$ *converge se e solo se ciascuna delle componenti degli elementi di essa converge come successione in* $\mathbb{R}$.

CAPITOLO 3

Lezione del giorno martedì 6 ottobre 2009 (1 ora) Limiti delle funzioni in più variabili

Definizione 3.1. Se (X, τ) è spazio topologico e $D \subseteq X$ è un sottinsieme di X, esso riceve una naturale struttura di spazio topologico nel modo seguente: posto $\tau_| D = \{A \cap D : A \in \tau\}$, la coppia $(D, \tau_{|D})$ è spazio topologico. Si dirà che $\tau_{|D}$ è la topologia *indotta* da X su D. Gli aperti di $\tau_{|D}$ sono intersezioni di aperti di X con D, e se $\mathcal{B}$ è base per la topologia di X, l'insieme $\mathcal{B}_{|D} = \{B \cap D : B \in \mathcal{B}\}$ è base per la topologia indotta.

Definizione 3.2. Lo spazio topologico (X, τ) è detto:

(1) T_0 se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un intorno di x non contenente y oppure un intorno di y non contenente x (la topologia distingue i punti);
(2) T_1 se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esistono due aperti U e V tali che $x \in U$ e $y \notin U$ e $y \in V$ e $x \notin V$ (i punti sono chiusi);
(3) T_2 o *di Hausdorff* o *separato* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esistono U e V aperti disgiunti con $x \in U$ e $y \in V$ (punti distinti possiedono intorni disgiunti).

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ con la topologia usuale è di Hausdorff.

Esempio 3.3. Si provi che $\mathbb{R}$ dotato della topologia per cui gli aperti sono $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x > d\}$ al variare di $d \in \mathbb{R}$ è uno spazio T_0 ma non T_1.
Si provi che $\mathbb{R}$ dotato della topologia per cui i chiusi sono $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e tutti i sottinsiemi finiti di $\mathbb{R}$ è uno spazio T_1 ma non T_2.

Definizione 3.4. Diremo che V è *intorno aperto di* ∞ in $\mathbb{R}^n$ se $\mathbb{R}^n \setminus V$ è compatto.

Definizione 3.5. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ di accumulazione per D. Consideriamo una funzione $f : D \to \mathbb{R}^m$ e $\ell \in \mathbb{R}^m \cup \infty$. Diremo che il *limite per x che tende a x_0 di f è ℓ* se per ogni intorno V di ℓ si ha che la controimmagine $f^{-1}(V) := \{x \in D : f(x) \in V\}$ è intorno di x_0 in D dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^n$. Scriveremo in tal caso

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = \ell.$$

Passando ad una base di intorni, e suppondendo che $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\ell \in \mathbb{R}^m$, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|x - x_0\| < \delta$ e $x \in D$, si ha $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Scriveremo in tal caso

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = \ell$$

intendendo

$$\lim_{\substack{\|x - x_0\| \to 0^+ \\ x \in D}} \|f(x) - \ell\| = 0.$$

Ricordando l'equivalenza delle topologie indotte da d_{ℓ^∞} e da d, si ha che se $\ell = (\ell_1, ..., \ell_m)$ e $f = (f_1, ..., f_m)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = \ell \text{ se e solo se } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f_j(x) = \ell_j \qquad \forall j = 1...m$$

Se $x_0 = \infty$, $\ell \in \mathbb{R}^m$, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che se $\|x\| > M$ e $x \in D$ allora $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Scriveremo in tal caso

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in D}} f(x) = \ell$$

intendendo

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in D}} \|f(x) - \ell\| = 0.$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\ell = \infty$, si ha che per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|x - x_0\| < \delta$ e $x \in D$ allora $\|f(x)\| > M$. Scriveremo in tal caso

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = \infty$$

intendendo

$$\lim_{\substack{\|x - x_0\| \to 0^+ \\ x \in D}} \|f(x)\| = +\infty.$$

Se $x_0 = \infty$, $\ell = \infty$, si ha che per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ tale che se $\|x\| > N$ e $x \in D$ allora $\|f(x)\| > M$. Scriveremo in tal caso

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in D}} f(x) = \infty$$

intendendo

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in D}} \|f(x)\| = +\infty.$$

Poiché nella topologia usuale di $\mathbb{R}^n$ si ha che punti *distinti* possiedono intorni *disgiunti*, se il limite esiste esso è *unico*.

Osservazione 3.6. Il precedente riconduce il calcolo del limite per $x \to x_0$ di una funzione $f : D \to \mathbb{R}^m$ al calcolo dei limiti delle sue m componenti, ovvero dei limiti delle funzioni $f_j : D \to \mathbb{R}$. Pertanto è possibile restringersi allo studio dei limiti delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ossia al caso $m = 1$.

Osservazione 3.7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y),$$

equivale, come si è visto, a calcolare

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y).$$

Si potrebbe essere tentati di calcolare il limite nel modo seguente:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right)$$

ovvero *prima* calcolare il limite nella variabile y trattando x come una costante, ottenendo quindi una funzione della sola x, e poi calcolare il limite in x. Simmetricamente si potrebbe anche calcolare

$$\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right)$$

ovvero *prima* calcolare il limite nella variabile x trattando y come una costante, ottenendo quindi una funzione della sola y, e poi calcolare il limite in y. Sfortunatamente in generale si ha

$$\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right) \neq \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right)$$

Esempio 3.8. Sia $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$ definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \left(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} 0 = 0.$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} 1 = 1.$$

Osservazione 3.9. Generalizzando le idee precedenti, supponiamo di avere $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Si potrebbe considerare una *qualunque* funzione continua $\gamma : [a, b] \to D$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tale che uno tra $\gamma(a)$ o $\gamma(b)$ sia uguale a x_0 Si osservi che $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$. A questo punto:

(1) se $\gamma(b) = x_0$ cerchiamo di calcolare $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x)$ calcolando invece il limite $\displaystyle\lim_{t \to b^-} f \circ \gamma(t)$,

(2) se $\gamma(a) = x_0$ cerchiamo di calcolare $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x)$ calcolando invece il limite $\displaystyle\lim_{t \to a^+} f \circ \gamma(t)$,

Affinché il procedimento abbia successo, è necessario che i limiti

$$\lim_{t \to b^-} f \circ \gamma(t), \qquad \lim_{t \to a^+} f \circ \gamma(t),$$

rispettivamente nel primo e nel secondo caso, non dipendano dalla particolare scelta di γ.

Teorema 3.10. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, c di accumulazione per D. Sono equivalenti:*

(1) *esiste il $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in D}} f(x, y)$ e vale ℓ;*

(2) *per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ tale che $x_n \to c$ si ha $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$;*

(3) *per ogni curva continua $\gamma : [a, b[\to D$ tale che $\lim\limits_{t \to b^-} \gamma(t) = c$ si ha $\lim\limits_{t \to b^-} f(t) = \ell$.*

CAPITOLO 4

Lezione del giorno giovedì 8 ottobre 2009 (2 ore) Calcolo di limiti

Corollario 4.1. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Supponiamo che (x_0, y_0) sia di accumulazione per D e che esista $\varepsilon > 0$ tale che $]-\varepsilon, \varepsilon[\times\{y_0\} \cup \{x_0\}\times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset D$. Allora se $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D}} f(x,y)$ esiste, si ha*

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D}} f(x,y),$$

nel senso che i primi due limiti esistono e sono uguali al terzo.

Esempio 4.2. Sia $f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)$ definita in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per ogni $m \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definiamo $\gamma_m : [0,x] \to D$ come $\gamma_m(t) = (t, mt)$. La funzione γ_m è continua (ciascuna delle sue componenti è continua come funzione da $[0,x]$ in $\mathbb{R}$), e se $t \neq 0$ si ha $\gamma(t) \in D$.

$$\lim_{t\to a^+} f\circ\gamma(t) = \lim_{t\to 0^+} f(t,mt) = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{t^2+m^2t^2} = \frac{1}{1+m^2}.$$

Il valore di questo limite dipende dalla scelta di m e quindi dalla γ_m. Pertanto il limite non esiste.

Osservazione 4.3. Si osservi che, ad ogni modo, potrebbe capitare che esista il limite sulle semirette γ_m per ogni m, e sia indipendente dalla scelta di m, tuttavia il limite di f non esista. Ciò avviene perché le rette γ_m sono solo **una tra le molte scelte possibili** di funzioni continue il cui valore ad uno degli estremi sia l'origine.

Esempio 4.4. Sia $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ e sia $D = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Scelta $\gamma_m(t) = (t, mt)$, si ha:

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma(t) = \lim_{t\to 0} f(t,mt) = \lim_{t\to 0}\frac{mt^3}{t^2+m^4t^4} = \lim_{t\to 0}\frac{mt}{1+m^2t^2} = 0,$$

indipendentemente dalla scelta di m. Tuttavia se scegliamo $\gamma_+(t) = (t^2, t)$, si ha:

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_+(t) = \lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2},$$

mentre se scegliamo $\gamma_-(t) = (t^2, -t)$, si ha:

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_-(t) = \lim_{t\to 0} f(t^2,-t) = \lim_{t\to 0}\frac{-t^4}{t^4+t^4} = -\frac{1}{2},$$

Questi ultimi due limiti sono diversi, quindi f non ha limite per $(x,y) \to (0,0)$.

Proposizione 4.5. *Sia $f : D \to \mathbb{R}^m$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, c di accumulazione per D. Si ha che f è continua in c se*

$$\lim_{\substack{x\to c\\x\in D}} \|f(x) - f(c)\| = 0,$$

o equivalentemente se per ogni $j = 1, ..., m$ si ha

$$\lim_{\substack{x\to c\\x\in D}} f_j(x) = f_j(c),$$

essendo $f = (f_1, ..., f_m)$.

Osservazione 4.6. Nello studio dei limiti in $\mathbb{R}^2$ alcuni cambiamenti di coordinate possono semplificare il problema.

Definizione 4.7. Sia $(x,y) \in \mathbb{R}$. Poniamo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Tale trasformazione è invertibile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Si ha che $|(x,y)| = \rho$, pertanto se $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è una funzione e $(0,0)$ è di accumulazione per D, si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\(x,y)\in D}} f(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\in D}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta),$$

se l'ultimo limite non dipende da θ. Con ciò si intende che se esiste il primo limite, allora esiste il secondo, che non dipende da θ, e i due sono uguali. Viceversa, se esiste il secondo limite ed è indipendente da θ, allora esiste il primo e i due sono uguali.

Esercizio 4.8. Si studi la continuità della funzione definita in $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin\left(\arctan\frac{y}{x}\right), & \text{se } x \neq 0;\\ 0, & \text{se } x = 0.\end{cases}$$

Svolgimento. Nei punti (x,y) con $x \neq 0$ la funzione è continua. Studiamo la continuità in $(0,0)$. Passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x\neq 0}} \sin\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \lim_{\rho\to 0^+} \sin\left(\arctan\tan\theta\right) = \sin\theta$$

Tale limite dipende da θ, quindi f non è continua in $(0,0)$. Consideriamo ora $(0,\bar{y})$ con $\bar{y} > 0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,\bar{y})\\x=0}} f(x,y) = 0$$

però

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,\bar{y})\\x>0,y=\bar{y}}} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+} f(x,\bar{y}) = 1$$

quindi il limite non esiste nei punti $(0,\bar{y})$ con $\bar{y} > 0$. D'altra parte se consideriamo $(0,\bar{y})$ con $\bar{y} < 0$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,\bar{y})\\x>0,y=\bar{y}}} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+} f(x,\bar{y}) = -1$$

e quindi come prima si conclude che il limite non esiste nemmeno nei punti $(0,\bar{y})$ con $\bar{y} < 0$. In definitiva, f non è continua nei punti (x,y) con $x = 0$.

Esercizio 4.9. Sia $A =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Definiamo $f : A \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2+2xy}{y^2+3xy+x}.$$

Dire se esiste il limite:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\(x,y)\in A}} f(x,y).$$

Svolgimento. Se poniamo $x = y$, otteniamo l'espressione:

$$f(x,x) = \frac{2x^2}{x^2+3x^2+x} = \frac{2x}{4x+1}.$$

che tende a 0 per $x \to 0$. Pertanto se il limite esiste, esso è 0. Un calcolo fatto ponendo $y = mx$ o $x = my$ ci porta ad un'espressione infinitesima, confermando l'impressione iniziale. Tuttavia ciò **non basta** per poter concludere che il limite esiste e vale 0.
Dato che le posizioni $y = mx$ e $x = my$ non ci danno informazioni (primo ordine), poniamo pertanto $x = my^2$, $m > 0$ (secondo ordine).

$$\begin{aligned} f(my^2,y) &= \frac{m^2y^4-y^2+2my^3}{y^2+3my^3+my^2}\\ &= \frac{m^2y^2-1+2my}{1+3my+m}\end{aligned}$$

Perciò:

$$\lim_{y\to 0^+} f(my^2,y) = -\frac{1}{1+m}$$

Tale limite dipende da $m > 0$, pertanto il limite

$$\lim_{(x,y)\to 0,\, x,y\in A} f(x,y)$$

non esiste. L'esercizio è concluso.

Esercizio 4.10. Sia $\alpha > 0$ e si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|\sin(xy) - xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinare i valori di α per cui f è continua in $(0,0)$.

Svolgimento. Determiniamo l'ordine di infinitesimo di $\sin(xy) - xy$ nel modo seguente: cerchiamo $\beta > 0$ che renda finito e non nullo il limite

$$\lim_{s\to 0} \frac{\sin(s) - s}{s^\beta}$$

Applicando due volte la regola de l'Hopital si ha

$$\lim_{s\to 0} \frac{\sin(s) - s}{s^\beta} = \lim_{s\to 0} \frac{\cos(s) - 1}{\beta s^{\beta-1}} = \lim_{s\to 0} \frac{-\sin(s)}{\beta(\beta-1)s^{\beta-2}},$$

e tale limite è finito e non nullo solo se $\beta - 2 = 1$, ovvero $\beta = 3$. In tal caso si ha:

$$\lim_{s\to 0} \frac{\sin(s) - s}{s^3} = -\frac{1}{6}.$$

Osserviamo a margine che i valori $\alpha \leq 0$ non risolvono il problema, infatti se $\alpha \leq 0$ si ha per $(x,y) \to 0$

$$\frac{|\sin(xy) - xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^3} \geq \frac{1}{(x^2+y^2)^3}$$

e l'ultimo termine diverge.
Sia ora $\alpha > 0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \left(\frac{|\sin(xy) - xy|}{|xy|^3}\right)^\alpha \frac{|xy|^{3\alpha}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{1}{6^\alpha}\left(\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}\right)^3$$

Studiamo il limite tra parentesi tonde. Si ha $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, pertanto

$$0 \leq \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2^\alpha}(x^2+y^2)^{\alpha-1}.$$

Se $\alpha > 1$, il termine di destra è infinitesimo e si ha:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} = 0, \qquad \text{da cui} \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

e dunque se $\alpha > 1$ si ha che f è continua. Supponiamo ora $\alpha \leq 1$ e poniamo $y = mx$. Si ha

$$\frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} = \frac{|m|^\alpha}{m^2+1}\,\frac{|x|^{2\alpha}}{x^2},$$

se $\alpha < 1$ il limite per $x \to 0$ è $+\infty$, altrimenti se $\alpha = 1$ è $|m|/(m^2+1)$ quindi dipendente da m. In ambo i casi si ottiene che f non è continua. Quindi f è continua se e solo se $\alpha > 1$.
Per studiare il limite è possibile anche passare in coordinate polari:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta}} \frac{|\rho^2\sin\theta\cos\theta|^\alpha}{\rho^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta}} \frac{1}{2^\alpha}\rho^{2\alpha-2}|\sin 2\theta|^\alpha.$$

e il limite è nullo solo se $\alpha > 1$, non esiste (dipende da θ) per $\alpha = 1$, e vale addirittura $+\infty$ per $0 < \alpha < 1$ e $\theta \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.

Esercizio 4.11. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)}$$

Svolgimento. Ricordando i limiti fondamentali del coseno e del logaritmo, si ha:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}\frac{(x^2+y^2)}{\log(1+x^2+y^2)}\frac{(xy)^2}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(xy)^2}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^2} = 0.$$

CAPITOLO 5

Lezione del giorno martedì 13 ottobre 2009 (1 ora)
Ancora sul calcolo di limiti e topologia

Esercizio 5.1. Si studi l'esistenza dei seguenti limiti, e in caso affermativo li si calcoli:

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2\log x}{(x-1)^2+y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2y^2+y^4}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x\sin^2(y)}{x^2+y^2}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\arctan(y/x)$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}$
8. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2}$
9. $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+z^2}$
10. $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} \frac{1}{xz}$
11. $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} x^4+y^2+z^2-x+3y-z$
12. $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} x^4+y^2+z^2-x^3+xyz-x+4$

Svolgimento.

(1) Si trasli il problema in $(0,0)$ e si usi il limite fondamentale del logaritmo. Il limite è 0.

(2) Si passi in coordinate polari, il limite è 1.

(3) Si raccolga y^2 al denominatore e si passi in coordinate polari osservando che il dominio esclude l'asse $y=0$. Il limite è $+\infty$.

(4) Si ricordi il limite fondamentale del seno al numeratore, e poi si passi in coordinate polari. Il limite è 0.

(5) Si usi la maggiorazione $\arctan\alpha \le \pi/2$. Il limite è 0.

(6) Si passi in coordinate polari, il limite è 0.

(7) Si passi in coordinate polari. Si osservi che per nessun valore di θ il denominatore si annulla. Il limite è 0.

(8) Si consideri il modulo della funzione. Ricordando che $x^2+y^2\ge 2|xy|$ si conclude che esso è maggiorato da $|z|/2$. Il limite è 0.

(9) Si verifichi il limite sulle curve $(t,0,0)$ e $(0,0,t)$. Il limite non esiste.

(10) Si verifichi il limite sulla curva (t,t,t) e (t^{-1},t,t^{-1}). Il limite non esiste.

(11) Si scriva la funzione come somma di tre funzioni di una sola variabile. Tali funzioni sono tutte inferiormente limitate e tendono a $+\infty$ se la loro variabile tende a $\pm\infty$. Se $|(x,y,z)|\to+\infty$, almeno una

delle variabili in modulo tende a $+\infty$, la somma tende a $+\infty$.

(12) Si verifichi il limite sui percorsi $(t,0,0)$ e (t,t^2,t^2), per $t\to\pm\infty$. Il limite non esiste.

Esercizio 5.2. Determinare per quali valori di $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ si ha :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x|y|^{1/n}}{x^2+y^2+|y|}=0$$

Svolgimento. Il denominatore è sempre maggiore di $|y|$ per cui in modulo la funzione è maggiorata da $|x||y|^{1/n-1}$. Se $n=1$, il limite è nullo, altrimenti per $n\geq 2$ verificando sui cammini $\gamma(t)=(t,t^2)$ si ottengono limiti diversi, ossia $1/2$ per $n=2$ e $+\infty$ per $n>2$.

Esercizio 5.3. Determinare per quali valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|y|^\alpha}{x}e^{-y^2/x^2}=0$$

Svolgimento. In coordinate polari, si ha

$$|f(x,y)|=\rho^{\alpha-1}|\sin\theta|^{\alpha-1}|\,|\tan\theta|\,e^{-\tan^2\theta}\leq M\rho^{\alpha-1},$$

dove $M=\max_{t\in\mathbb{R}}\{|t|e^{-t^2}\}$. Tale max esiste perché $t\mapsto|t|e^{-t^2}$ è continua e infinitesima all'infinito. Per $\alpha>1$ il limite è nullo, altrimenti non lo è (si verifichi sul cammino $\gamma(t)=(t,t)$, il limite è e^{-1} se $\alpha=1$ e ∞ se $t<1$.

Esercizio 5.4. Si cacolino interno, chiusura e frontiera dell'insieme $E\subseteq\mathbb{R}^2$ definito da $E:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+\cos(y)>1\}$.

Svolgimento. Posto $f(x,y)=x^2+\cos(y)$, si ha $E=f^{-1}(]1,+\infty[)$, pertanto per la continuità di f si ha che E è aperto quindi coincide con il suo interno. La chiusura di E è data da $\bar{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\, f(x,y)\geq 1\}$ e la frontiera è data dai punti con $f(x,y)=1$.

Esercizio 5.5. Sia (X,d) spazio metrico e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione in X convergente a $x\in X$. Si provi che $E=\{x_n:\,n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ è chiuso.

Svolgimento. E ha un solo punto di accumulazione, cioé x, e lo contiene. Dunque è chiuso.

Esercizio 5.6. Sia (X,d) spazio metrico e sia $E\subseteq X$. Allora $\bar{E}=\{x\in X:\,\inf\{d(x,y):\,y\in E\}=0\}$.

Svolgimento. Posto $d_E(x)=\inf\{d(x,y):\,y\in E\}$, supponiamo per assurdo che $x\in\bar{E}$ e $d_E(x)>0$. Ma allora esiste un intorno di x interamente contenuto in $X\setminus E$ pertanto $x\notin\bar{E}$. Supponiamo ora per assurdo che $d_E(x)=0$ e $x\notin\bar{E}$. Ma allora esiste un intorno di x interamente contenuto in $X\setminus E$. In particolare esiste una palla di raggio $\delta>0$ centrata in x non contenuta in E pertanto $d_E(x)\geq\delta>0$, assurdo contro l'ipotesi $d_E(x)=0$.

Osservazione 5.7. (intermezzo leggero) Per mostrare efficacia e potenza della topologia, riportiamo il seguente aneddoto tratto da *Lion Hunting and Other Mathematical Pursuits*, di Ralph P. Boas Jr.

Il problema che ci si pone è il seguente:

"Nel deserto del Sahara ci sono leoni. Descrivere un metodo per catturarne almeno uno."

Una delle soluzioni proposte è:

Poniamo sul deserto la topologia *leonina* secondo cui un insieme è chiuso se e solo se è tutto il deserto, il vuoto oppure se non contiene leoni. L'insieme dei punti dove ci sono i leoni è denso in tutto il deserto per questa topologia. Per densità, se mettiamo una gabbia aperta, essa contiene almeno un leone. Pertanto basta chiuderla rapidamente.

Invito i lettori a verificare la correttezza del ragionamento. Osservando che, con minime variazioni riguardanti la natura della gabbia, potete utilizzare questo metodo per catturare anche soggetti più interessanti di un leone, in ambienti più attraenti di un deserto, ritengo di aver fornito un buon incentivo allo studio della topologia.

CAPITOLO 6

Lezione del giorno giovedì 15 ottobre 2009 (2 ore) Successioni e convergenza uniforme

Definizione 6.1. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Data una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $f_n : D \to \mathbb{R}^M$, e una funzione $f : D \to \mathbb{R}^M$. Diremo che:

(1) la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente* a f o che f è *limite puntuale* di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se per ogni $x \in D$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, o equivalentemente $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$.

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* a f o che f è *limite uniforme* di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ o equivalentemente $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$.

Osservazione 6.2. Ricordiamo i seguenti fatti:

(1) La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, il viceversa non è vero.
(2) Il limite uniforme di funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ è una funzione continua, mentre se il limite è solo puntuale questo in generale non è vero.
(3) La definizione di convergenza uniforme può essere scritta anche in questo modo: esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali tale che $a_n \to 0$ e $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$ per ogni $x \in D$.
(4) L'insieme D gioca un ruolo fondamentale nella definizione di convergenza uniforme, nel senso che possono esistere successioni di funzioni convergenti puntualmente ma non uniformemente in D e convergenti puntualmente e uniformemente in un insieme $D' \subset D$.
(5) Se le funzioni f_n, f sono sufficientemente regolari (almeno C^1), si può cercare di determinare il sup che compare nella definizione di convergenza uniforme mediante lo studio delle derivate della funzione $|f_n - f|$ (se essa è regolare).

Esercizio 6.3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = \displaystyle\int_1^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$. Si provi che le f_n sono tutte continue e si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione.

Svolgimento. Proviamo che le funzioni f_n sono continue. A tal proposito dobbiamo verificare che per x, n fissati si ha $\lim\limits_{y\to x} |f_n(y) - f_n(x)| = 0$. Scriviamo $y = x + h$. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
|f_n(y) - f_n(x)| = |f_n(x+h) - f_n(x)| &= \left| \int_1^n \frac{e^{-(x+h)t}}{1+t^2}\,dt - \int_1^n \frac{e^{xt}}{1+t^2}\,dt \right| \\
&= \left| \int_1^n \frac{e^{-xt}(e^{-ht}-1)}{1+t^2}\,dt \right| \le \int_1^n \left| \frac{e^{-xt}(e^{-ht}-1)}{1+t^2} \right| dt \\
&= \int_1^n \frac{e^{-xt}|e^{-ht}-1|}{1+t^2}\,dt = \int_1^n \frac{e^{-xt}|1-e^{-ht}|}{1+t^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Distinguiamo due casi:

(1) supponiamo $h > 0$. Si ha che $|1 - e^{-ht}| = 1 - e^{-ht}$ perché $t > 0$ e $h > 0$ quindi $e^{-ht} \le 1$. Si ha allora:

$$|f_n(y) - f_n(x)| \le \int_1^n \frac{e^{-xt}(1-e^{-ht})}{1+t^2}\,dt$$

Consideriamo a questo punto la funzione $s \mapsto 1 - e^{-s}$ per $s \ge 0$. Si ha che $1 - e^{-s} \le s$ per $s \ge 0$. Infatti consideriamo $w(s) = (1 - e^{-s}) - s$. Si ha $w(0) = 0$ e $w'(s) = e^{-s} - 1 < 0$ se $s > 0$, quindi la funzione w è strettamente decrescente e pertanto $w(s) < w(0)$ se $s > 0$. Ciò vuol dire $1 - e^{-s} \le s$ per

$s \geq 0$. A questo punto, poniamo $s = ht$ e utilizziamo questo fatto per ottenere

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq \int_1^n \frac{e^{-xt}(1-e^{-ht})}{1+t^2}\,dt \leq \int_1^n \frac{e^{-xt}ht}{1+t^2}\,dt = h\int_1^n \frac{e^{-xt}t}{1+t^2}\,dt$$

Dato che x, n sono fissati, la funzione integranda è una funzione continua come funzione di t nell'intervallo limitato $[1, n]$, pertanto assume il suo massimo $M = M(x)$ nell'intervallo $[1, n]$, quindi

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq h\int_1^n \frac{e^{-xt}t}{1+t^2}\,dt \leq h\int_1^n M\,dt = hM(n-1)$$

Il termine di destra tende a zero per $h \to 0^+$.

(2) Supponiamo ora che $h < 0$. Si ha che $|e^{-ht} - 1| = e^{-ht} - 1 = e^{|h|t} - 1$ perché $h < 0$ e $t > 0$ quindi $e^{-ht} > 1$ Si ha che

$$\lim_{|h|t\to 0} \frac{e^{|h|t}-1}{|h|t} = 1 < 2,$$

e quindi per $|h|t$ sufficientemente piccolo si ha $e^{|h|t} - 1 < 2|h|t$, utilizziamo questo fatto per ottenere

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq \int_1^n \frac{e^{-xt}|e^{-ht}-1|}{1+t^2}\,dt \leq \int_1^n \frac{e^{-xt}2|h|t}{1+t^2}\,dt = 2|h|\int_1^n \frac{e^{-xt}t}{1+t^2}\,dt$$

ed esattamente come prima si ottiene che il termine di destra tende a zero per $h \to 0^-$.

Quindi si ha in entrambi i casi $\lim_{h\to 0} |f_n(x+h) - f_n(x)| = 0$, e quindi le funzioni f_n sono tutte continue.

Studiamo ora la convergenza puntuale. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$. La funzione integranda che compare nella definizione delle f_n è positiva, pertanto il suo integrale su $[1, n]$ è minore del suo integrale su $[1, n+1]$, quindi la successione $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente per ogni x fissato. Andiamo a distinguere due casi:

(1) Se $x < 0$ la funzione $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ tende a $+\infty$ se $t \to \infty$, in particolare esiste $\bar{t} > 1$ tale che $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} > 1$. Ma allora si ha per $n > \bar{t}$:

$$\begin{aligned}|f_n(x)| = f_n(x) &= \int_1^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_1^{\bar{t}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_{\bar{t}}^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \\ &\geq \int_1^{\bar{t}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_{\bar{t}}^n 1\,dt = \int_1^{\bar{t}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + (n-\bar{t}).\end{aligned}$$

L'ultimo termine diverge a $+\infty$ per $n \to +\infty$, quindi $f_n(x)$ non converge puntualmente se $x < 0$.

(2) Se $x < 0$, osserviamo che $e^{-xt} \leq 1$, pertanto

$$f_n(x) \leq \int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan n - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

quindi la successione $f_n(x)$ è monotona crescente e superiormente limitata, pertanto essa ammette limite.

Si ha dunque convergenza puntuale solo per $x \in [0, +\infty[$. Indichiamo con

$$f(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$$

il limite puntuale delle funzioni f_n.

E' ovvio che in nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che non sia contenuto in $[0, +\infty[$ può esservi convergenza uniforme: infatti nei sottoinsiemi dove vi fosse convergenza uniforme necessariamente deve esserci convergenza puntuale.

Studiamo la convergenza uniforme in tutto $[0, +\infty[$:

$$|f(x) - f_n(x)| = |\int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt - \int_1^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt| = \int_n^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \leq \frac{\pi}{2} - \arctan n,$$

dove si è levato il modulo perché $f_n(x) \leq f(x)$ per ogni x, in quanto la successione è monotona e si è sfruttato il fatto che $e^\alpha < 1$ se $\alpha < 0$. Si ha allora:

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} - \arctan n,$$

il termine di destra tende a zero, quindi la convergenza è uniforme su tutto $[0, +\infty[$.

Esercizio 6.4. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x,y) = \dfrac{2^n(x+y)}{1+n2^n(x^2+y^2)}$.

Svolgimento. Si ha convergenza puntuale di f_n alla funzione $f(x,y) = 0$ identicamente nulla su tutto $\mathbb{R}^2$, infatti $f_n(0,0) = 0$, quindi $\lim_{n\to\infty} f_n(0,0) = 0$ e se $(x,y) \neq (0,0)$ si ha:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \frac{|x+y|}{(x^2+y^2)}$$

e il termine di destra tende a zero se $n \to \infty$. Nella maggiorazione si è sfruttato il fatto che $1 + n2^n(x^2+y^2) > n2^n(x^2+y^2)$, pertanto

$$\frac{1}{1+n2^n(x^2+y^2)} < \frac{1}{n2^n(x^2+y^2)}.$$

Se la successione f_n convergesse uniformemente, il suo limite uniforme dovrebbe coincidere con il limite puntuale, e quindi essere la funzione f identicamente nulla. La forma delle funzioni f_n ci suggerisce un passaggio in coordinate polari. Calcoliamo pertanto:

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f_n(x,y) - f(x,y)| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f_n(x,y)| = \sup_{\substack{\rho\geq 0\\ \theta\in[0,2\pi]}} |f_n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|$$

$$= \sup_{\substack{\rho\geq 0\\ \theta\in[0,2\pi]}} \frac{2^n\rho}{1+n2^n\rho^2} |\cos\theta + \sin\theta|$$

D'altra parte è noto o dovrebbe esserlo[1] che $|\cos\theta + \sin\theta| \leq \sqrt{2}$ e i $\theta \in [0, 2\pi]$ che realizzano l'uguaglianza sono $\theta_1 = \pi/4$ e $\theta_2 = 5\pi/4$. Perciò

$$\sup_{\substack{\rho\geq 0\\ \theta\in[0,2\pi]}} |f_n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \sup_{\rho\geq 0} \frac{2^n\sqrt{2}\rho}{1+n2^n\rho^2} = \sqrt{2}\sup_{\rho\geq 0} \frac{2^n\rho}{1+n2^n\rho^2}$$

Studiamo ora la funzione $F_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $F_n(\rho) = \frac{2^n\rho}{1+n2^n\rho^2}$. Si ha $F_n(0) = 0$, $\lim\limits_{\rho\to+\infty} F_n(\rho) = 0$ e

$$F_n'(\rho) = \frac{2^n - 4^n n\rho^2}{(2^n n\rho^2 + 1)^2}$$

che si annulla in un unico punto $\rho_n = 1/\sqrt{n2^n}$. Tale punto è un punto di massimo assoluto per la funzione F_n, quindi:

$$\sup_{\substack{\rho\geq 0\\ \theta\in[0,2\pi]}} |f_n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \sqrt{2}F_n(\rho_n) = \sqrt{2}\frac{2^n}{2\sqrt{n2^n}}$$

L'ultimo termine tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$, quindi non si ha convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}^2$.
Per determinare gli insiemi dove si ha convergenza uniforme, osserviamo che l'insieme dei punti di massimo:

$$\{(\rho_n\cos\theta_1, \rho_n\sin\theta_1), (\rho_n\cos\theta_2, \rho_n\sin\theta_2)\}$$

ammette $(0,0)$ come unico punto di accumulazione.
Cerchiamo quindi di provare che vi è convergenza uniforme nei complementari degli intorni di $(0,0)$. Possiamo limitarci ai complementari delle palle centrate in $(0,0)$ di raggio $\bar\rho > 0$. Con calcoli analoghi ai precedenti, si ha

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}\setminus B((0,0),\bar\rho)} |f_n(x,y) - f(x,y)| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}\setminus B((0,0),\bar\rho)} |f_n(x,y)| = \sup_{\substack{\rho\geq\bar\rho\\ \theta\in[0,2\pi]}} |f_n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|$$

$$= \sqrt{2}\sup_{\rho\geq\bar\rho} \frac{2^n\sqrt{2}\rho}{1+n2^n\rho^2} = \sqrt{2}\sup_{\rho\geq\bar\rho} F(\rho)$$

[1]Per provarlo, consideriamo la funzione $g(\theta) := \cos\theta + \sin\theta$ su $[0, 2\pi]$, deriviamo e annulliamo la derivata, si ottiene $0 = -\sin\theta + \cos\theta$ da cui, posto $\theta \neq \pi/2, 3/2\pi$, si ottiene $\tan\theta = 1$, le cui soluzioni sono $\theta_1 = \pi/4$ e $\theta_2 = 5\pi/4$; si ha

$$|g(\theta_1)| = |g(\theta_2)| = \sqrt{2} > 1 = |g(\pi/2)| = |g(3\pi/2)| = |g(0)| = |g(2\pi)|$$

La funzione F_n è decrescente su $[\rho_n, +\infty[$ perché ρ_n è il suo unico punto di massimo assoluto e relativo. Per n sufficientemente grande, si ha $\rho_n < \bar{\rho}$, quindi la funzione F_n è decrescente in particolare su $[\bar{\rho}, +\infty[$, e quindi $F_n(\bar{\rho}) \geq F_n(\rho)$ per $\rho \geq \bar{\rho}$. Ma allora:

$$\begin{aligned}\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}\setminus B((0,0),\bar{\rho})} |f_n(x,y) - f(x,y)| &= \sqrt{2}\sup_{\rho\geq\bar{\rho}} \frac{2^n\sqrt{2}\rho}{1+n2^n\rho^2} \\ &= \sqrt{2}F(\bar{\rho}) = \sqrt{2}\frac{2^n\bar{\rho}}{1+n2^n\bar{\rho}^2}\end{aligned}$$

e il termine di destra tende a zero (si vede direttamente oppure ricordando che esso è $|f_n(\bar{\rho}\cos\theta_1, \bar{\rho}\sin\theta_1)|$, e tende a zero per la convergenza puntuale. Quindi si ha convergenza uniforme su ogni chiuso di $\mathbb{R}$ non contenente l'origine.

Esercizio 6.5. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

(1) $f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(3) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(4) $f_n(x) = (x^2 - x)^n$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Svolgimento.

(1) fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha che $|f_n(x)|$ tende a zero per $n \to \infty$, quindi si ha convergenza puntuale alla funzione nulla $f(x) = 0$ su tutto $\mathbb{R}$. Se f_n convergesse uniformemente, il suo limite uniforme dovrebbe coincidere con il limite puntuale e pertanto essere la funzione identicamente nulla. Calcoliamo $f_n'(x) = ne{-}n^2x^2(1-2n^2x^2)$, tale derivata si annulla per $x_n^+ = 1/n\sqrt{2}$ e $x_n^- = -1/n\sqrt{2}$.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq |f(x_n^\pm)| = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2}.$$

Il membro di destra non tende a zero per $n \to +\infty$, quindi non c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}^2$. L'insieme dei punti stazionari di $f_n(x)$ ammette 0 come punto di accumulazione. Cerchiamo di vedere se si ha convergenza uniforme nel complementare di una palla centrata in 0, ovvero su un insieme $\{x : |x| \geq \varepsilon\}$ per $\varepsilon > 0$. Osservando che $|f_n(x)| = |f_n(-x)|$, si ha:

$$\sup_{|x|\geq\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x|\geq\varepsilon} |f_n(x)|.$$

Per n sufficientemente grande, si ha $x_n^+, x_n^- \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, e quindi $|f(\varepsilon)| > |f(x)|$ per ogni $|x| \geq \varepsilon$ (il lettore è caldamente invitato a fare un disegno per chiarirsi le idee: la funzione $|F|$ assume i suoi massimi in x_n^+, x_n^-, quindi è crescente in $]-\infty, x_n^-[$ e decrescente in $]x_n^+, +\infty[$. Si ha allora:

$$\sup_{|x|\geq\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(\varepsilon)|,$$

e l'ultimo termine tende a 0 per convergenza puntuale, quindi si ha convergenza uniforme in ogni chiuso di $\mathbb{R}$ non contenente l'origine.

(2) Si ha che $f_n(0) = 0$ e che se $x \neq 0$ allora $|f_n(x)|$ tende a zero per $n \to \infty$, quindi si ha convergenza puntuale alla funzione nulla $f(x) = 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Derivando le f_n, e ponendo tali derivate uguali a zero si ottengono due punti stazionari $x_n^+ = 1/n$ e $x_n^- = -1/2$. Si ha che $|f_n(x_n^\pm) - f(x)| = 1/2$, in particolare è non nullo, quindi non c'è convergenza uniforme. Le successioni di punti stazionari hanno 0 come punto di accumulazione. Si ha con i medesimi ragionamenti dell'esercizio precedente che vi è convergenza puntuale in ogni chiuso non contenente 0.

(3) Si ha $f_n(0) = 0$ e per $x \neq 0$, $f_n(x)$ tende a 1 per $n \to +\infty$. Quindi le funzioni continue f_n sul compatto $[0,1]$ convergono puntualmente alla funzione discontinua f definita da $f(0) = 0$ e $f(x) = 1$ se $x \in]0,1]$. Ciò esclude che vi possa essere convergenza uniforme su $[0,1]$: in tal caso f dovrebbe essere continua. Proviamo che si ha convergenza uniforme in ogni insieme del tipo $[\varepsilon, 1]$ con $\varepsilon > 0$. Infatti si ha:

$$\sup_{[\varepsilon,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[\varepsilon,1]} |f_n(x) - 1| = \sup_{[\varepsilon,1]} |\frac{1}{1+nx}| = \frac{1}{1+n\varepsilon}$$

che tende a 0 per $n \to +\infty$.

(4) Si ha $x^2 - x \leq 1/2$ per ogni $x \in [0, 1]$, quindi $|f_n(x)| \leq 1/2^n \to 0$ per ogni $x \in [0, 1]$ e quindi di ha convergenza puntuale ed uniforme alla funzione nulla.

CAPITOLO 7

Lezione del giorno martedì 20 ottobre 2009 (1 ora)
Serie di funzioni

Definizione 7.1. Sia $I =]a, b[$ intervallo di $\mathbb{R}$. Data una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$, consideriamo la nuova successione di funzioni $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_n(x).$$

Le funzioni $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono dette *somme parziali* della *serie di funzioni* $\sum_{j=0}^{\infty} f_n(x)$. Sia $s : I \to \mathbb{R}$ una funzione, diremo che la serie $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} f_n(x)$:

(1) *converge puntualmente* a s o che s è *limite puntuale* della serie se per ogni $x \in I$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, o equivalentemente $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n(x) - s(x)\| = 0$. In altre parole, se per ogni $x \in I$ *fissato* si ha $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} f_n(x) = s(x)$
(2) *converge uniformemente* a s o che s è *limite uniforme* della serie se $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n - s\|_\infty = 0$.
(3) *converge totalmente* a s se vi converge puntualmente ed esiste una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$

Osservazione 7.2. Ricordiamo i seguenti fatti:

(1) La convergenza totale implica quella uniforme, la convergenza uniforme implica quella puntuale. Nessuna delle due implicazioni opposte è vera.
(2) Data una serie di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continue definite su un intervallo I chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$, se tale serie converge totalmente ad una funzione s, allora la funzione s è continua in I.
(3) Data una serie di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continue definite su un intervallo I chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$, se tale serie converge totalmente ad una funzione s, allora

$$\int_I s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x)\,dx,$$

ovvero la serie si dice *integrabile termine a termine.*

Esercizio 7.3. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$ e si provi che converge puntualmente in $]0, +\infty[$ e che la convergenza è totale in $]c, +\infty[$ per ogni $c > 0$. Si provi che la convergenza non è uniforme in $]0, +\infty[$.

Svolgimento. Per $x < 0$ fissato si ha che il termine generale diverge, infatti se $n > |x|$

$$\frac{e^{-nx}}{n+x} \geq \frac{e^{n^2}}{2n} \to +\infty.$$

Se $x = 0$, il termine generale diviene $1/n$, quindi la serie diverge.
Sia $x > 0$, applicando il criterio del rapporto si ottiene:

$$\frac{\dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1+x}}{\dfrac{e^{-nx}}{n+x}} = e^{-x}\frac{n+x}{n+x+1} = e^{-x}\frac{1}{1+\frac{1}{n+x}} < 1,$$

pertanto la serie converge puntualmente per ogni $x > 0$.
Sia ora $c > 0$ fissato e calcoliamo il sup del termine generale

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n+x}, \qquad f_n'(x) = -e^{-nx}\frac{1+n^2+nx}{(n+x)^2}.$$

Quindi $f_n'(x) = 0$ per $x = -(1+n^2)/n < 0$, e la funzione $f_n(x)$ è decrescente su $[c, +\infty[$. Si ha allora che

$$\sup_{x\in]c,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(c),$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in]c,+\infty[} |f_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(c),$$

e l'ultimo termine converge per la convergenza puntuale. Quindi si ha convergenza totale su $]c, +\infty[$.
Verifichiamo che la convergenza non è uniforme su $]0, +\infty[$. Per ogni $M > N$ si ha:

$$\sup_{x>0}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n+x} - \sum_{n=0}^{N}\frac{e^{-nx}}{n+x}\right| = \sup_{x>0}\left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n+x}\right| \geq \sup_{x>0}\left|\sum_{n=N}^{M}\frac{e^{-nx}}{n+x}\right|$$

Valutiamo l'espressione lungo una successione $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $x_j \to 0^+$:

$$\sup_{x>0}\left|\sum_{n=N}^{M}\frac{e^{-nx}}{n+x}\right| \geq \lim_{j\to\infty}\left|\sum_{n=N}^{M}\frac{e^{-nx_j}}{n+x_j}\right| = \left|\sum_{n=N}^{M}\frac{1}{n}\right|.$$

Poiché la serie $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, esiste $M > 0$ tale per cui $\sum_{n=N}^{M}\frac{1}{n} > N$, da cui

$$\sup_{x>0}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n+x} - \sum_{n=0}^{N}\frac{e^{-nx}}{n+x}\right| > N$$

Pertanto al limite per $N \to \infty$ si ha $+\infty$, che prova come non vi sia convergenza uniforme in $]0, +\infty[$.

Esercizio 7.4. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+x}$, dimostrare che converge puntualmente e totalmente in $[0, +\infty[$.

Svolgimento. Il termine generale è maggiorato dalla funzione $1/n^2$ su $[0, +\infty[$, pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\geq 0}\left|\frac{n}{n^3+x}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty,$$

da cui la convergenza totale.

Esercizio 7.5. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+x}{n^3+x}$, dimostrare che converge puntualmente in $[0, +\infty[$ e totalmente sui compatti di $[0, +\infty[$. Provare che la convergenza non è uniforme su $[0, +\infty[$.

Svolgimento. Sia K compatto di $[0, +\infty[$, esiste $R > 0$ tale che $B(0, R) \supseteq K$. Si ha allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in K}\left|\frac{n+x}{n^3+x}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+R}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + R\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} < +\infty,$$

ciò prova la convergenza totale sui compatti di $[0, +\infty[$ e quindi la convergenza puntuale su $[0, +\infty[$. Proviamo che la convergenza non è uniforme su $[0, +\infty[$:

$$\sup_{x\geq 0}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+x}{n^3+x} - \sum_{n=1}^{N}\frac{n+x}{n^3+x}\right| = \sup_{x\geq 0}\left|\sum_{n=N}^{2N}\frac{n+x}{n^3+x}\right|$$

Valutando il sup su una successione x_j che tenda all'infinito, si ha:

$$\sup_{x\geq 0}\left|\sum_{n=N}^{2N}\frac{n+x}{n^3+x}\right| \geq \sum_{n=N}^{2N} 1 = N,$$

e l'ultimo termine diverge.

Esercizio 7.6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\sqrt{x}}}{n^2+1}$, dimostrare che converge totalmente in $[0,+\infty[$.

Svolgimento. Si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \geq 0} \left| \frac{e^{-n\sqrt{x}}}{n^2+1} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

da cui la tesi.

Esercizio 7.7. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x}{n^2}\right)$ dimostrare che converge puntualmente in $[0,+\infty[$ e totalmente sui compatti di $[0,+\infty[$. Si provi che

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1+n^2)\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 1\right].$$

Svolgimento. Osserviamo che per ogni $s>0$ si ha $\log(1+s) < s$, infatti considerata $g(s) = \log(1+s) - s$ si ha $g(0) = 0$ e $g'(s) = \frac{1}{1+s} - 1 < 0$ se $s > 0$. quindi $g(s) < g(0) \leq 0$ per ogni $s > 0$. Si ha quindi se K è compatto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x \in K} \left|\log\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\right| \leq \sup_{x \in K} |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

perché K è limitato. Ciò porge la convergenza totale sui compatti. Pertanto la serie risulta integrabile termine a termine sul compatto $[0,1]$ e si ha:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log\left(1+\frac{x}{n^2}\right) dx &= n^2 \int_1^{1+1/n^2} \log y \, dy = n^2 [y\log y - y]_{y=1}^{y=1+1/n^2} \\ &= n^2 \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 1 - \frac{1}{n^2} + 1\right),\end{aligned}$$

che prova l'uguaglianza richiesta.

CAPITOLO 8

Lezione del giorno giovedì 22 ottobre 2009 (2 ore)
Differenziali per funzioni di più variabili

Proposizione 8.1 (Continuità di applicazioni lineari tra spazi normati). *Siano X, Y spazi normati. $T : X \to Y$ applicazione lineare. Allora T è continua se e solo se esiste $\ell > 0$ tale che:*

$$\|Tx\|_Y \leq \ell \|x\|_X.$$

Inoltre la minima costante ℓ per cui tale disuguaglianza vale è:

$$\ell = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X = 1\}.$$

Tale costante si indica anche con $\|T\|_{\mathcal{L}}$.
Denotato con $\mathcal{L}(X,Y)$ lo spazio delle funzioni lineari e continue da X in Y, si ha che lo spazio $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ è normato.

Definizione 8.2 (Derivata direzionale). Siano X e Y due $\mathbb{R}$-spazi normati, D aperto di X, $f : D \to Y$ una funzione, $u \in X$ un vettore di X tale che $\|u\|_X = 1$. Sia $p \in X$ e supponiamo che esista il seguente limite:

$$\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t} =: v \in Y.$$

Allora v prende il nome di derivata di f in p nella direzione u e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$v = \frac{\partial f}{\partial u}(p) = D_u f(p) = \partial_u f(p).$$

Se $X = \mathbb{R}^n$ e $u = e_i$ è l'i-esimo vettore della base canonica, allora $D_{e_i} f(p) = D_i f(p)$ è l'i-esima derivata parziale di f in p. Se una funzione è assegnata mediante le sue coordinate, le sue derivate parziali si calcolano derivando rispetto alla variabile voluta, trattando le altre come se fossero costanti.

Definizione 8.3 (Differenziale). Siano X e Y due $\mathbb{R}$-spazi normati, D aperto di X, $p \in D$, $f : D \to Y$ una funzione. Sia $T : X \to Y$ lineare e continua. Diremo che f è differenziabile in p e che il differenziale di f in p è T se vale:

$$\lim_{x \to p} \frac{\|f(x) - f(p) - T(x - p)\|_Y}{\|x - p\|_X} = 0.$$

Il differenziale di f in p se esiste è unico e si indica con $T = f'(p) = Df(p)$, inoltre se f è differenziabile in p allora è continua in p. Si ha $Df(p)u = \partial_u f(p) \in Y$.

Osservazione 8.4. Se $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, il differenziale in p è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Le applicazioni lineari tra spazi di dimensione finita sono sempre continue (il che non è vero in generale se X, Y hanno dimensione infinita). Lo spazio delle funzioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è *isomorfo* allo spazio delle matrici $\mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$ a coefficienti reali.
Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in p, al differenziale corrisponde pertanto una matrice $n \times m$, detta *matrice Jacobiana* di $f = (f_1, ..., f_m)$ e di ha:

$$\operatorname{Jac} f(p) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(p) & \dots & \partial_{x_n} f_1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n} f_m(p) & \dots & \partial_{x_n} f_m(p) \end{pmatrix}.$$

Se $v = (v_1, ..., v_m)$ si ha allora

$$df(p)(v) = \operatorname{Jac} f(p)(v) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(p) & \dots & \partial_{x_n} f_1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n} f_m(p) & \dots & \partial_{x_n} f_m(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare di funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si ha che f ha una sola componente e quindi $\mathrm{Jac}\, f(p) = (\partial_{x_1} f(p), \dots \partial_{x_n} f(p))$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$ (matrice costituita da una sola riga e n colonne). Indicheremo tale vettore anche con $\nabla f(p)$ o $\mathrm{grad}\, f(p)$ e lo chiameremo *gradiente* di f in p.

Proposizione 8.5. *Condizione necessaria perchè f sia differenziabile in p è che f ammetta in p derivate secondo ogni vettore, e in tal caso si ha $Df(p)u = \partial_u f(p)$.*

Osservazione 8.6. Se $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, il differenziale in p è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Scelta una base, un qualunque vettore $h = (h_1, ..., h_n)$ di $\mathbb{R}^n$, si scrive in modo unico come $h = \sum_{j=1}^n h_j e_j$. Pertanto, per linearità:

$$df(p)(h) = df(p)\left(\sum_{j=1}^n h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n df(p)(e_j) \cdot h_j = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(p)\, h_j \in \mathbb{R}.$$

Scriveremo anche:

$$df(p) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(p)\, dx_j,$$

per indicare che $d_f(p)$ valutato su un vettore $h = (h_1, ..., h_n)$ restituisce il numero reale $\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(p)\, h_j$.

Teorema 8.7 (del differenziale totale). *Sia D aperto di $\mathbb{R}^n$, $p \in D$, $f : D \to Y$. Se le derivate parziali di f esistono e sono continue in p, allora f è differenziabile in p.*

Proposizione 8.8 (Proprietà del differenziale). *L'operatore di differenziazione è lineare:*

$$D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg.$$

Per le funzioni composte vale la regola della catena: $D(f \circ g)(p) = Df(g(p)) \circ Dg(p)$, dove $\circ$ indica la composizione di funzioni.

Definizione 8.9 (Funzioni $\mathcal{C}^1$). Diremo che $f : D \to Y$ dove D è aperto di $\mathbb{R}^n$ è di classe $C^1(D, Y)$ se in D esistono tutte le derivate parziali di f e sono continue.

Definizione 8.10 (Differenziale secondo). Siano X, Y normati, $D \subseteq X$ aperto, $f : D \to Y$ una funzione, $u \in X$. Se per ogni $x \in D$ esiste $\partial_u f(x)$, si può considerare la funzione $\partial_u f : D \to Y$ che associa ad x l'elemento di Y dato da $\partial_u f(x)$. A questo punto, fissato $v \in X$, ci si può chiedere se esista o meno $\partial_v(\partial_u f)(x)$. Se f è differenziabile in D, resta definita una mappa $f' : D \to \mathcal{L}(X, Y)$. Essendo quest'ultimo normato, ha senso chiedersi se quest'applicazione sia a sua volta differenziabile. In tal caso di differenziale di f' in p prende il nome di differenziale secondo di f in p e si indicherà con $f''(p)$, $D^2 f(p)$ ecc. Si ha che $f''(p) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \simeq \mathcal{L}^2(X \times X, Y)$ che indica lo spazio delle funzioni $L : X \times X \to Y$ *bilineari* e continue, ovvero lineari rispetto a ciascun argomento separatamente. Il lettore interessato ai dettagli può consultare [5].

Definizione 8.11. Con il simbolo $\mathbb{K}$ indicheremo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Teorema 8.12. *Sia E spazio metrizzabile, $a, b \in \mathbb{R}$, $f : E \times [a, b] \to \mathbb{K}$ funzione continua. La formula*

$$F(x) := \int_a^b f(x, t)\, dt$$

definisce allora una funzione continua $F : E \to \mathbb{K}$.

Teorema 8.13. *Sia X un $\mathbb{K}$-spazio normato, E aperto di X, $a, b \in \mathbb{R}$, ed $f : E \times [a, b] \to \mathbb{K}$ funzione continua; sia u vettore di X. Se per ogni $x \in E$ e $t \in [a, b]$ esiste $\partial_u f(x, t)$, e tale derivata è continua in $E \times [a, b]$, allora $\partial_u f(x, t)$ esiste in E e si ha*

$$\partial_u F(x) = \int_a^b \partial_u f(x, t)\, dt$$

e per il precedente, tale derivata è continua.

Proposizione 8.14. *Sia X spazio normato, E aperto di X, I intervallo di $\mathbb{R}$, $f : E \times I \to Y$ (Y spazio di Banach) funzione continua, e sia $\Phi : E \times I \times I \to Y$ definita da:*

$$\Psi(x, \alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt$$

Allora:

(1) *la funzione Ψ è continua;*

(2) *la funzione* Ψ *è sempre derivabile (e quindi differenziabile) nelle variabili* α, β, *essendo:*

$$\partial_\beta \Psi(x, \alpha, \beta) = f(x, \beta), \qquad \partial_\alpha \Psi(x, \alpha, \beta) = -f(x, \alpha)$$

(3) *supponiamo* $X \approx \mathbb{K}^n$ *spazio di dimensione finita. Se* $\partial_i f(x, t)$, $i = 1...n$ *esistono continue, allora* $\Psi(x, \alpha, \beta)$ *è differenziabile con continuità (sui reali, le variabili* α, β *sono reali), e si ha:*

$$\Psi'(x, \alpha, \beta)(h, \triangle\alpha, \triangle\beta) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_\alpha^\beta \partial_j f(x, t)\, dt \right) h_j + f(x, \beta)\triangle\beta - f(x, \alpha)\triangle\alpha$$

con $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{K}^n$.

(4) *se* $x \mapsto \alpha(x)$, $x \to \beta(x)$ *denotano funzioni* $\mathbb{R}$*-differenziabili a valori in* I, $\alpha, \beta : E \to I \subseteq \mathbb{R}$, *allora*

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t)\, dt$$

è differenziabile e si ha:

$$\partial_k G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_k f(x, t)\, dt + f(x, \beta(x))\partial_k \beta(x) - f(x, \alpha(x))\partial_k \alpha(x)$$

Esercizio 8.15. Calcolare le derivate parziali ed il differenziale delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(1) $f(x, y) = x^2 \sin y$;
(2) $f(x, y) = \sqrt{|x|}$;
(3) $f(x, y) = |xy|$;
(4) $f(x, y) = |x| + |y|$;
(5) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$;
(6) $f(x, y) = \operatorname{sign}(2 - x^2 - y^2)\sqrt{|2 - x^2 - y^2|}$;

Svolgimento.

(1) $\partial_x f(x, y) = 2x \sin y$, $\partial_y f(x, y) = x^2 \cos y$. Queste derivate parziali sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi la funzione è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ e $Df(x, y) = 2x \sin y\, dx + x^2 \cos y\, dy$.
(2) $\partial_x f(x, y) = \frac{\operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|}}$ se $x \neq 0$, $\partial_y f(x, y) = 0$. La funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ e il suo differenziale è $Df(x, y) = \frac{\operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|}}\, dx$
(3) $\partial_x f(x, y) = |y|\operatorname{sign}(x)$, $\partial_y f(x, y) = |x|\operatorname{sign}(y)$. La funzione è differenziabile nei punti dove $xy \neq 0$, e il suo differenziale vale $Df(x, y) = |y|\operatorname{sign}(x)\, dx + |x|\operatorname{sign}(y)\, dy$.
(4) $\partial_x f(x, y) = \operatorname{sign}(x)$, $\partial_y f(x, y) = \operatorname{sign}(y)$. La funzione è differenziabile nei punti dove $xy \neq 0$ e il suo differenziale vale $Df(x, y) = \operatorname{sign}(x)\, dx + \operatorname{sign}(y)\, dy$.
(5) $\partial_x f(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{|xy|}}\operatorname{sign}(xy)$, $\partial_y f(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{|xy|}}\operatorname{sign}(xy)$. La funzione è differenziabile nei punti dove $xy \neq 0$ e il suo differenziale vale $Df(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{|xy|}}\operatorname{sign}(xy)\, dx + \frac{x}{2\sqrt{|xy|}}\operatorname{sign}(xy)\, dy$.
(6) $\partial_x f(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{|2-x^2-y^2|}}$, $\partial_y f(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{|2-x^2-y^2|}}$. La funzione è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ ad eccezione della circonferenza $x^2 + y^2 = 2$, e il differenziale è dato da

$$Df(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{|2 - x^2 - y^2|}}\, dx - \frac{y}{\sqrt{|2 - x^2 - y^2|}}\, dy$$

Esercizio 8.16. Sia $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. Si calcoli la derivata in direzione v nel punto $(0, 0, 0)$ della funzione $f(x, y, z) = (2x - 3y + 4z)\cos(xyz)$.

Svolgimento. Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x, y, z) &= 2\cos(xyz) - yz(2x - 3y + 4z)\sin(xyz) \\
\partial_y f(x, y, z) &= -3\cos(xyz) - xz(2x - 3y + 4z)\sin(xyz) \\
\partial_z f(x, y, z) &= 4\cos(xyz) - xy(2x - 3y + 4z)\sin(xyz).
\end{aligned}$$

Le derivate sono continue su $\mathbb{R}^3$, quindi la funzione è differenziabile su $\mathbb{R}^3$. Per definizione, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 0) = Df(0, 0, 0)u = \partial_x f(0, 0, 0)u_x + \partial_y f(0, 0, 0)u_y + \partial_z f(0, 0, 0)u_z = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio 8.17. Discutere continuità, derivabilità direzionale e differenziabilità nell'origine per le seguenti funzioni:

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ se $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$;
(2) $f(x,y) = \dfrac{\log(1+3y^3)}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$;
(3) $f(x,y) = \dfrac{\sin\left(y+\sqrt{|x|}\right)\log(1+y^2)}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$;
(4) $f(x,y) = \dfrac{\arctan(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ se $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$;

Svolgimento.

(1) Controlliamo il limite lungo la curva $\gamma(t) = (t,t^3)$. Tale curva tende a $(0,0)$ se $t \to 0^+$.
$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^6}{2t^6} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$
Quindi la funzione non è continua nell'origine e pertanto non è nemmeno differenziabile in $(0,0)$. La funzione è costante lungo gli assi e vale zero, quindi le due derivate parziali nell'origine sono nulle.

(2) Vale la seguente maggiorazione:
$$|f(x,y)| \leq \left|\frac{\log(1+3y^3)}{y^2}\right| = \left|\frac{\log(1+3y^3)}{3y^3}\right| |3y| \to 0$$
Pertanto la funzione è continua in $(0,0)$. La funzione è costante sull'asse $y=0$, quindi $\partial_x f(0,0) = 0$. Si ha d'altra parte:
$$\partial_y f(0,0) = \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \frac{\log(1+3h^3)}{h^3} \to 3,$$
e quindi $\partial_y f(0,0) = 3$. Consideriamo quindi la funzione lineare $L(x,y) = 3y$. Si ha:
$$\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-L(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{\frac{\log(1+3y^3)}{y^2+x^2}-3y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{\log(1+3y^3)-3y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|$$
$$= \left|\frac{\log(1+3y^3)-3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{3yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|$$

Verifichiamo il limite sulla curva $\gamma(t) = (t,t)$, si ha:
$$\left|\frac{f(t,t)-f(0,0)-L(t,t)}{\sqrt{t^2+t^2}}\right| = \left|\frac{\log(1+3t^3)-3t^3}{2^{3/2}t^3} - \frac{3t^3}{2^{3/2}t^3}\right|$$
$$= \frac{1}{2^{3/2}}\left|\frac{\log(1+3t^3)-3t^3}{t^3} - 3\right| \to \frac{3}{\sqrt{8}} \neq 0$$
Pertanto il differenziale non esiste.
Si poteva procedere anche nel modo seguente: calcoliamo la derivata lungo il vettore $v = (1,1)$:
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0+t)-f(0,0)}{t\|v\|} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\log(1+3t^3)}{t^3} = \frac{3}{\sqrt{8}}.$$
Se il differenziale esistesse, sarebbe un'applicazione lineare L tale che $L(0,1) = \partial_y f(0,0)$, $L(1,1) = \partial_v f(0,0)$ e $L(1,0) = \partial_x f(0,0)$. Poiché i vettori $(0,1)$ e $(1,1)$ sono linearmente indipendenti e $L(0,1) \neq 0$, $L(1,1) \neq 0$, si deduce che $L(v_x,v_y) = 0$ se e solo se $v_x = v_y = 0$, tuttavia si ha $L(1,0) = 0$, assurdo.

(3) consideriamo
$$|f(x,y)| \leq \left|\sin\left(y+\sqrt{|x|}\right)\right| \left|\frac{\log(1+y^2)}{y^2}\right|$$
Il termine con il seno è infinitesimo e l'altro tende a 1, quindi il limite è nullo e $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$. La funzione è costante sull'asse $y=0$, quindi $\partial_x f(0,0) = 0$. Si ha invece
$$f(0,y) = \sin y \frac{\log(1+y^2)}{y^2}.$$

Ciò implica:

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\frac{\sin y}{y}\frac{\log(1+y^2)}{y^2}\to 1.$$

Quindi $\partial_y f(0,0)=1$. Calcoliamo ora la derivata lungo il vettore $(1,1)$:

$$\begin{aligned}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t\|v\|}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin(t+\sqrt{|t|})}{t}\frac{\log(1+t^2)}{t^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin(t+\sqrt{|t|})}{t+\sqrt{|t|}}\frac{t+\sqrt{|t|}}{t}\frac{\log(1+t^2)}{t^2}\to\infty.\end{aligned}$$

Il differenziale non esiste.

(4) In coordinate polari si ha:

$$|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|=\left|\frac{\arctan\rho^2}{\rho^2}\right|\rho\to 0$$

quindi la funzione è continua. La funzione è simmetrica $f(x,y)=f(y,x)$. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\frac{\arctan t^2}{t^2}=1,$$

quindi $\partial_x f(0,0)=\partial_y f(0,0)=1$. Se il differenziale L esiste, si ha $L(x,y)=x+y$. Verifichiamo con la definizione:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-L(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|&=\left|\frac{\frac{\arctan(\rho^2)}{\rho}-\rho(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho}\right|\\&=\left|\frac{\arctan(\rho^2)}{\rho^2}-(\cos\theta+\sin\theta)\right|\end{aligned}$$

Scelto $\theta=\pi/4$, si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-L(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\lim_{\rho\to 0^+}\left|\frac{\arctan(\rho^2)}{\rho^2}-\sqrt{2}\right|\to\sqrt{2}-1\neq 0.$$

Quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$

Esercizio 8.18.

(1) Sia $f(x,y)=y^{2/3}(y+x^2-1)$. Stabilire in quali punti esiste $\partial_y f$ e calcolarla.

(2) Sia $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2(y-1)}+1$. Mostrare che la funzione non è differenziabile in $(0,1)$ e calcolare $D_v f(0,1)$ al variare del versore v.

(3) Si mostri che la seguente funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e se ne discutano derivabilità direzionale e differenziabilità:

$$f(x,y)=\int_0^{x^2y}\frac{\arctan t}{t}\,dt.$$

Svolgimento.

(1) Se $y\neq 0$ si ha:

$$\partial_y f(x,y)=\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}(y+x^2-1)+y^{2/3}$$

Se $y=0$, allora

$$\partial_y f(x,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y+x^2-1}{\sqrt[3]{y}}$$

Tale limite esiste finito solo se $x^2-1=0$, ossia $x=\pm 1$. In tal caso è nullo. Quindi si ha $\partial_y f(\pm 1,0)=0$.

(2) Utilizziamo coordinate polari centrate in $(0,1)$, ovvero $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta+1$ Si ha quindi

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta+1)=\sqrt[3]{\rho^3\cos\theta\sin\theta}=\rho\sqrt[3]{\cos\theta\sin\theta}$$

Il punto $(0,1)$ corrisponde a $\rho = 0$ e $f(0,1) = 1$. v è un versore, pertanto $v = (\cos\theta, \sin\theta)$. Si ha allora che

$$\partial_v f(0,1) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f((0,1)+tv) - f(0,1)}{t} = \sqrt[3]{\cos\theta\sin\theta}.$$

L'applicazione $v \mapsto \partial_v f(0,1)$ non è lineare, quindi la funzione non è differenziabile.

(3) La funzione integranda è continua, quindi l'integrale esiste per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Per i noti teoremi di derivazione di integrali dipendenti da parametro, si ha per $xy \neq 0$:

$$\partial_x f(x,y) = 2xy\frac{\arctan(x^2y)}{x^2y} = \frac{\arctan(x^2y)}{x},$$
$$\partial_y f(x,y) = x^2\frac{\arctan(x^2y)}{x^2y} = \frac{\arctan(x^2y)}{y}.$$

Nei punti con $xy = 0$, la funzione è identicamente nulla. In tali punti si ha $f(x+h,y) = f(x,y+h) = 0$, pertanto le due derivate parziali sono entrambe nulle. Le derivate parziali sono continue su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy = 0\}$, pertanto in questo insieme la funzione è differenziabile. Nei punti di $\Sigma := \{(x,y) : xy = 0\}$, entrambe le derivate parziali sono nulle, quindi se il differenziale in Σ esiste deve essere la funzione nulla.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \partial_x f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \frac{\arctan(x^2y)}{x} = \lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \frac{\arctan(x^2y)}{x^2y}xy$$
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \partial_x f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \frac{\arctan(x^2y)}{y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \frac{\arctan(x^2y)}{x^2y}x^2$$

Ricordando che $\lim_{s\to 0}\dfrac{\arctan s}{s} = \dfrac{d\arctan}{ds}(0) = 1$ (si ricordi il teorema di derivazione della funzione inversa), e che $|\arctan s/s| \leq 1$ si ottiene:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \partial_x f(x,y) = 0 = \partial_x f(\bar{x},\bar{y})$$
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \partial_y f(x,y) = \bar{x}^2$$

Pertanto le derivate parziali sono continue nell'origine e quindi la funzione è differenziabile anche nell'origine. Verifichiamo la differenziabilità nei punti di $\Sigma\setminus\{(0,0)\}$: se il differenziale esistesse dovrebbe essere la funzione nulla, in particolare tutte le derivate direzionali secondo ogni vettore $v = (v_x, v_y)$ dovrebbero restituire 0. Fissiamo $(\bar{x},\bar{y}) \in \Sigma\setminus\{(0,0)\}$ e consideriamo

$$\frac{f(\bar{x}+sv_x, \bar{y}+sv_y) - f(\bar{x},\bar{y})}{s} = \frac{1}{s}\int_0^{(\bar{x}+sv_x)^2(\bar{y}+sv_y)} \frac{\arctan t}{t}\,dt$$

Distinguiamo vari casi:

(a) se $\bar{x} = 0$, $\bar{y}\neq 0$ si ha

$$\left|\frac{f(\bar{x}+sv_x, \bar{y}+sv_y) - f(\bar{x},\bar{y})}{s}\right| = \frac{1}{|s|}\left|\int_0^{s^2v_x^2(\bar{y}+sv_y)} \frac{\arctan t}{t}\,dt\right| \leq \left|\frac{s^2v_x^2(\bar{y}+sv_y)}{s}\right|$$

L'ultimo termine tende a zero per $s\to 0$, pertanto nei punti con $\bar{x} = 0$ la funzione è differenziabile.

(b) se $\bar{x}\neq 0$ e $\bar{y} = 0$ si ha

$$\left|\frac{f(\bar{x}+sv_x, \bar{y}+sv_y) - f(\bar{x},\bar{y})}{s}\right| = \frac{1}{|s|}\left|\int_0^{s(\bar{x}+sv_x)^2v_y} \frac{\arctan t}{t}\,dt\right|$$

L'estremo superiore di integrazione tende a zero in modulo per $s\to 0$, pertanto per s sufficientemente piccolo, la funzione integranda in modulo è maggiore di $1/2$. Scegliamo a questo punto $v_x = v_y = 1$. Si ha

$$\left|\frac{f(\bar{x}+sv_x, \bar{y}+sv_y) - f(\bar{x},\bar{y})}{s}\right| = \frac{1}{|s|}\left|\int_0^{s(\bar{x}+s)^2} \frac{1}{2}\,dt\right| \geq \left|\frac{s(\bar{x}+s)^2}{2s}\right| = \frac{|\bar{x}|}{2} \neq 0.$$

Pertanto la funzione non è differenziabile nei punti con $\bar{x}\neq 0$, $y = 0$.

CAPITOLO 9

Lezione del giorno martedì 27 ottobre 2009 (1 ora) Massimi e minimi per funzioni di più variabili

Osservazione 9.1. Siano X, Y normati, $D \subseteq X$ aperto, $f : D \to Y$ una funzione, $u \in X$. Se per ogni $x \in D$ esiste $\partial_u f(x)$, si può considerare la funzione $\partial_u f : D \to Y$ che associa ad x l'elemento di Y dato da $\partial_u f(x)$. A questo punto, fissato $v \in X$, ci si può chiedere se esista o meno $\partial_v(\partial_u f)(x) = \partial^2_{vu} f(x)$.

Richiamiamo la seguente:

Definizione 9.2. Siano X, Y normati, $D \subseteq X$ aperto, $f : D \to Y$ una funzione differenziabile in ogni punto di D. Resta definita una mappa $df : D \to \mathcal{L}(X, Y)$ definita da $p \mapsto df(p)$. Essendo lo spazio $\mathcal{L}(X, Y)$ normato, ha senso chiedersi se quest'applicazione sia a sua volta differenziabile come mappa tra spazi normati. In tal caso, il differenziale di df in p prende il nome di differenziale secondo di f in p e si indicherà con $f''(p)$, $D^2 f(p)$ ecc. Si ha che $D^2 f(p) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$.

Definizione 9.3. Siano X, Y, Z spazi normati su $\mathbb{K}$ (al solito $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un'applicazione $B : X \times Y \to Z$ si dice *bilineare* se per ogni $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ si ha:

$$B(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha B(x_1, y) + \beta B(x_2, y)$$
$$B(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha B(x, y_1) + \beta B(x, y_2),$$

ovvero la funzione B è *lineare in ciascun argomento*.
Il prodotto $X \times Y$ eredita da X, Y una naturale struttura di spazio vettoriale normato:

(1) le operazioni di somma e prodotto per scalari vengono eseguite componente per componente:
$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2).$$
(2) in perfetta analogia al caso $\mathbb{R}^2$, è possibile definire ciascuna di queste norme ($(x, y) \in X \times Y$, $p \geq 1$):
$$\|(x, y)\|_{p|X\times Y} = \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{1/p}, \qquad \|(x, y)\|_{\infty|X\times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$
che risultano tra di loro tutte topologicamente equivalenti tra loro.

Definiamo lo spazio delle *forme bilineari e continue* su X:

$$\mathcal{L}^2(X \times X, Y) := \{B : X \times X \to \mathbb{R} \text{ bilineari e continue}\},$$

dove su $X \times X$ si pone una qualunque delle norme tra loro topologicamente equivalenti illustrate in precedenza (norme topologicamente equivalenti restituiscono com'è noto la stessa nozione di continuità).

Proposizione 9.4. *Siano X, Y spazi normati su $\mathbb{K}$. Allora*

$$\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \simeq \mathcal{L}^2(X \times X, Y)$$

Osservazione 9.5. Supponiamo $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, D aperto di X. Data $f : D \to \mathbb{R}$, il differenziale secondo in un punto è una mappa da $\mathbb{R}^n$ allo spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si è visto come lo spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sia isomorfo a $\mathbb{R}^n$, pertanto il differenziale secondo di f è rappresentabile come una mappa lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Tutte le mappe lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ sono rappresentabili medianti matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti reali. In definitiva, fissato $p \in D$ esiste una ed una sola matrice $H \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$\big(df(p)(h)\big)(k) = \langle H\, h, k\rangle,$$

dove a destra vi è l'usuale forma quadratica associata ad una matrice quadrata H applicata a due vettori $h, k \in \mathbb{R}^n$ (scriveremo anche $H(h, k)$). Tale matrice prende il nome di *matrice hessiana* di f in p e si indica con $Hf(p)$ oppure $D^2 f(p)$ o anche $\nabla^2 f(p)$, $\mathrm{Hess}\, f(p)$. Si ha

$$\mathrm{Hess}\, f(p) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1 x_1} f(p) & \dots & \partial^2_{x_1 x_n} f(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial^2_{x_n x_1} f(p) & \dots & \partial^2_{x_n x_n} f(p) \end{pmatrix}$$

Definizione 9.6. Sia X insieme, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione.

(1) un punto $a \in X$ è detto di *minimo* assoluto per f se $f(y) \geq f(a)$ per ogni $y \in X$. Il minimo si dice stretto se $f(y) > f(a)$ per ogni $y \in X$, $y \neq a$.
(2) un punto $a \in X$ è detto di *massimo* assoluto per f se $f(y) \leq f(a)$ per ogni $y \in X$. Il massimo si dice stretto se $f(y) < f(a)$ per ogni $y \in X$, $y \neq a$.

Definizione 9.7. Sia X spazio topologico, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione.

(1) un punto $a \in X$ è detto di *minimo* locale per f se esiste U intorno di a tale che $f(y) \geq f(a)$ per ogni $y \in U$. Il minimo si dice stretto se $f(y) > f(a)$ per ogni $y \in U$, $y \neq a$.
(2) un punto $a \in X$ è detto di *massimo* locale per f se esiste U intorno di a tale che $f(y) \leq f(a)$ per ogni $y \in U$. Il minimo si dice stretto se $f(y) < f(a)$ per ogni $y \in U$, $y \neq a$.

Massimi e minimi locali vengono detti estremanti locali.

Definizione 9.8. Siano X normato, $D \subset X$ aperto, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Se a è estremante di f e $u \in X$ è tale che $D_u f(a)$ esiste, allora $D_u f(a) = 0$. In particolare se f è differenziabile in a si ha che $Df(a)$ è la funzione nulla.

Definizione 9.9. Siano X normato, $D \subset X$ aperto, $f : D \to \mathbb{R}$ differenziabile in D. Sia $a \in D$. Diremo che a è critico per f se $Df(a) = 0$.

Teorema 9.10 (Schwarz). *X normato, D aperto di X, $f : D \to \mathbb{R}$, $p \in D$. Supponiamo che $\partial_u f(x)$, $\partial_v f(x)$, $\partial_u \partial v f(x)$ esistano in un intorno di p e siano continue in p. Allora esiste $\partial_v \partial_u f(p)$ e vale:*

$$\partial_v \partial_u f(p) = \partial_u \partial_v f(p).$$

Definizione 9.11. Se $X = \mathbb{R}^n$, la matrice (simmetrica) delle derivate seconde di f:

$$H(p) = (\partial_i \partial_j f(p))_{ij}$$

prende il nome di matrice hessiana di f calcolata in p.

Teorema 9.12. *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Sia a critico per f. Allora:*

(1) *Se la forma quadratica $f''(a)(h, h)$ associata alla matrice hessiana di f è definita positiva (negativa) allora a è di minimo (massimo) locale stretto per f;*
(2) *Se la forma quadratica $f''(a)(h, h)$ associata alla matrice hessiana di f assume valori di ambo i segni, allora a non è né di massimo né di minimo per f e prende il nome di punto di sella;*
(3) *se a è di minimo (massimo) locale per f, allora $f''(a)(h, h)$ è semidefinita positiva (negativa).*

Definizione 9.13. Lo studio degli estremanti locali p, nel caso il differenziale secondo in p esista, è quindi ricondotto allo studio degli autovalori della matrice hessiana $H = D^2 f(p)$ di f nel punto p:

(1) Se tutti gli autovalori di $D^2 f(p)$ sono strettamente positivi, la matrice hessiana è definita positiva, se sono tutti strettamente negativi, la matrice hessiana è definita negativa. Quindi se p è critico è rispettivamente di minimo stretto o di massimo relativo stretto.
(2) Se gli autovalori non nulli di $D^2 f(p)$ sono positivi, la matrice hessiana è semidefinita positiva, se sono negativi , la matrice hessiana è semidefinita positiva. **In generale in questo caso non possiamo concludere che se p è critico esso è un massimo o minimo relativo.**
(3) Se compaiono autovalori di segno discorde, allora si ha un punto di sella.
(4) Se, preso un elemento della diagonale, esso e tutti i minori principali ottenuti orlando via via con nuove righe e colonne di uguale indice, sono strettamente positivi, allora la forma quadratica associata ad H è definita positiva.
(5) Preso un elemento della diagonale, consideriamo esso e tutti i minori principali ottenuti orlando via via con nuove righe e colonne di uguale indice. Se fra questi minori quelli di ordine dispari sono strettamente negativi e quelli di ordine pari strettamente positivi, allora la forma quadratica associata ad H è definita negativa.

Osservazione 9.14. Si ricordi che se A è una matrice 2×2, allora gli autovalori sono soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\,\lambda + \det A = 0$$

dove $\mathrm{tr}(A)$ è la traccia di A, ovvero la somma degli elementi della diagonale principale di A.

Osservazione 9.15. Si ricordi che lo studio dei punti critici fornisce condizioni sufficienti per i minimi locali: infatti presuppone l'esistenza di differenziale primo e secondo. Già in $\mathbb{R}$ si è visto come la funzione $f(x) = |x|$ abbia minimo in 0 pur non essendo derivabile.

Esercizio 9.16. Calcolare massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni:
(1) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$
(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - (1+x+y)^3$
(3) $f(x,y) = \cos x \sin y$
(4) $f(x,y) = x^4 + x^2y + y^2 + 3$
(5) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x^2+y^4) + 4xy$

Svolgimento. Tutte queste funzioni hanno derivate parziali continue in ogni punto, pertanto il differenziale primo esiste, inoltre le derivate parziali seconde esistono e sono continue, pertanto il differenziale secondo esiste.

(1) Calcoliamo i punti critici di f:
$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 6x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x \in \{0,1\}, \\ \partial_y f(x,y) = 3y^2 - 3 = 0 \Longrightarrow y \in \{1,-1\}. \end{cases}$$
Si ricava che vi sono quattro punti critici: $(0,\pm1)$ e $(1,\pm1)$. Calcoliamo la matrice hessiana di f:
$$D^2f(x,y) =: \begin{pmatrix} \partial^2_{xx}f(p) & \partial^2_{xy}f(p) \\ \partial^2_{yx}f(p) & \partial^2_{yy}f(p) \end{pmatrix},$$
osservando che per il Teorema di Schwarz tale matrice è simmetrica.
$$\partial^2_{xx}f(x,y) = 12x-6, \partial^2_{yx}f(x,y) = \partial^2_{xy}f(x,y) = 0, \partial^2_{yy}f(x,y) = 6y$$
Pertanto:
$$D^2f(x,y) =: \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$
In particolare, gli autovalori di $D^2f(x,y)$ sono $\lambda_1(x,y) = 12x-6$ e $\lambda_2(x,y) = 6y$. Andiamo a studiare il segno di tali autovalori nei quattro punti critici:
$$\begin{cases} \lambda_1(0,1) & = -6 \\ \lambda_2(0,1) & = 6 \end{cases} \Longrightarrow \text{autovalori discordi, } (0,1) \text{ è di sella.}$$
$$\begin{cases} \lambda_1(0,-1) & = -6 \\ \lambda_2(0,-1) & = -6 \end{cases} \Longrightarrow \text{autovalori strettamente negativi, } (0,-1) \text{ è di massimo relativo.}$$
$$\begin{cases} \lambda_1(1,1) & = 6 \\ \lambda_2(1,1) & = 6 \end{cases} \Longrightarrow \text{autovalori strettamente positivi, } (1,1) \text{ è di minimo relativo.}$$
$$\begin{cases} \lambda_1(1,-1) & = 18 \\ \lambda_2(1,-1) & = -6 \end{cases} \Longrightarrow \text{autovalori discordi, } (1,-1) \text{ è di sella.}$$

(2) Prima di procedere osserviamo che la funzione è simmetrica $f(x,y) = f(y,x)$, Ciò abbrevierà notevolmente i calcoli. Calcoliamo i punti critici di f:
$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 3x^2 - 3(1+x+y)^2 = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 3y^2 - 3(1+x+y)^2 = 0 \end{cases}$$
Si ricava $x = \pm y$. Sostituendo $x = -y$, si ha $3y^2 - 3 = 0$, da cui $y = \pm 1$, per cui i punti critici risultano $(-1,1)$ e $(1,-1)$. Sostituendo $x = y$ si ha $3y^2 - 3(1+4y^2+2y) = 0$ da cui $y = -1$ e $y = -1/3$, per cui i punti critici risultano $(-1,-1)$ e $(-1/3,-1/3)$. Osserviamo che l'insieme dei punti critici è chiuso rispetto alla simmetria $(x,y) \mapsto (y,x)$, com'era lecito attendersi.
Calcoliamo le derivate seconde:
$$\partial^2_{xx}f(x,y) = 6x - 6(1+x+y), \partial^2_{yy}f(x,y) = 6y - 6(1+x+y), \partial^2_{xy}f(x,y) = \partial^2_{yx}f(x,y) = -6(1+x+y).$$
Si ha quindi
$$D^2f(-1,1) =: \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^2f(1,-1) =: \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix},$$
$$D^2f(-1,-1) =: \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^2f(-1/3,-1/3) =: \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$
Calcoliamo gli autovalori in $(-1,1)$: essi sono soluzioni di $\lambda^2 + 12\lambda - 36 = 0$, ovvero $\lambda_1 = -6 + 6\sqrt{2}$ e $\lambda_1 = -6 - 6\sqrt{2}$. Essi sono di segno discorde, quindi questo punto è di sella.
Calcoliamo gli autovalori in $(1,-1)$: essi sono gli stessi di $(-1,1)$ quindi questo punto è di sella.

Calcoliamo gli autovalori in $(-1,-1)$: essi sono soluzioni di $\lambda^2 - 36 = 0$, ovvero $\lambda = \pm 6$, essi sono di segno discorde, quindi questo punto è di sella.
Calcoliamo gli autovalori in $(-1/3,-1/3)$: essi sono soluzioni di $\lambda^2 + 8\lambda + 12 = 0$, ovvero $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -2$. Essi sono strettamente negativi, quindi questo punto è di massimo relativo. Si poteva procedere anche osservando che il primo elemento della diagonale principale (minore di ordine dispari) è strettamente negativo, e il determinante (ovvero il minore di ordine pari ottenuto orlando il precedente di una riga e colonna dello stesso indice) è positivo.

(3) La funzione è periodica di periodo 2π in ciascuna delle sue componenti. Pertanto limitiamo lo studio al quadrato $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$, estendendo poi i risultati per periodicità. Le derivate parziali sono $\partial_x f(x,y) = -\sin x \sin y$ e $\partial_y f(x,y) = \cos x \cos y$. Studiamo i punti critici, ovvero dove esse si annullano simultaneamente. Si ha $\partial_x f(x,y) = 0$ per $x \in \{0,\pi\}$ oppure $y \in \{0,\pi\}$, e $\partial_y f(x,y) = 0$ per $x \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$ oppure $y \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$. I punti critici sono quindi $(0,\pi/2)$, $(0,3\pi/2)$, $(\pi,\pi/2)$, $(\pi,3\pi/2)$, $(\pi/2,0)$, $(3\pi/2,0)$, $(\pi/2,\pi)$, $(3\pi/2,\pi)$.
Le derivate seconde sono $\partial^2_{xx} f(x,y) = -\cos x \sin y$, $\partial^2_{yy} f(x,y) = -\cos x \sin y$, $\partial^2_{xy} f(x,y) = -\sin x \cos y$.
Si ha quindi:

$$D^2 f(0,\pi/2) =: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{massimo,} \qquad D^2 f(0,3\pi/2) =: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{minimo,}$$

$$D^2 f(\pi,\pi/2) =: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{minimo,} \qquad D^2 f(\pi,3\pi/2) =: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{massimo,}$$

$$D^2 f(\pi/2,0) =: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{sella,} \qquad D^2 f(3\pi/2,0) =: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{sella,}$$

$$D^2 f(\pi/2,\pi) =: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{sella,} \qquad D^2 f(3\pi/2,\pi) =: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{sella.}$$

Pertanto:
(a) la funzione assume il massimo nei punti $(2k\pi, \pi/2 + 2h\pi)$, $(\pi + 2k\pi, 3\pi/2 + 2h\pi)$, $h,k \in \mathbb{Z}$, e tale massimo vale 1.
(b) la funzione assume il minimo nei punti $(2k\pi, 3\pi/2 + 2h\pi)$, $(\pi + 2k\pi, \pi/2 + 2h\pi)$, $h,k \in \mathbb{Z}$, e tale minimo vale -1.
(c) i punti $(\pi/2 + k\pi, h\pi)$, $h,k \in \mathbb{Z}$ sono di sella.

(4) Le derivate parziali sono

$$\partial_x f(x,y) = 4x^3 + 2xy = x(4x^2 + y), \qquad \partial_y f(x,y) = x^2 + 2y.$$

Tali derivate su annullano simultaneamente solo in $(0,0)$ come si vede per sostituzione. Calcoliamo le derivate seconde: $\partial^2_{xx} f(x,y) = 12x^2 + 2y$, $\partial^2_{yy} f(x,y) = 2$, $\partial^2_{xy} f(x,y) = 2x$. Si ha quindi

$$D^2 f(0,0) =: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{semidefinita positiva.}$$

La matrice è semidefinita, per cui non possiamo immediatamente dire se $(0,0)$ sia un estremale. Osserviamo che $f(x,y) = g(x^2,y)$ dove $g(v,w) = v^2 + vw + w^2 + 3$. Studiamo il segno dell'espressione $v^2 + vw + w^2$ per $v > 0$ (infatti è $v = x^2 > 0$ se $x \neq 0$). Per $v > 0$ fissato, risolviamo $v^2 + vw + w^2 = 0$ come equazione in w. Il discriminante di tale equazione è $v^2 - 4v^2 < 0$, quindi l'espressione $v^2 + vw + w^2$ non è mai nulla se $v > 0$. In particolare (prendendo i limiti per $w \to \pm\infty$ per $v > 0$ fissato) si ottiene che tale espressione è sempre strettamente positiva. Quindi $f(x,y) = g(x^2,y) > 3 = f(0,0)$ per ogni $x \neq 0$, e quindi $(0,0)$ è di minimo assoluto stretto.

(5) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^4) + 4xy$ Le derivate parziali sono

$$\partial_x f(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y, \qquad \partial_y f(x,y) = -4y^3 + 4x.$$

Esse si annullano nei punti che soddisfano $x = y^3$, $4y^9 - 4y^3 + 4y = 0$, ovvero $x = y^3$, $y(y^8 - y^2 + 1) = 0$. Si ha la soluzione $(0,0)$. Proviamo che essa è l'unica. E' sufficiente provare che $y^8 - y^2 + 1 \neq 0$ se $y \neq 0$: infatti, se $0 < |y| \leq 1$ si ha $1 - y^2 \geq 0$, pertanto $y^8 - y^2 + 1 \geq y^8 > 0$, e se $|y| > 1$ si ha $y^8 > y^2$ da cui $y^8 - y^2 + 1 > 1 > 0$. Quindi l'unico punto critico è l'origine. Calcoliamo le derivate seconde: $\partial^2_{xx} f(x,y) = 12x^2 - 4$, $\partial^2_{yy} f(x,y) = -12y^2$, $\partial^2_{xy} f(x,y) = 4$. Si ha quindi:

$$D^2 f(0,0) =: \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{sella}$$

perché gli autovalori sono soluzioni di $\lambda^2 + 4\lambda - 16 = 0$, ovvero $\lambda = -2 \pm 2\sqrt{5}$, quindi sono di segno discorde.

CAPITOLO 10

Lezione del giorno giovedì 29 ottobre 2009 (2 ore)
Massimi e minimi per funzioni di più variabili - continuazione

Esercizio 10.1. Determinare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione:

$$f(x, y) = x^3 + xy + \lambda x + \mu y$$

abbia un punto critico $P = (1/\sqrt{3}, 0)$. Trovare quindi per la $f(x, y)$ relativa a quei particolari valori di λ e μ tutti i punti di massimo e minimo relativo.

Svolgimento. Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la funzione è C^2. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) & = 3x^2 + y + \lambda, \\ \partial_y f(x, y) & = x + \mu. \end{cases}$$

Dobbiamo imporre che esse si annullino nel punto $(1/\sqrt{3}, 0)$, pertanto si ottiene $\mu = -1/\sqrt{3}$ e $\lambda = -1$. Quindi la funzione con questi valori dei parametri risulta:

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - x - \frac{1}{\sqrt{3}}\, y,$$

e le sue derivate parziali risultano essere: $\partial_x f(x, y) = 3x^2 + y - 1$ e $\partial_y f(x, y) = x - 1/\sqrt{3}$. Tali derivate si annullano simultaneamente solo in P che pertanto è l'unico punto critico. Calcoliamo le derivate seconde: $\partial^2_{xx} f(x, y) = 6x$, $\partial^2_{yy} f(x, y) = 0$, $\partial^2_{xy} f(x, y) = 1$, pertanto si ha:

$$D^2 f(P) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni di $\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 1 = 0$, ovvero $\sqrt{3} \pm 2$, di segno discorde, quindi si ha un punto di sella.

Esercizio 10.2. Si studino, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ i punti di massimo e minimo per la funzione

$$f(x, y, z) = \cos^2(x) + y^2 - 2y + 1 + \alpha z^2.$$

Svolgimento. La funzione è C^2 su tutto $\mathbb{R}^3$. Osserviamo inoltre che scelta la curva $\gamma(t) = (0, t, 0)$, si ha $\lim_{t \to +\infty} f \circ \gamma(t) = +\infty$, pertanto la funzione non ammette punti di massimo assoluto.
Se $\alpha < 0$, scelta la curva $\gamma(t) = (0, 0, t)$, si ha $\lim_{t \to +\infty} f \circ \gamma(t) = -\infty$ quindi per $\alpha < 0$ la funzione non ammette punti di minimo assoluto.
Se $\alpha \geq 0$ si ha

$$f(x, y, z) \geq y^2 - 2y + 1 = f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, y, 0\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

e il minimo assoluto di $y \mapsto y^2 - 2y + 1$ si ha per $y = 1$. Quindi i punti $(\frac{\pi}{2} + k\pi, y, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, sono di minimo assoluto per f e vale $f(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1, 0) = 0$ per $k \in \mathbb{Z}$.

Studiamo ora gli estremali relativi. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y,z) &= -2\cos x\sin x = -\sin(2x)\\ \partial_y f(x,y,z) &= 2y-2\\ \partial_z f(x,y,z) &= 2\alpha z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{xx} f(x,y,z) &= -2\cos(2x)\\ \partial^2_{yy} f(x,y,z) &= 2\\ \partial^2_{zz} f(x,y,z) &= 2\alpha\\ \partial^2_{xy} f(x,y,z) &= \partial^2_{xz} f(x,y,z) = \partial^2_{zy} f(x,y,z) = 0.\end{aligned}$$

Distinguiamo due casi:

(1) Supponiamo $\alpha \neq 0$. Allora i punti critici sono $P_k = (k\pi/2, 1, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Si ha $\partial^2_{xx} f(P_k) = 2(-1)^{k+1}$, $\partial^2_{yy} f(P_k) = 2$ e $\partial^2_{zz}(P_k) = 2\alpha$, le altre derivate seconde sono tutte nulle. Si ha quindi

$$D^2 f(P_k) = \begin{pmatrix} 2(-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Se $\alpha > 0$, il punto P_k è un minimo per k dispari e una sella per k pari. Se P_k è di minimo, allora $f(P_k) = 0$. Se invece $\alpha < 0$ i punti P_k sono tutti di sella.

(2) Supponiamo $\alpha = 0$. Allora i punti critici sono $P_{kz} = (k\pi/2, 1, z)$, $k \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{R}$. Si ha $\partial^2_{xx} f(P_k) = 2(-1)^{k+1}$, $\partial^2_{yy} f(P_k) = 2$, le altre derivate seconde sono tutte nulle. Si ha quindi

$$D^2 f(P_{kz}) = \begin{pmatrix} 2(-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice è semidefinita, quindi la teoria generale ci dice che non potremmo concludere nulla. Tuttavia per ogni z si ha che $f(x,y,z) = f(x,y,0)$ perché la funzione non dipende da z. In particolare, detta $g(x,y) = f(x,y,0) = f(x,y,z)$, si ha che (x,y,z) è estremale relativo di f se e solo se lo è per g. La matrice hessiana di g nei punti $Q_k = (k\pi/2, 1)$ è

$$D^2 g(Q_k) = \begin{pmatrix} 2(-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $P_{kz} = (Q_k, z)$, si ha che il punto P_{kz} è un minimo per k dispari e una sella per k pari. Se P_{kz} è di minimo, allora $f(P_{kz}) = 0$.

Riassumendo:

(1) Per $\alpha > 0$ la funzione non ammette massimi assoluti, i punti critici sono $P_k = (k\pi/2, 1, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, e tali punti sono minimi relativi e assoluti per k dispari e selle per k pari. Il valore minimo di f è 0.

(2) Per $\alpha < 0$ la funzione non ammette né minimi, né massimi assoluti, i punti critici sono $P_k = (k\pi/2, 1, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, e sono tutti punti di sella.

(3) Per $\alpha = 0$, la funzione non ammette massimi assoluti, i punti critici sono $P_{kz} = (k\pi/2, 1, z)$, $k \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{R}$, e sono minimi relativi e assoluti per k dispari, e selle per k pari. Il valore minimo di f è 0.

Esercizio 10.3. Si calcolino al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i punti di massimo e minimo locali e assoluti della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x,y) = (x^2 + 3xy^2 + 2y^4)^n.$$

Svolgimento. La funzione f_n si può scrivere come composizione delle funzioni $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = x^2 + 3xy^2 + 2y^4$ e $h(s) = s^n$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, infatti:

$$f(x,y) = h(g(x,y)).$$

Distinguiamo ora i casi n dispari e n pari:

(1) La funzione h è strettamente crescente per n dispari. Pertanto per n dispari si ha

$$f(x_1,y_1) = h(g(x_1,y_1)) > h(g(x_2,y_2)) = f(x_2,y_2) \iff g(x_1,y_1) > g(x_2,y_2)$$

quindi i punti di massimo e minimo relativi e assoluti di f sono esattamente i punti rispettivamente di massimo e minimo relativo e assoluto di g, e pertanto non dipendono da n (purché n sia dispari).

Studiamo quindi la funzione g. Scelta la curva $\gamma(t) = (0,t)$ si ha che $\lim_{t\to\infty} g\circ\gamma(t) = +\infty$, quindi g non ammette massimo assoluto, e quindi nemmeno f ammette massimo assoluto.
Si ha

$$g(x,y) = \left(x + \frac{3}{2}y^2\right)^2 - \frac{1}{4}y^4$$

Scegliamo quindi la curva $\gamma(t) = (-3/2t^2, t)$ e osserviamo che $\lim_{t\to\infty} g\circ\gamma(t) = \lim_{t\to\infty} -t^4/4 = -\infty$, pertanto g non ammette minimo assoluto e quindi nemmeno f.
Studiamo i punti critici di g: le derivate parziali sono

$$\partial_x g(x,y) = 2x + 3y^2, \qquad \partial_y g(x,y) = 6xy + 8y^3 = 2y(3x + 4y^2)$$

La derivata prima rispetto ad y si annulla per $y = 0$, in tal caso la derivata prima rispetto alla x si annulla per $x = 0$. Se $y \neq 0$, la derivata prima rispetto ad y si annulla per $x = -4y^2/3$, sotituendo nella derivata prima rispetto alla x si ottiene $-8y^2/3 + 3y^2 = 0$ da cui $(-8/3+3)y^2 = 0$ che non ammette soluzioni non nulle. Quindi l'unico punto critico è l'origine e $g(0,0) = 0$. Fissato un intorno V dell'origine, consideriamo la curva $\gamma(t) = (-3/2t^2, t)$ e osserviamo che per $t > 0$ sufficientemente piccolo si ha $\gamma(t) \in V$. Proviamo questo fatto: esiste $\varepsilon > 0$ tale per cui $B((0,0),\varepsilon) \subseteq V$ per definizione di intorno, d'altra parte si ha $|\gamma(t)| = \sqrt{9/4t^4 + t^2}$ che tende a zero per $t \to 0$, pertanto esiste $\delta > 0$ tale per cui se $|t| < \delta$ si ha $|\gamma(t)| < \varepsilon$ e quindi $\gamma(t) \in B((0,0),\varepsilon) \subseteq V$.
Ma allora $g\circ\gamma(t) = -t^4/4 < 0 = f(0,0)$ per ogni $t \in]0,\delta[$ pertanto ogni intorno di 0 contiene punti dove g è minore di $g(0,0)$. D'altra parte scelta la curva $\gamma_2(t) = (t,0)$ si ha che per t sufficientemente piccolo $\gamma(t)$ appartiene ancora a V (stesso ragionamento precedente) e $g\circ\gamma(t) = t^2 > 0 = g(0,0)$ per ogni $t \neq 0$. Quindi in ogni intorno di $(0,0)$ esistono sia punti in cui g è maggiore di $g(0,0)$, sia punti dove g è minore di $g(0,0)$. Quindi $(0,0)$ è di sella per g e quindi per f.
Sebbene non indispensabile, osserviamo a margine che $(0,0)$ non è l'unico punto critico di f, perché la funzione h ammette come punto critico 0, quindi tutti i punti (x,y) con $g(x,y) = 0$ sono critici per f. Tuttavia essi non sono massimi o minimi relativi per f, altrimenti per la stretta monotonia, lo dovrebbero essere per g ma l'unico punto critico di g è $(0,0)$ che è di sella.

(2) Se n è pari, la funzione $h(s)$ è sempre non negativa e raggiunge il suo minimo assoluto per $s = 0$, quindi i punti $x^2 + 3xy^2 + y^4 = 0$ sono tutti punti di minimo assoluto e in essi f vale 0. Con lo stesso ragionamento precedente, si ha che non esistono punti di massimo assoluti. Inoltre si ha che la restrizione di h a ciascuno degli insiemi $[0,+\infty[$ e $]-\infty,0]$ è strettamente monotona L'insieme $G^+ := \{(x,y) : x^2 + 3xy^2 + y^4 > 0\}$ è aperto perché g è continua. In esso non vi sono estremali relativi per f: infatti, se vi fossero, sarebbero estremali di g perché $g(G^+) \subseteq]0,+\infty[$ e h su tale insieme è strettamente monotona. Tuttavia come già visto g ammette come unico punto critico $(0,0) \notin G^+$. Analogamente, non vi sono estremali relativi di g e quindi di f su $G^- := \{(x,y) : x^2 + 3xy^2 + y^4 < 0\}$. Pertanto gli unici estremali di f in questo caso sono i punti di minimo assoluto $x^2 + 3xy^2 + y^4 = 0$ e in essi f vale 0.

Esercizio 10.4. Si studi la natura del punto $(0,0)$ per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \log(1+x^2) - x^2 + xy^2 + y^3 + 2.$$

Svolgimento. Osserviamo che $f(0,0) = 2$. Il punto $(0,0)$ è un punto critico: $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$. Consideriamo la curva $\gamma(t) = (0,t)$. Si ha per $t \neq 0$ che $f\circ\gamma(t) = t^3 + 2$. Fissato un intorno dell'origine, per $|t|$ sufficientemente piccolo, si ha che $\gamma_1(t)$ appartiene tale intorno: infatti $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = (0,0)$. Inoltre per $t > 0$ si ha $f\circ\gamma(t) > 2 = f(0,0)$ e $f\circ\gamma(t) < 2 = f(0,0)$ per $t < 0$. Pertanto $(0,0)$ è di sella.

Esercizio 10.5. Si determinino gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto per le funzioni $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x,y,z) = x^2(y-1)^3(z+2)^2, \qquad g(x,y,z) = 1/x + 1/y + 1/z + xyz.$$

Svolgimento. Consideriamo la curva $\gamma(t) = (1,t,1)$. Si ha $f\circ\gamma_1(t) = 9(t-1)^3$, pertanto per $t \to \pm\infty$ il limite di $f\circ\gamma_1(t)$ è $\pm\infty$, quindi non esistono massimi o minimi assoluti.
In modo analogo, $g\circ\gamma_1 = 2 + 1/t + t$ pertanto per $t \to \pm\infty$ il limite di $g\circ\gamma_1(t)$ è $\pm\infty$, quindi non esistono massimi o minimi assoluti.

Esercizio 10.6. Si determinino al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ gli estremi assoluti e locali della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha \log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Svolgimento. In coordinate polari si ha

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 2\rho^{2\alpha}\log\rho =: g_\alpha(\rho)$$

Se $\alpha = 0$, si ha $\lim_{\rho\to 0^+} g_0(\rho) = -\infty$ e $\lim_{\rho\to+\infty} g_0(\rho) = +\infty$ quindi non vi sono massimi o minimi assoluti. Si ha che esiste un intorno dell'origine dove g_0 è negativa, mentre $g_0(0) = 0$, pertanto 0 è di massimo relativo. La funzione g_0 risulta strettamente crescente, per cui non vi sono altri massimi o minimi locali.
Se $\alpha < 0$, si ha $\lim_{\rho\to 0^+} g_0(\rho) = -\infty$, quindi non vi sono minimi assoluti, invece $\lim_{\rho\to+\infty} g_\alpha(\rho) = 0 = g_\alpha(1)$, pertanto vi sono massimi assoluti. Come prima, si ha che esiste un intorno dell'origine dove g_α è negativa, mentre $g_\alpha(0) = 0$, pertanto 0 è di massimo relativo. La derivata di g_α è

$$g'_\alpha(\rho) = 4\alpha\rho^{2\alpha-1}\log\rho + 2\rho^{2\alpha-1} = 2\rho^{2\alpha-1}(2\alpha\log\rho + 1)$$

e si annulla solo per $\rho = e^{-1/2\alpha}$ che, quindi, è di massimo assoluto. Pertanto i punti $x^2+y^2 = e^{-1/\alpha}$ sono punti di massimo assoluto.
Se $\alpha > 0$ si ha che f è continua e $\lim_{\rho\to 0^+} g_\alpha(\rho) = 0 = g(1)$ e $g_\alpha(\rho) \leq 0$ in un intorno di 0, quindi l'origine è un massimo relativo. Inoltre si ha $\lim_{\rho\to+\infty} g_0(\rho) = +\infty$, quindi non esistono massimi assoluti. Poiché $g_\alpha(0) = g_\alpha(1) = 0$, si ha che esiste almeno un estremale in $[0,1]$. La derivata di g_α è

$$g'_\alpha(\rho) = 4\alpha\rho^{2\alpha-1}\log\rho + 2\rho^{2\alpha-1} = 2\rho^{2\alpha-1}(2\alpha\log\rho + 1)$$

e si annulla solo per $\rho = e^{-1/2\alpha} < 1$ perché $\alpha > 0$, quindi tale punto deve essere di minimo relativo e assoluto: infatti se fosse di massimo, sarebbe di massimo relativo per il teorema di Rolle, essendo la funzione superiormente illimitata, dovrebbe ammettere un altro minimo (il lettore è incoraggiato a farsi un disegno qualitativo per rendersi conto della situazione). Pertanto i punti $x^2+y^2 = e^{-1/\alpha}$ sono punti di minimo assoluto.

CAPITOLO 11

Lezione del giorno martedì 3 novembre 2009 (1 ora)
Massimi e minimi per funzioni di più variabili - continuazione

Esercizio 11.1. Si determini al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la natura del punto $(0,0)$ per le funzioni definite da
$$f(x,y) = 2 + \alpha x^2 + 4xy + (\alpha - 3)y^2 + (2x+y)^4.$$

Svolgimento. La funzione $f \in C^2$ e si ha $f(0,0) = 2$. Calcoliamo ora le derivate di f:
$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= 2\alpha x + 4y + 8(2x+y)^3\\
\partial_y f(x,y) &= 4x + 2(\alpha-3)y + 4(2x+y)^3\\
\partial_{xx} f(x,y) &= 2\alpha + 48(2x+y)^2\\
\partial_{xy} f(x,y) &= 4 + 24(2x+y)^2\\
\partial_{yy} f(x,y) &= 2(\alpha-3) + 12(2x+y)^2.
\end{aligned}$$
Si ha quindi che $(0,0)$ è punto critico e
$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 4 \\ 4 & 2(\alpha-3) \end{pmatrix}.$$
Gli autovalori di questa matrice sono le soluzioni di
$$\lambda^2 - 2(2\alpha-3)\lambda + 4(\alpha^2 - 3\alpha - 4) = 0$$
ossia
$$\lambda = 2\alpha - 3 \pm \sqrt{4\alpha^2 + 9 - 12\alpha - 4\alpha^2 + 12\alpha + 16} = 2\alpha - 3 \pm 5,$$
da cui $\lambda_1 = 2(\alpha+1)$ e $\lambda_2 = 2(\alpha-4)$ e $\lambda_1 > \lambda_2$. Se $\lambda_2 > 0$, ovvero $\alpha > 4$ allora gli autovalori sono entrambi positivi e $(0,0)$ è di minimo. Se $\lambda_1 < 0$, ovvero $\alpha < -1$ allora gli autovalori sono entrambi negativi e $(0,0)$ è di massimo. Se $-1 < \alpha < 4$, allora $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_1 > 0$, quindi si ha una sella.
Nei casi $\alpha \in \{-1, 4\}$ la matrice è semidefinita, quindi dobbiamo ricorrere a metodi differenti.
Studiamo i casi limite:

(1) se $\alpha = 4$ allora per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ si ha
$$f(x,y) = 2 + 4x^2 + 4xy + y^2 + (2x+y)^4 = 2 + (2x+y)^2 + (2x+y)^4 > 2,$$
quindi l'origine è un minimo relativo e assoluto, non è stretto perché $f(x,-2x) = 2$ per ogni x.

(2) se $\alpha = -1$ allora si ha
$$f(x,y) = 2 - x^2 + 4xy - 4y^2 + (2x+y)^4 = 2 - (x-2y)^2 + (2x+y)^4.$$
Scelta la curva $\gamma_1(t) = (2t,t)$, si ha per $t > 0$ che $f \circ \gamma_1(t) = 2 + 5^4 t^4 > 2$, d'altra parte scelta la curva $\gamma_2(t) = (t,-2t)$, si ha per $t > 0$ che $f \circ \gamma_2(t) = 2 - 25t^2 < 2$. Poiché per $t \to 0$ si ha che $\gamma_1(t) \to (0,0)$ e $\gamma_2(t) \to (0,0)$, in ogni intorno di $(0,0)$ vi sono punti di $\gamma_1(t)$, dove f è strettamente maggiore di $f(0,0)$ e punti di $\gamma_2(t)$, dove f è strettamente minore di $f(0,0)$. Quindi $(0,0)$ è di sella.

Esercizio 11.2. Si calcolino massimi e minimi della funzione $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2 + 3x$.

Svolgimento. Scelta la curva $\gamma_1(t) = (t,0)$ si ha $\lim_{t\to\pm\infty} f \circ \gamma_1(t) = \pm\infty$, quindi non vi sono massimi o minimi assoluti. Le derivate parziali sono
$$\partial_x f(x,y) = 3x^2 - 6y + 3, \qquad \partial_y f(x,y) = -6x + 6y.$$
Sostituendo, si ha che esse si annullano simultaneamente solo su $(1,1)$. Calcoliamo le derivate seconde: $\partial^2_{xx} f(x,y) = 6x$, $\partial^2_{yy} f(x,y) = 6$, $\partial^2_{xy} f(x,y) = -6$. Si ha quindi:
$$D^2 f(1,1) =: \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le radici di $\lambda^2 - 12\lambda = 0$, ovvero $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 12 > 0$. La matrice è semidefinita, per cui per determinare la natura del punto critico dobbiamo ricorrere ad altri metodi. Osserviamo che $f(1,1) = 1$. Calcoliamo un autovettore $v = (v_1, v_2)$ corrispondente all'autovalore nullo, ovvero una base di $\ker D^2 f(1,1)$: si può scegliere $(v_1, v_2) = (1,1)$. Consideriamo la curva $\gamma(t) = (1,1) + tv$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} f \circ \gamma(t) &= (1+t)^3 - 6(1+t)^2 + 3(1+t)^2 + 3(1+t) = (1+t)((1+t)^2 - 3(1+t) + 3) \\ &= (1+t)(-5 - 5t^2 - 10t + 3 + 3t + 3) = (1+t)(1 + t^2 + 2t - 3 - 3t + 3) \\ &= (1+t)(t^2 - t + 1) = t^3 + 1. \end{aligned}$$

Per $t \to 0$ si ha $\gamma(t) \to (1,1)$. D'altra parte se $t > 0$ si ha $f \circ \gamma(t) > 1$ e se $t < 0$ si ha $f \circ \gamma(t) < 1$ quindi in ogni intorno di $(1,1)$ vi sono punti dove f è maggiore di $f(1,1) = 1$ e punti dove f è minore di $f(1,1) = 1$. Quindi $(1,1)$ è di sella.

Esercizio 11.3. Si determini al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la natura del punto $(0,0,0)$ per le funzioni definite da

$$g(x,y,z) = 5 + \alpha x^2 + 2xy + 4\alpha xz - 6y^2 - 3z^2.$$

Svolgimento. Si ha $g(0,0,0) = 5$, inoltre

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= 5 - \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\,y\right)^2 + \frac{x^2}{6} + \alpha x^2 + 4\alpha xz - 3z^2 \\ &= 5 - \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\,y\right)^2 + \frac{x^2}{6} - \left(\sqrt{3}z - \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}x\right)^2 + \frac{4\alpha^2}{3}x^2 + \alpha x^2 \\ &= 5 - \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\,y\right)^2 - \left(\sqrt{3}z - \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}\,x\right)^2 + \frac{1}{6}(8\alpha^2 + 6\alpha + 1)x^2. \\ &= 5 - A(x,y) - B(x,z) + Cx^2 \end{aligned}$$

Distinguiamo vari casi:

(1) se $C < 0$ ovvero $8\alpha^2 + 6\alpha + 1 < 0$, ovvero $-1/2 < \alpha < -1/4$, si ha per ogni $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ che $g(x,y,z) < 5$, perché $A(x,y) \geq 0$, $B(x,y) \geq 0$ e $Cx^2 < 0$ se $x \neq 0$. In questi casi si ha quindi che l'origine è un massimo assoluto e locale per g. Osserviamo che $g(x,y,z) = g(0,0,0)$ solo se si verificano simultaneamente $x = A(x,y) = B(x,z) = 0$, quindi $x = y = z = 0$ (si ricordi che in questo caso $\alpha \neq 0$), pertanto il massimo è stretto.

(2) se $C = 0$, quindi $\alpha \in \{-1/2, -1/4\}$, si ha che per ogni $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ vale $g(x,y,z) \leq 5$, quindi l'origine è un massimo assoluto e locale. L'uguaglianza vale solo se $A(x,y) = B(x,z) = 0$, ovvero lungo la curva $\gamma(t) = (6t, t, 4\alpha t)$. Poiché $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = (0,0,0)$, ogni intorno U dell'origine contiene infiniti punti differenti dall'origine dove g assume il valore 5, tali punti sono i punti $\gamma(t)$ per $t \neq 0$, $|t|$ sufficientemente piccolo (che dipende solo da U), pertanto il massimo non è stretto.

(3) se $C > 0$, quindi $\alpha \notin [-1/2, -1/4]$, allora lungo la curva γ definita nel punto precedente si ha $f \circ \gamma(t) = 5 + 6Ct^2$ che è strettamente maggiore di 5 se $t \neq 0$. D'altra parte, lungo la curva $\gamma_2(t) = (0, t, 0)$ si ha $f \circ \gamma_2(t) = 5 - 6t^2$, che è strettamente minore di 5 se $t \neq 0$. Le due curve tendono entrambe a zero per $t \to 0$, ciò significa che scelto un qualunque intorno di 0 esse vi appartengono se $|t|$ è sufficientemente piccolo. Ogni intorno di zero quindi contiene sia punti dove g è strettamente minore di $g(0,0,0) = 5$ che punti dove g è strettamente maggiore di $g(0,0,0) = 5$. Quindi l'origine è punto di sella.

CAPITOLO 12

Lezione del giorno giovedì 5 novembre 2009 (2 ora) Massimi e minimi vincolati per funzioni di più variabili

Definizione 12.1. Siano $f, \varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ funzioni. Diremo che $\bar{x}$ è un massimo (minimo) relativo per f sotto il vincolo $\varphi = 0$ se $\varphi(\bar{x}) = 0$ e $\bar{x}$ è un massimo (minimo) relativo per $f_{|\varphi=0}$. Chiameremo estremali vincolati per f sotto il vincolo $\varphi = 0$ i punti di massimo e minimo relativi per f sotto il vincolo $\varphi = 0$.

Teorema 12.2 (Moltiplicatori di Lagrange, caso delle ipersuperfici). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$. Sia $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Allora se $\bar{x} \in \Omega$ è estremale relativo di f sotto il vincolo $\varphi = 0$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui si ha:*

$$Df(\bar{x}) + \lambda D\varphi(\bar{x}) = 0.$$

Esercizio 12.3. Trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 4x$ sotto la condizione $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Svolgimento. Poniamo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 4x + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Si ha

$$\begin{aligned}\partial_x L(x, y, \lambda) &= 3x^2 + 4y^2 - 4 + 2\lambda x\\ \partial_y L(x, y, \lambda) &= 8xy + 2\lambda y = 2y(\lambda + 4x).\end{aligned}$$

Si deve avere $\partial_x L(x, y) = \partial_y L(x, y) = 0$, si ricava quindi $y = 0$ oppure $4x = -\lambda$ dalla seconda equazione. Se $y = 0$, si ricava dall'equazione del vincolo che $x = \pm 1$.
Se invece $y \neq 0$, allora $x = -\lambda/4$ e dall'equazione del vincolo si ricava che $y^2 = 1 - \lambda^2/16$, per cui $0 \le \lambda \le 4$. Sostituendo nella prima equazione, si ha

$$3\frac{\lambda^2}{16} + 4\left(1 - \frac{\lambda^2}{16}\right) - 4 + 2\lambda\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = 0$$

ovvero $\lambda = 0$ cui corrisponde $x = 0$ e $y = \pm 1$. Si debbono quindi studiare i punti $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Per calcolo diretto si ricava $f(1, 0) = -3$, $f(-1, 0) = 3$, $f(0, \pm 1) = 0$. Quindi $(-1, 0)$ è di massimo assoluto vincolato. e $(1, 0)$ di minimo assoluto vincolato.
Si poteva procedere anche nel modo seguente: il vincolo può essere parametrizzato in coordinate polari da $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

$$h(\theta) := f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^3\theta + 4\cos\theta\sin^2\theta - 4\cos\theta$$

Derivando si ha:

$$h'(\theta) = -3\cos^2\theta\sin\theta + 8\cos^2\theta\sin\theta - 4\sin^3\theta + 4\sin\theta = \sin\theta(5\cos^2\theta - 4\sin^2\theta + 4) = 9\cos^2\theta\sin\theta$$

che si annulla per $\theta = 0, \pm\pi/2, \pm, \pi$. La derivata seconda è:

$$h''(\theta) = 18\cos\theta\sin^2\theta + 9\cos^3\theta = 9\cos\theta(2\sin^2\theta + 1)$$

Si ha allora $h''(\pm\pi/2) = 0$, $h''(0) = 9$ minimo locale, $h''(\pm\pi) = -9$ massimo locale. Si ha $h(\pm\pi) = 0$, $h(0) = f(1, 0) = -3$ e $h(\pm\pi) = f(-1, 0) = 3$, il che conferma il risultato precedente.

Esercizio 12.4. Trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x + y$ sotto la condizione $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$.

Svolgimento. Poniamo $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$ e

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y) = x + y + \lambda(x^2 + 4y^2 - 1).$$

Si ha

$$\partial_x L(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda x$$
$$\partial_y L(x,y,\lambda) = 1 + 8\lambda y.$$

Si deve avere $\partial_x L(x,y) = \partial_y L(x,y) = 0$, in particolare si ha $\lambda \neq 0$. Sottraendo membro a membro le due equazioni, si ricava $\lambda(x-4y) = 0$ e quindi $x = 4y$. Sostituendo nell'equazione del vincolo si ha $20y^2 = 1$ quindi i punti da studiare sono $\pm(1/\sqrt{5}, 1/(2\sqrt{5}))$. Si ha $f(2/\sqrt{5}, 1/(2\sqrt{5})) = \sqrt{5}/2$ massimo assoluto vincolato e $f(-2/\sqrt{5}, -1/(2\sqrt{5})) = -\sqrt{5}/2$ minimo assoluto vincolato.
Si poteva procedere anche nel modo seguente: il vincolo è $x^2 + (2y)^2 - 1 = 0$, per cui in coordinate polari diviene $x = \cos\theta$, $2y = \sin\theta$. La funzione diviene

$$h(\theta) := f\left(\cos\theta, \frac{\sin\theta}{2}\right) = \cos\theta + \frac{\sin\theta}{2}.$$

Derivando si ha: $h'(\theta) = -\sin\theta + \cos\theta/2$, la derivata si annulla per θ che soddisfa $\tan\theta = 1/2$. Si ha quindi $\begin{cases} \xi^2 + \zeta^2 = 1 \\ \zeta = \xi/2 \end{cases}$, quindi $5\zeta^2 = 1$, da cui $\zeta = \pm 1/\sqrt{5} = \sin\theta$ e $\xi = \pm 2/\sqrt{5} = \cos\theta$. Pertanto i punti sono $(\xi, 2\zeta) = \pm(2/\sqrt{5}, 1/(2\sqrt{5}))$. La derivata seconda è $h''(\theta) = -\cos\theta - \sin\theta/2 = -\cos\theta(1 + \tan\theta/2)$, quindi $(2/\sqrt{5}, 1/(2\sqrt{5}))$ è di massimo e $-(2/\sqrt{5}, 1/(2\sqrt{5}))$ è di minimo, il che conferma il risultato precedente.

Esercizio 12.5. Trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x,y) = \sin x + \sin y$ sotto la condizione $\cos x - \cos y + 1 = 0$.

Svolgimento. Osserviamo che sia la funzione che il vincolo sono periodici di periodo 2π, pertanto ci aspettiamo la stessa periodicità anche nel risultato finale. Poniamo $g(x,y) = \cos x - \cos y + 1$ e

$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y) = \sin x + \sin y + \lambda(\cos x - \cos y + 1).$$

Si ha

$$\partial_x L(x,y,\lambda) = \cos x - \lambda \sin x$$
$$\partial_y L(x,y,\lambda) = \cos y + \lambda \sin y.$$

Si deve avere $\partial_x L(x,y) = \partial_y L(x,y) = 0$, in particolare $\sin x \neq 0$ e $\sin y \neq 0$, da cui $\cot x = \cot(-y)$. Pertanto $x = -y + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nel vincolo, si ha $\cos x - \cos(-x + k\pi) + 1 = 0$ che si riscrive come $\cos x - \cos(x - k\pi) + 1 = 0$, ovvero $\cos x - (-1)^k \cos x + 1 = 0$ e quindi $(1 - (-1)^k)\cos x = -1$. Se $k = 2j$ è pari questa equazione non ha soluzione. Se $k = 2j+1$ è dispari si ha $\cos x = -1/2$ e quindi $x_1 = 2/3\pi + 2h\pi$, e $x_2 = 4/3\pi + 2h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, cui corrispondono $y_1 = -2/3\pi + 2h\pi + (2j+1)\pi = \pi/3 + 2(j-h)\pi$ e $y_2 = -4/3\pi - 2h\pi + (2j+1)\pi = -1/3\pi + 2(j-h)\pi$. Allora i punti da studiare sono ($m = j - h \in \mathbb{Z}$)

$$P_{hm} = \left(\frac{2}{3}\pi + 2h\pi, \frac{\pi}{3} + 2m\pi\right), \qquad Q_{hm} = \left(\frac{5}{3}\pi + 2h\pi, -\frac{2}{3}\pi + 2m\pi\right)$$

Si ha per ogni $h, m \in \mathbb{Z}$ che $f(P_{hm}) = \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$ massimo assoluto vincolato e $f(Q_{hm}) = -\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2 = -\sqrt{3}$ minimo assoluto vincolato.

Esercizio 12.6. Trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x + 3$ sotto la condizione $x^2 + y^2 = 4$.

Svolgimento. Poniamo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ e

$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Si ha

$$\partial_x L(x,y,\lambda) = 6x - 6 - 2\lambda x$$
$$\partial_y L(x,y,\lambda) = 8y - 2\lambda y = 2y(4 - \lambda).$$

Si deve avere $\partial_x L(x,y) = \partial_y L(x,y) = 0$. Dalla seconda equazione si ricava $y = 0$ oppure $\lambda = 4$. Sostituendo nel vincolo, si ottiene per $y = 0$, $x = \pm 2$. Se invece $\lambda = 4$, si ottiene dalla prima equazione $x = -3$, e sostituendo nel vincolo si trova $9 + y^2 = 4$ che non ha soluzioni reali. Pertanto i punti da studiare sono $(2,0)$ e $(-2,0)$. Si ha $f(2,0) = 3$ minimo assoluto e $f(-2,0) = 27$ massimo assoluto.
Si poteva procedere anche nel modo seguente: il vincolo g si parametrizza in coordinate polari ponendo $x = 2\cos\theta$ e $y = 2\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Si ha

$$h(\theta) = f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = 12\cos^2\theta + 16\sin^2\theta - 12\cos\theta + 3 = 4\sin^2\theta - 12\cos\theta + 15$$

Derivando si ottiene:

$$h'(\theta) = 8\sin\theta\cos\theta + 12\sin\theta = 4\sin\theta(2\cos\theta+3)h''(\theta) \qquad = 4\cos\theta(2\cos\theta+3) + 4\sin\theta(-2\sin\theta)$$

Si ha $h'(\theta) = 0$ per $\theta = 0, \pi$ e $h''(0) = 20 > 0$ e $h''(\pi) = -4 < 0$, quindi $(2, 0)$ è di minimo e $(-2, 0)$ è di massimo.

Esercizio 12.7. Trovare il massimi e minimi della funzione $f(x, y) = x(x^2 + y^2)$ sotto la condizione $xy = 1$.

Svolgimento. Osserviamo che l'insieme che definisce il vincolo non è compatto e la funzione non ammette massimi o minimi assoluti (lo si verifichi lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1/t)$ per $t \to \pm\infty$). Si ha $L(x, y, \lambda) = x(x^2 + y^2) + \lambda xy$, le cui derivate sono $\partial_x L(x, y, \lambda) = 3x^2 + y^2 + \lambda y$ e $\partial_y L(x, y, \lambda) = 2yx + \lambda x = x(2y + \lambda)$. Esse debbono essere entrambe nulle. Dalla seconda si ricava $x = 0$ oppure $y = -\lambda/2$. Tuttavia $x = 0$ non rispetta il vincolo, pertanto si ha $y = -\lambda/2$. Si deve quindi avere $\lambda \neq 0$ per rispettare il vincolo, e quindi $x = -2/\lambda$. Sostituendo nella prima equazione si trova:

$$3\,\frac{4}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{12}{\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{4},$$

le cui soluzioni reali sono $\lambda = \pm 2\sqrt[4]{3}$. I punti da studiare sono quindi $\pm(1/\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3})$. Si ha $f(1/\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}) = 4/3^{3/4}$ massimo relativo e e $f(-1/\sqrt[4]{3}, -\sqrt[4]{3}) = -4/3^{3/4}$ minimo relativo.
Si poteva procedere anche nel modo seguente: poiché $x = 0$ non rispetta il vincolo, poniamo $y = 1/x$ e studiamo $h(x) = f(x, 1/x) = x^3 + 1/x$. La derivata è $h'(x) = 3x^2 - 1/x^2$, essa si annulla se $3x^4 = 1$, quindi $x = \pm 1/\sqrt[4]{3}$ Si ha poi $h(1/\sqrt[4]{3}) = 4/3^{3/4}$ massimo relativo e $h(-1/\sqrt[4]{3}) = -4/3^{3/4}$ minimo relativo.

Esercizio 12.8. Trovare il massimi e minimi della funzione $f(x, y) = e^x + e^y$ sotto la condizione $x + y = 2$.

Svolgimento. Posto $g(x, y) = x + y - 2$, osserviamo che il vincolo $S = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ non è compatto. La funzione non ammette massimo assoluto (lo si verifichi sulla curva $\gamma(t) = (t, 2 - t)$ per $t \to +\infty$. Se (x_n, y_2) è una qualunque successione che tende all'infinito rispettando il vincolo si ha che una delle due componenti tende a $+\infty$ e l'altra tende a $-\infty$, ciò implica che esiste il limite di f_S per $(x, y) \to \infty$, $(x, y) \in S$ e vale $+\infty$. Per cui f ammette minimo assoluto. Si ha $L(x, y, \lambda) = e^x + e^y + \lambda(x + y - 2)$, le cui derivate sono $\partial_x L(x, y, \lambda) = e^x + \lambda$ e $\partial_y L(x, y, \lambda) = e^y + \lambda$ Esse debbono essere entrambe nulle. Si ha quindi $e^x = e^y = -\lambda$ da cui per la stretta monotonia dell'esponenziale $x = y$. Sostituendo nel vincolo, si ottiene $x = y = 1$ come unico punto critico vincolato, che quindi è di minimo assoluto e $f(1, 1) = 2e$.
Si poteva anche procedere nel modo seguente: si ha $x = 2 - y$, per cui

$$h(y) = f(2 - y, y) = e^{2-y} + e^y.$$

Derivando si ottiene $h'(y) = -e^{2-y} + e^y$, essa si annulla se $-e^2 + e^{2y} = 0$, quindi $y = 1$ il che implica $x = 1$. La derivata seconda è $h''(y) = e^{2-y} + e^y$ e $h''(1) = 2e > 0$, quindi $(1, 1)$ è di minimo assoluto.

Esercizio 12.9. Fra tutti i parallelepipedi retti a base rettangolare inscritti in un ellissoide, trovare quello di volume massimo.

Svolgimento. L'ellissoide $\mathcal{E}$ di semiassi $a, b, c > 0$ centrato nell'origine ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Un parallelepipedo retto P centrato nell'origine è $[-x, x] \times [-y, y] \times [-z, z]$ e il suo volume è $V(x, y, z) = 8xyz$ con $x, y, z \geq 0$. Si noti che P è inscritto in $\mathcal{E}$ se e solo se $(x, y, z) \in \mathcal{E}$. Pertanto il problema è di massimizzare V soggetto al vincolo $\mathcal{E}$.

$$L(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

Osserviamo che se una tra x, y, z è nulla, allora $V = 0$ e quindi non è di certo un massimo, pertanto si deve avere $xyz > 0$ Le derivate sono:

$$\begin{cases} \partial_x L(x, y, z, \lambda) &= 8yz + 2\lambda x/a^2 \\ \partial_y L(x, y, z, \lambda) &= 8xz + 2\lambda y/b^2 \\ \partial_x L(x, y, z, \lambda) &= 8xy + 2\lambda z/c^2 \end{cases}$$

Esse devono essere tutte nulle. Si ha $\lambda \neq 0$, altrimenti si avrebbe $yz = 0$ e quindi una delle coordinate sarebbe nulla. Moltiplicando la prima equazione per $x \neq 0$, la seconda per $y \neq 0$ e la terza per $z \neq 0$ si ottiene $x^2/a^2 = y^2/b^2 = z^2/c^2$. Sostituendo nell'espressione del vincolo si ottiene $x = a/\sqrt{3}$, $y = b/\sqrt{3}$, $z = c/\sqrt{3}$, e il volume massimo è $V = 8abc/(3\sqrt{3})$. Nel caso particolare di una sfera di raggio $r > 0$, si ha $a^2 = b^2 = c^2 = r^2$, e si ottiene quindi un cubo $x = y = z = r/\sqrt{3}$.

CAPITOLO 13

Lezione del giorno martedì 10 novembre 2009 (1 ora)
Teorema della funzione implicita e inversa

Teorema 13.1 (Dini in $\mathbb{R}^2$). *Sia $D \subseteq R^2$ aperto, $f : D \to \mathbb{R}$ continua, $(x_0, y_0) \in D$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$. Supponiamo che in un intorno di (x_0, y_0) esista continua $\partial_y f(x, y)$ e sia $\partial_y f(x, y) \neq 0$. Esistono allora U e V intorni in $\mathbb{R}$ rispettivamente di x_0 e y_0, ed un'unica funzione continua $\varphi : U \to V$ tali che:*

$$\{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\} \cap (U \times V) = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}, \qquad \varphi(x_0) = y_0.$$

Si dirà che φ esplicita *localmente f rispetto alla variabile x in un intorno di x_0.*

Proposizione 13.2. *Nelle ipotesi precedenti, si assuma che f sia differenziabile in (x_0, y_0). Allora φ è derivabile in x_0 e vale:*

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\varphi_y f(x_0, y_0)}.$$

In particolare se f è differenziabile in un intorno di (x_0, y_0), allora

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))}, \qquad \forall x \in U.$$

Teorema 13.3 (Dini). *Siano X, Y, Z spazi normati completi, D aperto in $X \times Y$, $f : D \to \mathbb{R}$ continua, $(x_0, y_0) \in D$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$. Supponiamo che in un intorno di (x_0, y_0) esista continua $\partial_Y f(x, y)$ e che $\partial_Y f(x_0, y_0)$ sia isomorfismo di Y su Z. Esistono allora $U \subset X$ e $V \subset Y$ intorni rispettivamente di x_0 e y_0, ed un'unica funzione continua $\varphi : U \to V$ tali che:*

$$\{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\} \cap (U \times V) = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}, \qquad \varphi(x_0) = y_0.$$

Si dirà che φ esplicita *localmente f rispetto alle variabili x in un intorno di x_0. Se poi f è differenziabile in (x_0, y_0), si ha:*

$$\varphi'(x_0) = -\Big(\partial_Y f(x_0, y_0)\Big)^{-1} \circ \partial_X f(x_0, y_0).$$

Esercizio 13.4. Dimostrare che esiste una ed una sola funzione continua e derivabile $y = \varphi(x)$ definita in un intorno di $x = 2$ soddisfacente all'equazione:

$$x^2 + y^3 - 2xy - 1 = 0,$$

con la condizione $\varphi(2) = 1$. Calcolarne la derivata prima e seconda.

Svolgimento. Poniamo $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - 1$, $P = (2, 1)$. Si ha $f(P) = 0$. Calcoliamo $\partial_y f(x, y) = 3y^2 - 2x$ e osserviamo che $\partial_y f(P) = -1 \neq 0$. Per il Teorema di Dini esiste una ed una sola funzione continua φ definita in un intorno di 2 tale che $F(x, \varphi(x)) = 0$ e $\varphi(2) = 1$. Poiché $f \in C^1$, si ha che φ è C^1, e si ha

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} = -\frac{2x - 2\varphi(x)}{3\varphi^2(x) - 2x},$$

In particolare, $\varphi'(2) = 2$.
Derivando ulteriormente, si ottiene:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = -\frac{(2 - 2\varphi'(x))(3\varphi^2(x) - 2x) - (2x - 2\varphi(x))(6\varphi(x)\varphi'(x) - 2)}{(3\varphi^2(x) - 2x)^2},$$

In particolare, sostituendo $x = 2$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi'(2) = 2$, si ha $\varphi''(2) = 1/16$.
Si poteva procedere per la prima parte anche nel modo seguente:

$$df(x, y) = \partial_x f(x, y)\, dx + \partial_y f(x, y)\, dy = 2(x - y)\, dx + 2(3y^2 - x)\, dy$$

Questo implica in particolare che $\nabla f(x, y) = 2(x-y, 3y^2-x)$. Tale vettore è ortogonale all'insieme $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ nel punto $(x, y) \in S$. Ma allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che la retta $C + df(x, y)(h, k) = 0$ (le variabili sono (h,k)) sia tangente a tale insieme in (x,y). Nel punto $(2,1)$ si ha che tale retta è $C+2h-k=0$. Essa deve passare per $(2,1)$, quindi posto $h=2$, $k=1$ si ha $C=-3$. L'equazione della tangente in $(2,1)$ è quindi $k=2h-3$, pertanto $\varphi'(2)=2$, ovvero il coefficiente angolare della tangente.

Esercizio 13.5. Mostrare che l'equazione:

$$xe^y - y + 1 = 0,$$

definisce, in un intorno del punto $x=0$, una ed una sola funzione continua implicita $y=\varphi(x)$, che per $x=0$ assume il valore 1. Calcolarne derivata prima e seconda.

Svolgimento. Poniamo $f(x,y)=xe^y-y+1$, $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Si ha $f(0,1)=0$. Calcoliamone le derivate $\partial_x f(x,y)=e^y$, $\partial_y f(x,y)=xe^y-1$. Si ha $\partial_y f(0,1)=-1\neq 0$, pertanto è possibile applicare il teorema di Dini e concludere l'esistenza di una funzione φ implicitamente definita da $f(x,y)=0$ in un intorno di $(0,1)$ con $\varphi(0)=1$. Tale funzione risulta C^1 perché $f\in C^1$. Si ha:

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{xe^y-1} = -\frac{e^{\varphi(x)}}{xe^{\varphi(x)}-1}$$

Si ricava $\varphi'(0)=e$. Derivando si ottiene:

$$\varphi''(x) = -\frac{e^{\varphi(x)}\varphi'(x)(xe^{\varphi(x)}-1)-e^{\varphi(x)}(e^{\varphi(x)}+xe^{\varphi(x)}\varphi'(x))}{(xe^{\varphi(x)}-1)^2} = \frac{e^{2\varphi(x)}(1-x\varphi'(x))}{(xe^{\varphi(x)}-1)^2},$$

da cui sostituendo si ha $\varphi''(0)=e^2$.

Esercizio 13.6. Provare che l'equazione

$$x^2y - z^3 + 4xy^3z + x^3z + 30 = 0$$

definisce, in un intorno del punto $(1,2)$, una funzione continua e parzialmente derivabile $z=\varphi(x,y)$ che per $x=1$, $y=2$ assume il valore -1. Calcolare le derivate parziali di φ.

Svolgimento. Poniamo $f(x,y,z)=x^2y-z^3+4xy^3z+x^3z+30$, osserviamo che $f(1,2,-1)=2+1-32-1+30=0$. Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y,z) &= 2xy+4xy^3+3x^2z\\ \partial_y f(x,y,z) &= x^2+12xy^2z\\ \partial_z f(x,y,z) &= -3z^2+4xy^3+x^3\end{aligned}$$

Si ha $\partial_z f(1,2,-1)=-3+32+1=30\neq 0$, pertanto è possibile applicare il teorema di Dini ed ottenere così una funzione $z=\varphi(x,y)$ definita in un intorno di $(1,2)$ con $\varphi(1,2)=-1$. Tale funzione è C^1 perché $f\in C^1$. Calcoliamone le derivate parziali:

$$\begin{aligned}\partial_x\varphi(x,y) &= -\frac{\partial_x f(x,y,\varphi(x,y))}{\partial_z f(x,y,\varphi(x,y))} = -\frac{2xy+4xy^3+3x^2\varphi(x,y)}{-3\varphi^2(x,y)+4xy^3+x^3}\\ \partial_y\varphi(x,y) &= -\frac{\partial_x f(x,y,\varphi(x,y))}{\partial_z f(x,y,\varphi(x,y))} = -\frac{x^2+12xy^2\varphi(x,y)}{-3\varphi^2(x,y)+4xy^3+x^3}\end{aligned}$$

In particolare si ha $\partial_x\varphi(1,2)=31/30$ e $\partial_y\varphi(1,2)=47/30$.

Esercizio 13.7. Il sistema:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+2=0\\ f_2(x,y,z)=xy+2yz-xz+7=0,\end{cases}$$

è verificato per $x=1$, $y=-1$, $z=2$. Far vedere che esso definisce y e z come funzioni implicite della x in un intorno di $x=1$ e che $y(x)$ e $z(x)$ assumono per $x=1$ rispettivamente i valori -1 e 2. Calcolare poi $y'(1)$ e $z'(1)$.

Svolgimento. Poniamo

$$F(x,y,z) := (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)).$$

Si ha $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$. Calcoliamo la matrice Jacobiana di F:

$$\mathrm{Jac}(F)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z\\ y-z & x+2z & 2y-x\end{pmatrix}.$$

Per poter esplicitare y e z come funzioni della x, è necessario vedere se lo Jacobiano parziale fatto rispetto a y e z, calcolato nel punto $(1,-1,2)$, sia o meno degenere. Tale Jacobiano parziale è la matrice formata dalla seconda e terza colonna di $\mathrm{Jac}(F)$ (che corrisponde alle derivate di f_1, f_2 rispetto a y e a z). Si ha

$$\mathrm{Jac}(F)(1,-1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -3 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Jac}_{y,z}(F)(1,-1,2) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lo Jacobiano parziale in $(1,-1,2)$ è non degenere perché si ha $\det \mathrm{Jac}_{y,z}(F)(1,-1,2) = 26 \neq 0$. E' possibile pertanto applicare il teorema di Dini ed esplicitare localmente in un intorno di $x = 1$ la y e la z ottenendo due funzioni $y = y(x)$, $z = z(y)$ con $y(1) = -1$ e $z(1) = 2$, si ponga quindi $\varphi(x) = (y(x), z(x))$.
Calcoliamo ora l'inversa della matrice $\mathrm{Jac}_{y,z}(F)(1,-1,2)$:

$$[\mathrm{Jac}_{y,z}(F)(1,-1,2)]^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il differenziale parziale rispetto alla x di F nel punto $(1,-1,2)$ è dato dalla prima colonna della matrice Jacobiana di F, quindi $\mathrm{Jac}_x(F)(1,-1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Per il Teorema di Dini si ha:

$$\begin{aligned} \varphi'(1) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} &= -[\mathrm{Jac}_{y,z}(F)(1,-1,2)]^{-1} \mathrm{Jac}_x(F)(1,-1,2) \\ &= -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -18 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $y'(1) = 9/13$ e $z'(1) = 2/13$.

CAPITOLO 14

Lezione del giorno giovedì 12 novembre 2009 (2 ore) Teorema della funzione implicita e inversa - continuazione

Esercizio 14.1. Si tracci un grafico qualitativo del *folium di Cartesio*:

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - 3xy + y^3 = 0\},$$

e si studino le funzioni $y = \varphi(x)$ di classe C^1 definite implicitamente dall'equazione $x^3 - 3xy + y^3 = 0$.

Svolgimento. Posto $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$, osserviamo che $f(x,y) = f(y,x)$ pertanto Γ è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo quadrante.
Stabiliamo il numero di funzioni implicitamente definite da f. A tal proposito consideriamo l'intersezione di Γ con le rette $x = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si deve avere $f(k,y) = 0$, da cui $k^3 - 3ky + y^3 = 0$. Essendo un polinomio di terzo grado, esso ha sempre una soluzione reale, e può averne al più altre due, quindi f definisce al più tre funzioni $y = \varphi(x)$. Per determinare il numero delle soluzioni, studiamo ora il polinomio $p_k(y) = k^3 - 3ky + y^3$ al variare di k. Osserviamo che $\lim_{y\to\pm\infty} p_k(y) = \pm\infty$, quindi p_k non ha massimi o minimi assoluti. La derivata prima è $p'_k(y) = 3y^2 - 3k$, che si annulla per $y^2 = k$, e la derivata seconda è $p''_k(y) = 6y$. Distinguiamo quindi vari casi:

(1) Se $k < 0$, la funzione $y \mapsto p_k(y)$ è strettamente crescente perché $p'_k(y) > 0$, quindi si annulla in un solo punto y_k. Cerchiamo di stimare il valore di y_k: poiché $p_k(0) = k^3 < 0$, si deve avere $y_k > 0$ e poiché $p_k(k^2) = k^3 - 3k^3 + k^6 = -2k^3 + k^6 > 0$ si ha $y_k < k^2$.
Ciò implica che se $x < 0$ esiste un solo punto $y = y(x) \in]0, +\infty[$ tale per cui $(x, y(x)) \in \Gamma$. Inoltre si ha $y(x) < x^2$.

(2) Se $k = 0$, allora $p_0(y) = y^3$ che si annulla solo in 0, quindi $(0,y) \in \Gamma$ se e solo se $y = 0$.

(3) Se $k > 0$ allora $p'_k(y) = 0$ se $y = \pm\sqrt{k}$, e $p''_k(y) = 6y$ quindi p_k ammette un massimo relativo per $y = -\sqrt{k}$ (infatti $p'_k(\sqrt{k}) = 0$ e $p''_k(\sqrt{k}) = -6\sqrt{k} < 0$) e un minimo relativo per $y = \sqrt{k}$ (infatti $p'_k(-\sqrt{k}) = 0$ e $p''_k(\sqrt{k}) = 6\sqrt{k} > 0$). Calcoliamo il valore del minimo e del massimo relativo:

$$p_k(\sqrt{k}) = k^3 - 3k^{3/2} + k^{3/2} = k^3 - 2k^{3/2} = k^{3/2}(k^{3/2} - 2) =: m_k$$
$$p_k(-\sqrt{k}) = k^3 + 3k^{3/2} - k^{3/2} = k^3 - 2k^{3/2} = k^{3/2}(k^{3/2} + 2) =: M_k$$

Se $m_k > 0$ oppure $M_k < 0$ esiste una sola soluzione dell'equazione $p_k(y) = 0$, altrimenti se $m_k < 0 < M_k$ ne esistono tre. Sostituendo le definizioni di m_K e di M_k, e ricordando che $k > 0$, per avere tre soluzioni si deve avere $k^{3/2} - 2 < 0 < k^{3/2} + 2$ da cui $-2 < k^{3/2} < 2$, pertanto si hanno tre soluzioni se $0 < k < \sqrt[3]{4}$ e una sola se $k > \sqrt[3]{4}$. Se si hanno tre soluzioni, la soluzione maggiore è strettamente maggiore di $\sqrt{k}$ e l'altra soluzione positiva è strettamente compresa tra 0 e $\sqrt{k}$.

(4) Se $k = \sqrt[3]{4}$, allora $m_k = 0$ e l'equazione $p_k(y) = 0$, ovvero $4 - 3\sqrt[3]{4}y + y^3 = 0$ ammette due soluzioni: una positiva corrispondente al punto dove $p_k(y) = m_k$, quindi $y = \sqrt{k} = \sqrt[3]{2}$. Poiché $p_k(0) = 4 > 0$, l'altra soluzione deve essere negativa.

Queste considerazioni implicano:

(1) Per $x < 0$ si ha che $f(x,y) = 0$ definisce una sola funzione $\varphi_1 :]-\infty, 0[\to]0, +\infty[$ tale che $y = \varphi(x)$ se e solo se $f(x,y) = 0$. Studiamo la regolarità di tale funzione: se $\bar{x} < 0$, consideriamo il punto $(\bar{x}, \varphi_1(\bar{x})) \in \Gamma$. Poiché $\partial_y f(\bar{x}, \varphi_1(\bar{x})) = 3\varphi^2(\bar{x}) - 3\bar{x}$ e $\bar{x} < 0$, si ha $\partial_y f(\bar{x}, \varphi_1(\bar{x})) \neq 0$, quindi per il teorema di Dini f definisce implicitamente una funzione $y = \psi(x)$ in un intorno di $\bar{x}$ tale che $\psi(\bar{x}) = \varphi_1(\bar{x})$. Poiché $f \in C^1$, tale funzione è C^1, ma poiché φ_1 è l'unica funzione tale che per ogni $x < 0$ si abbia $y = \varphi(x)$ se e solo se $f(x,y) = 0$, si conclude che $\psi = \varphi_1$. Studiamo le derivate di tale funzione:

$$\frac{d\varphi_1}{dx}(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi_1(x))}{\partial_y f(x, \varphi_1(x))} = -\frac{3x^2 - 3\varphi_1(x)}{3\varphi_1^2(x) - 3x} = -\frac{x^2 - \varphi_1(x)}{\varphi_1^2(x) - x}.$$

Il numeratore è strettamente positivo perché $\varphi_1(x) < x^2$, il denominatore è strettamente positivo perché $x < 0$. quindi $\varphi_1'(x) < 0$ per ogni $x < 0$. Si ha che φ_1 è C^1 e strettamente monotona decrescente, quindi ammette limite per $x \to 0^-$. Poiché $0 = x^3 - 3x\varphi_1(x) + \varphi_1(x)^3$, passando al limite per $x \to 0^-$ si ricava $\lim_{x\to 0^-} \varphi_1(x) = 0$. Poniamo $\varphi_1(0) = 0$ Studiamo la presenza di asintoti. A tal proposito supponiamo che $(x, mx) \in \Gamma$, $x < 0$. Si ottiene $(m^3 + 1)x^3 - 3mx^2 = 0$ da cui $x = 3m/(m^3 + 1)$. Si ha che $x \to -\infty$ solo se $m \to -1^+$, in tal caso:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{m\to-1^+} \frac{\dfrac{3m^2}{m^3+1}}{\dfrac{3m}{m^3+1}} = -1$$

Determiniamo ora

$$q = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) + x = \lim_{m\to-1^-} \frac{3m^2}{m^3+1} + \frac{3m}{m^3+1} = \lim_{m\to-1^-} \frac{3m(m+1)}{(m+1)(m^2-m+1)} = -1$$

Quindi φ_1 ammette l'asintoto $y = -x - 1$. Il grafico di φ_1 è contenuto tutto nel secondo quadrante. Osserviamo inoltre che $x \to 0^-$ solo se $m \to 0^-$, in tal caso si ha:

$$\lim_{x\to0^-} \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^-} \frac{\varphi_1(x)}{x} = \lim_{m\to0^-} \frac{\dfrac{3m^2}{m^3+1}}{\dfrac{3m}{m^3+1}} = 0$$

Pertanto esiste anche $\lim_{x\to0^-} \varphi'(x) = 0$.

(2) In un intorno di $(0, 0)$ il Teorema di Dini non è applicabile perché $\partial_y f(0, 0) = 0$.

(3) Poiché Γ è simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$, e poiché si è visto che per ogni $x < 0$ esiste un unico $y > 0$ tale per cui $(x, y) \in \Gamma$, sfruttando la simmetria si ha anche che per ogni $x > 0$ esiste un solo $y < 0$ tale per cui $(x, y) \in \Gamma$, quindi rimane definita una funzione $\varphi_2 :]0, +\infty[\to]0, -\infty[$, il cui grafico è il simmetrico rispetto alla bisettrice di quello di φ_1, e la regolarità è la medesima. Anche φ_2 ammette asintoto per $x \to +\infty$ ed è il simmetrico di quello di φ_1, ovvero ancora $y = -x - 1$. Inoltre $\lim_{x\to0^+} \varphi_2(x) = 0$ e $\lim_{x\to0^+} \varphi_2'(x) = -\infty$

(4) Per ogni $0 < x < \sqrt[3]{4}$ esistono tre valori distinti di y tali per cui $(x, y) \in \Gamma$. Uno di essi è $\varphi_2(x)$, e $y = \varphi_2(x)$ è l'unico valore negativo per cui $(x, y) \in \Gamma$. Gli altri due valori sono positivi, distinti: chiamiamo il minore $\varphi_3(x)$ e il maggiore $\varphi_4(x)$.
Si ha quindi:

$$(x, y) \in \Gamma \text{ con } 0 < x < \sqrt[3]{4} \Longleftrightarrow y \in \{\varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)\}$$

Le due funzioni φ_3, φ_4 sono definite solo da $]0, \sqrt[3]{4}[$ in $\mathbb{R}^+$. Poiché $x^3 + 3x\varphi_3(x) + \varphi_3^3(x) = 0$, passando al limite per $x \to 0^+$ si ricava $\lim_{x\to0^+} \varphi_3(x) = 0$, e analogamente $\lim_{x\to0^+} \varphi_4(x) = 0$. Passando al limite per $x \to \sqrt[3]{4}^-$ con la condizione $0 \le \varphi_3(x) < \varphi_4(x)$ si ottiene

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{4}^-} \varphi_3(x) = \lim_{x\to\sqrt[3]{4}^-} \varphi_4(x) = \sqrt[3]{2}.$$

Calcoliamo il differenziale di f nel punto $P = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$: si ha

$$df(x, y) = (3x^2 - 3y)\, dx + (3y^2 - 3x)\, dy$$

da cui

$$df(P) = (3\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{2})\, dx$$

Pertanto si ha tangente verticale a Σ in P. Se $x > \sqrt[3]{4}$, non vi sono $y > 0$ con $(x, y) \in \Gamma$. Per simmetria, il punto $Q = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ simmetrico rispetto alla bisettrice di P ha tangente orizzontale, inoltre se $y > \sqrt[3]{4}$ non vi sono $x > 0$ con $(x, y) \in \Gamma$. Ma allora Q appartiene al grafico di φ_4 e la sua ascissa $\sqrt[3]{2}$ è punto di massimo relativo e assoluto per tale curva. I grafici di φ_3 e di $\varphi_{4|]0,\sqrt[3]{2}[}$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice. Il teorema di Dini è applicabile perché

$$\partial_y f(x, \varphi_3(x)) = 3(\varphi_3(x)^2 - x) < 0,$$

in quanto $\varphi_3(x) \le \sqrt{x}$, e

$$\partial_y f(x, \varphi_4(x)) = 4(\varphi_3(x)^2 - x) > 0,$$

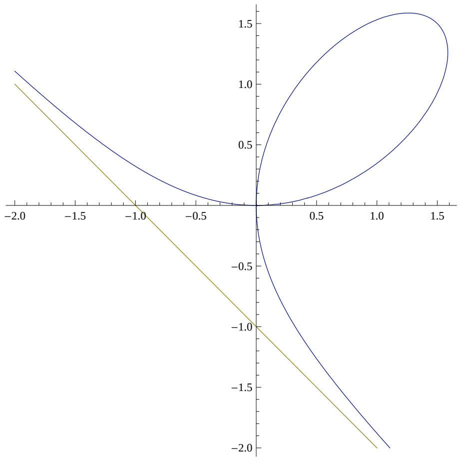


FIGURA 1. Il *folium* di Cartesio e il suo asintoto.

in quanto $\varphi_4(x) \geq \sqrt{x}$. Quindi φ_3 è di classe C^1, e poiché non ha punti in $]0, \sqrt[3]{2}[$ a tangente verticale, si ha che $\varphi_{4|]0,\sqrt[3]{2}[}$ non ha punti a tangente orizzontale, quindi la sua derivata è sempre strettamente positiva. Ma allora anche la derivata di φ_3 è sempre strettamente positiva. La disuguaglianza $\varphi_4(x) \geq \sqrt{x}$ implica anche che la tangente nell'origine al grafico di φ_4 sia verticale, e quindi la tangente nell'origine al grafico di φ_3 è orizzontale, perciò $\lim_{x\to 0^+} \varphi_3'(x) = 0$. Rimane da studiare il comportamento di φ_4 in $]\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}[$. $\partial_x f(x, \varphi_4(x)) = 3x^2 - 3\varphi_4(x) > 0$ se $x \in]\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}[$, in quanto si ha $\varphi_4(x) < \sqrt[3]{4}$, pertanto φ_4 è strettamente decrescente in questo intervallo.

(5) Si ha che $(\sqrt[3]{4}, y) \in \Gamma$ se e solo se $\varphi_1(y) = \sqrt[3]{4}$, $y < 0$ oppure $y = \sqrt[3]{2}$. Ricordando che $\partial_y f(x,y) = -3x + 3y^2$, si ha che il Teorema di Dini non è applicabile in $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

Osserviamo infine che è possibile definire una funzione $\varphi_5 :]-\infty, \sqrt[3]{4}[\to [0, +\infty[$ ponendo $\varphi_5(x) = \varphi_1(x)$ se $x \leq 0$ e $\varphi_5(x) = \varphi_3(x)$ se $0 \leq x < \sqrt[3]{4}$. Tale funzione è di classe C^1, $\varphi_5'(0) = 0$ e quindi in 0 ha un minimo assoluto che vale 0. Lo studio è completo.

Esercizio 14.2. Si disegni l'insieme

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - 4xy + y^4 = 0\}.$$

SVOLGIMENTO. Poniamo $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$. Si ha $f(x,y) = f(y,x) = f(-x,-y)$ quindi l'insieme Γ è simmetrico rispetto all'origine e alla bisettrice $y = x$. Si ha inoltre $(0,0) \in \Gamma$. Passiamo in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, ottenendo $\rho^2(\rho^2\cos^4\theta - 4\cos\theta\sin\theta + \rho^2\sin^4\theta) = 0$, pertanto se $\rho \neq 0$ si ottiene

$$\rho^2 = \frac{4\cos\theta\sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

Questa uguaglianza implica che $\cos\theta\sin\theta > 0$, quindi l'insieme Γ appartiene al primo e terzo quadrante. Poniamo

$$\rho(\theta) = \sqrt{\frac{4\cos\theta\sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}$$

Studiamo massimi e minimi di $\cos^4\theta + \sin^4\theta$. Ciò equivale a studiare i massimi di $x^4 + y^4$ vincolati a $x^2 + y^2 = 1$, poiché tale vincolo è compatto, $x^4 + y^4$ ammette massimo e minimo assoluti su tale curva, e il minimo è strettamente maggiore di zero. In particolare, ciò implica che ρ è limitato, quindi l'insieme Γ è compatto.
Si è già visto come ρ raggiunga il suo minimo in 0, perché $(0,0) \in \Gamma$, inoltre $\lim_{\theta\to 0^+} \rho(\theta) = 0$, per simmetria si ricava

$$\lim_{\theta\to 0^+} \rho(\theta) = \lim_{\theta\to \pi/2^-} \rho(\theta) = \lim_{\theta\to \pi^+} \rho(\theta) = \lim_{\theta\to 3/2\pi^-} \rho(\theta) = 0$$

Calcoliamo ora i massimi di y^2 vincolati a Γ, ovvero i massimi di $\rho^2(\theta)\sin^2\theta$, supponendo $\theta \neq 0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$ (infatti per tali valori si ha $y = 0$), per simmetria supponiamo $0 < \theta < \pi/2$.

$$f_1(\theta) = \rho^2(\theta)\sin^2\theta = \frac{4\cos\theta\sin^3\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} = \frac{4\tan^3\theta}{1 + \tan^4\theta}.$$

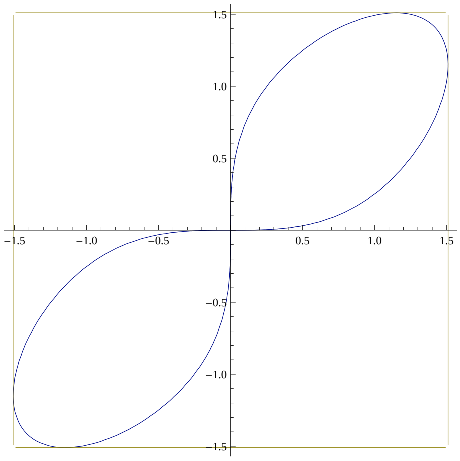


FIGURA 2. La curva $x^4 - 4xy + y^4 = 0$ e il quadrato con lati paralleli agli assi in cui è inscritta.

Studiamo la funzione $g(s) = 4s^3/(1+s^4)$, $s > 0$. Si ottiene

$$g'(s) = 4\,\frac{3s^2(1+s^4) - 4s^6}{(1+s^4)^2} = \frac{4s^2(3-s^4)}{(1+s^4)^2}.$$

La derivata è nulla per ovvero $s = \sqrt[4]{3}$, inoltre è negativa per valori superiori ad esso e positiva per valori inferiori, quindi si tratta di un massimo. Poiché la funzione $\tan :]0,\pi/2[\to]0,+\infty[$ è strettamente crescente, e $f_1 = g \circ \tan$, si ottiene che $\theta_m = \arctan \sqrt[4]{3}$ è l'unico massimo per f_1 in $[0,\pi/2]$. Determiniamo $\cos\theta_m$ e $\sin\theta_m$ sapendo che $\tan\theta_m = \sqrt[4]{3}$, $0 < \theta_m < \pi$:

$$\begin{cases} \cos^2\theta_m + \sin^2\theta_m = 1 \\ \sin\theta_m = \sqrt[4]{3}\cos\theta_m \end{cases}$$

Sostituendo e risolvendo il sistema si ottiene $\cos\theta_m = (1+\sqrt{3})^{-1/2}$ e $\sin\theta_m = \sqrt[4]{3}\,(1+\sqrt{3})^{-1/2}$. Il valore di f_1 in tale punto di massimo è pari al valore di g nel suo massimo $\sqrt[3]{4}$ ossia $y_{max} = \sqrt{g(\sqrt[4]{3})} = 3^{3/8}$. Il valore x^* corrispondente a y_{max} è

$$x^* = \rho(\theta_m)\cos\theta_m = \sqrt{\frac{4\cos^3\theta_m \sin\theta_m}{\cos^4\theta_m + \sin^4\theta_m}} = \sqrt{\frac{4\tan\theta_m}{1+\tan^4\theta_m}} = 2\frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt{4}} = \sqrt[8]{3}$$

Per simmetria, si ricava che Γ è interamente contenuto nel quadrato $[-3^{3/8}, 3^{3/8}] \times [-3^{3/8}, 3^{3/8}]$. I quattro punti di contatto di Γ con tale quadrato sono dati da $P_1 = (\sqrt[8]{3}, 3^{3/8})$ e da i suoi simmetrici rispetto all'origine e alla bisettrice, ovvero $P_2 = (-\sqrt[8]{3}, -3^{3/8})$, $P_3 = (3^{3/8}, \sqrt[8]{3})$, $P_4 = (-3^{3/8}, -\sqrt[8]{3})$.

Esercizio 14.3. Si dica per quali valori del parametro reale α la funzione $z = z(x,y)$ definita implicitamente da

$$e^{z+x^2} + \alpha x + y^2 - z^2 = 1, \qquad z(0,0) = 0$$

ha un estremale relativo nel punto $(0,0)$. Per tali valori di α si dica se si tratta di un massimo o di un minimo.

SVOLGIMENTO. Poniamo $f(x,y,z) = e^{z+x^2} + \alpha x + y^2 - z^2 - 1$. Si ha $f(0,0,0) = 0$ per ogni α. Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y,z) &= 2xe^{z+x^2} + \alpha \\ \partial_y f(x,y,z) &= 2y \\ \partial_z f(x,y,z) &= e^{z+x^2} - 2z. \end{aligned}$$

Si ha $\partial_z f(0,0,0) = 1 \neq 0$, pertanto è possibile applicare il Teorema di Dini e concludere che $f = 0$ definisce implicitamente una funzione $z = z(x,y)$ in un intorno di $(0,0)$ con $z(0,0) = 0$. Poiché $f \in C^1$, tale funzione è

C^1. Le derivate parziali sono:

$$\partial_x z(x,y) = -\frac{\partial_x f(x,y,z(x,y))}{\partial_z f(x,y,z(x,y))} = -\frac{2xe^{z(x,y)+x^2}+\alpha}{e^{z(x,y)+x^2}-2z(x,y)}$$
$$\partial_y z(x,y) = -\frac{\partial_y f(x,y,z(x,y))}{\partial_z f(x,y,z(x,y))} = -\frac{2y}{e^{z(x,y)+x^2}-2z(x,y)}$$

Nella fattispecie, si ha $\partial_x z(0,0)=\alpha$, $\partial_y z(0,0)=0$. Affinché $(0,0)$ sia estremale, deve essere un punto critico, perché $z\in C^1$, quindi il differenziale deve annullarsi, e pertanto $\alpha=0$.
Classifichiamo l'estremale con questa scelta di α. Calcoliamo le derivate seconde di $z(x,y)$ in $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
\partial_{xx}z(x,y) = &-\frac{(\partial_{xx}f(x,y,z(x,y))+\partial_z f(x,y,z(x,y))\partial_x z(x,y))\partial_z f(x,y,z(x,y))}{(\partial_z f(x,y,z(x,y)))^2}+\\
&+\frac{\partial_x f(x,y,z(x,y))(\partial_{zx}f(x,y,z(x,y))+\partial_{zz}f(x,y,z(x,y))\partial_x z(x,y))}{(\partial_z f(x,y,z(x,y)))^2}\\
\partial_{yy}z(x,y) = &-\frac{(\partial_{yy}f(x,y,z(x,y))+\partial_z f(x,y,z(x,y))\partial_y z(x,y))\partial_z f(x,y,z(x,y))}{(\partial_z f(x,y,z(x,y)))^2}+\\
&+\frac{\partial_y f(x,y,z(x,y))(\partial_{zy}f(x,y,z(x,y))+\partial_{zz}f(x,y,z(x,y))\partial_y z(x,y))}{(\partial_z f(x,y,z(x,y)))^2}\\
\partial_{xy}z(x,y) = &-\frac{(\partial_{xy}f(x,y,z(x,y))+\partial_z f(x,y,z(x,y))\partial_y z(x,y))\partial_z f(x,y,z(x,y))}{(\partial_z f(x,y,z(x,y)))^2}+\\
&+\frac{\partial_x f(x,y,z(x,y))(\partial_{zy}f(x,y,z(x,y))+\partial_{zz}f(x,y,z(x,y))\partial_y z(x,y))}{(\partial_z f(x,y,z(x,y)))^2}
\end{aligned}$$

Sarà quindi utile il calcolo delle derivate seconde di f:

$$\begin{aligned}
&\partial_{xx}f(x,y,z) = 2e^{z+x^2}+4x^2e^{z+x^2},\ \partial_{xx}f(0,0,0)=2\\
&\partial_{yy}f(x,y,z) = 2,\ \partial_{yy}f(0,0,0)=2\\
&\partial_{zz}f(x,y,z) = e^{z+x^2}-2,\ \partial_{zz}f(0,0,0)=-1\\
&\partial_{xy}f(x,y,z) = \partial_{zy}f(x,y,z)=0,\ \partial_{xy}f(0,0,0)=\partial_{zy}f(0,0,0)=0,\\
&\partial_{xz}f(x,y,z) = 2xe^{z+x^2},\ \partial_{xz}f(0,0,0)=0.
\end{aligned}$$

Sostituendo, si ha allora (ricordando che $\partial_x z(0,0)=\partial_y z(0,0)=0$ e $\partial_x f(0,0,0)=\partial_y f(0,0,0)=0$, $\partial_z f(0,0,0)=1$):

$$\begin{aligned}
\partial_{xx}z(0,0) = &-\frac{(\partial_{xx}f(0,0,0)+\partial_z f(0,0,0)\partial_x z(0,0))\partial_z f(0,0,0)}{(\partial_z f(0,0,0))^2}+\\
&+\frac{\partial_x f(0,0,0)(\partial_{zx}f(0,0,0)+\partial_{zz}f(0,0,0)\partial_x z(x,y))}{(\partial_z f(0,0,0))^2}=-2.\\
\partial_{yy}z(0,0) = &-\frac{(\partial_{yy}f(0,0,0)+\partial_z f(0,0,0)\partial_y z(0,0))\partial_z f(0,0,0)}{(\partial_z f(0,0,0))^2}+\\
&+\frac{\partial_y f(0,0,0)(\partial_{zy}f(0,0,0)+\partial_{zz}f(0,0,0)\partial_y z(x,y))}{(\partial_z f(0,0,0))^2}=-2\\
\partial_{xy}z(0,0) = &-\frac{(\partial_{xy}f(0,0,0)+\partial_z f(0,0,0)\partial_y z(0,0))\partial_z f(0,0,0)}{(\partial_z f(0,0,0))^2}+\\
&+\frac{\partial_x f(0,0,0)(\partial_{zy}f(0,0,0)+\partial_{zz}f(0,0,0)\partial_y z(x,y))}{(\partial_z f(0,0,0))^2}=0
\end{aligned}$$

Quindi l'hessiano di z in $(0,0)$ è semplicemente

$$H(z)(0,0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

e pertanto $(0,0)$ è un massimo per $z(x,y)$.

Esercizio 14.4. Sia Γ l'insieme dei punti $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tali che

$$y^3-xy^2+x^2y=x-x^3$$

(1) Provare che Γ è il grafico di una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(2) Discutere la continuità e la derivabilità di φ.
(3) Effettuare uno studio qualitativo di φ: in particolare, si stabilisca se φ ammette un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Svolgimento. Poniamo $f(x,y) = y^3 - xy^2 + x^2y - x + x^3$ in modo che $\Gamma = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$. Poiché $f(-x,-y) = -f(x,y)$, si ha che Γ è simmetrico rispetto all'origine. Studiamo le intersezioni con gli assi: $f(0,y) = 0$ solo se $y = 0$ e $f(x,0) = 0$ solo se $-x + x^3 = 0$ quindi $x \in \{0, \pm 1\}$.

(1) Calcoliamo le derivate parziali di f, osservando che $f \in C^\infty$:
$$\partial_x f(x,y) = -y^2 + 2xy - 1 + 3x^2 = 4x^2 - (y-x)^2 - 1$$
$$\partial_y f(x,y) = 3y^2 - 2xy + x^2 = 2y^2 + (x-y)^2$$
La derivata $\partial_y f(x,y)$ si annulla se e solo se $x = y = 0$. Ciò implica che se $x \neq 0$, in un intorno di x si ha che γ è grafico di una funzione C^1. D'altra parte, per $x = 0$, si ha che l'equazione $f(0,y) = 0$ è soddisfatta solo da $y = 0$, quindi poniamo $\varphi(0) = 0$.

(2) Si ha che φ è continua. Sia $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in Γ con $x_n \to 0$.
$$0 = \liminf_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \liminf_{n\to\infty} y_n^3$$
$$0 = \limsup_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \limsup_{n\to\infty} y_n^3$$
quindi $y_n \to 0 = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ e si ha che φ è continua. Inoltre $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pm 1) = 0$.
Studiamo la derivabilità: si è già detto che $\varphi \in C^1$ in $\mathbb{R}\backslash 0$. Il differenziale di f in $(0,0)$ è $df(0,0) = -\,dx$. Quindi esiste $C \in \mathbb{R}$ tale per cui la retta $C + x = 0$ è la tangente a γ in $(0,0)$, tale retta è $x = 0$, pertanto φ non può essere differenziabile in 0. Si ha per $x \neq 0$:
$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -\frac{4x^2 - (\varphi(x) - x)^2 - 1}{2\varphi^2(x) + (x - \varphi(x))^2},$$

(3) In particolare si ha che $\varphi(1) = 0$ e $\varphi'(1) = -\frac{\partial_x f(1,0)}{\partial_y f(1,0)} = -2 < 0$, quindi la funzione $\varphi(x)$ è negativa in un intorno destro di 1 , e quindi per ogni $x > 1$ perché non ci sono altre intersezioni con gli assi, ed è positiva in un intorno sinistro di 1 e quindi in $0 < x < 1$ perché non vi sono altri punti dove si annulli tra 0 e 1, in quanto $f(x,0) = 0$ solo per $x \in \{0, \pm 1\}$. Sfruttando le simmetrie, si ha quindi che $\varphi(x) > 0$ se $0 < x < 1$ o $x < -1$, $\varphi(x) = 0$ se $x \in \{0, \pm 1\}$ e $\varphi(x) < 0$ se $-1 < x < 0$, $x > 1$.
Poniamo $y = mx$, si ha allora $f(x, mx) = 0$ se e solo se $(m^3 - m^2 + m + 1)x^3 - x = 0$, ovvero se e solo se $x((m^3 - m^2 + m + 1)x^2 - 1) = 0$. Se $x \neq 0$, per avere soluzione si deve avere $(m^3 - m^2 + m + 1) > 0$, in tal caso si ha che esistono due soluzioni di segno opposto, ossia $x = \pm(m^3 - m^2 + m + 1)^{-1/2}$. cui corrisponde
$$y = \pm \frac{m}{\sqrt{m^3 - m^2 + m + 1}}$$
Poniamo
$$h(m) = \frac{m}{\sqrt{m^3 - m^2 + m + 1}}$$
e studiamone le derivate:
$$\begin{aligned} h'(m) &= \frac{\sqrt{m^3 - m^2 + m + 1} - m\dfrac{3m^2 - 2m + 1}{2\sqrt{m^3 - m^2 + m + 1}}}{(m^3 - m^2 + m + 1)} \\ &= \frac{2m^3 - 2m^2 + 2m + 2 - m(3m^2 - 2m + 1)}{2(m^3 - m^2 + m + 1)^{3/2}} \\ &= \frac{-m^3 + m + 2}{2(m^3 - m^2 + m + 1)^{3/2}} \end{aligned}$$
Tale derivata si annulla per $m^3 - m - 2 = 0$. Studiamo il numero di soluzioni di tale equazione. Posto $v(m) = m^3 - m - 2$, calcoliamo massimi e minimi relativi di v. Si ha $v'(m) = 3m^2 - 1$, nullo per $\bar{m}^\pm = \pm\sqrt{1/3}$. Si ha $|\bar{m}^\pm| < 1$ e $|\bar{m}^\pm|^3 < 1$, quindi $v(\bar{m}^\pm) < 0$. Ciò implica che gli estremali relativi di v sono entrambi strettamente negativi, pertanto l'equazione $m^3 - m - 2 = 0$ possiede una sola radice reale. Dato che $v(0) = v(1) = -2$ e $\lim_{m\to\infty} v(m) = +\infty$, si ha che tale radice è strettamente positiva. Inoltre $v(2) = 4 > 0$, quindi tale radice è strettamente minore di 2 In particolare, si ha che esiste un solo valore di $1 < \bar{m} < 2$ per cui $h'(\bar{m}) = 0$. Questo implica che gli unici punti critici di φ si hanno nei

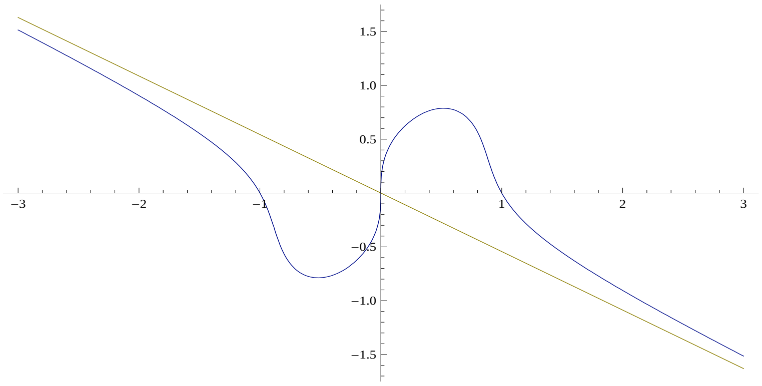


FIGURA 3. La curva $y^3 - xy^2 + x^2y = x - x^3$ e il suo asintoto.

punti $\pm(\bar{m}^3 - \bar{m}^2 + \bar{m} + 1)^{-1/2}$. Poniamo $x^+ = -x^- = (\bar{m}^3 - \bar{m}^2 + \bar{m} + 1)^{-1/2}$. Poiché $\bar{m}^3 - \bar{m} - 2 = 0$, si ricava $x^+ = -x^- = (3 - \bar{m}^2 + 2\bar{m})^{-1/2}$.
Vogliamo capire la posizione dei due estremali rispetto ai punti $0, 1$. Poniamo $W(t) = 3 - t^2 + 2t$ in modo da avere $x^+ = -x^- = (W(\bar{m}))^{-1/2}$. Sappiamo che $\bar{m} \in [1, 2]$, quindi studiamo la funzione W in tale intervallo. Essa è strettamente decrescente in $]1, 2[$, perché $W'(t) = -2t + 2 < 0$ quindi $W(2) = 3 < W(t) < W(1) = 4$, ma allora si ha $0 < 4^{-1/2} < x^+ < 3^{-1/2} < 1$, e $x^- = -x^+$, pertanto $0 < x^+ < 1$ e $-1 < x^- < 0$. Si ha quindi che x^+ è massimo relativo stretto e x^- è minimo relativo stretto.
Cerchiamo gli asintoti obliqui. Limitiamo lo studio per $x \geq 0$, il caso $x < 0$ si ricava per simmetria rispetto all'origine. Si è visto che $x = (m^3 - m^2 + m + 1)^{-1/2}$ e che $\varphi(V(m)) = m(m^3 - m^2 + m + 1)^{-1/2}$. Studiamo il $V(m) = m^3 - m^2 + m + 1$. Si ha $V'(m) = 3m^2 - 2m + 1$ che è privo di radici reali, quindi $V' > 0$, V è strettamente crescente e ammette una sola radice reale m^*. Tale radice è negativa perché $V(0) = 1$. Inoltre $V(-1) = -2 < 0$, quindi $-1 < m^* < 0$. Poniamo $A(m) = V(m)/(m - m^*)$, $A(m)$ è un polinomio di secondo grado mai nullo. Si ha quindi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{m\to m^{*+}} \frac{\varphi(V(m))}{(m^3 - m^2 + m + 1)^{-1/2}} = \frac{m(m^3 - m^2 + m + 1)^{-1/2}}{(m^3 - m^2 + m + 1)^{-1/2}} = m^*$$

Calcoliamo ora:

$$\begin{aligned}
q &= \lim_{x\to\infty} \varphi(x) - m^* x \\
&= \lim_{m\to m^*} m(m^3 - m^2 + m + 1)^{-1/2} - m^*(m^3 - m^2 + m + 1)^{-1/2} \\
&= \lim_{m\to m^*} \frac{m - m^*}{(m^3 - m^2 + m + 1)^{-1/2}} = \lim_{m\to m^*} \frac{m - m^*}{(m - m^*)^{1/2} A(m)^{1/2}} \\
&= \lim_{m\to m^*} \sqrt{\frac{m - m^*}{A(m)}} = 0
\end{aligned}$$

Quindi la retta $y = m^* x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. La simmetrica rispetto all'origine di tale retta è sempre $y = m^* x$ che è quindi asintoto obliquo anche per $x \to -\infty$.

Curiosità: dalla formula di risoluzione delle equazioni di terzo grado, si può ricavare il valore esatto

$$m^* = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3\sqrt{33} - 17}} + \sqrt[3]{3\sqrt{33} - 17}\right) \simeq -0.54.$$

CAPITOLO 15

Lezione del giorno martedì 17 novembre 2009 (1 ora) Integrali multipli

OSSERVAZIONE 15.1. Non daremo qui definizioni precise sui concetti di misurabilità elementare degli insiemi o di integrabilità delle funzioni: esse richiedono strumenti piuttosto fini che esulano dagli scopi di queste note. Il modello di base sarà costituito da integrali del tipo

$$\iint_D f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 \dots dx_n,$$

dove $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme limitato, definiti da un numero finito di disuguaglianze (strette o larghe) $g_i(x_1, ..., x_n) \leq 0$, $i = 1, ..., n$ con $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1, e $f : D \to \mathbb{R}$ è almeno continua.
Possibili generalizzazioni si hanno se D può essere decomposto in un unione finita di insiemi di tale tipo $D = D_1 \cup ... \cup D_M$, in tal caso l'integrale su D sarà dato dalla somma degli integrali sugli insiemi D_j.
Se il dominio D non è limitato, oppure f non è continua su D, si considera una successione di domini limitati $D_n \subset D$ in esso contenuti (detta successione invadente) che *tenda*[1] a D e su cui f sia continua. Integrando f su D_n si ottiene una successione di numeri reali I_n. Se il limite per $n \to \infty$ di I_n esiste e tale limite è lo stesso *qualunque sia la successione $D_n \to D$ scelta con le proprietà di cui sopra*, allora possiamo assegnare all'integrale di f su D_n il valore di tale limite. Il fatto che il limite non dipenda dalla successione invadente scelta è cruciale perché questa definizione sia ben posta, ovvero sensata.
Il calcolo degli integrali multipli è ricondotto al calcolo di integrali unidimensionali dai teoremi di Fubini e Tonelli, di cui diamo qui una versione semplificata: se $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ è continua e X_1, X_2 sono intervalli compatti di $\mathbb{R}$, allora

$$\iint f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2$$

Formule analoghe valgono per integrali in dimensione superiore, e sono possibili le stesse generalizzazione viste in precedenza (il dominio di integrazione può essere decomposto in modo opportuno, oppure invaso ...). Il lettore interessato ad una formulazione precisa e coerente della moderna teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue può consultare [5].

Teorema 15.2 (cambio di variabili). *Siano X, Y aperti di $\mathbb{R}^n$, $\varphi : X \to Y$ una biiezione di classe C^1, A sottinsieme di X, $B = \gamma(A)$, $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora:*

1. *B è (elementarmente) misurabile se e solo se A è (elementarmente) misurabile;*
2. *Se B è (elementarmente) misurabile, allora f è integrabile in B se e solo se la funzione*

$$x \mapsto f(\gamma(x))|\det \mathrm{Jac}(\varphi)(x)|$$

è integrabile in A; in tal caso risulta

$$\int_B f(y)\, dy = \int_A f(\varphi(x))|\det \mathrm{Jac}(\varphi)(x)|$$

ove $\mathrm{Jac}(\varphi)(x)$ è la matrice Jacobiana di φ in x.

Corollario 15.3 (coordinate polari). *Sia $X = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}$. Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è integrabile in $\mathbb{R}^2$ se e solo se la funzione $(\rho, \theta) \mapsto f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)\rho$ è integrabile in X. In tal caso si ha:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_X f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta$$

[1]in un senso che può essere reso preciso, ma qui ci accontentiamo dell'intuizione

Corollario 15.4 (coordinate sferiche). *Sia* $X = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$. *Una funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *è integrabile in* $\mathbb{R}^3$ *se e solo se la funzione*

$$(\rho, \theta, \varphi) \mapsto f(\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi$$

è integrabile in X. *In tal caso si ha:*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_X f(\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi$$

Esercizio 15.5. Calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D xy\, dx\, dy$$

esteso al dominio D delimitato dalle due parabole di equazioni $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

Svolgimento. Calcoliamo l'itersezione delle due curve: elevando la prima equazione al quadrato e sostituendo la seconda si ha $y^4 = 64y$ da cui $y = 0$ e $y = 4$, quindi le due curve si intersecano in $(0, 0)$ e $(4, 4)$. Dalla prima equazione si ricava che $x \geq 0$ e $y = 2 \pm \sqrt{x}$ Si ha che $y = 2 \pm \sqrt{x}$ è al di sopra della seconda curva $y = x^2/4$ per $0 < x < 4$, $y = x^2/4$ perché in tale intervallo $(2 \pm \sqrt{x})^2 = 4x > (x^2/4)^2 = x^4/16$.
Si ha allora

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, x^2/4 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$$

da cui:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \left(\int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} xy\, dy \right) dx = \int_0^4 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x^2/4}^{y=2\sqrt{x}} = \int_0^4 \left(2x^2 - \frac{x^5}{32} \right) dx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^6}{192} \right]_{x=0}^{x=4} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 15.6. Calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D \sqrt{1 - y^2}\, dx\, dy$$

esteso al dominio $D = B((1, 0), 1)$

Svolgimento. D è il dominio delimitato da $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$ e $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$ per $-1 < y < 1$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - y^2}\, dx\, dy = 4 \int_0^1 (1 - y^2)\, dy = \frac{8}{3}.$$

Esercizio 15.7. Calcolare l'integrale doppio $\int\int_D xy\, dx\, dy$ esteso al dominio D dove D è il triangolo di vertici $A(0, 4)$, $B(1, 1)$, $C(4, 0)$.

Svolgimento. Calcoliamo le rette congiungenti i tre vertici. Ricordo che per trovare la retta congiungente $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ si utilizza la formula:

$$(y - y_1)(x_1 - x_2) = (y_1 - y_2)(x - x_1)$$

Sostituendo $x = x_1$, $y = y_1$ si ottiene un'identità, quindi tale retta passa per P_1. Sostituendo $x = x_2$ e $y = y_2$ si ottiene un'altra identità che prova il passaggio per P_2.
Le tre rette sono: $y = 4 - x$ che congiunge A e C; $y = 4 - 3x$ che congiunge A a B; $y = (4 - x)/3$ che coingiunge

B a C. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_{4-3x}^{4-x} xy\,dy\,dx + \int_1^4 \int_{(4-x)/3}^{4-x} xy\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 x\,\frac{(4-x)^2-(4-3x)^2}{2}\,dx + \int_1^4 \frac{x}{2}\left((4-x)^2 - \left(\frac{4-x}{3}\right)^2\right)dx \\
&= \int_0^1 x^2(8-4x)\,dx + \frac{8}{9}\int_1^4 x(4-x)^2\,dx = \frac{5}{3} + \frac{4}{9}\int_1^4 (16x-8x^2+x^3)\,dx \\
&= \frac{5}{3} + \frac{4}{9}\left[8x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\right]_{x=1}^{x=4} \\
&= \frac{5}{3} + \frac{4}{9}\left(8\cdot 16 - \frac{8\cdot 64}{3} + 64 - 8 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{5}{3} + \frac{4}{9}\left(\frac{64}{3} - \frac{67}{12}\right) = \frac{5}{3} + 7 = \frac{26}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 15.8. Calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D e^{\frac{x^2}{4}+y^2}\left|\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right| dx\,dy$$

ove D è il dominio definito dalle limitazioni $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + 4y^2 \leq 16$.

Svolgimento. Parametrizziamo D in modo opportuno:

$$\begin{aligned}
D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \leq 4\right\} \\
&= \left\{(2x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\right\} \\
&= \{(2\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \theta \in [0,\pi/2],\ 0 \leq \rho \leq 2\}
\end{aligned}$$

La trasformazione di coordinate è $\varphi(x,y) = (2\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, il suo Jacobiano è

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

Il modulo del determinante di tale matrice è 2ρ. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 e^{\rho^2}|\rho^2-1|\,2\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^4 e^s|s-1|\,ds = \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^s(1-s)\,ds + \frac{\pi}{2}\int_1^4 e^s(s-1)\,ds \\
&= \frac{\pi}{2}\left([e^s(1-s)]_{s=0}^{s=1} + \int_0^1 e^s\,ds\right) + \frac{\pi}{2}\left([e^s(s-1)]_{s=1}^{s=4} - \int_1^4 e^s\,ds\right) \\
&= \frac{\pi}{2}(-1+e-1) + \frac{\pi}{2}(3e^4 - e^4 + e) = \pi(e^4 + e - 1).
\end{aligned}$$

Esercizio 15.9. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$I = \iint_D \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove D è la semicorona circolare $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$.

Svolgimento. In coordinate polari si ha:

$$D = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 1 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

da cui, ricordando che $\arcsin\sin\theta = \theta$ solo se $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2\int_0^\pi \arcsin(\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_1^2\int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta \\
&= 2\int_1^2\int_0^{\pi/2}\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_1^2\rho\,d\rho\cdot\int_0^{\pi/2}\theta\,d\theta = \frac{3}{8}\pi^2.
\end{aligned}$$

CAPITOLO 16

Lezione del giorno giovedì 19 novembre 2009 (2 ore) Integrali multipli - continuazione

Raccogliamo di seguito alcune utili formule per il calcolo degli integrali doppi e alcune definizioni di integrali importanti da un punto di vista applicativo:

Formule utili:

(1) Volume del solido di rotazione:
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)$$

(2) Area di una superficie curva $z = f(x, y)$ che si proietta ortogonalmente su D:
$$A = \int\int_D \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}\, dxdy$$

(3) Area di una superficie di rivoluzione S generata dalla rotazione di un giro completo attorno all'asse x di una porzione di curva regolare γ situata nel semipiano $z = 0$, $x \geq 0$:

(a) se γ è rappresentata dalle equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, si ha
$$A_S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

(b) se γ ammette rappresentazione cartesiana $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, si ha
$$A_S = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

(4) Baricentro di $D \subseteq \mathbb{R}^2$:
$$x_B = \frac{\displaystyle\iint_D x\, dx\, dy}{\displaystyle\iint_D dx\, dy}, \qquad y_B = \frac{\displaystyle\iint_D y\, dx\, dy}{\displaystyle\iint_D dx\, dy}.$$

(5) Baricentro di $D \subseteq \mathbb{R}^3$:
$$x_B = \frac{\displaystyle\iiint_D x\, dx\, dy\, dz}{\displaystyle\iiint_D dx\, dy\, dz}, \; y_B = \frac{\displaystyle\iiint_D y\, dx\, dy\, dz}{\displaystyle\iiint_D dx\, dy\, dz}, \; z_B = \frac{\displaystyle\iiint_D z\, dx\, dy\, dz}{\displaystyle\iiint_D dx\, dy\, dz}$$

(6) Momento di inerzia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ rispetto ad un punto fisso o ad una retta fissa:
$$I = \int\int_D \delta^2(x, y)\, dx\, dy$$
dove $\delta^2(x, y)$ è la distanza del punto (x, y) dal punto fisso o dalla retta fissa.

(7) Teorema di Guldino sul volume dei solidi di rotazione. Sia T il solido generato dalla rotazione di angolo θ attorno all'asse z di un dominio E contenuto nel semipiano $x \geq 0$ del piano (x, y). Allora il volume è:
$$\lambda_3(T) = \theta r_G \lambda_2(E)$$
dove r_G è la distanza del baricentro di E rispetto all'asse di rotazione.

Esercizio 16.1. Chiamasi *toro* il solido T generato dalla rotazione di un cerchio di raggio r intorno ad un asse z del suo piano avente distanza a dal centro, con $a > r$. Trovare il volume di questo solido.

Svolgimento. Sia C il cerchio di raggio r nel piano zy centrato in $(0,a,0)$. Si ha:

$$C := \{(0, s\cos\phi + a, s\sin\phi) : 0 \le s \le r,\ \phi \in [0,2\pi]\}$$

Sia $\theta \in [0,2\pi]$. Il punto (x,y,z) ruotato attorno all'asse z di un angolo θ occupa la posizione $(\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta, \sqrt{x^2+y^2}\sin\theta, z)$. Per cui si ha:

$$T := \{(|s\cos\phi + a|\cos\theta, |s\cos\phi + a|\sin\theta, s\sin\phi) : \rho, \phi \in [0,2\pi], 0 \le s \le r\}$$

Ricordando che $a > r$, si ha $s\cos\phi + a > -s + a > -r + a > 0$ e analogamente per il seno, quindi si possono togliere i moduli:

$$T := \{((s\cos\phi + a)\cos\theta, (s\cos\phi + a)\sin\theta, s\sin\phi) : \rho, \phi \in [0,2\pi], 0 \le s \le r\},$$

pertanto T è parametrizzato da:

$$\varphi(s,\theta,\varphi) = ((s\cos\phi + a)\cos\theta, (s\cos\phi + a)\sin\theta, s\sin\phi).$$

Il volume di T è espresso dall'integrale triplo

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz.$$

La matrice Jacobiana della parametrizzazione è:

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(s,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -(s\cos\phi + a)\sin\theta & -s\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta & (s\cos\phi + a)\cos\theta & -s\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi & 0 & s\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante è:

$$\begin{aligned} \det\mathrm{Jac}(\varphi)(s,\theta,\varphi) &= \sin\phi(s(s\cos\phi + a)\sin^2\theta\sin\phi + s\sin\phi\cos^2\theta(s\cos\phi + a)) + \\ &\quad + s\cos\phi(\cos\phi\cos^2\theta(s\cos\phi + a) + (s\cos\phi + a)\sin^2\theta\cos\phi) \\ &= s\sin^2\phi(s\cos\phi + a) + s\cos^2\phi(s\cos\phi + a) \\ &= s(s\cos\phi + a) > 0 \end{aligned}$$

Quindi il volume cercato è:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r s(s\cos\phi + a)\,dr\,d\phi\,d\theta \\ &= 2\pi a\int_0^r\int_0^{2\pi}(s^2\cos\phi + as)\,d\phi\,ds = 4\pi^2 a\int_0^r s\,dr = 2\pi^2 ar^2. \end{aligned}$$

Applicando il Teorema di Guldino: l'area del cerchio C è πr^2, il baricentro è il centro geometrico del cerchio che descrive una circonferenza di lunghezza $2\pi a$. Quindi il volume è $V = 2\pi^2 ar^2$, che conferma il risultato precedente.

Esercizio 16.2. Calcolare il seguente integrale doppio :

$$I = \iint_D \cos(x+y)e^{x-y}\,dxdy$$

esteso a

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \le \frac{\pi}{2}, |x-y| \le 1\}.$$

Svolgimento. Poniamo $u = x + y$, $v = x - y$ da cui $x = (u+v)/2$ e $y = (u-v)/2$. Il determinante Jacobiano di questa trasformazione è $-1/2$, quindi il suo modulo è $1/2$. Con questa parametrizzazione si ha:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos u\,e^v\,du\,dv = e - e^{-1} = 2\sinh(1).$$

Esercizio 16.3. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$I = \int\int_D \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}x\,dx\,dy$$

essendo D il dominio limitato dalla curva di equazione

$$y^4 + x^2 - 2x = 0$$

Svolgimento. La curva ha equazione $1 - y^4 = (x-1)^2$ ovvero $(1-y)(1+y)(1+y^2) = (x-1)^2$ da cui $-1 \le y \le 1$ e $1 - \sqrt{1-y^4} < x < 1 + \sqrt{1-y^4}$. Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-y^4}}^{1+\sqrt{1-y^4}} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-y^4}}^{1+\sqrt{1-y^4}} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} x\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}((1+\sqrt{1-y^4})^2 - (1-\sqrt{1-y^4})^2)\,dy = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\sqrt{1-y^4}\,dy \\
&= 2\int_{-1}^{1}(1+y)\sqrt{1+y^2}\,dy = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y^2}\,dy - 2\int y\sqrt{1+y^2}\,dy \\
&= 4\int_{0}^{1}\sqrt{1+y^2}\,dy = 2(\sqrt{2} + \operatorname{arc\,sinh}(1)) = 2(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))
\end{aligned}$$

Esercizio 16.4. Si provi che la funzione $|(x,y)|^{-p}$ è integrabile su $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ se e solo se $p < 2$ ed è integrabile su $\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)$ se e solo se $p > 2$. Analogamente, la funzione $|(x,y,z)|^{-p}$ è integrabile su $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$ se e solo se $p < 3$ ed è integrabile su $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,1)$ se e solo se $p > 3$.

Svolgimento. In coordinate polari, se $p \neq 2$ si ha

$$\int_B |(x,y)|^{-p}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\rho^p}\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho^{1-p}\,d\rho = \frac{2\pi}{(2-p)}[\rho^{2-p}]_{\rho=0}^{\rho=1},$$

che è finito solo se $p < 2$. Se $p = 2$ si ottiene

$$2\pi\int_0^1 \frac{1}{\rho} = 2\pi[\log\rho]_0^1 = +\infty,$$

Pertanto l'integrale su $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ è finito solo per $p < 2$.
In modo del tutto analogo, se $p \neq 2$:

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B} |(x,y)|^{-p}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^p}\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{2\pi}{(2-p)}[\rho^{2-p}]_{\rho=1}^{\rho=\infty}$$

che è finito solo se $p > 2$. Se $p = 2$ si ottiene

$$2\pi\int_1^{\infty} \frac{1}{\rho} = 2\pi[\log\rho]_1^{\infty} = +\infty,$$

pertanto l'integrale su $\mathbb{R}^2 \setminus B$ converge solo se $p > 2$.
Nel secondo caso utilizziamo coordinate sferiche: $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$, e il determinante Jacobiano della trasformazione è $\rho^2\sin\phi$ da cui se $p \neq 3$ si ha

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^{2-p}\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \frac{4\pi}{3-p}\int_0^{\pi/2}\sin\phi\,d\phi\cdot[\rho^{3-p}]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{4\pi}{3-p}[\rho^{3-p}]_{\rho=0}^{\rho=1}$$

che è finito solo se $p < 3$. Se $p = 3$ si ottiene

$$4\pi\int_0^1 \frac{1}{\rho} = +\infty$$

Pertanto l'integrale su $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$ è finito solo per $p < 3$.
In modo del tutto analogo, se $p \neq 3$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,1)} |(x,y,z)|^{-p}\,dx\,dy\,dz = \frac{4\pi}{3-p}[\rho^{3-p}]_{\rho=1}^{\rho=+\infty}$$

che è finito solo se $p > 3$. Se $p = 3$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,1)} |(x,y,z)|^{-p}\,dx\,dy\,dz = 4\pi[\log\rho]_1^{\infty} = +\infty.$$

Pertanto l'integrale su $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,1)$ converge solo per $p > 3$.

Esercizio 16.5. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$I := \int\int_D dx\,dy$$

essendo D la regione piana compresa tra la curva di equazione polare $\rho = 1 + \cos\theta$ per $\theta \in [0,\pi]$ e l'asse x.

Svolgimento. Si ha:

$$D = \{(s\cos\theta, s\sin\theta) : \theta \in [0,\pi],\ s \in [0, 1+\cos\theta]\}$$

da cui

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^\pi \int_0^{1+\cos\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos\theta)^2\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi 2\cos\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 16.6. Sia:

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \geq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Posto:

$$f(x,y) = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

si calcoli:

$$I = \int_D f(x,y)\, dx\, dy$$

Svolgimento. Poiché

$$\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

l'integrale esiste.
L'insieme D è costituito dai punti all'interno del cerchio di raggio $\sqrt{2}$ centrato nell'origine che si trovano al di fuori dei cerchi centrati in $(\pm 1, 0)$ di raggio 1. Si consiglia al lettore di tracciare un grafico della situazione. Sfruttando le simmetrie del dominio D e di f è possibile calcolare l'integrale richiesto su $D \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$ e poi moltiplicare per 4 il risultato. Calcoliamo l'intersezione di $x^2 + y^2 = 2$ con $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Si ottiene $x^2 - (x-1)^2 = 1$ da cui $x^2 - x^2 + 2x - 1 - 1 = 0$ perciò $x = 1$, $y = \pm 1$. Nel primo quadrante quindi le due circonferenze si intersecano in $(1,1)$ Esplicitando rispetto alla x, si ha quindi:

$$D \cap \{x \geq 0, y \geq 0\} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$$

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^1 \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx = 4\int_0^1 \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx \\ &= 4\int_0^1 \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx \\ &= 4\int_0^1 \left(\sqrt{x^2+2-x^2} - \sqrt{x^2+1-(x-1)^2}\right) dx \\ &= 4\int_0^1 \left(\sqrt{2} - \sqrt{2x}\right) dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 16.7. Calcolare il seguente integrale triplo:

$$I = \int\int\int_T dx\, dy\, dz,$$

dove T è il solido limitato dalla superficie del paraboloide $z = a^2x^2 + b^2y^2$ e dal piano $z = k^2$, $k \neq 0$.

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned} T &:= \{(x,y,z) : (ax)^2 + (by)^2 \leq z \leq k^2\} \\ &= \left\{(x,y,z) : \left(\frac{x}{\sqrt{z}/a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{z}/b}\right)^2 \leq 1,\ 0 < z \leq k^2\right\} \end{aligned}$$

Poniamo quindi $\frac{x}{\sqrt{z/a}} = s\cos\theta$, $\frac{y}{\sqrt{z/b}} = s\sin\theta$, $z = z$, $0 \leq s \leq 1$, $0 < z \leq k^2$ da cui $x(s,\theta,z) = \sqrt{z}s\cos\theta/a$, $y(s,\theta,z) = \sqrt{z}s\sin\theta/b$, $z(s,\theta,z) = z$. Lo Jacobiano della trasformazione è:

$$\mathrm{Jac}(\psi)(s,\theta,z) = \begin{pmatrix} a\sqrt{z}\cos\theta & -\sqrt{z}s\sin\theta/a & \frac{s\cos\theta}{2a\sqrt{z}} \\ b\sqrt{z}\sin\theta & \sqrt{z}s\cos\theta/b & \frac{s\sin\theta}{2b\sqrt{z}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è $zs/(ab)$. Allora:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{k^2} \frac{zs}{ab}\,dz\,ds\,d\theta = \frac{\pi k^4}{2ab}.$$

Esercizio 16.8. Determinare il baricentro del cappio della *strofoide* , curva di equazione ($a > 0$):

$$x(x^2+y^2) = a(x^2-y^2)$$

Svolgimento. In coordinate polari, si ha:

$$\rho^3\cos\theta = a\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

da cui

$$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

Si ha quindi $\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [\pi/2, 3/4\pi] \cup [5/4\pi, 3/2\pi]$. Osserviamo che $x(\theta) = \rho\cos\theta = a\cos 2\theta$. La curva è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse, quindi l'ordinata del baricentro è nulla, ed ammette un asintoto verticale, infatti $\lim_{\theta\to\pm\pi/2^{\mp}} \rho = +\infty$. Tale asintoto è $x = -a$. Si ha $\rho(\theta) = 0$ per $\theta = \pm\pi/4$. Pertanto il cappio è descritto da $-\pi/4 < \theta < \pi/4$, cui corrisponde $0 < x < a$ e $|y| \leq x\sqrt{(a-x)/(a+x)}$. Sia C il cappio della strofoide. L'area di C è data da:

$$\begin{aligned}
\iint_C dx\,dy &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\cos(2\theta)/\cos\theta} s\,ds\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^2(2\theta)}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4\cos^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} - 4\,d\theta\right) \\
&= \frac{a^2}{2}\left(2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos 2\theta + 1)\,d\theta + [\tan\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} - 2\pi\right) \\
&= \frac{a^2}{2}\left(2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta + 2 - \pi\right) \\
&= \frac{a^2}{2}(4-\pi)
\end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\iint_C x\,dx\,dy &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\cos(2\theta)/\cos\theta} s^2\cos\theta\,ds\,d\theta = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^3(2\theta)}{\cos^2\theta}\,d\theta\\
&= \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(2\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)^3\cos\theta\,d\theta\\
&= \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(8\cos^4\theta-12\cos^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}+6\right)\,d\theta\\
&= \frac{a^3}{3}\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4}2(\cos 2\theta+1)^2\,d\theta-3(2+\pi)-2+3\pi\right)\\
&= \frac{a^3}{3}\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4}2(\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta+1)\,d\theta-3(2+\pi)-2+3\pi\right)\\
&= \frac{a^3}{3}\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos 4\theta+1+4\cos 2\theta)\,d\theta+\pi-8\right)\\
&= \frac{a^3}{3}\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos 4\theta)\,d\theta+\frac{3}{2}\pi-4\right)\\
&= \frac{a^3}{3}\left(\frac{3}{2}\pi-4\right)=\frac{a^3}{6}(3\pi-8)\end{aligned}$$

Le coordinate del baricentro sono:

$$x_B=\frac{\displaystyle\iint_C x\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_C dx\,dy}=\frac{a}{3}\,\frac{3\pi-8}{4-\pi},\qquad\qquad y_B=0.$$

Esercizio 16.9. Calcolare l'area della superficie generata dalla rotazione attorno all'asse x della curva $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$

Svolgimento. L'area è data da:

$$\begin{aligned}A&=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=4\pi\int_0^{\pi/2}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=4\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\\
&=2\pi(\sqrt{2}+\operatorname{arc\,sinh}(1))=2\pi(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})).\end{aligned}$$

Esercizio 16.10. Calcolare l'area della porzione S di superficie:

$$z=\frac{2}{3}\cdot(x^{3/2}+y^{3/2})$$

che si proietta nel triangolo D determinato dalle rette $x=0$, $y=0$ e $x+y=3$.

Svolgimento. Si ha $\partial_x z(x,y)=\sqrt{x}$ e $\partial_y z(x,y)=\sqrt{y}$, da cui

$$\begin{aligned}A&=\iint_D\sqrt{1+x+y}\,dx\,dy=\int_0^3\int_{1+x}^4\sqrt{t}\,dt\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3(8-(1+x)^{3/2})\,ds\\
&=16-\frac{2}{3}\int_1^4 s^{3/2}\,ds=16-\frac{2}{3}\,\frac{62}{5}=\frac{116}{15}.\end{aligned}$$

CAPITOLO 17

Preparazione alla prima prova in itinere

Esercizio 17.1. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)(y^2+x(x+1)) = 4xy^2\}$$

(1) Si provi che $\cos(3\theta) = \cos\theta(1-4\sin^2\theta)$.
(2) Si esprima Γ in coordinate polari piane e, utilizzando il precedente, si dimostri che Γ è invariante per rotazioni di $\frac{2\pi}{3}$.
(3) Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nei punti $P_1 = (-1,0)$, $P_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e $P_3 = (1/2, -\sqrt{3}/2)$. Si provi che tali tangenti delimitano un triangolo equilatero.
(4) Si dica:
   (a) se Γ definisce implicitamente in un intorno di P_0, una funzione $y = \varphi_1(x)$ con $\varphi_1(-1) = 0$ e in caso affermativo, si calcoli $\varphi_1'(0)$.
   (b) se Γ definisce implicitamente in un intorno di P_1, una funzione $y = \varphi_2(x)$ con $\varphi_2(1/2) = \sqrt{3}/2$ e in caso affermativo, si calcoli $\varphi_2'(1/2)$.
   (c) se Γ definisce implicitamente in un intorno di P_2, una funzione $y = \varphi_3(x)$ con $\varphi_3(1/2) = -\sqrt{3}/2$ e in caso affermativo, si calcoli $\varphi_3'(1/2)$.
(5) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = x^2+y^2$ vincolati a Γ. Si dica se Γ è compatto.
(6) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Svolgimento. Può essere utile osservare che l'insieme presenta una simmetria rispetto all'asse delle x: infatti la sostituzione $y \mapsto -y$ lascia invariato l'insieme. Poniamo

$$f(x,y) = (x^2+y^2)(y^2+x(x+1)) - 4xy^2.$$

(1) Si ha:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(\theta+2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= \cos\theta(1-2\sin^2\theta) - 2\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta(1-4\sin^2\theta)\end{aligned}$$

(2) Esprimiamo Γ in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$: si ha

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2(\rho^2+\rho\cos\theta) - 4\rho^3\cos\theta\sin^2\theta = \rho^3(\rho+\cos\theta(1-4\sin^2\theta))$$

da cui si ottiene che $\rho = 0$ oppure $\rho + \cos\theta(1-4\sin^2\theta) = 0$. La seconda condizione implica la prima per $\theta = \pi/2$, pertanto sfruttando il punto precedente si ha:

$$\Gamma = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho = -\cos 3\theta,\ \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Poiché $\cos 3\theta = \cos(3(\theta + 2\pi/3))$ si ottiene l'invarianza richiesta.
(3) Differenziando la funzione f, si ottiene:

$$\begin{aligned}df(x,y) &= (2x(y^2+x(x+1)) + (x^2+y^2)(2x+1) - 4y^2)\,dx + \\ &\quad + (2y(y^2+x(x+1)+x^2+y^2) - 8xy)\,dy \\ &= (4x^3+3x^2+4xy^2-3y^2)\,dx + 2y(2y^2+2x^2-3x)\,dy\end{aligned}$$

Calcolando in P_1, P_2, P_3 si ottiene:

$$df(-1,0) = -\,dx, \qquad df\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\,dx \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,dy.$$

Questo implica che:
   (a) la retta tangente in P_1 è $r_1 : x = q_1$, dove q_1 va determinata imponendo il passaggio per P_1, ovvero $x = -1$,

(b) la retta tangente in P_2 sia $\frac{1}{2}\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y = q_2$, dove q_2 va determinata imponendo il passaggio per P_2, ovvero $r_2 : \frac{1}{2}\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y = 1$,

(c) la retta tangente in P_3 sia $\frac{1}{2}\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y = q_3$, dove q_3 va determinata imponendo il passaggio per P_3, ovvero $r_3 : \frac{1}{2}\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y = 1$.

Si ha $r_2 \cap r_3 = \{(2,0)\}$, $r_1 \cap r_2 = \{(-1,\sqrt{3})\}$, $r_1 \cap r_2 = \{(-1,-\sqrt{3})\}$, e si verifica che la distanza tra questi tre punti è la stessa e vale $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, pertanto il triangolo formato da queste rette è equilatero.

(4) Dal punto precedente si ricava come $\partial_y f(P_1) = 0$, quindi il Teorema di Dini non è applicabile in questo punto (la tangente a Γ è verticale) Invece $\partial_y f(P_2) = -\sqrt{3}/2 \neq 0$ e $\partial_y f(P_3) = \sqrt{3}/2 \neq 0$, pertanto il Teorema di Dini è applicabile in questi punti e restituisce due funzioni $y = \varphi_2(x)$ e $y = \varphi_3(x)$ definite in un intorno di $x = 1/2$, di classe C^1, con $\varphi_2(1/2) = \sqrt{3}/2$ e $\varphi_3(1/2) = -\sqrt{3}/2$. La derivata di φ_2 e φ_3 in $1/2$ è il coefficiente angolare della tangente in tali punti, ovvero $\varphi_2'(1/2) = -\sqrt{3}/3$ e $\varphi_3'(1/2) = \sqrt{3}/3$.

(5) Si tratta di studiare la funzione ρ^2 sotto il vincolo $\rho = -\cos 3\theta$, ovvero di studiare la funzione $w(\theta) = \cos^2(3\theta)$. Calcoliamo le derivate di w:

$$\begin{aligned} w'(\theta) &= -6\cos(3\theta)\sin(3\theta) = -3\sin(6\theta) \\ w''(\theta) &= 18\cos(6\theta) \end{aligned}$$

La derivata prima è nulla se $\theta = k\pi/6$, $k = 0, 1, ..., 5$. In tali punti, la derivata seconda è negativa se $k = 2, 3, 4$, quindi questi sono punti di massimo, e positiva se $k = 0, 1, 5$, quindi questi sono punti di minimo. Se $k = 0, 1, 5$ si ottiene dall'equazione di Γ che $\rho = 0$, pertanto il punto $(0, 0)$ è di minimo assoluto vincolato e in tale punto $\rho^2 = 0$. Se $k = 2, 3, 4$ si ottengono i punti $(-1, 0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(1/2, -\sqrt{3}/2)$, che sono quindi di massimo vincolato. Poiché ρ^2 assume in tutti questi punti il medesimo valore 1, tali massimi sono massimi assoluti vincolati. L'insieme è chiuso perché f è continua e limitato perché $\rho \leq 1$ sui punti di Γ, quindi è compatto.

(6) Questo punto è facoltativo, illustriamo un procedimento possibile per disegnare l'insieme Γ. Dal punto precedente, si è visto come Γ sia contenuto nella palla centrata nell'origine di raggio 1. I punti di contatto con la circonferenza di raggio 1 sono proprio P_1, P_2, P_3.

Poniamo $y = mx$ nell'equazione, ottenendo

$$\begin{aligned} 0 = f(x, mx) &= x^2(1 + m^2)(m^2x^2 + x(x + 1)) - 4x^3m^2 \\ &= x^3(1 + m^2)(m^2x + x + 1) - 4x^3m^2, \end{aligned}$$

da cui per $x \neq 0$ si ottiene

$$\begin{cases} x(m) &= \dfrac{3m^2 - 1}{(1 + m^2)^2} \\[2ex] y(m) &= \dfrac{m(3m^2 - 1)}{(1 + m^2)^2} \end{cases}$$

Poiché per $x = 0$ si ha che se $f(0, y) = 0$ allora necessariamente $y = 0$ (infatti $f(0, y) = y^4$), si ottiene che per ogni $m \in \mathbb{R}$ la retta di coefficiente angolare m interseca Γ nei punti $(0, 0)$ e $(x(m), y(m))$. Osserviamo che per $m \to \pm\infty$ si ottiene il punto $(0, 0)$ Osserviamo che $(x(m), y(m)) = (0, 0)$ per $m = \pm 1/\sqrt{3}$. Ciò implica che si ha un cappio definito da $m > 1/\sqrt{3}$, un altro dato da $-1/\sqrt{3} < m < 1\sqrt{3}$ e un terzo definito da $m < -1/\sqrt{3}$. Il cappio dato da $-1/\sqrt{3} < m < 1\sqrt{3}$ si trova nel semipiano delle $x < 0$, gli altri due nel primo quadrante e nel terzo quadrante. Dall'equazione in coordinate polari, si vede come Γ sia invariante per rotazioni di $2\pi/3$, inoltre Γ è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse pertanto è sufficiente studiare $\Gamma \cap \{-1 < x < 0,\ y \geq 0\}$, ruotare il risultato di $\pm 2\pi/3$ e poi rifletterlo rispetto all'asse delle ascisse.

Dato che $f \in C^\infty$, le funzioni implicitamente definite sono C^1 laddove sono definite. Sia $-1 < k < 0$ e consideriamo l'intersezione di Γ con la retta $x = k$, si ottiene $(k^2 + y^2)(y^2 + k(k + 1)) = 4ky^2$ da cui $y^4 + (2k^2 - 3k)y^2 + k^4 + k^3 = 0$. Poniamo quindi $t = y^2$ ottenendo l'equazione

$$p_k(t) := t^2 + (2k^2 - 3k)t + (k^4 + k^3) = 0$$

Per avere soluzioni accettabili di y, è necessario che le corrispondenti soluzioni di t siano positive. Osserviamo che $\lim_{t\to\pm\infty} p_k(t) = +\infty$, e che $p_k(0) = k^4 + k^3 < 0$. Per il teorema di esistenza degli zeri, si ha che esiste una radice $t^- < 0$ e una radice $t^+ > 0$. Ciò implica che t_- è da scartarsi perché negativa, e si ha $y_\pm = \pm\sqrt{t^+}$, dove si ha che

$$t_+ = \frac{-(2k^2-3k)+\sqrt{k^2(9-16k)}}{2}.$$

Com'era lecito attendersi vista la simmetria di Γ le due radici sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. Restano quindi definite due funzioni implicite $y = \varphi^+(x)$ e $y = \varphi^-(x)$ corrispondenti alla radice positiva e alla radice negativa. Tali funzioni, se derivabili, sono di classe C^1.
Calcoliamoci massimi e minimi di $y = y(m)$, si tratta di avere $y'(m) = 0$ da cui:

$$\begin{aligned}0 &= (9m^2-1)(1+m^2)^2 - 4m^2(3m^2-1)(1+m^2)\\ &= (1+m^2)((9m^2-1)(1+m^2)-4m^2(3m^2-1))\\ &= (1+m^2)(-1+12m^2-3m^4),\end{aligned}$$

da cui si ottengono per m i quattro valori $m = \pm\sqrt{(6\pm\sqrt{33})/3}$.
Pertanto i massimi e minimi di $y(m)$ si hanno per $m = \pm\sqrt{(6\pm\sqrt{33})/3}$. Sostituendo, si ottengono i punti:

$$\begin{aligned}S_1 &= \left(-\frac{3}{32}(1+\sqrt{33}), -\frac{3}{32}(1+\sqrt{33})\sqrt{\frac{6-\sqrt{33}}{3}}\right)\\ S_2 &= \left(-\frac{3}{32}(1+\sqrt{33}), \frac{3}{32}(1+\sqrt{33})\sqrt{\frac{6-\sqrt{33}}{3}}\right)\\ S_3 &= \left(\frac{3}{32}(-1+\sqrt{33}), -\frac{3}{32}(-1+\sqrt{33})\sqrt{\frac{6+\sqrt{33}}{3}}\right)\\ S_4 &= \left(\frac{3}{32}(-1+\sqrt{33}), \frac{3}{32}(-1+\sqrt{33})\sqrt{\frac{6+\sqrt{33}}{3}}\right)\end{aligned}$$

Si noti che per $-1 < x < 0$ vi è un solo punto critico per la funzione y^2. Esso deve essere un massimo perché per $x = -1$ e $x = 0$ si ha che $y = 0$. Tale massimo vale $(\frac{3}{32}(1+\sqrt{33})^2$. Quindi per $-1 < x < 0$, l'insieme è costituito da due rami simmetrici rispetto all'asse delle ascisse. Il ramo $y = \varphi^+(x)$ nel secondo quadrante parte dal punto $(-1, 0)$, raggiunge il massimo valore della y nel punto P_2 e poi termina nell'origine. Il ramo $y = \varphi^+(-)$ nel terzo quadrante è simmetrico. Ruotando il tutto di $\pm 2\pi/3$, si ottiene che l'insieme è formato da tre petali.
Calcoliamo ora i massimi e i minimi di $x = x(m)$, si deve avere $x'(m) = 0$ da cui

$$\begin{aligned}0 &= 6m(1+m^2)^2 - 4m(3m^2-1)(1+m^2)\\ &= 2m(1+m^2)(3(1+m^2)-2(3m^2-1)) = 2m(1+m^2)(5-3m^2),\end{aligned}$$

da cui si ottengono i valori $m = 0$, $m = \pm\sqrt{5/3}$. Sostituendo, si ottengono i punti:

$$Q_1 = (-1, 0), \qquad Q_2 = \left(\frac{9}{16}, \frac{9\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}\right) \qquad Q_2 = \left(\frac{27}{50}, -\frac{9\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}\right)$$

In figura vengono riportate le rette parallele agli assi e passanti per i punti S_i, Q_j, $i = 1, ..., 4$, $j = 1, 2, 3$, la circonferenza circoscritta a Γ e tangente ad esso nei punti P_1, P_2, P_3 (punti di distanza massima dall'origine), nonché le rette tangenti a Γ in tali punti.

Esercizio 17.2. Siano $r, R > 0$, $R > r$. Posto

$$D_r^R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y \geq 0,\, r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

si calcoli

$$\lim_{r\to 0^+} \iint_{D_r^R} \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\, dxdy$$

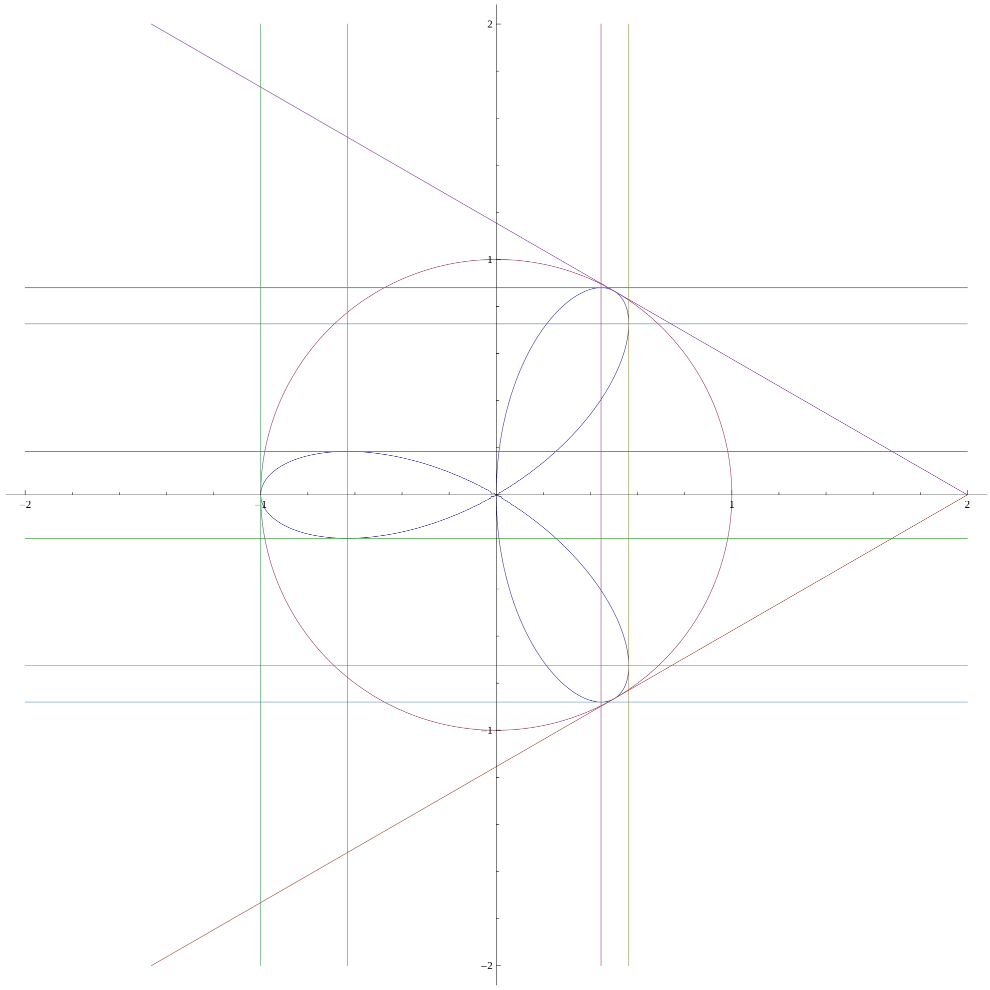


FIGURA 1. La curva $(x^2 + y^2)(y^2 + x(x + 1)) = 4xy^2$, la circonferenza ad essa circoscritta e alcune rette significative.

SVOLGIMENTO. Indichiamo con f, la funzione integranda. In coordinate polari, si ha

$$\tilde{D}_r^R = \{(\rho, \theta) : \, r \leq \rho \leq R, \, \theta \in [0, \pi/2]\}.$$

La funzione integranda è

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \sin \theta e^{\rho}/\rho,$$

per cui, essendo il determinante Jacobiano della trasformazione pari a ρ, si ha:

$$\iint_{D_r^R} \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} \, dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_r^R \sin \theta e^{\rho} \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \cdot \int_r^R e^{\rho} \, d\rho = e^R - e^r$$

Per cui il limite richiesto vale $e^R - 1$.

Esercizio 17.3. Si consideri la serie di funzioni continue nell'intervallo $[0, 1]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx^2} - (n + 1)xe^{-(n+1)x^2}.$$

(1) Si provi che la serie converge puntualmente in $[0, 1]$ e si scriva la funzione f somma della serie.
(2) Si studi la convergenza uniforme e totale in $[0, 1]$.

SVOLGIMENTO. Posto $f_n = nxe^{-nx^2}$, si ha che la somma parziale N-esima della serie

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f_{n+1}(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_{n+1}(x) = f_1(x) - f_{N+1}(x)$$

perché i termini intermedi si cancellano. Quindi $s_N(x) = xe^{-x^2} - (N+1)xe^{-(N+1)x^2}$ Per ogni $x \in [0,1]$ fissato, si ha $\lim_{n\to\infty}(n+1)xe^{-(n+1)x^2} = 0$, quindi la serie converge puntualmente a $f(x) = xe^{-x^2}$.
Studiamo la convergenza uniforme:

$$\sup_{x\in[0,1]} |xe^{-x^2} - s_n| = \sup_{x\in[0,1]} |(N+1)xe^{-(N+1)x^2}| = \sup_{x\in[0,1]} |f_{n+1}(x)|$$

si ha $f_{N+1}(0) = 0$ e $f_{n+1}(1) = (N+1)e^{-(N+1)}$.

$$f'_{N+1}(x) = (N+1)e^{-(N+1)x^2} - 2(N+1)^2x^2e^{-(N+1)x^2} = (N+1)e^{-(N+1)x^2}(1-2(N+1)x^2),$$

che si annulla in $[0,1]$ per $x = 1/\sqrt{2(N+1)}$.
Con questa scelta, si ottiene: $f_{N+1}\left(\dfrac{1}{2(N+1)}\right) = \dfrac{(N+1)}{\sqrt{2(N+1)}}e^{-1/2} \to +\infty$ che non tende a zero per $N \to +\infty$, pertanto la serie non converge uniformemente, quindi nemmeno totalmente.

Esercizio 17.4. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4(x^2+y^2-x)^3 = 27(x^2+y^2)^2\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che la curva interseca gli assi in cinque punti, di cui uno è l'origine. Si determinino gli altri quattro punti $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1,2,3,4$. Detto P_1 l'intersezione con ascissa strettamente negativa, si scrivano le equazioni delle tangenti a Γ in P_2, P_3, P_4.
(3) Per ogni $i = 1,2,3,4$, si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi_i(x)$ di classe C^1 in un intorno di x_i con $\varphi_i(x_i) = y_i$.
(4) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ vincolati a Γ. Si dica se Γ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Svolgimento.

(1) Poniamo $f(x,y) = 4(x^2+y^2-x)^3 - 27(x^2+y^2)^2$. Poiché $f(x,-y) = f(x,y)$, si ha che Γ è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. In coordinate polari si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 4\rho^3(\rho-\cos\theta)^3 - 27\rho^4 = \rho^3(4(\rho-\cos\theta)^3 - 27\rho).$$

pertanto si ottiene che se $\rho > 0$ si deve avere $4(\rho-\cos\theta)^3 = 27\rho$, da cui

$$\Gamma = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \sqrt[3]{4}\rho - 3\sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{4}\cos\theta,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0,2\pi[\} \cup \{(0,0)\}.$$

(2) Studiamo le intersezioni con gli assi. Poiché $f(0,0) = 0$, l'origine appartiene a Γ. Vediamo le intersezioni con l'asse delle ordinate:

$$f(0,y) = 4y^6 - 27y^4 = y^4(4y^2 - 27)$$

che si annulla solo per $y = 0$, $y = \pm 3\sqrt{3}/2$, quindi $P_3 = (0, 3\sqrt{3}/2)$ e $P_4 = (0, -3\sqrt{3}/3)$.
Cerchiamo intersezioni con l'asse delle ascisse diverse dall'origine:

$$f(x,0) = 4x^3(x-1)^3 = 27x^4$$

che si annulla solo per $x = 0$, e $4(x-1)^3 - 27x = 0$, ovvero $4x^3 - 12x^2 - 15x - 4 = 0$. Risolvere questa equazione può non essere immediato: è buona norma vedere se essa ammette soluzioni *più facili* da determinare, in tal caso, infatti, tramite divisione è possibile ricondursi ad un polinomio di secondo grado.
Cerchiamo soluzioni intere di questa equazione: esse vanno cercate tra i divisori di 4, ovvero $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Si vede come $\pm 1, \pm 2$ non siano soluzioni, invece 4 è soluzione. Quindi dividendo il polinomio dato per $x - 4$ si ottiene:

$4x^3$	$-12x^2$	$-15x$	-4	$x-4$
$-4x^3$	$+16x^2$			$4x^2+4x+1$
	$4x^2$	$-15x$		
	$-4x^2$	$+16x$		
		x	-4	
		$-x$	4	
			0	

Quindi:
$$4x^3-12x^2-15x-4=(x-4)(4x^2+4x+1)=(x-4)(2x+1)^2,$$
che si annulla per $x=4$ e $x=-1/2$. Pertanto $P_1=(-1/2,0)$, $P_2=(4,0)$.

(3) Calcoliamo le derivate parziali di f:
$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y)&=12(x^2+y^2-x)^2(2x-1)-108x(x^2+y^2)\\&=12((x^2+y^2-x)^2(2x-1)+9x(x^2+y^2))\\ \partial_y f(x,y)&=12y(2(x^2+y^2-x)^2-9(x^2+y^2)).\end{aligned}$$
e scriviamo il differenziale nei punti P_2, P_3, P_4 per determinare l'equazione della tangente:
   (a) $df(4,0)=12(144\cdot 7-36\cdot 4)\,dx=144\cdot 72\,dx$, pertanto in $(4,0)$ la tangente è parallela alla retta $x=0$, e quindi è la retta $x=4$.
   (b) $df(0,3\sqrt{3}/2)=\frac{729}{16}(-\,dx+\sqrt{3}\,dy)$, pertanto in $(0,3\sqrt{3}/2)$ la tangente è della forma $-x+\sqrt{3}y=q$, sostituendo si ottiene $q=9/2$ e l'equazione della tangente risulta $-x+\sqrt{3}y=9/2$.
   (c) per simmetria, la tangente nel punto $(0,-3\sqrt{3}/2)$ è $x+\sqrt{3}y=-9/2$.
   (d) nei punti P_3, P_4, si ha $\partial_y f(P_3)\neq 0$ e $\partial_y f(P_4)\neq 0$, quindi per il teorema di Dini vengono definite le funzioni implicite richieste. Si ha però $\partial_y f(P_1)=\partial_y f(P_2)=0$, quindi in questi punti il teorema non è applicabile.

(4) Dall'equazione in coordinate polari, si ha $\rho\geq 0$, e $\sqrt[3]{4}\leq\sqrt[3]{4}\rho-3\sqrt[3]{\rho}\leq\sqrt[3]{4}$. Studiamo la funzione $z(\rho)=\sqrt[3]{4}\rho-3\sqrt[3]{\rho}$. Si ha $z(0)=0$ e
$$\dot z(\rho)=\sqrt[3]{4}+\rho^{-2/3}>0$$
Pertanto la funzione $z(\rho)$ è strettamente crescente nel suo dominio. Essa raggiunge il suo unico valore di massimo assoluto $z(\rho)=\sqrt[3]{4}$, per $\theta=0$, quindi nel punto corrispondente al punto $(4,0)$. Pertanto il massimo assoluto di ρ è 4, quindi il massimo di ρ^2 è 16. Essendo f continua, Γ è chiuso. Poiché ρ è limitato, Γ è compatto.

(5) Studiamo le intersezioni con rette $x=k$. Abbiamo già visto come se $|k|>4$ non ci siano intersezioni, e che l'unica intersezione con $x=4$ sia il punto $(4,0)$.
Le intersezioni sono due a due simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. Cerchiamo di operare delle sostituzioni opportune nell'espressione di f in modo da abbassare il grado dell'equazione $f=0$.
Poniamo $v=\rho^2=x^2+y^2$, $0\leq v\leq 16$. L'equazione ridotta è
$$p_x(v)=4(v-x)^3-27v^2=0,$$
polinomio di terzo grado in v, sotto la condizione $v\geq x^2$.
Esplicitando la variabile x, otteniamo $x=v-3v^{2/3}/\sqrt[3]{4}$, sotto la condizione $v\geq x^2$. Poniamo $h(v)=v-3v^{2/3}/\sqrt[3]{4}$ e studiamo la funzione $x=h(v)$, nel dominio $0\leq v\leq 16$ con la condizione $v\geq h^2(v)$.
   (a) Si ha $h'(v)=1-2^{1/3}/v^{1/3}$ che si annulla solo in $v=2$ (punto di minimo assoluto, lo si vede osservando che la derivata seconda è positiva). La funzione h è strettamente decrescente per $0<v<2$ e strettamente crescente per $2<v<16$.
   (b) Un valore $x=h(v)$, $0\leq v\leq 16$ è accettabile solo se $v\geq x^2$, ossia se $-\sqrt{v}\leq x\leq\sqrt{v}$.
   (c) Si ha $h(v)=0$ per $v=0$, $v=27/4$. Osserviamo che $0<2<27/4<16$, quindi h è negativa in $]0,27/4[$ e positiva in $]27/4,16[$.
   (d) Il massimo valore di v è 16, quindi il massimo valore di $h(v)$ è $h(16)=4$ e tale valore è accettabile perché $-\sqrt{16}\leq 4\leq\sqrt{16}$. Pertanto ritroviamo che il massimo valore delle x in modo che $f(x,y)=0$ abbia soluzione è 4. Come già visto, si ha che $f(4,y)=0$ se e solo se $y=v-h^2(v)$ con $v=16$, da cui $y=0$.
   (e) Determiniamo il minimo valore delle $x=h(v)$ in modo che $f(x,y)$ abbia soluzione. Il minimo di h è raggiunto in $v=2$. Osserviamo che $h(2)=-1$ e $-\sqrt{2}<-1$. La funzione $-\sqrt{v}$ è strettamente decrescente, mentre per $v>2$ la funzione $h(v)$ è strettamente crescente. Quindi per $2<v<16$ si avrà sempre $-\sqrt{v}\leq h(v)=x$. In particolare si ottiene che $(x,y)\in\Gamma$ implica necessariamente $x\geq -1$ e quindi che -1 è il minimo assoluto della funzione x vincolata a Γ.
   Risolvendo $f(-1,y)=0$ si ottiene $5-6y^2-3y^4+4y^6=0$. Posto $t=y^2$ si ha $5-6t-3t^2+4t^3=0$. Cerchiamo radici tra i divisori interi di 5, ossia $\pm1,\pm5$. Si ottiene che 1 è radice accettabile. Dividiamo allora $5-6t-3t^2+4t^3$ per $x-1$, si ottiene $4t^2+t-5$. Tale polinomio ammette radici 1 e $-5/4$. Le radici negative non sono accettabili. Si ha $f(-1,y)=0$ se e solo se $t=y^2=1$,

quindi $y = \pm 1$. Poiché $\partial_x f(1, \pm 1) \neq 0$, possiamo esplicitare la x in funzione della y in questi due punti.

(f) si è visto che condizione necessaria per risolvere $f(x, y) = 0$ è che $-1 \leq y \leq 0$. Proviamo che tale condizione è anche sufficiente: Studiamo il segno dell'espressione $h(v) - \sqrt{v}$ per $2 < v < 16$. La derivata di tale espressione è strettamente negativa, essa è positiva in 2, quindi si annulla in un unico punto. Come visto sopra, tale punto è 4. Quindi per $2 < v < 16$ tutti i valori di $h(v)$ sono accettabili.
Se $0 < x < 4$ allora esiste un unico v tale per cui $h(v) = x$, quindi per $x_0 \geq 0$ fissato l'equazione $f(x_0, y) = 0$ ammette due soluzioni y simmetriche rispetto all'asse delle ascisse $y = \pm\sqrt{1 - h^2(v)}$.
In generale, poiché h possiede un unico minimo assoluto in 2 ed è strettamente monotona in $[0, 2]$ e $[2, 16]$, per ogni $-1 < x < 0$ esistono al più due valori di v accettabili, quindi esistono al più quattro valori di y tali che $f(x, y) = 0$.

(g) Cerchiamo i massimi di y^2 vincolati a Γ. Si ha $y^2 = v - h^2(v)$. La derivata è $1 - 2h(v)h'(v) = 5\sqrt[3]{2}v^{2/3} - 2v - 3 \cdot 2^{2/3}\sqrt[3]{v} + 1$. Sappiamo che un estremale per y^2 è raggiunto in $x = -1/2$ e vale 0, quindi deve essere raggiunto per $v = 1/4$. Pertanto $1 - 2h(v)h'(v)$ è divisibile per $v_0 = 1/4$.
Poniamo $p(v) = 5\sqrt[3]{2}v^{2/3} - 2v - 3 \cdot 2^{2/3}\sqrt[3]{v} + 1$. Sappiamo che $p(1/4) = 0$. Posto $v = 2t^3$, si ottiene $p(t) = -4t^3 + 10t^2 - 6t + 1$ e sappiamo che $1/4 = 2t^3$ è soluzione da cui $t = 1/2$. Quindi il polinomio $p(t)$ è divisibile per $t - 1/2$. Eseguendo la divisione, si ottiene $-2 + 8t - 4t^2$, che ammette come soluzioni $t = 1/2(2 \pm \sqrt{2})$, da cui si ricava $v_1 = 1/4(2 - \sqrt{2})^3$, $v_2 = 1/4(2 + \sqrt{2})^3$.
Si ha $x_0 = h(v_0) = -1/2$, $x_1 = h(v_1) = 1/2 - 1/\sqrt{2}$, $x_2 = h(v_2) = 1/2 + 1/\sqrt{2}$. Poiché $x_2 > 0$, esiste solo un $y > 0$ tale che $f(x_2, \pm y) = 0$. Si ha $y_2^+ = \sqrt{v_2 - h^2(v_2)} = \sqrt{17/4 + 3\sqrt{2}}$ e $y_2^- = -y_2^+$, ed essi sono massimi assoluti per y^2 vincolata a Γ.
Per quanto riguarda v_1, si ottiene $y_1^+ = \sqrt{v - h^2(v)} = \sqrt{17/4 - 3\sqrt{2}}$ e $y_1^- = -y_1^+$.

Questo termina lo studio qualitativo:

(a) Γ è inscritto nel quadrato

$$Q := [-1, 4] \times [-\sqrt{17/4 + 3\sqrt{2}}, \sqrt{17/4 + 3\sqrt{2}}].$$

(b) Se $0 < x < 4$, abbiamo due rami simmetrici rispetto all'asse delle ascisse. Il ramo nel primo quadrante passa per $(0, 3\sqrt{3}/2)$, raggiunge il suo massimo nel punto $1/2 + 1/\sqrt{2}$ e tale massimo vale $\sqrt{17/4 + 3\sqrt{2}}$, poi decresce fino al punto $(4, 0)$ dove si ricongiunge con il ramo simmetrico. Nel punto $(4, 0)$ la tangente è verticale.

(c) Se $-1/2 \leq x \leq 0$ abbiamo quattro rami, due a due simmetrici rispetto all'asse delle ascisse. I due rami a distanza maggiore dall'asse delle ascisse si ricongiungono ai rami del primo e quarto quadrante. I due rami più vicini all'asse delle ascisse passano per $(-1/2, 0)$ e $(0, 0)$ e raggiungono il massimo della loro distanza dall'asse x nel punto $1/2 - 1/\sqrt{2}$ e tale massimo vale $\sqrt{17/4 - 3\sqrt{2}}$.

(d) Se $-1 < x < -1/2$ abbiamo quattro rami, due a due simmetrici rispetto all'asse delle ascisse. I due rami del secondo quadrante passano entrambi per il punto $(-1, 1)$, uno di essi si congiunge al suo simmetrico nel punto $(-1/2, 0)$, mentre l'altro si congiunge al ramo a distanza maggiore dall'asse delle ascisse definito per $-1/2 < x < 0$. Il comportamento dei rami del terzo quadrante è simmetrico.

In figura:

(1) le due rette oblique sono $-x + \sqrt{3}y = 9/2$ e $x + \sqrt{3}y = -9/2$, tangenti a Γ rispettivamente in $(0, 3\sqrt{3}/2)$ e $(0, -3\sqrt{3}/2)$.

(2) le rette verticali da sinistra a destra sono:
   (a) $x = -1$, tangente a Γ nei punti $(-1, \pm 1)$. Non vi sono punti di Γ a sinistra di tale retta.
   (b) $x = -1/2$, il punto $(-1/2, 0)$ è una delle tre intersezioni di Γ con l'asse delle ascisse.
   (c) $x = 1/2 - 1/\sqrt{2}$, essa passa per i punti di massimo assoluto dei due rami di Γ più vicini all'asse delle ascisse definiti per $-1/2 < x < 0$. Essa interseca Γ nei punti $(1/2 - 1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{17/4 - 3\sqrt{2}})$
   (d) $x = 0$, interseca Γ in tre punti, uno è l'origine e gli altri sono $(0, \pm 3\sqrt{3}/2)$. A destra di tale retta l'insieme ha solo due rami.

   (e) $x = 1/2 + 1/\sqrt{2}$, essa i punti di massimo assoluto dei due rami di Γ definiti per $0 < x < 4$, e interseca quindi Γ nei punti $(1/2 + 1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{17/4 + 3\sqrt{2}})$. Essi sono i punti di Γ più lontani dall'asse delle ascisse. La distanza massima di un punto di Γ dall'asse delle ascisse è quindi $\sqrt{17/4 + 3\sqrt{2}}$.
   (f) $x = 4$, tangente a Γ nel punto $(4, 0)$. Non vi sono punti di Γ a destra di tale retta.
(3) le rette orizzontali dall'alto verso il basso sono:
   (a) $y = \sqrt{17/4 + 3\sqrt{2}}$ tangente a Γ nel punto $(1/2 - 1/\sqrt{2}, \sqrt{17/4 + 3\sqrt{2}})$. Non vi sono punti di Γ al di sopra di tale retta.
   (b) $y = 3\sqrt{3}/2$ passante per una delle tre intersezioni di Γ con l'asse delle ordinate.
   (c) $y = -1$, interseca Γ in due punti, di cui uno, ovvero $(-1, 1)$ realizza il minimo delle ascisse dei punti di Γ.
   (d) $y = \sqrt{17/4 + 3\sqrt{2}}$, tangente a Γ in $(1/2 + 1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{17/4 + 3\sqrt{2}})$
   (e) $y = 0$, interseca Γ nei tre punti $(-1/2, 0)$, $(0, 0)$, $(4, 0)$
   (f) le rimanenti sono le simmetriche delle precedenti.

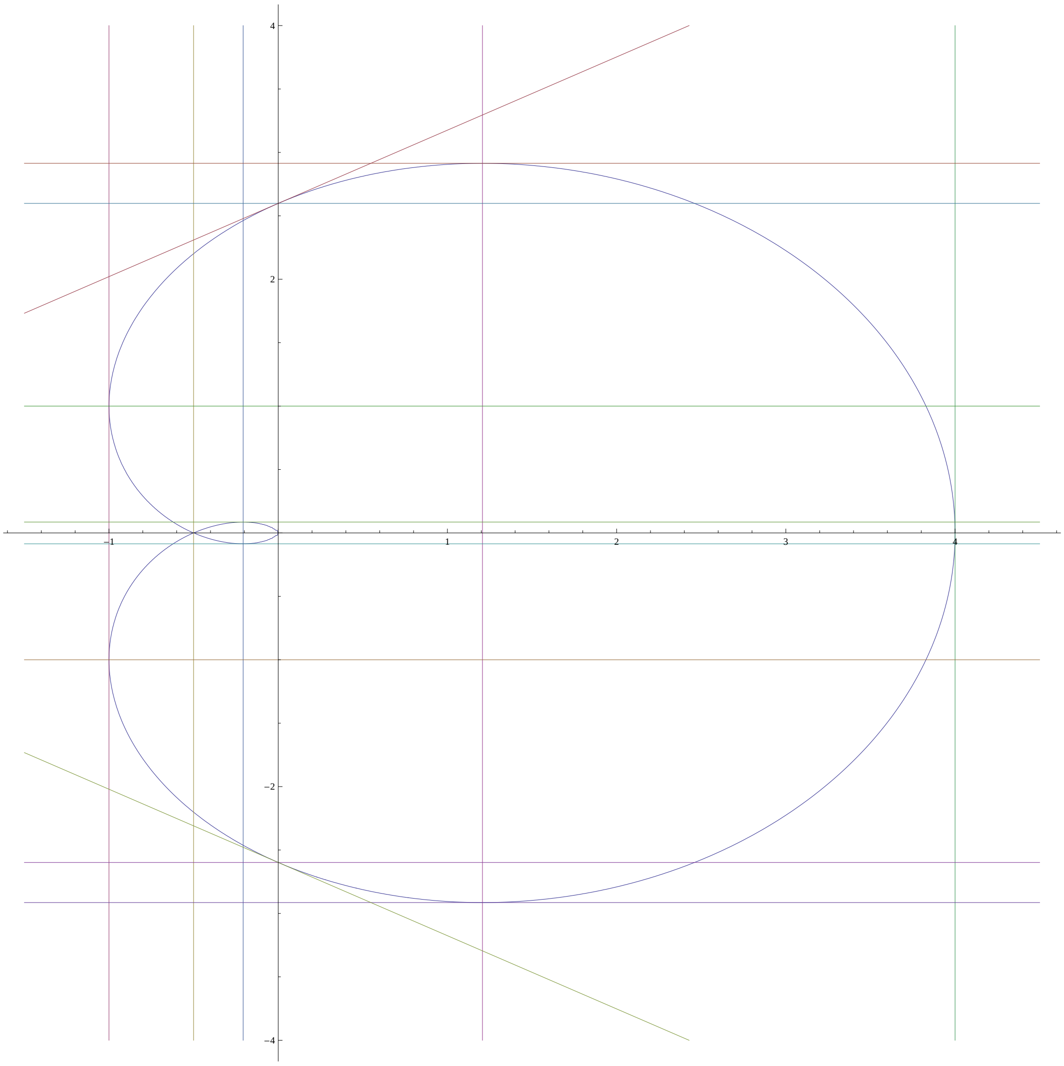


FIGURA 2. La curva $4(x^2 + y^2 - x)^3 = 27(x^2 + y^2)^2$ e alcune rette significative

Esercizio 17.5. Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito da:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2.$$

SVOLGIMENTO. Se $a = 0$ l'insieme si riduce all'origine. Sia $a \neq 0$. Poniamo $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2$. Si hanno simmetrie rispetto agli assi cartesiani, all'origine e alle bisettrici. Calcoliamo

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^6 - 4a^2\rho^4\cos\theta\sin\theta = \rho^4(\rho^2 - a^2\sin^2 2\theta).$$

L'insieme (al più con la possibile esclusione di $(0, 0)$) è rappresentato da $\rho^2 = a^2\sin^2 2\theta$. La condizione $\rho \geq 0$ è sempre vera. Per $\theta = \pi$ si ottiene anche $\rho = 0$. Quindi $\rho(\theta) = |a||\sin 2\theta|$ rappresenta l'insieme. Si ha che ρ è limitato, e il suo valore massimo accettabile viene assunto per $\theta = \pi/4 + k\pi/2$, $k = 1, 2, 3, 4$ e vale $|a|$. Quindi l'insieme è compatto e contenuto nella palla centrata nell'origine di raggio $|a|$. Tale palla è tangente all'insieme nei punti $(|a|\sqrt{2}/2, |a|\sqrt{2}/2)$ e nei i suoi simmetrici rispetto agli assi. Si ha inoltre che $|\sin(2(\theta + \pi/2))| = |\sin(2\theta+\pi)| = |\sin(2\theta)|$, quindi l'insieme è invariante per rotazioni di $\pi/2$. È quindi sufficiente studiare l'insieme per $0 < \theta < \pi/4$, e poi ricostruire tutto sfruttando le simmetrie rispetto agli assi. Calcoliamo massimi e minimi di $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ per $0 < \theta < \pi/4$. Si ottiene $x(\theta) = |a|\sin 2\theta\cos\theta = 2|a|\sin\theta\cos^2\theta = 2|a|(\sin\theta - \sin^3\theta)$. La derivata di questa espressione è

$$\dot{x}(\theta) = 2|a|\cos\theta(1 - 3\sin^2\theta)$$

Tale derivata è nulla in $0 < \theta < \pi/4$ se e solo se $\sin\theta = 1/\sqrt{3}$ e $\cos\theta = \sqrt{2/3}$. Quindi il valore massimo relativo e assoluto di x vincolato a θ è assunto in $x^* = \rho^*\cos\theta^* = \rho(\theta^*)\cos\theta^* = |a|4/(3\sqrt{3})$. Calcoliamo $\rho^*\sin\theta^* = |a|(2/3)^{3/2}$. Consideriamo quindi il punto $P = (|a|4/(3\sqrt{3}), |a|(2/3)^{3/2})$ e tutti i suoi simmetrici

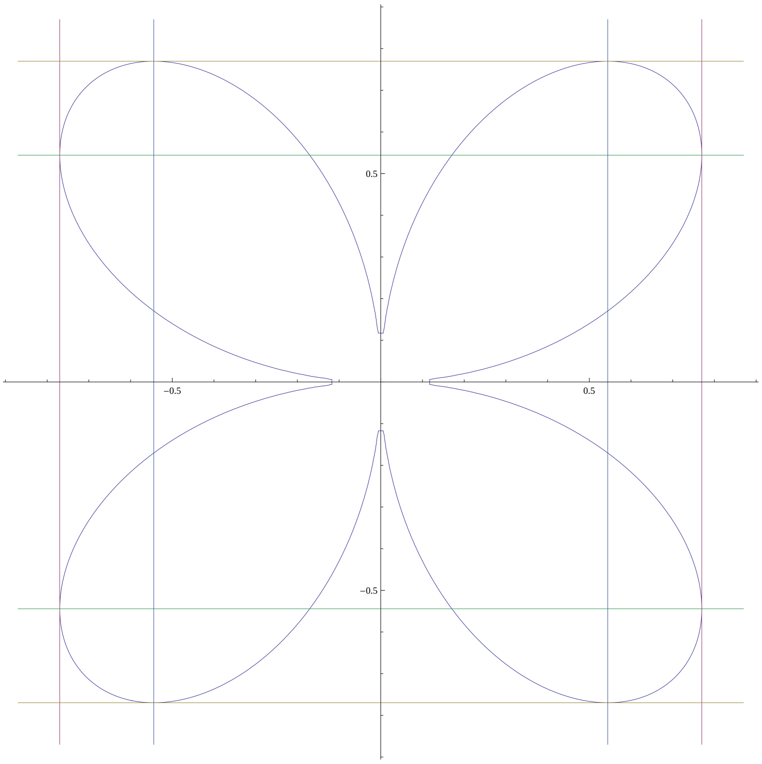


Figura 3. La curva $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$ e alcune rette significative

ripetto agli assi e alle bisettrici. Tali punti si dividono in due categorie: i punti $(\pm|a|4/(3\sqrt{3}), \pm|a|(2/3)^{3/2})$ con tutte le combinazioni possibili di segno sono punti a tangente verticale, i punti $(\pm|a|(2/3)^{3/2}, \pm|a|4/(3\sqrt{3}))$ sono punti a tangente orizzontale. Per $0 < \theta < \theta^*$ si ha che $y(\theta)$ e $x(\theta)$ sono entrambe strettamente crescenti, e non vi sono punti a tangente orizzontale o verticale, quindi il ramo di Γ dato dai punti $(x(\theta), y(\theta))$, $0 < \theta < \theta^*$ è grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ strettamente monotona, questa Per $\theta^* < \theta < \pi/4$, vi è un'unico punto a tangente orizzontale e non vi sono punti a tangente verticale. In questo intervallo $x(\theta)$ è decrescente e $y(\theta)$ è crescente. Le parti rimanenti del grafico si costruiscono per simmetria. L'insieme è costituito da quattro petali passanti per l'origine. In figura sono riportati gli assi e tutte le rette parallele agli assi passanti per i punti simmetrici al punto P rispetto agli assi e alla bisettrice nel caso $a = 1$.

CAPITOLO 18

Lezione del giorno martedì 1 dicembre 2009 (1 ora) Integrali curvilinei, Formule di Gauss-Green

Esercizio 18.1. Sia $a > 0$. Calcolare l'area del cappio della curva di equazioni parametriche:

$$x = \frac{at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{at^2}{1+t^3}.$$

SVOLGIMENTO. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}^2$:

$$F(t) = (F_1(t), F_2(t)) := \left(\frac{at}{1+t^3}, \frac{at^2}{1+t^3}\right).$$

Eseguiamo un rapido studio delle funzioni F_1 e F_2:

$$F_1(0) = 0, \lim_{|t|\to\infty} F_1(t) = 0, \qquad \lim_{t\to -1^\pm} F_1(t) = \mp\infty, F_1'(t) = \frac{a(1-2t^2)}{(1+t^3)^2} > 0 \text{ sse } |t| < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$F_2(0) = 0, \lim_{|t|\to\infty} F_2(t) = 0, \qquad \lim_{t\to -1^\pm} F_2(t) = \pm\infty, F_2'(t) = \frac{at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} > 0 \text{ sse } 0 < t < \sqrt[3]{2}.$$

Per $t < -1$, entrambe queste funzioni sono strettamente decrescenti, pertanto il cappio si avrà eventualmente per $t > -1$. Il cappio si ha se esistono $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $t_1 < t_2$ tali per cui $F(t_1) = F(t_2) =: (\bar{x}, \bar{y})$, quindi si deve avere:

$$\frac{at_1}{1+t_1^3} = \frac{at_2}{1+t_2^3}, \qquad \frac{at_1^2}{1+t_1^3} = \frac{at_2^2}{1+t_2^3}.$$

In particolare, si dovrà avere $0 < t_1 < \sqrt{2}/2$ e $t_2 > \sqrt[3]{2}$, per gli intervalli di monotonia delle due funzioni. Sostituendo la prima uguaglianza nella seconda, si ha:

$$\frac{at_1^2}{1+t_2^3} = \frac{at_1 t_2}{1+t_1^3},$$

da cui:

$$(t_1 - t_2) \cdot \frac{at_1}{1+t_1^3} = 0.$$

Ne segue $t_1 = 0$, da cui $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Risostituendo nelle uguaglianze e osservando che $t_2 \neq 0$ si ha che il punto $(0, 0)$ viene raggiunto asintoticamente per $t \to +\infty$, quindi $t_2 = +\infty$ e il cappio è descritto dalla curva $\gamma = \{F(t) : t \geq 0\}$.
Sia C la regione di piano circoscritta da tale curva. L'area del cappio è data da:

$$A = \int\int_C dx\, dy.$$

Osserviamo che per le formule di Green, si ha:

$$\oint_\gamma (P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy) = \int\int_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

dove $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono funzioni qualsiasi con derivate parziali continue in un aperto del piano contenente C.
Nel nostro caso, determiniamo P, Q in modo tale che il membro di destra sia pari ad A. Una scelta possibile è porre $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$. Si ha allora:

$$A = \oint_\gamma x\, dy = \int_0^{+\infty} F_1(t) F_2'(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{at}{1+t^3} \cdot \frac{at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\, dt = a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2(2-t^3)}{(1+t^3)^3}\, dt$$
$$= \frac{a^2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{2-t^3}{(1+t^3)^3} \cdot 3t^2\, dt = \frac{a^2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{2-s}{(1+s)^3}\, ds = \frac{a^2}{3} \int_1^{+\infty} \frac{3-u}{u^3}\, du = \frac{a^2}{6}.$$

Pertanto l'area richiesta vale $A = a^2/6$.

Esercizio 18.2. Sia $a > 0$. Calcolare l'area del dominio racchiuso dalla curva di equazione polare:

$$\rho^2(\theta) = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Svolgimento. Scegliamo come dominio per l'angolo θ l'intervallo (di lunghezza 2π) $[-\pi/2, 3/2\pi]$. Osserviamo innanzitutto che dovendosi avere $\cos 2\theta \geq 0$, si dovrà avere $\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3/4\pi, 5/4\pi] =: D$. Inoltre $\rho(-\pi/4) = \rho(\pi/4) = \rho(3/4\pi) = \rho(5/4\pi) = 0$, quindi l'equazione data definisce nel piano cartesiano una curva chiusa γ passante per l'origine. Sia C la regione di piano circoscritta da tale curva. L'area di tale regione è data da:

$$A = \int\int_C dx\, dy.$$

Osserviamo che per le formule di Green, si ha:

$$\oint_\gamma (P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy) = \int\int_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

dove $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono funzioni qualsiasi con derivate parziali continue in un aperto del piano contenente C.

Nel nostro caso, determiniamo P, Q in modo tale che il membro di destra sia pari ad A. Una scelta possibile è porre $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$. Ricordando che in coordinate polari si ha $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$, si ha allora:

$$\begin{aligned}
A &= \int_D \rho(\theta)\cos(\theta) \cdot \Big(\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta\Big)\, d\theta \\
&= \int_D \rho(\theta)\cos(\theta) \cdot \Big(\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta\Big)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_D \rho(\theta)\cdot\rho'(\theta)\sin 2\theta\, d\theta + 2a^2 \int_D \cos 2\theta \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_D \frac{d}{d\theta}[\rho^2(\theta)]\sin 2\theta\, d\theta + a^2 \int_D \cos 2\theta \cdot (\cos 2\theta + 1)\, d\theta \\
&= -a^2 \int_D \sin^2 2\theta\, d\theta + a^2 \int_D \cos^2 2\theta\, d\theta + a^2 \int_D \cos 2\theta\, d\theta \\
&= -a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 2\theta\, d\theta + a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta + a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta + \\
&+ \left(-a^2 \int_{3/4\pi}^{5/4\pi} \sin^2 2\theta\, d\theta + a^2 \int_{3/4\pi}^{5/4\pi} \cos^2 2\theta\, d\theta + a^2 \int_{3/4\pi}^{5/4\pi} \cos 2\theta\, d\theta\right).
\end{aligned}$$

Le funzioni integrande sono tutte periodiche di periodo π, pertanto i loro integrali sull'intervallo $[3/4\pi, 5/4\pi]$ coincidono con i corrispondenti sull'intervallo $[-\pi/4, \pi/4]$. si ha allora:

$$\begin{aligned}
A &= 2\left(-a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 2\theta\, d\theta + a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta + a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta\right) \\
&= 2a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta = 2a^2,
\end{aligned}$$

dove si è sfruttato il seguente fatto (si ricordi che $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$):

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 2\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/4} \sin^2 2\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos^2(\pi - 2\theta)\, d\theta \\
= 2\int_0^{\pi/4} \cos^2(\pi - 2\theta)\, d\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos^2(2\theta)\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta.
\end{aligned}$$

Pertanto l'area richiesta vale $2a^2$.

Esercizio 18.3. Sia $a > 0$. Calcolare l'area del dominio racchiuso dalla curva di equazione polare:

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos\theta).$$

Svolgimento. Si ha $\rho(0) = \rho(2\pi)$, quindi l'equazione data definisce una curva chiusa γ nel piano cartesiano. Sia C la regione di piano circoscritta da tale curva. L'area di tale regione è data da:

$$A = \int\int_C dx\,dy.$$

Osserviamo che per le formule di Green, si ha:

$$\oint_\gamma (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \int\int_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy,$$

dove $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono funzioni qualsiasi con derivate parziali continue in un aperto del piano contenente C.
Nel nostro caso, determiniamo P, Q in modo tale che il membro di destra sia pari ad A. Una scelta possibile è porre $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$ Ricordando che in coordinate polari si ha $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$, si ha allora:

$$\begin{aligned}
A &= \oint_\gamma x\,dy = \int_0^{2\pi} \rho(\theta)\cos\theta \cdot \Big(\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta\Big)\,d\theta \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)\cos\theta \cdot \Big(-\sin^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta\Big)\,d\theta \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\cos^2\theta\,d\theta - a^2\int_0^{2\pi} \sin^2\theta(1+\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta + \cos^4\theta + 2\cos^3\theta - (\cos\theta - \cos^3\theta - \cos^4\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} 2\cos^4\theta + 3\cos^3\theta - \cos\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 d\theta \\
&= \frac{a^2}{8}\int_0^{2\pi}(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2)^2\,d\theta = \frac{a^2}{8}\int_0^{2\pi}(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}+4+2+4e^{2i\theta}+4e^{-2i\theta})\,d\theta \\
&= \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)\,d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}
\end{aligned}$$

Pertanto l'area richiesta vale $3\pi a^2/2$.

CAPITOLO 19

Lezione del giorno giovedì 3 dicembre 2009 (2 ore) Integrali curvilinei, Teorema di Stokes, Formule di Gauss-Green - continuazione

Esercizio 19.1. Si calcoli utilizzando le formule di Gauss-Green nel piano:

$$I := \int\int_D x^2\,dxdy.$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Svolgimento. La regione di piano D è delimitata dalle due circonferenze γ_1 e γ_2 centrate nell'origine e di raggio rispettivamente 1 e 2. Posto $B_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r\}$, si ha $D = \overline{B}_2 \setminus B_1$, da cui:

$$\int\int_D x^2\,dxdy = \int\int_{B_2} x^2\,dxdy - \int\int_{B_1} x^2\,dxdy.$$

Osserviamo che per le formule di Green, si ha:

$$\oint_{\gamma_i} (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \int\int_{B_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

dove $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono funzioni qualsiasi con derivate parziali continue in un aperto del piano contenente B_i.
Nel nostro caso, determiniamo P, Q in modo tale che l'integranda del membro di destra sia pari ad x^2. Una scelta possibile è porre $Q(x,y) = x^3/3$, $P(x,y) = 0$. Si ha quindi:

$$I := \frac{1}{3}\oint_{\gamma_2} x^3\,dy - \frac{1}{3}\oint_{\gamma_1} x^3\,dy.$$

Parametrizziamo γ_i per mezzo di coordinate polari. Si ha allora

$$\begin{aligned}
I &:= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^3 \cdot (2\cos\theta)\,d\theta - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \cdot (\cos\theta)\,d\theta = 5\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\,d\theta \\
&= 5\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 d\theta = \frac{5}{16}\int_0^{2\pi} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2)^2\,d\theta \\
&= \frac{5}{16}\int_0^{2\pi} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4 + 2 + 4e^{2i\theta} + 4e^{-2i\theta})\,d\theta \\
&= \frac{5}{8}\int_0^{2\pi} (\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)\,d\theta = \frac{15}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale $15\pi/4$.

Esercizio 19.2. Sia $B(x,y,z) = (1 - \sin x, -1, z\cos x)$ un campo magnetico indipendente dal tempo. Verificare che $\mathrm{div} B = 0$ e trovarne un potenziale vettore A.

Svolgimento. Si ha $\mathrm{div}B(x,y,z) = -\cos x + \cos x = 0$, pertanto il campo ha divergenza nulla. Per calcolare un potenziale vettore, essendo $\mathbb{R}^3$ stellato rispetto all'origine, si applica la formula:

$$A(x,y,z) = \int_0^1 sB(sx,sy,sz) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ds = \int_0^1 s \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & 1-\sin(sx) & x \\ \vec{e}_2 & -1 & y \\ \vec{e}_3 & sz\cos(sx) & z \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^1 s \cdot \begin{pmatrix} -z - szy\cos(sx) \\ -(1-\sin(sx))z + szx\cos(sx) \\ (1-\sin(sx))y + x \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^1 [-sz - s^2 zy\cos(sx)]\, ds \\ \displaystyle\int_0^1 [-(1-\sin(sx))sz + s^2 zx\cos(sx)]\, ds \\ \displaystyle\int_0^1 [(1-\sin(sx))sy + sx]\, ds \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_1(x,y,z) \\ A_2(x,y,z) \\ A_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Calcoliamo le tre componenti di A:

$$\begin{aligned} A_1(x,y,z) &= \int_0^1 [-sz - s^2 zy\cos(sx)]\, ds = -\left[\frac{s^2}{2} z\right]_{s=0}^{s=1} - zy\int_0^1 s^2\cos(sx)\, ds \\ &= -\frac{z}{2} - zy\left(\left[\frac{\sin sx}{x} s^2\right]_{s=0}^{s=1} - \frac{2}{x}\int_0^1 s\sin sx\, ds\right) \\ &= -\frac{z}{2} - \frac{zy\sin x}{x} + \frac{2zy}{x}\int_0^1 s\sin sx\, ds \\ &= -\frac{z}{2} - \frac{zy\sin x}{x} + \frac{2zy}{x}\left(\left[-s\frac{\cos sx}{x}\right]_{s=0}^{s=1} + \frac{1}{x}\int_0^1 \cos sx\, ds\right) \\ &= -\frac{z}{2} - \frac{zy\sin x}{x} - \frac{2zy\cos x}{x^2} + \frac{2zy}{x^3}\int_0^x \cos\theta\, d\theta \\ &= -\frac{z}{2} - \frac{zy\sin x}{x} - \frac{2zy\cos x}{x^2} + \frac{2zy\sin x}{x^3}. \end{aligned}$$

Sfruttando i passaggi precedenti:

$$\begin{aligned} A_2(x,y,z) &= \int_0^1 [-(1-\sin(sx))sz + s^2 zx\cos(sx)]\, ds. \\ &= -\left[\frac{s^2}{2} z\right]_{s=0}^{s=1} + z\int_0^1 s\sin(sx)\, ds + zx\int_0^1 s^2\cos(sx)\, ds. \\ &= -\frac{z}{2} - \frac{z\cos x}{x} + \frac{z\sin x}{x^2} + z\sin x + \frac{2z\cos x}{x} - \frac{2z\sin x}{x^2} \\ &= -\frac{z}{2} + \frac{z\cos x}{x} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) z\sin x. \end{aligned}$$

Il terzo integrale è:

$$\begin{aligned} A_3(x,y,z) &= \int_0^1 [(1-\sin(sx))sy + sx]\, ds = \int_0^1 [s(x+y) - sy\sin(sx)]\, ds \\ &= \left[\frac{s^2}{2}(x+y)\right]_{s=0}^{s=1} - y\int_0^1 s\sin(sx)\, ds \\ &= \frac{x+y}{2} + \frac{y\cos x}{x} - \frac{y\sin x}{x^2} \end{aligned}$$

Verifichiamo a titolo di prova il risultato ottenuto. Per definizione si ha:

$$\mathrm{rot}A = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right),$$

e d'altra parte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial y} &= -\frac{z}{2} - \frac{z\sin x}{x} - \frac{2z\cos x}{x^2} + \frac{2z\sin x}{x^3}\\
\frac{\partial A_1}{\partial z} &= -\frac{1}{2} - \frac{y\sin x}{x} - \frac{2y\cos x}{x^2} + \frac{2y\sin x}{x^3}\\
\frac{\partial A_2}{\partial x} &= z\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{x} + z\frac{d}{dx}\left(\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin x\right) = -\frac{z\sin x}{x} - \frac{z\cos x}{x^2} + \frac{2z\sin}{x^3} + \left(1-\frac{1}{x^2}\right)z\cos x\\
&= -\frac{z\sin x}{x} - \frac{2z\cos x}{x^2} + \frac{2z\sin}{x^3} + z\cos x\\
\frac{\partial A_2}{\partial z} &= -\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{x} + \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin x\\
\frac{\partial A_3}{\partial x} &= \frac{1}{2} + y\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{x} - y\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{y\sin x}{x} - \frac{y\cos x}{x^2} - \frac{y\cos x}{x^2} + \frac{2y\sin x}{x^3}\\
&= \frac{1}{2} - \frac{y\sin x}{x} - \frac{2y\cos x}{x^2} + \frac{2y\sin x}{x^3}\\
\frac{\partial A_3}{\partial y} &= \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}
\end{aligned}
$$

Si ha dunque:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{x} + \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin x\right) = 1 - \sin x\\
\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{y\sin x}{x} - \frac{2y\cos x}{x^2} + \frac{2y\sin x}{x^3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{y\sin x}{x} - \frac{2y\cos x}{x^2} + \frac{2y\sin x}{x^3}\right) = -1\\
\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= \left(-\frac{z\sin x}{x} - \frac{2z\cos x}{x^2} + \frac{2z\sin}{x^3} + z\cos x\right) - \left(-\frac{z\sin x}{x} - \frac{2z\cos x}{x^2} + \frac{2z\sin x}{x^3}\right)\\
&= z\cos x
\end{aligned}
$$

Quindi $\mathrm{rot}A(x,y,z) = (1-\sin x, -1, z\cos x) = B(x,y,z)$ e la soluzione è stata verificata essere corretta.

Esercizio 19.3. Siano dati i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
S &= \{x^2+y^2+z^2=1, z>0\}\\
D &= \{x^2+y^2\leq 1, z=0\}\\
\gamma &= \{x^2+y^2=1, z=0\}
\end{aligned}
$$

e sia

$$F(x,y,z) = \left(\frac{y}{1+z^2},\, x^5z^{100}-y, z+x^2\right)$$

(1) si usi il teorema della divergenza per calcolare:

$$I := \int_S F\cdot\hat{n}\,d\sigma$$

dove $\hat{n}$ è la normale esterna alla superfice chiusa $\Sigma = S\cup D$;

(2) Detta ω_F^1 la 1-forma differenziale canonicamente associata a F, si calcoli

$$\int_{\gamma^+}\omega_F^1$$

dove γ^+ è la curva γ orientata in senso antiorario nel piano $z=0$;

(3) si verifichi il teorema di Stokes per il campo F sulla superficie S.

Svolgimento.

Indichiamo con $C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1,\, z\geq 0\}$ il volume delimitato da Σ, denoteremo poi $F = (F_1,F_2,F_3)$.

(1) Per il teorema della divergenza si ha:

$$\int_\Sigma F\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_S F\cdot\hat{n}\,d\sigma + \int_D F\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_C \mathrm{div}F\,dxdydz$$

Si ha poi

$$\mathrm{div}F(x,y,z) = 0.$$

Pertanto:

$$\int_S F \cdot \hat{n}\, d\sigma = -\int_D F \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

Sulla superficie D si ha che la normale uscente da C è $\hat{n} = (0, 0, -1)$ e $F = (y, -y, x^2)$, quindi:

$$\int_S F \cdot \hat{n}\, d\sigma = -\int_D F \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_D x^2\, dxdy$$

Per calcolare l'ultimo integrale, utilizziamo la formula di Green:

$$\oint_\gamma (P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy) = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

dove $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono funzioni qualsiasi con derivate parziali continue in un aperto del piano contenente D.
Nel nostro caso, determiniamo P, Q in modo tale che l'integranda del membro di destra sia pari ad x^2. Una scelta possibile è porre $Q(x,y) = x^3/3$, $P(x,y) = 0$. Si ha quindi:

$$I := \frac{1}{3}\oint_\gamma x^3\, dy.$$

Parametrizziamo γ per mezzo di coordinate polari. Si ha allora

$$\begin{aligned}
I &:= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \cdot \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 d\theta = \frac{1}{3\cdot 16}\int_0^{2\pi} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2)^2\, d\theta \\
&= \frac{1}{3\cdot 16}\int_0^{2\pi} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4 + 2 + 4e^{2i\theta} + 4e^{-2i\theta})\, d\theta \\
&= \frac{1}{3\cdot 8}\int_0^{2\pi} (\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)\, d\theta = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale $I = \frac{\pi}{4}$.

(2) ω^1_F è la 1-forma differenziale associata al campo vettoriale F,

$$\omega^1_F(x) = F_1(x,y,z)\, dx + F_2(x,y,z)\, dz + F_3(x,y,z)\, dz.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{+\gamma} \omega^1_F(x) &= \int_{+\gamma} F_1(x,y,z)\, dx + F_2(x,y,z)\, dz + F_3(x,y,z)\, dz \\
&= \int_{+\gamma} y\, dx - y\, dy
\end{aligned}$$

Passando alla rappresentazione di γ in coordinate polari, si ha $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, quindi:

$$\begin{aligned}
\int_{+\gamma} \omega^1_F(x) &= \int_{+\gamma} y\,(dx - dy) = \int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot (-\sin\theta + \cos\theta)\, d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta = -\pi.
\end{aligned}$$

(3) Per verificare il teorema di Stokes è necessario calcolare:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}F &:= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right), \\
&= \left(-100x^5 z^{99}, \frac{-2yz}{1+z^2} - 2x, 5x^4 z^{100} - \frac{1}{1+z^2}\right)
\end{aligned}$$

In generale la divergenza di un rotore è nulla, pertanto, per il teorema della divergenza:

$$0 = \int_C \mathrm{div}(\mathrm{rot}F)\, dxdydz = \int_\Sigma \mathrm{rot}F\, d\sigma = \int_S \mathrm{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma + \int_D \mathrm{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma,$$

da cui si deduce:

$$\int_S \text{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma = -\int_D \text{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma,$$

Sulla superficie D si ha che la normale uscente da C è $\hat{n} = (0, 0, -1)$ e $\text{rot}F = (0, -2x, -1)$, quindi:

$$\int_S \text{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma = -\int_D \text{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_D (-1)\, dxdy$$

L'ultimo integrale è l'opposto dell'area di D, pertanto vale $-\pi$. Ricordando il risultato del punto precedente, si ha:

$$\int_{+\gamma} \omega_F^1(x) = -\pi = \int_S \text{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma,$$

e questo porge la verifica richiesta.

Esercizio 19.4. Calcolare il seguente integrale:

$$I_1 := \int_{S_1} F \cdot \hat{n}\, d\sigma,$$

dove $F := (xz, xy, yz)$ e $S_1 := \partial\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Svolgimento. Posto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, $S_1 = \partial C$. Applichiamo il teorema della divergenza:

$$\int_{S_1} F \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_C \text{div}F\, dxdydz = \int_C (x + y + z)\, dxdydz.$$

Il calcolo dell'integrale triplo non presenta particolari difficoltà:

$$\begin{aligned}
\int_C (x + y + z)\, dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} (x + y + z) dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} \left[\frac{x^2}{2} + yx + zx \right]_{x=0}^{x=1-z-y} dy\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} \frac{(1 - z - y)^2}{2} + (y + z)(1 - z - y)\, dy\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-z} (1 - z - y)(1 + y + z)\, dy\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-z} (1 - (z + y)^2)\, dy\, dz \overset{w=y+z}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \int_z^1 (1 - w^2)\, dw\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[w - \frac{w^3}{3} \right]_{w=z}^{w=1} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - z + \frac{z^3}{3} \right) dz \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 (2 - 3z + z^3)\, dz = \frac{1}{6} \left(2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Quindi $I_1 = 1/8$.

Esercizio 19.5. Sia dato il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y^2, 0, x - y)$. Calcolare il flusso del rotore di F attraverso la porzione di superficie cartesiana S di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$, con $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ (il versore normale alla superficie è quello indotto dalla parametrizzazione cartesiana standard).
Si calcoli il precedente flusso usando il teorema di Stokes.

Svolgimento. La parametrizzazione cartesiana di S è

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \phi_3(x, y)) = (x, y, 1 - x^2 - y^2).$$

S ha equazione $G(x, y) = x^2 + y^2 + z - 1 = 0$. La direzione della normale è data da:

$$\nabla G(x, y) = (2x, 2y, 1).$$

Per stabilire se $\hat{n} = \nabla G = ((\nabla G)_1, (\nabla G)_2, (\nabla G)_3)$ o $\hat{n} = -\nabla G$, è necessario verificare l'orientamento della superficie calcolando

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi_3}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y} \\ \\ (\nabla G)_1 & (\nabla G)_2 & (\nabla G)_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \\ 2x & 2y & 1 \end{pmatrix} = 4y^2 + 4x^2 > 0$$

Poiché il determinante è positivo, si ha $\hat{n} = \nabla G(x, y) = (2x, 2y, 1)$. Calcoliamo ora il rotore di F.

$$\text{rot}F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & 0 & x - y \end{pmatrix} = (-1, -1, -2y)$$

Pertanto per quanto riguarda il flusso richiesto si ha:

$$\int_S \text{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_D (-1, -1, -2y) \cdot (2x, 2y, 1)\, dxdy = -\int_D 2x + 4y\, dxdy$$

Passando in coordinate polari, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, si ottiene:

$$\int_S \text{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma = -\int_0^1 \int_0^{\pi/2} 2r(\cos\theta + 2\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr = -\int_0^1 2r^2\, dr \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos\theta - 2\sin\theta)\, d\theta = \frac{2}{3}.$$

Calcoliamo ora il flusso utilizzando il teorema di Stokes:

$$\int_S \text{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma = \oint_{+\partial S} F\, d\gamma.$$

Parametrizziamo il bordo di D in senso antiorario: esso è dato da $\gamma_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ per $-\pi/2 < \theta < 0$, $\gamma_2(t) = (1 - t, 0)$ per $0 < t < 1$ e $\gamma_3(s) = (0, -s)$ per $0 < s < 1$. Il bordo di S orientato in senso positivo sarà allora l'immagine delle tre curve γ_1, γ_2, γ_3 mediante la parametrizzazione ϕ di S:

$$\begin{aligned} \phi \circ \gamma_1(\theta) &= (\cos\theta, \sin\theta, 1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0); \\ \phi \circ \gamma_2(t) &= (1 - t, 0, 1 - (1 - t)^2) = (1 - t, 0, 2t - t^2); \\ \phi \circ \gamma_3(s) &= (0, -s, 1 - s^2). \end{aligned}$$

Pertanto si avrà:

$$\oint_{+\partial S} F\, d\gamma = \int_{\phi\circ\gamma_1} F\, d\gamma + \int_{\phi\circ\gamma_2} F\, d\gamma + \int_{\phi\circ\gamma_3} F\, d\gamma$$

dove:

$$\begin{aligned} \int_{\phi\circ\gamma_1} F\, d\gamma &= \int_{-\pi/2}^0 (\sin^2\theta, 0, \cos\theta - \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = -\int_{-\pi/2}^0 \sin^3\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta(1 - \cos^2\theta)\, d\theta = 1 - \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \\ &\overset{w=\cos\theta}{=} 1 - \int_1^0 -w^2\, dw = \frac{2}{3} \\ \int_{\phi\circ\gamma_2} F\, d\gamma &= \int_0^1 (0, 0, 1 - t) \cdot (-1, 0, 2 - 2t)\, dt = \int_0^1 2(1 - t)^2\, dt = \frac{2}{3}. \\ \int_{\phi\circ\gamma_3} F\, d\gamma &= \int_0^1 (-s^2, 0, s) \cdot (0, -1, -2s)\, dt = \int_0^1 -2s^2\, dt = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Sommando i tre contributi si ottiene:

$$\int_S \text{rot}F \cdot \hat{n}\, d\sigma = \oint_{+\partial S} F\, d\gamma = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

che verifica così il calcolo diretto svolto in precedenza.

CAPITOLO 20

Lezione del giorno giovedì 10 dicembre 2009
Prima prova in itinere

Esercizio 20.1. Si consideri l'insieme:

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2-2x)^2 = x^2+y^2\},$$

detto *Chiocciola di Pascal*.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che la curva interseca gli assi in cinque punti, di cui uno è l'origine. Si determinino gli altri quattro punti $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1,2,3,4$, e si scrivano le equazioni delle tangenti a Γ in essi.
(3) Per ogni $i = 1,2,3,4$, si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi_i(x)$ di classe C^1 in un intorno di x_i con $\varphi_i(x_i) = y_i$.
(4) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ vincolati a Γ. Si dica se Γ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Svolgimento. Poniamo:

$$f(x,y) = (x^2+y^2-2x)^2 - (x^2+y^2)$$

È utile osservare come $f(x,-y) = f(x,y)$ pertanto l'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.

(1) In coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= (\rho^2 - 2\rho\cos\theta)^2 - \rho^2 = \rho^2((\rho - 2\cos\theta)^2 - 1) \\ &= \rho^2(\rho - 2\cos\theta - 1)(\rho - 2\cos\theta + 1) \end{aligned}$$

Quindi $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dove:

$$\Gamma_1 = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho - 2\cos\theta - 1 = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho - 2\cos\theta + 1 = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\}$$

e questa scrittura[1] comprende anche l'origine $(0,0)$.

(2) Poiché $f(0,0) = 0$ si ha $(0,0) \in \Gamma$. Studiamo le intersezioni con l'asse delle y ponendo $x = 0$: $f(0,y) = y^4 - y^2 = 0$ quindi le intersezioni sono $O = (0,0)$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (0,-1)$. Analogamente, studiamo le intersezioni con l'asse delle x ponendo $y = 0$:

$$f(x,0) = (x^2-2x)^2 - x^2 = (x^2-2x-x)(x^2-2x+x) = x^2(x-3)(x-1),$$

quindi le intersezioni sono $P_3 = (1,0)$, $P_4 = (3,0)$ e $O = (0,0)$.
Calcoliamo il differenziale di f:

$$\begin{aligned} df(x,y) &= \partial_x f(x,y)\,dx + \partial_y f(x,y)\,dy \\ &= (4(x^2+y^2-2x)(x-1) - 2x)\,dx + (4(x^2+y^2-2x)y - 2y)\,dy. \end{aligned}$$

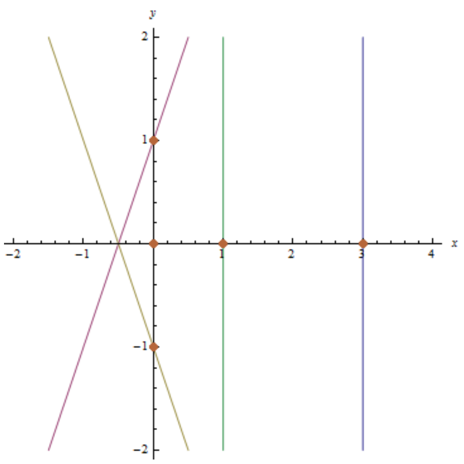
Si ha quindi $df(P_1) = -4\,dx + 2\,dy$, pertanto esiste $q_1 \in \mathbb{R}$ tale per cui la retta $-4x + 2y = q_1$ sia tangente a Γ in P_1. Sostituendo si ha $q_1 = 2$ e la retta tangente è $y = 2x + 1$. Poiché Γ è simmetrico rispetto alle ascisse, e P_2 è il simmetrico rispetto a tale asse di P_1, si ha che la retta tangente a Γ in P_2 è la simmetrica rispetto all'asse delle ascisse di quella tangente in P_1, ovvero $y = -2x - 1$. Si ha poi $df(P_3) = -2\,dx$, pertanto la tangente a Γ in questo punto è la retta verticale $x = 1$, e analogamente si ha $df(P_4) = 18\,dx$, pertanto la tangente a Γ in questo punto è la retta verticale $x = 3$.

[1] Era importante osservare come Γ in coordinate polari fosse espresso da *due rami differenti* ovvero da $|\rho - 2\cos\theta| = 1$. In generale non è lecito passare da $(\rho - 2\cos\theta)^2 = 1$ a $\rho - 2\cos\theta = 1$, perché in questo modo si sta escludendo uno dei due rami. Ricordiamo che $\sqrt{a^2} = |a|$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Inoltre è *necessario* aggiungere la condizione $\rho \geq 0$, come risulterà evidente nel calcolo del massimo e minimo vincolato.

(3) Osserviamo che $\partial_y f(P_3) = \partial_y f(P_4) = 0$, quindi in questi punti il Teorema di Dini non è applicabile (la tangente a Γ è verticale). Invece si ha $\partial_y f(P_1) = -\partial_y f(P_2) \neq 0$ e quindi per il Teorema di Dini esistono φ_1 e φ_2 con le proprietà richieste. Si ha che $\varphi_1'(0)$ e $\varphi_2'(0)$ sono i coefficienti angolari delle tangenti a Γ rispettivamente in P_1 e P_2, ovvero $\varphi_1'(0) = -\varphi_2'(0) = 2$.

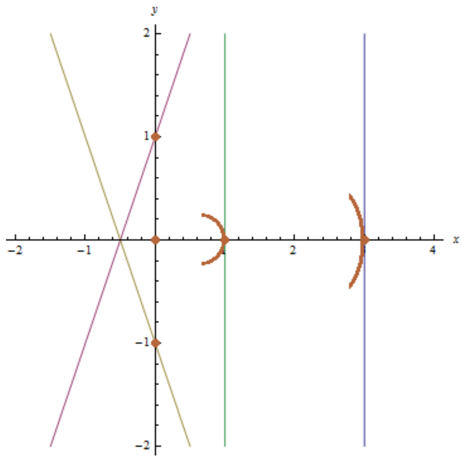
(4) Si ha $h(x, y) \geq 0$ e l'uguaglianza vale solo nell'origine. Quindi l'origine è l'unico minimo assoluto per h. Inoltre essa appartiene a Γ, quindi è l'unico minimo assoluto vincolato e $h(0, 0) = 0$. Studiamo i massimi e minimi vincolati di h su Γ_1 e su Γ_2 separatamente. In coordinate polari si ha che $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho$, Γ_1 è dato[2] da $\rho_1(\theta) = 2\cos\theta + 1$, $\rho_1 \geq 0$ e Γ_2 è dato da $\rho_2(\theta) = 2\cos\theta - 1$, $\rho_2 \geq 0$. Individuiamo il dominio in cui sono definite ρ_1 e ρ_2 alla luce della condizione $\rho \geq 0$. Si ha che ρ_1 è definito per $\cos\theta > -1/2$, quindi $\theta \in \mathrm{dom}(\rho_1) := [0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi]$, mentre ρ_2 è definita per $\cos\theta > 1/2$, quindi $\mathrm{dom}(\rho_2) := \theta \in [0, \pi/3] \cup [5/3\pi, 2\pi]$.
Se si sceglie di parametrizzare θ tra $-\pi$ e π (è assolutamente la stessa cosa), si ottiene $\mathrm{dom}(\rho_1) := [-2\pi/3, 2\pi/3]$ e $\mathrm{dom}(\rho_2) := [-\pi/3, \pi/3]$. Questa scelta che, ribadiamo, è perfettamente equivalente al parametrizzare θ tra 0 e 2π, presenta il vantaggio permettere una scrittura più semplice.
Si tratta di studiare i massimi e minimi delle funzioni ρ_1 e ρ_2 sotto i vincoli $\rho_1, \rho_2 \geq 0$, ovvero rispettivamente in $\mathrm{dom}(\rho_1)$ e in $\mathrm{dom}(\rho_2)$. Cominciamo con lo studiare tale funzioni nell'interno dei domini in cui sono definite. Si ha $\rho_1'(\theta) = \rho_2'(\theta) = -2\sin\theta$. Si ha $\rho_1'(\theta) = \rho_2'(\theta) \leq 0$ per $0 < \theta < \pi$ e l'uguaglianza vale per $\theta \in \{0, \pi\}$.
Osserviamo che $\pi \notin \mathrm{dom}(\rho_1)$ e $\pi \notin \mathrm{dom}(\rho_2)$, quindi π non è un valore accettabile: infatti si ha $\rho_1(\pi) = -1$ e $\rho_2(\pi) = -3$ non accettabile alla luce della condizione $\rho_1 \geq 0$ e $\rho_2 \geq 0$.
Per quanto riguarda 0, calcoliamo $\rho_1''(\theta) = \rho_2''(\theta) = -2\cos\theta$ e $\rho_1''(0) = \rho_2''(0) = -2 < 0$, quindi si ha che $\rho_1(0) = 3$ accettabile e massimo relativo, $\rho_2(0) = 1$ accettabile massimo relativo.
Rimangono da studiare i punti sulla frontiera dei domini: si ha $\rho_1(\pm 2\pi/3) = \rho_1(4\pi/3) = \rho_2(\pm\pi/3) = \rho_2(5\pi/3) = 0$. Tutti questi punti corrispondono quindi in coordinate cartesiane all'origine ($\rho = 0$ caratterizza l'origine) pertanto si ottiene nuovamente che l'origine è minimo assoluto. Il massimo assoluto è raggiunto nel punto corrispondente a $\rho_M = \rho_1(0)$ e $\theta_M = 0$, quindi è $(\rho_M\cos\theta_M, \rho_M\sin\theta_M) = (3, 0)$ e vale $h(3, 0) = 3$, l'altro massimo relativo è raggiunto nel punto corrispondente a $\rho_m = \rho_1(0)$ e $\theta_m = 0$, quindi è $(\rho_m\cos\theta_m, \rho_m\sin\theta_m) = (1, 0)$ e vale $h(1, 0) = 1$.
L'insieme Γ è chiuso perché f è continua e si è appena visto che è limitato perché contenuto nella palla chiusa centrata nell'origine e di raggio 3, quindi è compatto.

(5) Vogliamo ora dare un'idea dell'andamento qualitativo.

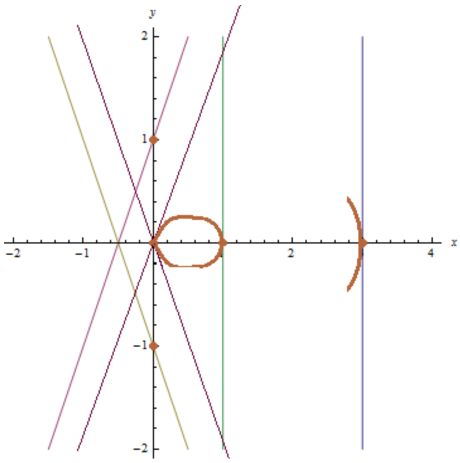


1. Ecco la situazione iniziale con i punti e le tangenti finora trovate.

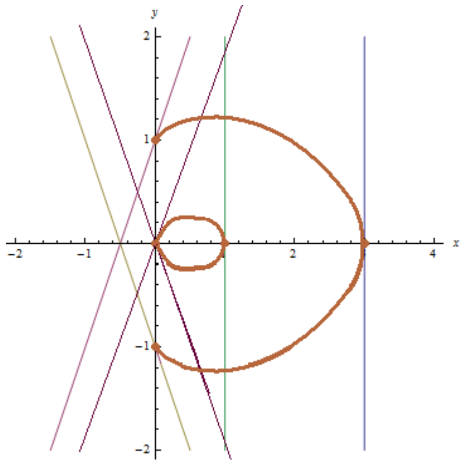
[2]Qui risulta fondamentale l'aver correttamente individuato i due rami e il richiedere comunque $\rho \geq 0$.



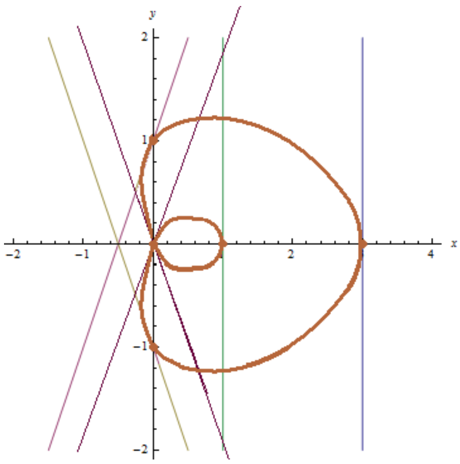
2. Vi è una simmetria rispetto all'asse x. Inoltre osserviamo che $(3,0)$ è max. ass. per la distanza dall'origine. Non vi sono punti di Γ a dx della retta $x=3$. Attorno a tale punto non si ha un'esplicitazione $y=y(x)$, però si ha un'esplicitazione $x=x(y)$. Analogamente $(1,0)$ è massimo relativo per la distanza dall'origine, pertanto vicino a tale punto non vi sono punti a dx della retta $x=1$, non si ha un'esplicitazione $y=y(x)$, però si ha un'esplicitazione $x=x(y)$.



3. Ricordiamo che il ramo corrispondente in coordinate polari a $\rho_2(\theta)$ raggiunge la sua massima distanza dall'origine proprio in $(1,0)$ e poi agli estremi del dominio, ovvero per $\theta=\pm\pi/3$ tale ramo ritorna in 0. Inoltre si ha sempre che $\rho_2\le\rho_1$. In figura sono riportate anche le due rette corripondenti ad un angolo di $\pm\pi/3$ con l'asse delle ascisse. Sfruttando la simmetria rispetto all'asse delle ascisse ci si porta nella situazione indicata.



4. Studiamo ora il ramo corrispondente a ρ_1. Poiché $\pm\pi/2\in\operatorname{dom}(\rho_1)$, si ha che tale ramo congiunge il punto $(3,0)$ (massima distanza dall'origine) con i punti $(0,\pm1)$ che sono le uniche due intersezioni di Γ con l'asse delle ascisse. Tale ramo deve inoltre essere tangente alle due rette passanti per $(0,\pm1)$ Inoltre non può intersercare il ramo di ρ_2.



5. Partendo dai punti $(0,\pm1)$, sappiamo che il ramo ρ_1 deve ritornare nell'origine perché agli estremi del dominio di ρ_1 si ha $\rho_1=0$. Quindi si ha un cappio nell'origine, come ci si poteva attendere da $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

Questo *concludeva* lo studio qualitativo richiesto dall'esercizio.
Con ulteriori calcoli, un po' lunghi ma non particolarmente complicati, si può essere ancora più precisi ed arrivare a tracciare un grafico più dettagliato.
Ribadiamo che comunque, questa parte, *esulava* dalle richieste dell'esercizio, la riportiamo solo per completezza.

Consideriamo una retta $x = k$, e studiamo il numero di soluzioni y dell'equazione $f(k, y) = 0$. Si ha

$$\begin{aligned}0 = f(k, y) &= (k^2 + y^2 - 2k)^2 - (k^2 + y^2)\\ &= y^4 + (2k^2 - 4k - 1)y^2 + (k^2 - 2k)^2 - k^2\\ &= y^4 + (2k^2 - 4k - 1)y^2 + k^2(k - 3)(k - 1)\end{aligned}$$

Posto $t = y^2$, cerchiamo soluzioni non negative di $p_k(t) = t^2 + (2k^2 - 4k - 1)t + k^2(k - 3)(k - 1) = 0$. Si ha $\lim_{t\to\pm\infty} p_k(t) = +\infty$ e $p_k(0) = k^2(k - 3)(k - 1)$. Si ha $p_k(0) > 0$ per $k < 1$ o $k > 3$.

(a) se $1 < k < 3$ l'equazione $p_k(t) = 0$ ammette due soluzioni distinte t^- e t^+ di segno discorde perché $p_k(0) < 0$ e $\lim_{t\to\pm\infty} p_k(t) = +\infty$. Sia $t^+ > 0$, allora si ottiene $y_1 = \sqrt{t^+}$ e $y_2 = -\sqrt{t^-}$. Dato $1 < x < 3$ esistono quindi $\varphi_1(x)$ e $\varphi_4(x)$, distinti, $\varphi_1(x) < 0 < \varphi_4(x)$ tali che $(x, y) \in \Gamma$ se e solo se $y \in \{\varphi_1(x), \varphi_4(x)\}$.

(b) se $k < 1$ o $k > 3$ ma $k \neq 0$, allora $p_k(0) > 0$, quindi le soluzioni reali di $p_k(y) = 0$, se esistono, sono entrambe strettamente positive o entrambe strettamente negative: se l'ascissa del vertice delle parabola $z = p_k(t)$ è positiva, allora se esistono sono entrambe strettamente positive, altrimenti o non esistono oppure sono entrambe strettamente negative. Le radici negative non sono accettabili. Tale ascissa è $z_k = -(2k^2 - 4k - 1)/2$. Si ha $z_k > 0$ per $\frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{6}\right) < k < \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{6}\right)$. Poiché

$$\frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{6}\right) < 0 < 1 < \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{6}\right) < 3,$$

si ottiene che se $p_k(y) = 0$ ammette radici reali, esse sono due radici strettamente positive per $\frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{6}\right) < k < 0$ e per $0 < k < 1$.Il discriminante di $p_k(t) = 0$ è

$$\Delta = (2k^2 - 4k - 1)^2 - 4k^2(k - 3)(k - 1) = 1 + 8k.$$

Per $0 < k < 1$ e $-1/8 < k < 0$ tale discriminante è positivo, quindi si hanno due soluzioni strettamente positive. Pertanto per $k \in]0, 1[\cup] - 1/8, 0[$, la retta $x = k$ interseca Γ in quattro punti distinti, due a due simmetrici rispetto all'asse delle ascisse. Dato $\frac{1}{2}(2-\sqrt{6}) < x < 1$ esistono quindi $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$, distinti, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < 0 < \varphi_3(x) < \varphi_4(x)$ tali che $(x, y) \in \Gamma$ se e solo se $y \in \{\varphi_i(x) : i = 1, 2, 3, 4\}$.

(c) per $k = 0$, si hanno le intersezioni con l'asse y, quindi $O = (0, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = 0$. Poniamo $\varphi_1(0) = -1$, $\varphi_4(0) = 1$ e $\varphi_3(0) = \varphi_2(0) = 0$.

$$df(x, y) = (4(x^2 + y^2 - 2x)(x - 1) - 2x)\, dx + (4(x^2 + y^2 - 2x)y - 2y)\, dy$$

Si ha
  (i) $df(0, 0) = 0$, quindi in un intorno di $(0, 0)$ non è possibile applicare il Teorema di Dini.
  (ii) $df(0, 1) = -4\, dx + 2\, dy$ quindi in un intorno di $(0, 1)$ è possibile applicare il Teorema di Dini. In un intorno di tale punto φ_4 è di classe C^1 e $\varphi_4(0) = 1/2 > 0$
  (iii) $df(0, -1) = -4\, dx - 2\, dy$ quindi in un intorno di $(0, -1)$ è possibile applicare il Teorema di Dini. In un intorno di tale punto φ_1 è di classe C^1 e $\varphi_1(0) = -1/2 < 0$

(d) per $k = 1$, si ha $p_1(y) = y^2(y^2 - 3)$ da cui si ottengono le intersezioni $(1, 0)$, $(1, \sqrt{3})$ e $(1, -\sqrt{3})$. Poniamo $\varphi_3(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\varphi_1(0) = -1$, $\varphi_4(0) = 1$.

(e) per $k = 3$, si ha $p_3(y) = y^2(y^2 + 11)$ da cui si ottiene la sola intersezione $(3, 0)$. Poniamo $\varphi_1(3) = \varphi_4(3) = 0$

(f) per $k = -1/8$ si ha $p_{-1/8}(y) = -(1/64) - y^2 + (17/64 + y^2)^2$ da cui si ottengono le due intersezioni $(-1/8, -\sqrt{15}/8)$ e $(-1/8, +\sqrt{15}/8)$. Poniamo $\varphi_4(-1/8) = \varphi_3(-1/8) = (-1/8, +\sqrt{15}/8)$ e $\varphi_1(-1/8) = \varphi_2(-1/8) = (-1/8, -\sqrt{15}/8)$

Le quattro funzioni φ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sono due a due simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. Inoltre la tangente a Γ nei punti (x, y) con $x \neq 0, 1, 3$ non è mai verticale. Per il teorema di Dini, queste funzioni sono quindi C^1 negli intervalli aperti che non contengano $x = 0, 1, 3$ e in cui siano definite. Per quanto visto al punto precedente, si ha che φ_1 e φ_4 sono C^1 all'interno di tutto il loro dominio.
Studiamo ora i massimi e minimi relativi di $y = \rho \sin\theta$ vincolati a Γ, ovvero i massimi e minimi delle funzioni $g_1(\theta) = 2 \sin\theta \cos\theta + \sin\theta = \sin 2\theta + \sin\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi]$ e la funzione

$g_2(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = \sin 2\theta - \sin\theta$ con $\theta \in [0, \pi/3] \cup [5/3\pi, 2\pi]$. Se h è nulla anche g_1 e g_2 sono nulle, quindi $g_1(2\pi/3) = g_1(4\pi/3) = g_2(\pi/3) = g_2(5\pi/3) = 0$. Si ha quindi

$$g_1'(\theta) = 2\cos 2\theta + \cos\theta = 4\cos^2\theta + \cos\theta - 2$$

che si annulla per

$$\cos\theta_1^* = \frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{33}\right), \qquad \cos\theta_2^* = -\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{33}\right).$$

Si ha $\cos\theta_1^* > -1/2$, quindi θ_1^* è accettabile, $\cos\theta_2^* < -1/2$ non accettabile. Analogamente:

$$g_2'(\theta) = 2\cos 2\theta - \cos\theta = 4\cos^2\theta - \cos\theta - 2$$

che si annulla per

$$\cos\theta_3^* = \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{33}\right), \qquad \cos\theta_4^* = \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{33}\right).$$

Si ha $\cos\theta_3^* > 1/2$, quindi θ^*3 è accettabile, $\cos\theta_2^* < 1/2$ non accettabile. Posto $\rho_1^* = 2\cos\theta_1^* + 1$ e $\rho_3^* = 2\cos\theta_3^* - 1$, si ottengono quindi gli unici punti critici:

$$x_1 = \rho_1^*\cos\theta_1^* = \left(2\left(\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{33}\right)\right)+1\right)\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{33}\right) = \frac{15+\sqrt{33}}{16}$$

$$x_3 = \rho_3^*\cos\theta_3^* = \left(2\left(\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{33}\right)\right)-1\right)\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{33}\right) = \frac{15-\sqrt{33}}{16}.$$

Vogliamo ora stabilire una corrispondenza tra le curve $\rho_1(\theta)$ e $\rho_2(\theta)$ e le curve $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$. A tal proposito ricordiamo che $\varphi_4(x)$ è sempre maggiore di $\varphi_3(x) > 0$, e che φ_1 e φ_2 sono le simmetriche di φ_4 e φ_3 rispetto all'asse delle asccisse. Quindi, nel primo quadrante laddove esistono entrambe le curve in coordinate polari $\rho_1(\theta)$ e $\rho_2(\theta)$, la curva tra le due che in coordinate cartesiane ha l'ordinata maggiore rappresenterà φ_4 e l'altra rappresenterà φ_3. Ricordo che l'ordinata è data da $\rho_1(\theta)\sin\theta$ e $\rho_2(\theta)\sin\theta$.

Osserviamo che se $\theta \in [0, \pi] \cap \mathrm{dom}(\rho_1) \cap \mathrm{dom}(\rho_2)$, si ha $\rho_1(\theta)\sin\theta > \rho_2(\theta)\sin\theta$. Quindi nei punti del primo quadrante la curva $\rho_1(\theta)$ descrive φ_4 e la curva ρ_2 descrive φ_3. Per cui x_1^* è punto critico di φ_4, e quindi anche della sua simmetrica φ_1, e x_3^* è punto critico di φ_3, e quindi anche della sua simmetrica φ_2. Si ha che $\varphi_3(0) = \varphi_3(3) = 0$, $\varphi_3(x) > 0$ in $]0, 1[$, e φ_3 ha un solo punto critico, tale punto deve essere di massimo relativo per φ_3 e quindi di minimo relativo per φ_2.

Poiché $x_1^* > 0$ e $\varphi_4(0) > 0$ si ha che x_1^*, unico punto critico per $0 < x < 3$, deve essere un massimo assoluto per φ_4 e simmetricamente un minimo assoluto per φ_1.

Determiniamo esattamente i valori di x^* e y^*:

(a) Sostituendo nell'equazione per determinare i valori del massimo, si ha:

$$0 = f(x_1^*, y) = \frac{-3(693+283\sqrt{33}) - 128(175+\sqrt{33})y^2 + 8192y^4}{8192}$$

che ha come soluzioni reali (si pone $y = t^2$ e si sceglie l'unica soluzione t positiva. Allora $y = \pm\sqrt{t}$)

$$\varphi_1(x_1^*) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}, \qquad \varphi_4(x_1^*) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}.$$

(b) Sostituendo il valore di x_2^*, si ha:

$$0 = f(x_2^*, y) = \frac{8192y^4 + 128\left(\sqrt{33}-175\right)y^2 + 849\sqrt{33} - 2079}{8192}.$$

Con la sostituzione $y^2 = t$ si ottiene un'equazione di secondo grado in t che ha due radici positive. I valori di $\varphi_2(x_2^*)$ e $\varphi_3(x_3^*)$ sono i valori dati da $\pm\sqrt{t}$ dove t è la radice di modulo minimo dell'equazione: infatti l'altra radice dà luogo ai valori di $\varphi_1(x_2^*)$ e $\varphi_4(x_2^*)$ (che infatti in modulo sono strettamente maggiori dei precedenti).

$$\varphi_2(x_3^*) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69-11\sqrt{33}\right)}, \qquad \varphi_3(x_3^*) = +\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69-11\sqrt{33}\right)}.$$

In figura le rette verticali da sinistra a destra sono:

(a) la retta $x = -1/8$, tangente a Γ nei punti $(-1/8, \pm\sqrt{15}/8)$. Non vi sono punti di Γ con ascissa strettamente minore di $-1/8$;
(b) la retta $x = 0$, che interseca Γ nei punti $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$;

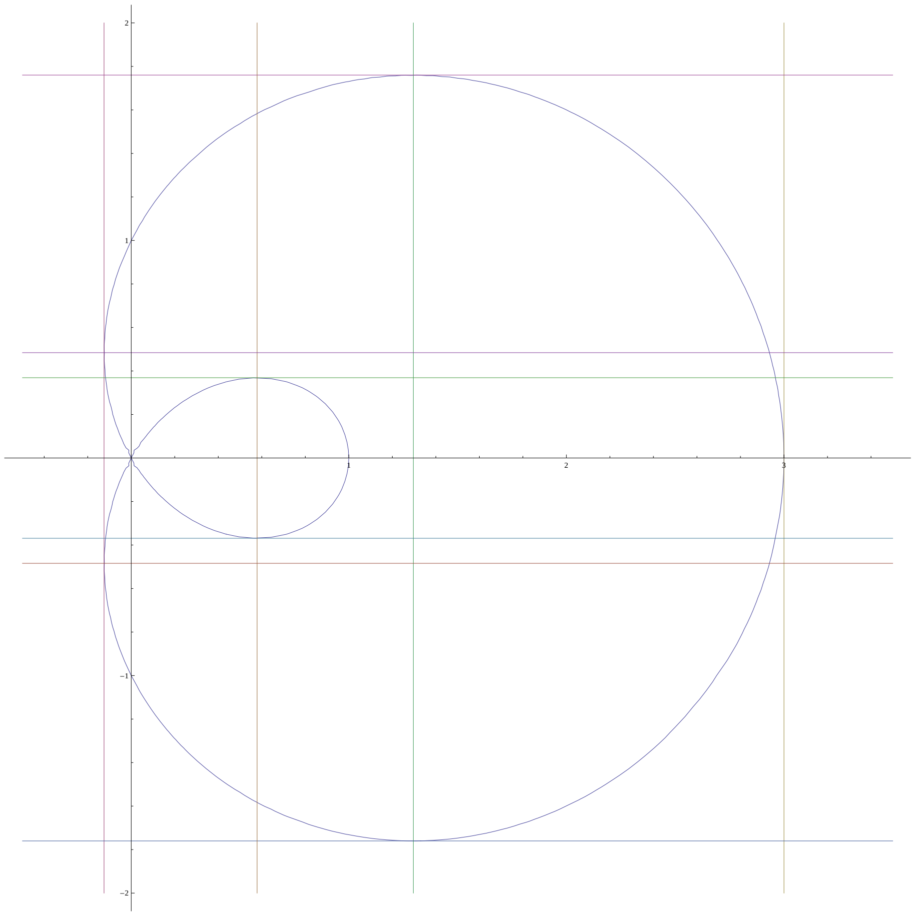


FIGURA 1. La *Chiocciola di Pascal* e alcune rette significative

(c) la retta $x = \frac{15-\sqrt{33}}{16}$ che interseca Γ in quattro punti, i due punti più vicini all'asse delle ascisse sono estremali per le funzioni implicitamente definite da γ passanti per essi, tali punti sono $\left(\frac{15-\sqrt{33}}{16}, \pm\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69-11\sqrt{33}\right)}\right)$;

(d) la retta $x = \frac{15+\sqrt{33}}{16}$ che interseca Γ in due punti, esso sono i punti di ordinata massima e minima appartenenti a Γ, e sono $\left(\frac{15+\sqrt{33}}{16}, \pm\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}\right)$.

(e) la retta $x = 3$, tangente a Γ nell'unico punto $(3, 0)$. Non vi sono punti di Γ con ascissa strettamente maggiore di 3.

La *Chiocciola di Pascal* è quindi inscritta nel rettangolo

$$R = [-1/8, 3] \times \left[-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}, \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}\right].$$

OSSERVAZIONE 20.2. Nella seconda versione del compito, l'insieme era dato da

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 + 2x)^2 = x^2 + y^2\}.$$

Pertanto tale insieme è il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse di quello studiato nell'esercizio precedente, quindi tutti i risultati dell'esercizio precedente valgono in questo caso qualora si mandi x in $-x$, y rimanga invariato, e in coordinate polari si mandi θ in $\pi - \theta$ (quindi $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ e $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$).

Esercizio 20.3. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e indicata con D la regione illimitata del primo quadrante compresa tra l'iperbole di equazione $xy = 1$, la retta $y = x$ e l'asse delle x, si calcoli

$$\iint_D \frac{1}{x^\alpha}\, dx\, dy.$$

Svolgimento. La retta $y = x$ e l'iperbole $xy = 1$ si incontrano nel primo quadrante solo nel punto $(1, 1)$, inoltre per $x \in]0, 1[$ si ha $1/x > x$. Il dominio D è normale rispetto all'asse x, decomponiamolo nelle due parti $D \cap \{(x, y) : 0 < x < 1\}$ e $D \cap \{(x, y) : x > 1\}$. Si ha:

$$\begin{aligned} I(\alpha) = \iint_D \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{x^\alpha}\,dy\right) dx + \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{1/x} \frac{1}{x^\alpha}\,dy\right) dx \\ &= \int_0^1 x^{1-\alpha}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Se $\alpha \le 0$ il secondo integrale vale $+\infty$, mentre il primo è sempre maggiorato da 1 perché l'integranda è minore o uguale a 1 e l'intervallo di integrazione ha lunghezza 1, quindi $I(\alpha) = +\infty$ se $\alpha \le 0$.
Se $\alpha \ge 2$ il primo integrale vale $+\infty$, mentre il secondo è finito quindi $I(\alpha) = +\infty$ se $\alpha \ge 2$.
Per $0 < \alpha < 2$ entrambi gli integrali sono convergenti, inoltre se $0 < \alpha < 2$ non si ha mai $1 - \alpha = -1$ oppure $1 + \alpha = 1$, e quindi

$$I(\alpha) = \frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha}.$$

Altro modo per procedere, consideriamo il dominio D normale rispetto all'asse delle y. Fissiamo $y \in [0, 1]$. Allora x varia tra y e $1/y$, quindi:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \left(\int_y^{1/y} \frac{1}{x^\alpha}\,dx\right) dy$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^1 \left(\int_y^{1/y} \frac{1}{x}\,dx\right) dy = \int_0^1 (\log(1/y) - \log(y))\,dy = -2\int_0^1 \log(y)\,dy = -2[y\log y - y]_0^1 \\ &= 2 + 2\lim_{y\to 0^+} (y\log y - y) = 2 < +\infty. \end{aligned}$$

Supponiamo ora $\alpha \ne 1$, si ha:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^1 \left(\int_y^{1/y} \frac{1}{x^\alpha}\,dx\right) dy = \frac{1}{-\alpha+1}\int_0^1 [x^{-\alpha+1}]_{x=y}^{x=1/y} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 (y^{\alpha-1} - y^{-\alpha+1})\,dy = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \left(y^{\alpha-1} - \frac{1}{y^{\alpha-1}}\right) dy \end{aligned}$$

Se $\alpha \ne 1$ e $\alpha \ne 0$, $\alpha \ne 2$ si ottiene

$$I(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\alpha}y^\alpha - \frac{1}{2-\alpha}y^{-\alpha+2}\right]_\varepsilon^1$$

Se $\alpha < 0$ o $\alpha > 2$ il limite risulta $+\infty$. Inoltre:

$$\begin{aligned} I(0) &= \int_0^1 \left(\int_y^{1/y} dx\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y} - y\right) dy = +\infty, \\ I(2) &= -\int_0^1 (y - y^{-1})\,dy = +\infty \end{aligned}$$

Per $0 < \alpha < 2$ si ottiene invece:

$$I(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2-\alpha}\right) = \frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha},$$

che conferma il risultato precedente.

Osservazione 20.4. Nella seconda versione del compito, si aveva come D la regione illimitata del primo quadrante compresa tra l'iperbole di equazione $xy = 1$, la retta $y = x$ e l'asse delle y e si calcolava

$$\iint_D \frac{1}{y^\alpha}\,dx\,dy.$$

Rispetto alla versione dell'esercizio precedente si è applicata una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Il risultato e il procedimento sono gli stessi: si scambi semplicemente x con y.

Esercizio 20.5. Si consideri la serie di funzioni definite per $(t,x)\in[0,1]\times[0,2\pi]$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}e^{-4t}\cos(nx).$$

(1) Si studi la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie.
(2) Si calcoli la somma della serie per $(t,x)=(0,0)$.

Svolgimento. Maggioriamo il termine generale della serie in modo appropriato. Si ha:
$$\left|\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}e^{-4t}\cos(nx)\right|\leq\left|\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}\right|=\frac{2}{\sqrt{5}}\left|\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^n\right|=\frac{2}{\sqrt{5}}\left|\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right|^n$$
Poiché $|(\sqrt{5}-3)/2|<1$, la serie geometrica di ragione $(\sqrt{5}-3)/2$ è convergente[3] e si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-3}{2}}-1=\frac{\sqrt{5}-3}{5-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-5}{10}<+\infty.$$
Pertanto l'estremo superiore del termine generale è in modulo maggiorato dal termine generale di una serie convergente, quindi la serie converge totalmente e di conseguenza uniformemente e puntualmente su $[0,1]\times[0,2\pi]$, e la sua somma per $(t,x)=(0,0)$ è proprio $\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-3}{5-\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Osservazione 20.6. Nella seconda versione del compito, la serie era data da
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{7}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}e^{-12t}\cos(nx).$$
Esattamente come prima si riconosce che $|(\sqrt{7}-3)/2|<1$, e vale la maggiorazione
$$\left|\frac{(\sqrt{7}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}e^{-12t}\cos(nx)\right|\leq\left|\frac{(\sqrt{7}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}\right|=\frac{2}{\sqrt{5}}\left|\left(\frac{\sqrt{7}-3}{2}\right)^n\right|$$
Ancora come prima si ottiene
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{7}-3}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{7}-3}{2}}-1=\frac{\sqrt{7}-4}{9}<+\infty.$$
Si ha ancora convergenza totale, uniforme e puntuale e la somma per $(t,x)=(0,0)$ vale $\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{7}-4}{9}$.

[3] Ricordiamo che se $q\in\mathbb{C}$, $|q|<1$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$, tuttavia nell'esercizio la somma non parte da 0 ma da 1, quindi $\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n=q^0+\sum_{n=1}^{\infty}q^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ da cui $\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}-1$.

CAPITOLO 21

Lezione del giorno martedì 15 dicembre 2009 (1 ora) Integrali curvilinei, Teorema di Stokes, Formule di Gauss-Green - continuazione

Esercizio 21.1. Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\varphi(\theta, z) = (\sqrt{1+2z^2}\cos\theta, \sqrt{1+2z^2}\sin\theta, z), \qquad |\theta| \leq \pi/4,\ |z| \leq 1,$$

si calcoli il flusso del campo vettoriale

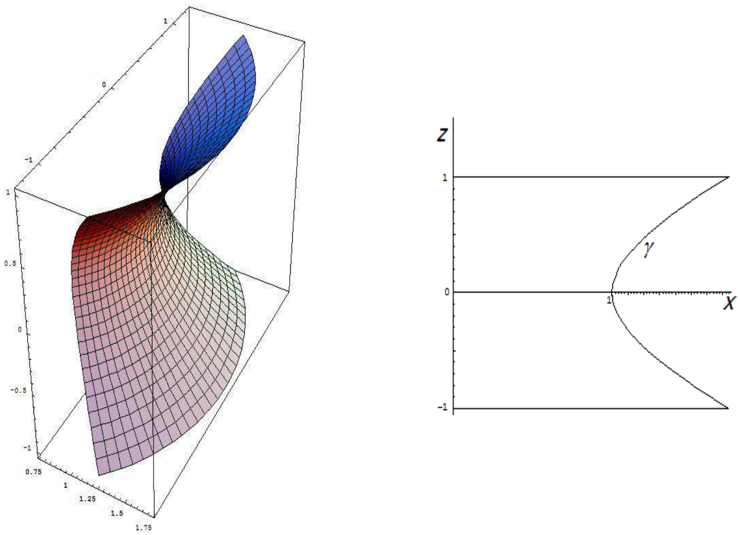
$$\vec{F}(x, y, z) = (1/\sqrt{1+2z^2}, 1/\sqrt{1+2z^2}, x^2+y^2)$$

attraverso Σ, orientata in modo che nel punto $(1, 0, 0)$ il versore normale coincida con $(-1, 0, 0)$.

Svolgimento. Calcoliamo la divergenza di $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$:

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0.$$

Il campo $\vec{F}$ è quindi solenoidale: per il teorema della divergenza, il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa è nullo. Vogliamo determinare una superficie ausiliaria S tale che $S \cup \Sigma$ sia una superficie chiusa delimitante il volume C. Osserviamo che la superficie data è la superficie di rotazione ottenuta ruotando per $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ attorno all'asse z la curva γ di equazione $x = \sqrt{1+2z^2}$ contenuta nel piano $y = 0$.



La superficie Σ e la curva γ.

Definiamo quindi le superfici ausiliarie nel modo seguente:

a) S^+ sia la superficie di rotazione ottenuta ruotando per $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ il segmento di estremi $(0, 0, 1)$ e $(\sqrt{2}, 0, 1)$ giacente nel piano $y = 0$ attorno all'asse z,

$$S^+ = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, 1) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, |\theta| \leq \pi/4\}$$

la sua normale esterna rispetto a C sarà $(0, 0, 1)$;

b) S^- sia la superficie di rotazione ottenuta ruotando per $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ il segmento di estremi $(0, 0, -1)$ e $(\sqrt{2}, 0, -1)$ giacente nel piano $y = 0$ attorno all'asse z, la sua normale esterna rispetto a C sarà $(0, 0, 1)$;

$$S^- = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, 1) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, |\theta| \leq \pi/4\}$$

c) L^+ e L^- saranno le superfici "laterali" date da

$$L^+ = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : \theta = \pi/4,\, 0 \le r \le \sqrt{1+2z^2},\, |z| \le 1\},$$

$$L^- = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : \theta = \pi/4,\, 0 \le r \le \sqrt{1+2z^2},\, |z| \le 1\}.$$

con normali rispettivamente $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ e $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$.

Se orientiamo Σ con la normale uscente a C, notiamo come essa nel punto $(1,0,0)$ valga $(1,0,0)$, quindi l'orientamento richiesto è quello opposto a quello della normale uscente. Per il teorema della divergenza, si ha che se Σ è orientata con la normale uscente

$$-\int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{S^+\cup S^-\cup L^+\cup L^-} \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma,$$

quindi il flusso richiesto dall'esericizio è proprio

$$\int_{S^+\cup S^-\cup L^+\cup L^-} \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma,$$

dove la normale è uscente da C. Calcoliamo questi integrali. Se $(x,y,z) \in L^+$ si ha $\vec{F}\cdot\hat{n} = 0$ pertanto il flusso attraverso L^+ è nullo. Osserviamo che si ha $\vec{F}(x,y,1) = \vec{F}(x,y,-1)$, inoltre se $(x,y,1) \in S^+$ si ha che $(x,y,-1) \in S^-$ e viceversa. Ma allora se $\hat{n}$ è normale uscente a C, $\vec{F}\cdot\hat{n}(x,y,1) = -\vec{F}\cdot\hat{n}(x,y,-1)$ per ogni $(x,y,1) \in S^+$ e $(x,y,-1) \in S^-$, quindi:

$$\int_{S^+} \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma + \int_{S^-} \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = 0.$$

Per esercizio calcoliamo comunque:

$$\int_{S^+} \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{S^+} F_3(x,y,z)\,d\sigma = \int_{S^+} (x^2+y^2)\,d\sigma = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 r\,drd\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto il flusso richiesto dall'esercizio si riduce al calcolo di:

$$\int_{L^-} \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma.$$

Se $(x,y,z) \in L^-$ si ha

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2z^2}}.$$

Inoltre L^- è parametrizzata da

$$\psi(r,z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r, z\right),\ z \in [-1,1],\ r \in [0, \sqrt{1+2z^2}].$$

La matrice Jacobiana della parametrizzazione è:

$$\mathrm{Jac}\,\psi(r,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per la regola di Binet, per trovare l'elemento di superficie 2-dimensionale dobbiamo considerare tutti i minori di ordine 2, e sommarne i quadrati dei determinanti estraendo la radice.

$$\omega_2(\partial_r\psi, \partial_z\psi) = \sqrt{\det{}^2\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} + \det{}^2\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \det{}^2\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = 1.$$

Si ha quindi

$$\int_{L^-} \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = -\int_{L^-} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2z^2}}\,d\sigma = -\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1+2z^2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2z^2}}\,drdz = -\sqrt{2}\int_{-1}^1 dz = -2\sqrt{2}.$$

Pertanto il flusso richiesto dall'esercizio è $-2\sqrt{2}$.

Verifichiamo il risultato ottenuto. Posto $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, calcoliamo

$$\operatorname{Jac}\varphi(\theta, z) = \begin{pmatrix} \partial_\theta\varphi_1 & \partial_z\varphi_1 \\ \partial_\theta\varphi_2 & \partial_z\varphi_2 \\ \partial_\theta\varphi_3 & \partial_z\varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+2z^2}\sin\theta & \dfrac{2z\cos\theta}{\sqrt{1+2z^2}} \\ \sqrt{1+2z^2}\cos\theta & \dfrac{2z\sin\theta}{\sqrt{1+2z^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che il flusso attraverso Σ orientata con la normale indotta dalla parametrizzazione ($\Omega =]-\pi/4, \pi/4[\times]-1,1[$) risulta quindi:

$$\begin{aligned}
\Phi(\Sigma, \vec{F}) &:= \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_\Omega \omega_3(\vec{F}\circ\varphi, \partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi)(x)\,dx \\
&= \int_\Omega \det\begin{pmatrix} F_1\circ\varphi & -\sqrt{1+2z^2}\sin\theta & \dfrac{2z\cos\theta}{\sqrt{1+2z^2}} \\ F_2\circ\varphi & \sqrt{1+2z^2}\cos\theta & \dfrac{2z\sin\theta}{\sqrt{1+2z^2}} \\ F_3\circ\varphi & 0 & 1 \end{pmatrix}(x)\,dx \\
&= \int_\Omega F_3\circ\varphi(\theta,z)\,(-2z\sin^2\theta - 2z\cos^2\theta)\,d\theta dz + \\
&\quad + \int_\Omega \Big(F_1\circ\varphi(\theta,z)\,\sqrt{1+2z^2}\cos\theta + F_2\circ\varphi(\theta,z)\,\sqrt{1+2z^2}\sin\theta\Big)\,d\theta dz \\
&= -2\int_\Omega (\varphi_1^2(\theta,z) + \varphi_2^2(\theta,z))z\,d\theta dz + \\
&\quad + \int_\Omega \Big(\frac{1}{\sqrt{1+2z^2}}\,\sqrt{1+2z^2}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{1+2z^2}}\,\sqrt{1+2z^2}\sin\theta\Big)\,d\theta dz \\
&= -2\int_\Omega (1+2z^2)z\,d\theta dz + \int_\Omega (\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta dz \\
&= -2\int_{-1}^1 \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+2z^2)z\,d\theta\right) dz + \int_{-1}^1 \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\right) dz \\
&= -\pi\int_{-1}^1 (1+2z^2)z\,dz + 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Verifichiamo se la normale indotta dalla parametrizzazione è quella richiesta. Lo facciamo nel punto $(1,0,0)$ che, nella parametrizzazione, corrisponde a $\varphi(0,0)$. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} n_1 & \partial_\theta\varphi_1 & \partial_z\varphi_1 \\ n_2 & \partial_\theta\varphi_2 & \partial_z\varphi_2 \\ n_3 & \partial_\theta\varphi_3 & \partial_z\varphi_3 \end{pmatrix}_{(\theta,z)=(0,0)} &= \det\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{1+2z^2}\sin\theta & \dfrac{2z\cos\theta}{\sqrt{1+2z^2}} \\ 0 & \sqrt{1+2z^2}\cos\theta & \dfrac{2z\sin\theta}{\sqrt{1+2z^2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\theta,z)=(0,0)} \\
&= \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 < 0,
\end{aligned}$$

quindi la normale indotta dalla parametrizzazione è opposta a quella richiesta, pertanto il flusso rishiesto vale $-2\sqrt{2}$ che conferma il risultato precedente.

Esercizio 21.2. Sia S la superficie data dal grafico della funzione $z = xy/2$ tale che $x^2+y^2 \leq 12$. Si calcoli l'area di S e il flusso del campo $\vec{F} = (x, y, 1)$ attraverso S orientata in modo che la normale sia rivolta verso l'alto.

Svolgimento. La superficie S è un grafico $z = f(x, y)$ $f : D \to \mathbb{R}$, con $f(x, y) = xy/2$ e $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 12\}$. D è il cerchio centrato nell'origine di raggio $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Essendo un grafico, sappiamo già che l'elemento di superficie è $d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$ quindi

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + y^2 + x^2}.$$

Verifichiamo il risultato. S è parametrizzata da $\psi(x, y) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, xy/2)$. La matrice Jacobiana della parametrizzazione è:

$$\mathrm{Jac}\,\psi(r, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y/2 & x/2 \end{pmatrix}$$

Per la regola di Binet, per trovare l'elemento di superficie 2-dimensionale dobbiamo considerare tutti i minori di ordine 2, e sommarne i quadrati dei determinanti estraendo la radice.

$$\omega_2(\partial_x\psi, \partial_y\psi) = \sqrt{\det^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \det^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y/2 & x/2 \end{pmatrix} + \det^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y/2 & x/2 \end{pmatrix}} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}}.$$

A questo punto si ha:

$$\mathrm{Area}(S) = \int_S d\sigma = \int_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_D \sqrt{4 + y^2 + x^2}\,dxdy.$$

Per calcolare questo integrale passiamo in coordinate polari piane $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, ricordando che il determinante Jacobiano di questa trasformazione è ρ:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(S) &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{12} \frac{1}{2}\sqrt{4+\rho^2}\,\rho\,d\rho\right) d\theta = \pi\int_0^{12} \sqrt{4+\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{144} \sqrt{4+w}\,dw \\
&= \frac{\pi}{2}\int_4^{148} \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_{t=4}^{t=148} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{148^3} - 8) = \frac{\pi}{3}(\sqrt{4^3\,37^3} - 8) \\
&= \frac{8}{3}\pi\,(37\sqrt{37} - 1).
\end{aligned}$$

Calcoliamo la normale a S. Posto $G(x, y, z) = z - f(x, y) = z - xy/2$, la superficie risulta rappresentata dall'equazione $G(x, y, z) = 0$, quindi la sua normale unitaria sarà data da

$$\pm\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \pm\frac{(-y/2, -x/2, 1)}{|(-y/2, -x/2, 1)|} = \pm\frac{(-y, -x, 2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}},$$

e poiché l'esercizio richiede che la normale punti verso l'alto, sceglieremo

$$\hat{n}(x, y, z) = (n_1, n_2, n_3) = \frac{(-y, -x, 2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}},$$

che ha la terza componente positiva. E' necessario verificare se questa normale è concorde con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} n_1 & \partial_x\psi_1 & \partial_y\psi_1 \\ n_2 & \partial_x\psi_2 & \partial_y\psi_2 \\ n_3 & \partial_x\psi_3 & \partial_y\psi_3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+4}} & 1 & 0 \\ \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+4}} & 0 & 1 \\ \\ \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4}} & y/2 & x/2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}}\det\begin{pmatrix} -y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \\ 2 & y/2 & x/2 \end{pmatrix} = \frac{2+y^2/2+x^2/2}{\sqrt{x^2+y^2+4}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+4} > 0.
\end{aligned}$$

Quindi effettivamente la normale richiesta è concorde con l'orientamento della parametrizzazione. A questo punto, posto $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, si ha:

$$\begin{aligned}
\Phi(S,\vec{F}) &= \int_D \det\begin{pmatrix} F_1\circ\psi & \partial_x\psi_1 & \partial_y\psi_1 \\ F_2\circ\psi & \partial_x\psi_2 & \partial_y\psi_2 \\ F_3\circ\psi & \partial_x\psi_3 & \partial_y\psi_3 \end{pmatrix} dxdy = \int_D \det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ 1 & y/2 & x/2 \end{pmatrix} dxdy \\
&= \int_D (1-xy)\,dxdy = \text{Area}(D) - \int_D xy\,dxdy = 12\pi - \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{12} r^2\cos\theta\sin\theta\,\rho\,d\rho\right)d\theta \\
&= 12\pi - \int_0^{12} r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta = 12\pi.
\end{aligned}$$

Il flusso richiesto è quindi 12π.
Verifichiamo il risultato ottenuto. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < \min\{f(x,y) : x, y \in D\}$. Tale λ esiste finito perché f è continua sul compatto D, quindi ammette minimo. Inoltre $\lambda < 0$. Si ha poi:

$$\text{div}\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2.$$

Consideriamo il solido C delimitato da S e dalla superficie ausiliaria $S^- := D \times \{\lambda\}$, la cui normale uscente da C è $(0,0,-1)$. C è un cilindroide la cui base inferiore è il cerchio $\{(x,y,\lambda) : x, y, \in D\}$. La superficie laterale è:

$$L = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 12, \lambda \le z \le f(x,y)\}.$$

e la normale unitaria uscente è data da $(x,y,0)/\sqrt{x^2+y^2}$ (ovvero, a meno del segno e della normalizzazione, è proprio il gradiente dell'equazione che definisce la superficie). Per il teorema della divergenza si ha:

$$\int_C \text{div}\,\vec{F}\,dxdydz = \int_{\partial C} \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma.$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
2\text{Volume}(C) &= \Phi(S,\vec{F}) + \int_{S^-}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma + \int_L \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
2\int_D\left(\int_\lambda^{f(x,y)} dz\right)dxdy &= \Phi(S,\vec{F}) - \int_D d\sigma + \int_L \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,d\sigma \\
2\text{Volume}(C) &= \Phi(S,\vec{F}) - \text{Area}(D) + \sqrt{12}\,\text{Area}(L)
\end{aligned}$$

si ha quindi, ricordando che $\text{Area}(D) = 12\pi$:

$$\Phi(S,\vec{F}) = 12\pi - \sqrt{12}\,\text{Area}(L) + 2\text{Volume}(C).$$

Calcoliamo in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Volume}(C) &:= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{12}}\int_0^{f(r\cos\theta,r\sin\theta)} r\,d\theta dr\\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{12}}\int_\lambda^{f(r\cos\theta,r\sin\theta)} r\,dz\,d\theta\,dr\\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{12}} r(f(r\cos\theta,r\sin\theta)-\lambda)\,d\theta\,dr\\
&= 2\int_0^{\sqrt{12}}\int_0^{2\pi} (r^3\cos\theta\sin\theta - r\lambda)\,d\theta\,dr\\
&= 2\int_0^{\sqrt{12}}\int_0^{2\pi} r^3\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,dr - 2\lambda\pi\int_0^{\sqrt{12}} r\,dr = -24\lambda\pi,
\end{aligned}$$

che è positivo perché $\lambda<0$. L è parametrizzata da $\psi_1(\theta,z)=(\sqrt{12}\cos\theta,\sqrt{12}\sin\theta,z)$:

$$\mathrm{Jac}\,\psi_1(\theta,z)=\begin{pmatrix}-\sqrt{12}\sin\theta & 0\\ 0 & \sqrt{12}\cos\theta\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Dalla regola di Binet si ha che l'elemento di area è quindi:

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \sqrt{\det{}^2\begin{pmatrix}-\sqrt{12}\sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\det{}^2\begin{pmatrix}\sqrt{12}\cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\det{}^2\begin{pmatrix}-\sqrt{12}\sin\theta & 0\\ \sqrt{12}\cos\theta & 0\end{pmatrix}}\\
&= \sqrt{12\sin^2\theta+12\cos^2\theta}=\sqrt{12}.
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\sqrt{12}\,\mathrm{Area}(L) &:= \sqrt{12}\int_0^{2\pi}\int_\lambda^{f(\sqrt{12}\cos\theta,\sqrt{12}\sin\theta)}\sqrt{12}dz\,d\theta\\
&:= \sqrt{12}\int_0^{2\pi}\int_\lambda^{6\cos\theta\sin\theta} dz\,d\theta\\
&:= \sqrt{12}\int_0^{2\pi} 6\cos\theta\sin\theta-\lambda\,d\theta = 24\pi\lambda.
\end{aligned}$$

Quindi i contributi di volume e superficie laterale si elidono e il flusso è 12π, che verifica il calcolo precedente.

Esercizio 21.3. Si disegni la superficie S di equazioni parametriche

$$\varphi(\theta,y)=(\sqrt{y^2+1}\cos\theta,y,\sqrt{y^2+1}\sin\theta),\qquad \theta\in[0;2\pi],\ |y|<1$$

e si calcoli il flusso del campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z)=(x^2,y/2,x)$ uscente da S, orientata in modo che nel punto $(1,0,0)$ il versore normale coincida con $\vec{e}_1=(1,0,0)$.

Svolgimento. Posto $\varphi(\theta,y)=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ e $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$, si ha:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(\theta,y)=\begin{pmatrix}-\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}}\\ 0 & 1\\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}}\end{pmatrix}.$$

Verifichiamo se la normale indotta dalla parametrizzazione è la stessa di quella richiesta $\hat{n}=(n_1,n_2,n_3)$, lo verifichiamo nel punto $(1,0,0)$:

$$\det\begin{pmatrix}n_1 & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}}\\ n_2 & 0 & 1\\ n_3 & \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}}\end{pmatrix}_{(\theta,y)=(0,0)}=\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=-1<0.$$

Pertanto sarà necessario invertire il segno, si ha allora che il flusso richiesto vale:

$$
\begin{aligned}
\Phi(S,\vec{F}) &= -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} F_1\circ\varphi & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ F_2\circ\varphi & 0 & 1 \\ F_3\circ\varphi & \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} (y^2+1)\cos^2\theta & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ y/2 & 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (-y/2)\det\begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta + \\
&\quad -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (-1)\det\begin{pmatrix} (y^2+1)\cos^2\theta & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \sqrt{y^2+1}\cos\theta \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} y^2/2\,dy\,d\theta + \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \Big((y^2+1)^{3/2}\cos^3\theta + (y^2+1)\sin\theta\cos\theta\Big)\,d\theta\,dy \\
&= -\frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

Nell'ultimo passaggio è sfruttato il fatto che:

$$
\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi}\sin w\,dw = 0.
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(1-\sin^2\theta)\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\,\cos\theta\,d\theta + \int_{\pi/2}^{3/2\pi}(1-\sin^2\theta)\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-1}^{1}(1-w^2)\,dw + \int_{1}^{-1}(1-w^2)\,dw = 0.
\end{aligned}
$$

CAPITOLO 22

Lezione del giorno giovedì 17 dicembre 2009 (2 ore)
Forme differenziali

Cominciamo con alcuni richiami di teoria.

Definizione 22.1. Sia D aperto nell' $\mathbb{R}$-spazio X di dimensione finita n. Una forma differenziale reale di grado 1 (o 1-forma) su X (di classe C^ℓ) è una funzione (di classe C^ℓ) $\omega : D \to X^*$ da D nel duale X^* di X. Se su X è stata scelta una base, indicata con $\{dx_i : i = 1...n\}$ la base duale, ogni 1-forma si scrive in modo unico:

$$\omega(x) = \omega_1(x)\, dx_1 + ... + \omega_n(x)\, dx_n$$

dove i coefficienti $\omega_j(x) \in C^\ell(D, \mathbb{R})$ esprimono ω nella base data.

Definizione 22.2. Una 1-forma ω su D si dice esatta su D se esiste $f : D \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in D$ si abbia $df(x) = \omega(x)$. Ogni tale f si dice primitiva di ω.

Proposizione 22.3. *Se ω è esatta e D è aperto connesso, allora due primitive di ω differiscono per una costante.*

Definizione 22.4. Una 1-forma differenziale con coefficienti differenziabili si dice chiusa se vale:

$$\partial_k \omega_j(x) = \partial_j \omega_k(x)$$

per ogni $x \in D$, $i, j = 1...n$

Teorema 22.5. *Condizione necessaria affinchè una 1-forma differenziale con coefficienti differenziabili sia esatta è che sia chiusa.*

Definizione 22.6. Una 1-forma ω su D si dice localmente esatta su D se per ogni $x \in D$ esiste un intorno aperto U di x in D tale che $\omega_{|U}$ sia esatta.

Teorema 22.7. *Sia D aperto di $\mathbb{R}^n$, sia $\omega \in C^1(D, (\mathbb{R}^n)^*)$ forma di classe C^1. Essa è chiusa se e solo se è localmente esatta.*

Definizione 22.8. Sia X spazio di dimensione finita su $\mathbb{R}$, D aperto di X. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Un cammino in D è una funzione $\alpha : [a, b] \to D$ continua e C^1 a tratti. Un cammino si dice circuito se gli estremi $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ coincidono.

Definizione 22.9. Sia $\omega : D \to X^*$ una 1-forma di classe C^0 e sia $\alpha : [a, b] \to D$ un cammino. L'integrale di ω su α è:

$$\int_\alpha \omega := \int_{[a,b]} \omega(\alpha(t))\alpha'(t)\, dt$$

in coordinate:

$$\int_\alpha \omega := \sum_{j=1}^n \int_{[a,b]} \omega_j(\alpha(t))\alpha'_j(t)\, dt$$

Teorema 22.10. *Sia $\omega : D \to X^*$ una 1-forma di classe C^0. Sono equivalenti:*

(1) *ω è esatta in D*
(2) *se α, β sono cammini in D con la stessa origine e lo stesso estremo, allora $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$*
(3) *per ogni circuito γ di D si ha $\int_\gamma \omega = 0$*

Definizione 22.11. Siano $\alpha, \beta : [a, b] \to D$ due circuiti. Un'omotopia da α a β in D è una mappa continua $h : [a, b] \times [0, 1] \to D$ tale che

(1) $h(t, 0) = \alpha(t)$, $h(t, 1) = \beta(t)$ per ogni $t \in [a, b]$;
(2) $h(a, \lambda) = h(b, \lambda)$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$

Teorema 22.12. *Se ω è una 1-forma continua e localmente esatta in D, α, β sono circuiti omotopi in D, allora*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

Definizione 22.13. Uno spazio topologico si dice connesso per archi se ogni coppia di punti può essere congiunta da una curva continua. Si dice *semplicemente connesso* se è connesso per archi e ogni circuito è nullomotopo (cioè omotopo ad un circuito costante).

Proposizione 22.14. *Se D è aperto semplicemente connesso di X e $\omega \in C^0(D, X^*)$ è localmente esatta, allora è esatta. In particolare sugli aperti semplicemente connessi, le forme chiuse di classe C^1 sono esatte.*

Definizione 22.15. Un sottinsieme D di X si dice stellato rispetto ad un punto x_0 se per ogni $x \in D$, il segmento $\{\lambda x_0 + (1-\lambda)x : \lambda \in [0,1]\}$ è tutto contenuto in D.

Lemma 22.16 (Poincaré). *Una 1-forma chiusa di classe C^1 su un aperto stellato D è esatta su D.*

Proposizione 22.17. *Sia D aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$, siano $a_1, ..., a_m \in D$, sia ω 1-forma localmente esatta in $D \backslash \{a_1, ..., a_m\}$. ω è esatta in $D \backslash \{a_1, ..., a_m\}$ se e solo se detti $\gamma_1, ..., \gamma_m$ circoli positivamente orientati centrati in a_j e non contenenti altri a_k al loro interno, si ha $\int_{\gamma_j} \omega = 0$ per ogni $j = 1, ..., m$.*

Definizione 22.18. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremo che S è un *cono* se per ogni $\lambda \geq 0$, $x \in S$ vale $\lambda x \in S$.

Definizione 22.19. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Una funzione $f = f(x_1, ..., x_n)$ definita su un cono S di $\mathbb{R}^n$ si dice *funzione (positivamente) omogenea di grado α* se per ogni $(x_1, ..., x_n) \in S$, $\lambda > 0$ si ha $f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, ..., x_n)$.

Proposizione 22.20 (Eulero). *Sia data in D la forma $\omega = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$. Supponiamo ω chiusa e M, N funzioni omogenee di un comune grado di omogeneità $\alpha \neq -1$. Allora qualunque sia il dominio D, ω è integrabile in D e il suo integrale indefinito è dato da:*

$$f(x,y) = \frac{1}{\alpha+1}[xM(x,y) + yN(x,y)]$$

Esercizio 22.21. Si consideri la curva parametrizzata da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^3, 3t^2) & \text{per } t \in [0, 1/2] \\ ((1-t^2)/6, (1-t^2)) & \text{per } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

(a) Si abbozzi un disegno di γ e se ne calcoli la lunghezza;
(b) date le forme differenziali

$$\omega_1 = ydx + ydy, \qquad \omega_2 = ydx + xdy,$$

si calcolino

$$\int_\gamma \omega_1, \qquad \int_\gamma \omega_2$$

Svolgimento. La curva $\gamma(t)$ è costituita dalla giustapposizione di $\gamma_1 : [0, 1/2] \to \mathbb{R}^2$, definita da $\gamma_1(t) = (t^3, 3t^2)$ e $\gamma_2 : [1/2, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma_2(t) = ((1-t^2)/6, (1-t^2))$.

(1) Rappresentiamo γ_1. Dalla parametrizzazione $\gamma_1(t) = (x(t), y(t))$ si ricava che $t = \sqrt[3]{x}$, da cui $y = 3x^{2/3}$ per $0 \leq x \leq 1/8$. Tale funzione è concava e strettamente crescente; si ha $\gamma_1(0) = (0,0)$ e $\gamma_2(1/2) = (1/8, 3/4)$.
Per quanto riguarda $\gamma_2(t)$, dalla parametrizzazione si ricava che $1 - t^2 = 6x$, da cui $y = 6x$ e si ha $\gamma_2(1/2) = (1/8, 3/4)$, $\gamma_2(1) = (0,0)$. La curva γ è un circuito percorso in senso orario. Calcoliamone la lunghezza. Le matrici Jacobiane della parametrizzazione sono:

$$\text{Jac}(\gamma_1) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 6t \end{pmatrix}, \qquad \text{Jac}(\gamma_2) = \begin{pmatrix} -t/3 \\ -2t \end{pmatrix},$$

per la regola di Binet, per calcolare l'elemento di misura 1-dimensionale (ovvero di lunghezza), è necessario sommare i quadrati dei determinanti dei minori di ordine 1 (ovvero i singoli elemeni) ed estrarre la radice. Si ottiene:

$$\omega_1(t) = \begin{cases} \sqrt{9t^4 + 36t^2} = 3t\sqrt{t^2+4} & \text{per } 0 < t < 1/2, \\ \sqrt{t^2/9 + 4t^2} = \sqrt{37}t/3 & \text{per } 1/2 < t < 1, \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\text{lunghezza}(\gamma) &= \int_0^1 \omega_1(t)\,dt = \int_0^{1/2} 3t\sqrt{t^2+4}\,dt + \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{37}}{3}\,t\,dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{1/4} \sqrt{w+4}\,dw + \frac{\sqrt{37}}{8} = \frac{3}{2}\int_4^{17/4} z^{1/2}\,dz + \frac{\sqrt{37}}{8} \\
&= [z^{3/2}]_{z=17/4}^{z=5/4} + \frac{\sqrt{37}}{8} = \frac{17\sqrt{17}}{8} - 8 + \frac{\sqrt{37}}{8}
\end{aligned}$$

Verifichiamo il risultato ottenuto: dal teorema di Pitagora, essendo γ_2 un segmento di retta, si ha che la lunghezza di γ_2 è pari a $\sqrt{(3/4)^2+(1/8)^2} = \sqrt{37}/8$. Per quanto riguarda la lunghezza di γ_1, essa è l'arco di equazione $y = 3x^{2/3}$, $0 \le x \le 1/8$, pertanto la lunghezza è data da:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/8} \sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx &= \int_0^{1/8} \sqrt{1+4x^{-2/3}}\,dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1+4t^{-2}}3t^2\,dt \\
&= \int_0^{1/2} 3t\sqrt{t^2+4}\,dt = \frac{17\sqrt{17}}{8} - 8.
\end{aligned}$$

che conferma il calcolo precedente.

(2) Poniamo $\omega_i = \omega_i^x\,dx + \omega_i^y\,dy$ per $i = 1, 2$. La condizione di chiusura porge: $\partial_y \omega_1^x = 1$, $\partial_x \omega_1^y = 0$, quindi ω_1 non è chiusa. Si avrà:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma ydx + ydy &= \int_0^{1/2} 3t^2 \cdot 3t^2\,dt + \int_0^{1/2} 3t^2 \cdot 6t\,dt + \int_{\gamma_2} \omega_1 \\
&= \frac{9}{160} + \frac{9}{32} + \int_{1/8}^0 6x\,dx + \int_{1/8}^0 6x \cdot 6\,dx \\
&= \frac{9}{160} + \frac{9}{32} - \frac{3}{64} - \frac{9}{32} = \frac{3}{320}.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda ω_2 si ha che $\omega_2 = df(x,y)$ con $f(x,y) = xy$, pertanto essa è esatta. Essendo γ un circuito, l'integrale di ω_2 su di esso è nullo.

Esercizio 22.22. Si consideri la forma

$$\omega = \frac{x+By}{x^2+y^2}\,dx + \frac{Cx+y}{x^2+y^2}\,dy,$$

con B,C numeri reali, definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Determinare tutti i valori B, C tali che ω sia chiusa;
b) per tali valori provare che ω è esatta in $\Omega = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ e calcolarne un potenziale;
c) per i valori di B, C di cui al punto a) determinare l'integrale curvilineo di ω sulla circonferenza unitaria, percorsa in senso antiorario;
d) dedurre da c) i valori di B, C per cui ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Svolgimento. Poniamo $\omega = \omega_x\,dx + \omega_y\,dy$.

a) La condizione di chiusura è $\partial_y \omega_x = \partial_x \omega_y$, da cui si ricava ($x^2+y^2 \neq 0$):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+By}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Cx+y}{x^2+y^2}\right) \\
\frac{B(x^2+y^2)-(x+By)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{C(x^2+y^2)-(Cx+y)2x}{(x^2+y^2)^2} \\
Bx^2+By^2-2xy-2By^2 = Cx^2+Cy^2-2Cx^2-2xy \\
(B-C)(x^2+y^2) = 2By^2-2Cx^2
\end{gathered}$$

e tale identità deve valere per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Scegliendo ad esempio $x = 0$ e $y = 1$ si ottiene: $B - C = 2B$ da cui $C = -B$, quindi sostituendo di nuovo $2B(x^2+y^2) = 2By^2 + 2Bx^2$ che è verificata sempre per ogni $B \in \mathbb{R}$. Pertanto ω è chiusa se e solo se $C = -B$.

b) Per $C = -B$ si ha che ω è chiusa, quindi è esatta sul semplicemente connesso Ω. Scegliamo un punto di Ω, ad esempio $(1,1)$. Un potenziale è dato da:

$$u(x,y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega,$$

dove $\gamma_{(x,y)}$ è un qualunque cammino in Ω congiungente $(x,y) \in \Omega$ al punto $(1,1) \in \Omega$ (è il potenziale tale per cui $u(1,1) = 0$). Scelto per $\gamma_{(x,y)}$ il cammino formato da segmenti paralleli agli assi, si ha per $C = -B$:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_1^x \omega_x(t,1)\,dt + \int_1^y \omega_y(x,s)\,ds \\
&= \int_1^x \frac{t+B}{t^2+1} + \int_1^y \frac{Cx+s}{x^2+s^2}\,ds \\
&= \frac{1}{2}\int_1^x \frac{2t+2B}{t^2+1} + \int_1^y \frac{Cx+s}{x^2+s^2}\,ds \\
&= \frac{1}{2}[\log(t^2+1) + 2B\arctan t]_{t=1}^{t=x} + \int_1^y \frac{Cx+s}{x^2+s^2}\,ds \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + B\arctan x - \log\sqrt{2} - \frac{B\pi}{4} + \int_1^y \frac{Cx+s}{x^2+s^2}\,ds \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+1) - C\arctan x - \log\sqrt{2} + \frac{C\pi}{4} + \int_1^y \frac{Cx}{x^2+s^2}\,ds + \int_1^y \frac{s}{x^2+s^2}\,ds \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+1) - C\arctan x - \log\sqrt{2} + \frac{C\pi}{4} + \\
&\quad + C\int_1^y \frac{1}{1+\left(\dfrac{s}{x}\right)^2}\frac{ds}{x} + \frac{1}{2}[\log(x^2+s^2)]_{s=1}^{s=y} \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+1) - C\arctan x - \log\sqrt{2} + \frac{C\pi}{4} + \\
&\quad + C\int_{1/x}^{y/x} \frac{1}{1+z^2}\,dz + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) \\
&= -C\arctan x - \log\sqrt{2} + \frac{C\pi}{4} + C\arctan(y/x) - C\arctan 1/x + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

Osserviamo che effettivamente si ha:

$$u(1,1) = -C\arctan 1 - \log\sqrt{2} + \frac{C\pi}{4} + C\arctan(1) - C\arctan(1) + \frac{1}{2}\log(2) = 0.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto, ricordando che $C = -B$:

$$\begin{aligned}
\partial_y u(x,y) &= \frac{C/x}{1+y^2/x^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{Cx+y}{x^2+y^2} \\
\partial_x u(x,y) &= -\frac{C}{1+x^2} + B\frac{y/x^2}{1+y^2/x^2} - \frac{C}{1+1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x+By}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

c) Parametrizziamo la circonferenza con $\gamma(t) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} (\cos\theta + B\sin\theta)(-\sin\theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi} (-B\cos\theta + \sin\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-\sin\theta\cos\theta - B\sin^2\theta - B\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta\Big)\,d\theta = -2\pi B
\end{aligned}$$

d) In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ogni circuito semplice è omotopo o ad una costante o ad una circonferenza centrata nell'origine di raggio 1. Affinché l'integrale di ω su tutti i circuiti sia nullo, occorre e basta che sia $B = C = 0$. In tal caso, si ha il potenziale $\tilde{u}(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Esercizio 22.23. Si determini il numero reale α in modo che la forma differenziale

$$\omega = \left(2 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx + \left(1 + \sqrt{\alpha\frac{x}{y}}\right)dy$$

sia esatta nel quadrante $x > 0$, $y > 0$. Si trovi il potenziale $U(x,y)$ tale che $U(1,1) = 2$.

Svolgimento. Scriviamo:

$$\omega = \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx + \sqrt{\alpha\frac{x}{y}}\,dy + 2\,dx + dy =: \omega_1 + df_2(x,y)$$

con $f_2(x,y) = 2x + y$. Pertanto ω è chiusa se e solo se ω_1 è chiusa. La condizione di chiusura per ω_1 porge:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\alpha\frac{x}{y}}\\ \frac{1}{2\sqrt{xy}} &= \sqrt{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\alpha\frac{x}{y}}\\ \frac{1}{2\sqrt{xy}} &= \alpha\frac{1}{2\sqrt{xy}},\end{aligned}$$

quindi $\alpha = 1$. Poiché il primo quadrante aperto è semplicemente connesso, si ha che con questa scelta di α la forma è esatta su di esso.

$$\omega = \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx + \sqrt{\frac{x}{y}}\,dy + df_2(x,y)$$

Un potenziale sarà dato da $u(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y) + c$, con f_1 potenziale di ω_1 e $c \in \mathbb{R}$. Il potenziale di ω_1 nullo in $(1,1)$ è dato da:

$$f_1(x,y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega_1,$$

dove $\gamma_{(x,y)}$ è un qualunque cammino nel primo quadrante congiungente $(1,1)$ a (x,y). Detto $\omega_1 = \omega_1^x\,dx + \omega_1^y\,dy$, scelto un cammino composto da segmenti paralleli agli assi,

$$f_1(x,y) = \int_1^x \omega_1^x(s,1)\,ds + \int_1^y \omega_1^y(x,t)\,dt = 2(\sqrt{x}-1) + (2\sqrt{x})(\sqrt{y}-1) = 2(\sqrt{xy}-1).$$

Si ha $f_2(1,1) = 3$, per cui se $f_1(1,1) = 0$ si dovrà prendere $c = -1$. Il potenziale desiderato è:

$$U(x,y) = 2\sqrt{xy} + 2x + y - 3.$$

Verifichiamo il risultato ottenuto: banalmente $U(1,1) = 2$, inoltre $\partial_x U(x,y) = \sqrt{y/x}+2$ e $\partial_y U(x,y) = \sqrt{x/y}+1$.

Esercizio 22.24. Si consideri la forma differenziale:

$$\omega = \cos\left(\frac{1}{(x-1)y-1}\right)\frac{ay}{((x-1)y-1)^2}\,dx + \cos\left(\frac{1}{(x-1)y-1}\right)\frac{1-x}{((x-1)y-1)^2}\,dy$$

nell'aperto $\Omega = \{(x,y) : (x-1)y < 1\}$.

a) Si disegni Ω e si dica se è semplicemente connesso;
b) si determini $a \in \mathbb{R}$ tale che ω sia esatta in Ω;
c) per tale a si calcoli il potenziale che in $(0,0)$ vale $\sin 1$.

Svolgimento. Poniamo $\omega = \omega_x\,dx + \omega_y\,dy$.

a) Ω è la regione di piano delimitata dal grafico dell'iperbole $y = \frac{1}{x-1}$ e contenente il punto $(1,0)$. Tale regione è semplicemente connessa (esiste un'omotopia in Ω che porta un qualunque circuito in Ω in un circuito appartenente ad un intorno stellato dell'asse y contenuto in Ω.

b) Affinché ω sia esatta in Ω occorre e basta che sia chiusa, ovvero $\partial_y\omega_x = \partial_x\omega_y$. Posto $v = (x-1)y-1$, si ha

$$\begin{aligned}
\partial_y\omega_x &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\left(\frac{1}{(x-1)y-1}\right)\frac{ay}{((x-1)y-1)^2}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial v}\left(\cos\left(\frac{1}{v}\right)\frac{ay}{v^2}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\left(\frac{1}{v}\right)\frac{ay}{v^2}\right)\\
&= ay(x-1)\frac{\partial}{\partial v}\left(\cos\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v^2}\right) + a\cos\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v^2}\\
\partial_x\omega_y &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\left(\frac{1}{(x-1)y-1}\right)\frac{1-x}{((x-1)y-1)^2}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial v}\left(\cos\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1-x}{v^2}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1-x}{v^2}\right)\\
&= (1-x)y\frac{\partial}{\partial v}\left(\cos\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v^2}
\end{aligned}$$

Non è necessario procedere oltre con i calcoli: si ha immediatamente infatti $a = -1$.

c) Si ha, posto $v(x,y) = (x-1)y-1$:

$$\begin{aligned}
\omega &= \cos\left(\frac{1}{(x-1)y-1}\right)\frac{-y}{((x-1)y-1)^2}\,dx + \cos\left(\frac{1}{(x-1)y-1}\right)\frac{1-x}{((x-1)y-1)^2}\,dy\\
&= -\frac{1}{((x-1)y-1)^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{(x-1)y-1}\right)(ydx+(x-1)dy)\\
&= \frac{d}{dv}\sin(1/v)\cdot dv(x,y)
\end{aligned}$$

da cui $\omega = df(x,y)$ con $f(x,y) = \sin(1/v(x,y)) = \sin(1/((x-1)y-1))$. Poiché $f(0,0) = \sin 1$, tale f è il potenziale cercato.

Definizione 22.25. Sia data una 1-forma differenziale $\omega(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ dove le funzioni M, N sono definite in un dominio semplicemente connesso D del piano $\mathbb{R}^2$ e ivi continue. Chiameremo *equazione differenziale totale* ogni espressione del tipo $\omega(x,y) = 0$. Risolvere un'equazione differenziale totale significa determinare una funzione $F(x,y)$ e una funzione $\lambda(x,y)$ tale per cui $dF(x,y) = \lambda(x,y)\omega(x,y)$ e $\lambda(x,y) \neq 0$ in D. Una soluzione o *integrale generale* dell'equazione totale sarà $F(x,y) = c$, con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

Definizione 22.26. L'equazione $\omega = 0$ si dice *esatta* se il suo primo membro ω è una 1-forma esatta, ovvero esiste una funzione continua $F(x,y)$ tale che $dF = \omega$, cioè:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

ossia (poichè D è semplicemente connesso) se:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

In tal caso $\lambda(x,y) \equiv 1$ e l'integrale generale di $\omega = 0$ è dato sotto forma implicita dalla formula:

$$F(x,y) = c$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria, infatti differenziando si ha $dF(x,y) = \omega(x,y) = 0$.

Osservazione 22.27. Grazie al Teorema della Funzione Implicita, se $\omega = 0$ è esatta e per se in $P(x_0,y_0) \in D$ vale $N(x_0,y_0) \neq 0$, l'equazione data si può scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

in un intorno di P. Tale affermazione è resa rigorosa dalla seguente osservazione: ω ammette F come primitiva, perché F è esatta. Inoltre vale $\partial_y F(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) \neq 0$, pertanto F definisce implicitamente in un intorno di $P(x_0,y_0)$ una funzione $y = y(x)$ con $y_0 = y(x_0)$. Poiché $M, N \in C^1$, si ha che $N(x,y) \neq 0$ in un intorno di $P(x_0,y_0)$, pertanto il teorema di Dini può essere applicato in un intorno. Si ha quindi che $y = y(x)$ è di classe C^1 e vale

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Analogamente se vale $M(x_0, y_0) \neq 0$, l'equazione data si può scrivere:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$$

in un intorno di P.

Definizione 22.28. Se $\omega = 0$ è esatta, sia γ una qualunque curva C^1 a tratti congiungente $P(x_0, y_0)$ ad un generico punto $(x, y) \in D$:

$$F(x,y) = \int_\gamma \omega$$

In particolare, se D è un rettangolo, può essere scelta la spezzata costituita dai segmenti congiungenti P a (x_0, y) e poi a (x, y) oppure congiungente P a (x, y_0) e poi a (x, y). Nel primo caso si avrà:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)\,ds.$$

Nel secondo caso si avrà:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x,s)\,ds$$

Ricordiamo che se le funzioni M e N sono omogenee in D di un comune grado di omogenerità $\alpha \neq -1$, allora qualunque sia il dominio D si ha

$$F(x,y) = \frac{1}{\alpha+1}[x \cdot M(x,y) + y \cdot N(x,y)]$$

Definizione 22.29. In generale, se D è un aperto di $\mathbb{R}^n$, ω una 1-forma di classe $\mathcal{C}^1$ su A, un *fattore integrante* per ω è ogni $\lambda \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ mai nulla tale che la forma $\lambda\omega$ sia chiusa in D. Se $\omega(x, y)$ è forma di classe $\mathcal{C}^l$, ω mai nulla, e G è integrale primo per $\omega = 0$, di classe $\mathcal{C}^{l+1}$ su D, allora esiste $\lambda \in \mathcal{C}^l(A, \mathbb{R})$ tale che sia:

$$\partial_x G(x,y) = \lambda(x,y)p(x,y)$$

$$\partial_y G(x,y) = \lambda(x,y)q(x,y)$$

Viceversa se esiste $\lambda \in \mathcal{C}^l(D, \mathbb{R})$ tale che $\lambda\omega$ sia esatta, ogni primitiva di $\lambda\omega$ è integrale primo per l'equazione totale $\omega = 0$.
Una formula per trovare un fattore integrante è data dal seguente fatto: sia data l'equazione differenziale totale $\omega(x, y) = p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$. Supponiamo

$$\partial_y p - \partial_x q = f(x)q(x,y) - g(y)p(x,y)$$

con f, q, p di classe $\mathcal{C}^1$. Allora:

$$h(x,y) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{y_0}^{y} g(t)dt\right)$$

è fattore integrante per ω. Particolarmente significativi sono i casi in cui $f \equiv 0$ oppure $g \equiv 0$.

Esercizio 22.30. Risolvere le seguenti equazioni totali:

(1) $2xy\,dx + (x^2 + 1)\,dy = 0$;
(2) $(x^2 + y^2 - 2x)\,dx + 2xy\,dy = 0$;
(3) $y^2\,dx + (xy - 1)\,dy = 0$.

Svolgimento.

(1) la forma è evidentemente chiusa su $\mathbb{R}^2$. Determiniamo un potenziale integrando tale forma su una spezzata γ che congiunga $(0, 0)$ ad un generico punto (x_0, y_0) con segmenti paralleli agli assi, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove $\gamma_1(x) = (x, 0)$ per $0 \le x \le x_0$ (oppure $x_0 \le x \le 0$) e $\gamma_2(y) = (x_0, y)$ per $0 < y < y_0$ (oppure $y_0 \le y \le 0$). Si ha $\dot\gamma_1(x) = (1, 0)$ e $\dot\gamma_2(x) = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} V(x_0,y_0) &= \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} (2xy\,dx + (x^2+1)\,dy) + \int_{\gamma_2} (2xy\,dx + (x^2+1)\,dy) \\ &= \int_{\gamma_2} (2xy\,dx + (x^2+1)\,dy) = \int_0^{y_0} (x_0^2+1)\,dy = (x_0^2+1)y_0. \end{aligned}$$

Quindi $V(x,y) = (x^2+1)y$ e la soluzione è data da $(x^2+1)y = c$, $c \in \mathbb{R}$.
Osserviamo che $1+x^2 \neq 0$, per cui si può scrivere:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = -\frac{2xy}{x^2+1}$$

L'equazione può essere scritta nella forma:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{x^2+1} = -\frac{d}{dx}\log(x^2+1)$$

si ha quindi, integrando,

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{d}{dx}\log(x^2+1)$$

e quindi $\log|y| = -\log(x^2+1)+d$, al variare di $d \in \mathbb{R}$ da cui $|y| = \frac{e^d}{x^2+1}$, quindi $y = \frac{c}{x^2+1}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$ (si ponga $c = \pm e^d$), che conferma il risultato precedente.

(2) la forma è evidentemente chiusa su $\mathbb{R}^2$. Determiniamo un potenziale integrando tale forma su una spezzata γ che congiunga $(0,0)$ ad un generico punto (x_0,y_0) con segmenti paralleli agli assi, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove $\gamma_1(x) = (x,0)$ per $0 \leq x \leq x_0$ (oppure $x_0 \leq x \leq 0$) e $\gamma_2(y) = (x_0,y)$ per $0 < y < y_0$ (oppure $y_0 \leq y \leq 0$).

$$\begin{aligned} V(x_0,y_0) &= \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} ((x^2+y^2-2x)\,dx + 2xy\,dy) + \int_{\gamma_2} ((x^2+y^2-2x)\,dx + 2xy\,dy) \\ &= \int_0^{x_0} (x^2-2x)\,dx + \int_0^{y_0} 2x_0 y\,dy = \frac{x_0^3}{3} - x_0^2 + x_0 y_0^2. \end{aligned}$$

Quindi $V(x,y) = \frac{x^3}{3} - x^2 + xy^2$ e la soluzione è data da $x(x^2/3 - x + y^2) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
In $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\}$ possiamo dividere per $2xy$ ottenendo

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y^2-2x}{2xy},$$

ma la risoluzione di tale equazione non appare immediata.

(3) posto $p(x,y) = y^2$ e $q(x,y) = xy-1$, si ha $\partial_y p - \partial_x q = 2y - y = y \neq 0$, quindi la forma ω non è chiusa. Tuttavia si può scrivere

$$\partial_y p - \partial_x q = y = f(x)q(x,y) - g(y)p(x,y)$$

infatti il membro di sinistra è y, e a destra si può scegliere $f \equiv 0$ e $g(y) = -1/y$. Allora, scelto ad esempio $(x_0,y_0) = (0,1)$ si ha:

$$h(x,y) = \exp\left(\int_{x_0}^x f(t)dt + \int_{y_0}^y g(t)dt\right) = \exp\left(\int_1^y -\frac{1}{t}dt\right) = e^{\log(1/y)} = 1/y$$

è fattore integrante, definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$. Scriviamo quindi

$$h(x,y)\omega(x,y) = y\,dx + \left(x - \frac{1}{y}\right)\,dy.$$

Tale forma è chiusa su ciascuno dei due semipiani $H^+ = \{(x,y) : y > 0\}$ e $H^- = \{(x,y) : y < 0\}$. Tali semipiani sono semplicemente connessi e quindi la forma è ivi esatta. Determiniamo quindi i potenziali V^+ e V^- definiti su H^+ e H^- rispettivamente. A tal proposito, consideriamo un punto di H^+, ad esempio $(0,1)$ e congiungiamolo al generico punto (x_0,y_0) di H^+ con una spezzata costituita da due segmenti paralleli agli assi $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove $\gamma_1(x) = (x,0)$ per $0 \leq x \leq x_0$ (oppure $x_0 \leq x \leq 0$) e $\gamma_2(y) = (x_0,y)$ per $1 < y < y_0$ (oppure $0 < y_0 \leq y \leq 1$).

$$\begin{aligned} V^+(x_0,y_0) &= \int_{\gamma_1} h(x,y)\omega(x,y) + \int_{\gamma_2} h(x,y)\omega(x,y) = \int_0^{x_0} dx + \int_1^{y_0} \left(x_0 - \frac{1}{y}\right)\,dy \\ &= x_0 + [x_0 y - \log|y|]_{y=1}^{y=y_0} = x_0 + x_0 y_0 - \log y_0 - x_0 = x_0 y_0 - \log y_0 \end{aligned}$$

Pertanto $V^+(x,y) = xy - \log y$, definito per $y > 0$ e le soluzioni in H^+ sono date da $V^+(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
Determiniamo ora V^-. Consideriamo un punto di H^-, ad esempio $(0,-1)$ e congiungiamolo al generico punto (x_0,y_0) di H^+ con una spezzata costituita da due segmenti paralleli agli assi $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove

$\gamma_1(x) = (x, 0)$ per $0 \leq x \leq x_0$ (oppure $x_0 \leq x \leq 0$) e $\gamma_2(y) = (x_0, y)$ per $-1 < y < y_0 < 0$ (oppure $y_0 \leq y \leq -1$).

$$\begin{aligned} V^-(x_0, y_0) &= \int_{\gamma_1} h(x,y)\omega(x,y) + \int_{\gamma_2} h(x,y)\omega(x,y) \\ &= \int_0^{x_0} -1\, dx + \int_{-1}^{y_0} \left(x_0 - \frac{1}{y} \right) dy \\ &= -x_0 + [x_0 y - \log|y|]_{y=-1}^{y=y_0} = x_0 + x_0 y_0 - \log|y_0| + x_0 \\ &= x_0 y_0 - \log|y_0| = x_0 y_0 - \log(-y_0), \end{aligned}$$

ricordando che $y_0 < 0$. Pertanto $V^-(x,y) = xy - \log y$, definito per $y < 0$ e le soluzioni in H^- sono date da $V^-(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
Possiamo raggruppare le due espressioni definendo $V(x,y) = xy - \log|y|$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$ e le soluzioni in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$ saranno date da $xy - \log|y| = c$, $c \in \mathbb{R}$

CAPITOLO 23

Lezione del giorno giovedì 7 gennaio 2010 (2 ore) Equazioni totali e equazioni differenziali non autonome

Esercizio 23.1. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:
(1) $y' = \sqrt{y(1-y)}$.
(2) $y' = (x+y)^2 - (x+y) - 1$.
(3) $y' - y = e^x\sqrt{y}$.

Svolgimento.

(1) l'equazione ammette le soluzioni costanti $y(x) = 0$ e $y(x) = 1$. Per $y \neq 0, 1$, l'equazione totale ad essa associata è:
$$\frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\, dy - \, dx = 0.$$
Tale equazione, definita per $0 < y < 1$, è a variabili separate, pertanto ammette soluzione
$$x - \int \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\, dy = c,\ c \in \mathbb{R}.$$
Calcoliamo
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\, dy = \int \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\, dy = \int \frac{1}{\sqrt{y-y^2}}\, dy = \int \frac{dy}{\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} \\ = \int \frac{2dy}{\sqrt{1-(2y-1)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) = \arcsin(2y-1).\end{aligned}$$
Quindi la soluzione in forma implicita è $x - c = \arcsin(2y-1)$ con il vincolo $0 < y < 1$, e ciò implica $-\pi/2 < x - c < \pi/2$ quindi $y = (\sin(x-c)+1)/2$ con il vincolo $\cos(x-c) \geq 0$.

(2) Riscrivendo l'equazione differenziale, si ha:
$$y' + 1 = \frac{d}{dx}(x+y) = (x+y)^2 - (x+y).$$
Posto $v = y + x$, si ottiene allora $v' = v^2 - v$. Questa equazione ammette le soluzioni costanti $v = 0$ e $v = 1$. Per $v \neq 0, 1$ si ha
$$\frac{dv}{v(v-1)} = dx$$
da cui, essendo
$$\frac{1}{v(v-1)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v-1} = \frac{Av - A + Bv}{v(v-1)}$$
per $A = -B = -1$, si ottiene integrando
$$-\log|v| + \log|v-1| = x + c$$
per cui la soluzione in forma implicita è data da $v = 0$, $v = 1$ e
$$\log\left|\frac{v-1}{v}\right| = x + c,$$
da cui $-\dfrac{1}{v} = -1 \pm e^{x+c}$, quindi
$$v = \frac{1}{1 \pm e^{x+c}},$$
cui corrispondono le soluzioni $v = -x$, $v = 1 - x$ e
$$y(x) = \frac{1}{1 \pm e^{x+c}} - x.$$

(3) Il problema è posto in $\Omega := \{(x, y) : y > 0\}$. L'equazione totale associata è:

$$\tilde{\omega}(x, y) := \tilde{p}(x, y)\, dx + \tilde{q}(x, y)\, dy = (y + e^x \sqrt{y})\, dx - dy = 0.$$

Tale forma non è esatta e la ricerca del fatttore integrante non appare immediata. Osserviamo che l'equazione ammette la soluzione costante $y \equiv 0$. Moltiplicando l'equazione per $\sqrt{y}$, si ha:

$$\omega(x, y) := p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = (y^{3/2} + e^x y)\, dx - \sqrt{y}\, dy = 0.$$

Nemmeno questa forma è esatta, tuttavia si ha:

$$\partial_y p(x, y) - \partial_x q(x, y) = 3/2y^{1/2} + e^x = \frac{1}{y}\, p(x, y) - \frac{1}{2} q(x, y),$$

quindi la forma ammette il fattore integrante

$$h(x, y) = \exp\left(\int -\frac{dy}{y} + \int -1/2\, dx\right) = \exp(-x/2 - \log y) = \frac{e^{-x/2}}{y}.$$

Cerchiamo un potenziale della forma esatta

$$h(x, y)\omega(x, y) = \frac{e^{-x/2}}{y}(y^{3/2} + e^x y)\, dx - \frac{e^{-x/2}}{y}\sqrt{y}\, dy = e^{-x/2}(e^x + \sqrt{y})\, dx - \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{y}}\, dy$$

A tal proposito, congiungiamo il punto $(0, 1) \in \Omega$ con il generico punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ mediante una spezzata γ con segmenti paralleli agli assi.

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \int_\gamma h(x, y)\omega(x, y) = \int_0^{x_0} e^{-x/2}(e^x + 1)\, dx + \int_1^{y_0} -\frac{e^{-x_0/2}}{\sqrt{y}}\, dy \\ &= \int_0^{x_0} (e^{x/2} + e^{-x/2})\, dx + 2(1 - \sqrt{y}_0)e^{-x_0/2} = 2(e^{x_0/2} - \sqrt{y}_0 e^{-x_0/2}) \end{aligned}$$

Si ha quindi che le soluzioni sono espresse in forma implicita da

$$2e^{-x/2}(e^x - \sqrt{y}) = d,\ d \in \mathbb{R},$$

da cui si ricava

$$y = (e^x + ce^{x/2})^2,\ c \in \mathbb{R},$$

con la condizione $e^x + ce^{x/2} \geq 0$, ossia $d \geq -e^{x/2}$.

Esercizio 23.2. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

(1) $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$.
(2) $y' - \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)} y = 2x^2\sqrt{x^2 - 1}$.

Svolgimento.

(1) Il problema è posto per $|y/x| \leq 1$. L'equazione totale associata all'equazione assegnata è

$$\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}\right) dx - dy = 0$$

Osserviamo che tale equazione totale è omogenea di grado 0. Poniamo quindi $x = \xi$, $y = \xi\eta$ ottenendo

$$\left(\eta + \sqrt{1 - \eta^2}\right) d\xi - (\xi\, d\eta - \eta\, d\xi) = 0,$$

da cui

$$\frac{1}{\xi}\, d\xi - \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}}\, d\eta = 0.$$

Tale forma è esatta e l'integrazione è immediata. Sostituendo, si ha:

$$V(x, y) = \log|x| - \arcsin(y/x)$$

e le soluzioni sono espresse da $\log|x| - \arcsin(y/x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

(2) Il problema è posto per $|x| \geq 1$. L'equazione totale associata all'equazione assegnata è
$$\omega(x,y) := p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \left(\frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}y + 2x^2\sqrt{x^2-1}\right)\,dx - dy = 0.$$
La forma è palesemente non esatta. Tuttavia si ha:
$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)} = f(x)q(x,y),$$
con
$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{2x^2-1}{x(x^2-1)} = -\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}\right) = -\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x^2-1)} \\ &= -\frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x^2-1)} \end{aligned}$$
da cui $A = 1$, $B = C = 1/2$, pertanto ricordando che $|x| \geq 1$
$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= -\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)\,dx = -\log|x| + \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| \\ &= -\log\left(|x|\sqrt{x^2-1}\right). \end{aligned}$$
Pertanto il fattore integrante è dato da $h(x,y) = 1/(|x|\sqrt{x^2-1})$. Cerchiamo una primitiva della forma esatta
$$\begin{aligned} h(x,y)\omega(x,y) &= \left(\frac{2x^2-1}{x|x|(x^2-1)^{3/2}}y + 2|x|\right)\,dx - \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dy \\ &= d\left(-\frac{y}{|x|\sqrt{x^2-1}}\right) + 2|x|\,dx \\ &= d\left(-\frac{y}{|x|\sqrt{x^2-1}} + x|x|\right) \end{aligned}$$
Nei vari passaggi si è usato il fatto che per $x \neq 0$ si ha $x\,\mathrm{sgn}x = |x|$, $\mathrm{sgn}^2 x = 1$ e che $\mathrm{sgn}(x)$ è costante su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. La soluzione dell'equazione risulta pertanto
$$-\frac{y}{|x|\sqrt{x^2-1}} + x|x| = c,\ c \in \mathbb{R},$$
che si può scrivere come
$$y(x) = (x^3 - c|x|)\sqrt{x^2-1},\ c \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 23.3. Si studi $\dot{x} = e^{t-x}/x$, $x(\alpha) = 1$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Scriviamo l'equazione data come equazione totale:
$$\omega(t,x) = xe^x\,dx - e^t\,dt = 0.$$
La forma ω è esatta in $\mathbb{R}^2$. Una sua primitiva è data da:
$$F(t_0,x_0) = \int_0^{x_0} xe^x\,dx + \int_0^{t_0} -e^t\,dt = [xe^x]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} e^x\,dx - [e^t]_0^{t_0} = (x_0-1)e^{x_0} - e^{t_0} + 2.$$
Tutte le soluzioni dell'equazione totale sono quindi espresse da $F(t,x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ (possiamo inglobare in c la costante 2) ossia
$$(x-1)e^x - e^t = c$$
Dovendosi avere $x(\alpha) = 1$, si ha che il punto $(\alpha,1)$ deve soddisfare l'equazione, quindi $c = -e^\alpha$. Pertanto le soluzioni sono descritte in forma implicita dall'equazione:
$$e^t = (x-1)e^x + e^\alpha.$$
Si ha che $\partial_x F(t,x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $\partial_t F(t,0) = -1 \neq 0$, quindi la tangente a $F(t,x) = c$ nei punti $(t,0)$ è verticale. Ciò implica che la retta $x = 0$ è una retta di punti di non differenziabilità per le soluzioni $x = x(t)$ per il Teorema di Dini. Una soluzione con condizione iniziale $x(\alpha) = 1$ rimarrà quindi confinata nel semipiano $x \geq 0$ Possiamo esplicitare t in funzione di x ottenendo $t(x) = \log((x-1)e^x + e^\alpha)$ con le condizioni $(x-1)e^x + e^\alpha > 0$ e $x > 0$. Poniamo $g(x) = (x-1)e^x + e^\alpha$, si ha $g'(x) = xe^x$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Per $x > 0$ quindi g è strettamente monotona crescente e il suo minimo è assunto in 0 e vale $e^\alpha - 1$. Per la stretta

monotonia, se $\bar{t}$ è un punto dove è definita la soluzione $x = x(t)$, allora la soluzione è definita per ogni $t > \bar{t}$. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to+\infty} t(x) - (\log(x-1) + x) = 0,$$

indipendentemente da α, pertanto tutte le soluzioni $x = x(t)$ sono asintotiche per $t \to +\infty$ alla curva $e^t = (x-1)e^x$.

i. Se $\alpha > 0$ si ha che il minimo di g è $e^\alpha - 1 > 0$, quindi $g(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$. In particolare si ha $t = \log g(x)$ per ogni $x \geq 0$ e posto

$$t_\alpha = \lim_{x\to0^+} \log g(x) = \log(e^\alpha - 1)$$

si ha che t_α è finito e rappresenta il tempo in cui la soluzione che parte da $x(\alpha) = 1$ impiega per raggiungere l'asse $x = 0$. Si osservi che $t_\alpha < \alpha$ (per $t < t_\alpha$ la soluzione non è definita). Per la stretta monotonia di g e del logaritmo, anche $t = \log g(x)$ è strettamente monotona, pertanto la soluzione $x(t)$, inversa di tale funzione, è strettamente monotona.

ii. Se $\alpha = 0$ si ha che $g(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$ e $g(0) = 0$ e posto

$$t_\alpha = \lim_{x\to0^+} \log g(x) = -\infty$$

e quindi la soluzione $x(t)$ raggiunge l'asse $x = 0$ asintoticamente per $t \to -\infty$. Per la stretta monotonia di g e del logaritmo, anche $t = \log g(x)$ è strettamente monotona, pertanto la soluzione $x(t)$, inversa di tale funzione, è strettamente monotona.

iii. Se $\alpha < 0$ allora il minimo di g è negativo, pertanto dal momento che g è monotona crescente e non limitata esiste un'unico valore x_α tale per cui $g(x_\alpha) = 0$, tale valore soddisfa $(x_\alpha - 1)e^{x_\alpha} = -e^\alpha$ e necessariamente si ha $0 < x_\alpha < 1$ perché $e^\alpha > 0$. Si ha che $g(x) > 0$ per $x > x\alpha$ e

$$t_\alpha = \lim_{x\to(x_\alpha)^+} \log g(x) = -\infty$$

pertanto la soluzione tende asintoticamente per $t \to -\infty$ al valore x_α.

Riassumendo: la soluzione è sempre strettamente monotona crescente nel suo intervallo di definizione. Essa è definita per ogni $t \geq \alpha$ e il suo limite per $t \to +\infty$ è $+\infty$. Tutte le soluzioni $x = x(t)$ sono asintotiche per $t \to +\infty$ alla curva $e^t = (x-1)e^x$. Se $\alpha > 0$, essa è definita in $]\log(e^\alpha - 1), +\infty[$ e il suo limite per $t \to t_\alpha^+ = \log(e^\alpha - 1)^+$ vale 0 (si noti che $t_\alpha < \alpha$). Se $\alpha = 0$, essa è definita in tutto $\mathbb{R}$ e il suo limite per $t \to -\infty$ è 0. Se $\alpha < 0$, essa è definita in tutto $\mathbb{R}$ e il suo limite per $t \to -\infty$ è $0 < x_\alpha < 1$, dove x_α è l'unico punto che soddisfi $(x_\alpha - 1)e^{x_\alpha} = -e^\alpha$.

Esercizio 23.4. Si studi $\dot{x} = x^2/(1 - tx)$, $x(0) = \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Scriviamo l'equazione assegnata come equazione totale:

$$\omega(t,x) = p(t,x)\,dx + q(t,x)\,dt = (1 - tx)\,dx - x^2\,dt = 0.$$

Si ha $\partial_t p(t,x) - \partial_x q(t,x) = -x + 2x = x \neq 0$, quindi ω non è esatta, tuttavia si ha

$$\partial_t p(t,x) - \partial_x q(t,x) = x = f(x)q(t,y) - g(t)p(t,y)$$

con $g(t) = 0$ e $f(x) = -1/x$. Pertanto per $x \neq 0$, l'equazione ammette il fattore integrante $h(t,x) = e^{\int f(x)\,dx} = 1/|x|$. Si ha per $x > 0$:

$$h(t,x)\omega(x,t) = \left(\frac{1}{x} - t\right)dx - x\,dt = \frac{1}{x}\,dx - (t\,dx + x\,dt) = d(\log(x) - tx)$$

Pertanto per $x > 0$ le soluzioni sono date in forma implicita da $\log(x) - tx = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Per $x < 0$ si ha

$$h(t,x)\omega(x,t) = \left(\frac{1}{-x} + t\right)dx + x\,dt = \frac{1}{-x}\,dx + (t\,dx + x\,dt) = d(-\log(-x) + tx)$$

Pertanto per $x < 0$ le soluzioni sono date in forma implicita da $-\log(-x) + tx = c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Possiamo inglobare il tutto nell'unica scrittura $F(t,x) := \log(|x|) - tx = c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.
Dovendo essere $x(0) = \alpha$, è necessario che $F(0,\alpha) = c$, quindi $c = \log|\alpha|$.
Osserviamo che tale insieme è simmetrico rispetto all'origine perché è lasciato invariato dalla sostituzione $(t,x) \mapsto (-t,-x)$. Potevamo rendercene conto osservando che he posto $s = -t$ e $y(s) = -x(s)$ si ha:

$$\frac{dy}{ds}(s) = -\frac{dx}{dt}(-t)\frac{dt}{ds} = \dot{x}(-t) = \frac{x^2(-t)}{1 - tx(-t)} = \frac{x^2(s)}{1 + sx(s)} = \frac{y^2(s)}{1 - sy(s)},$$

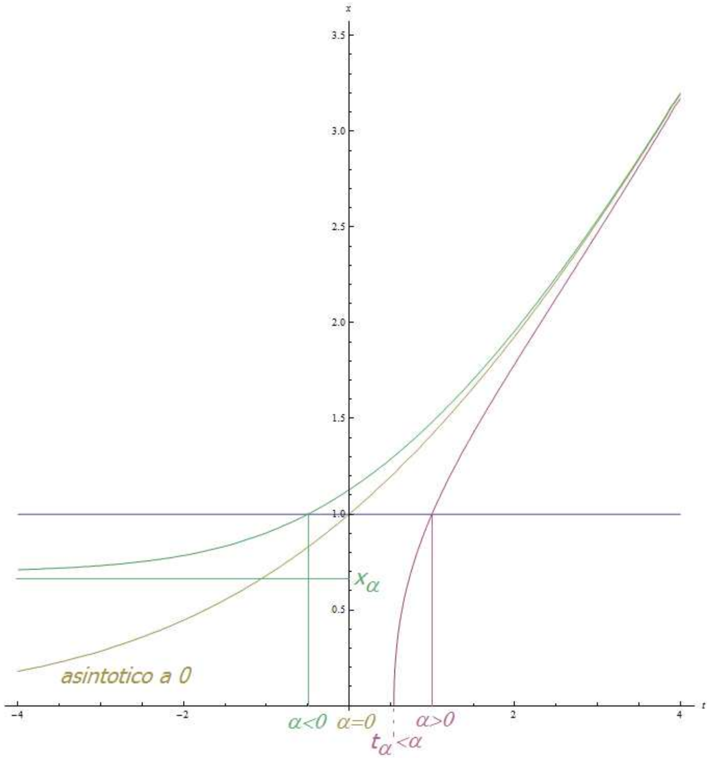


FIGURA 1. Lo studio di $\dot{x} = e^{t-x}/x$, $x(\alpha) = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

che è la stessa equazione di partenza e pertanto le soluzioni sono simmetriche rispetto all'origine.
E' sufficiente quindi limitarsi al caso $\alpha \geq 0$: il grafico della soluzione con condizione iniziale $\alpha < 0$ si ottiene prendendo il simmetrico rispetto all'origine di quello della soluzione con condizione iniziale $-\alpha > 0$.
Osserviamo che $\partial_x F(t,x) = 1/x - t$, quindi la curva $tx = 1$ è una curva di nondifferenziabilità, pertanto una soluzione con condizioni iniziali $x(0) = \alpha$ deve rimanere contenuta nella regione $tx < 1$. Inoltre nella regione $tx < 1$ vale il teorema di esistenza e unicità locale, quindi l'unica soluzione corrispondente ad $\alpha = 0$ è la soluzione identicamente nulla, potevamo ricavare tale condizione passando al limite per $\alpha \to 0$ in $F(t,x) = \log|\alpha|$: si ottiene $F(t,x) \equiv -\infty$ da cui $c \equiv 0$.
Nella regione di definizione, la soluzione è strettamente monotona crescente, ciò si deduce direttamente osservando che $x' > 0$ se $xy < 1$. In particolare, esiste un tempo $0 < t_\alpha < +\infty$ finito in cui incontra il ramo di iperbole $tx = 1$ nel primo quadrante e quindi risulta definita per $-\infty \leq t \leq t_\alpha$ perché limitata dal basso dalla funzione identicamente nulla che non può incontrare per il teorema di esistenza e unicità.
Se esplicitiamo $F(t,x) = \log|\alpha|$ rispetto alla variabile t otteniamo $t(x) = \log(|x\alpha|)/x$ definita per $x \neq 0$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^\pm} t(x) = \mp\infty,$$

indipendentemente da α. Questo implica che $x = 0$ è asintoto orizzontale per le soluzioni. Consideriamo il caso $x > 0$. Studiamo la derivata: essa è $t'(x) = 1 - \log(|\alpha x|)/x^2$, essa si annulla in un unico punto $x = e/\alpha$. cui corrisponde $t = \alpha/e$. Tale punto è un punto di massimo infatti si ha $t''(x) = \frac{2\log(\alpha x)-3}{x^3}$ quindi $t''(e/\alpha) < 0$. Pertanto la funzione $t :]0, e/\alpha[\to] -\infty, \alpha/e[$ è strettamente crescente, quindi ritroviamo che la sua inversa, ovvero la soluzione $x = x(t)$ sarà anch'essa strettamente crescente e, per quanto visto in precedenza, ammette asintoto orizzontale $x = 0$ per $t \to -\infty$.
Si poteva ritrovare lo stesso risultato osservando che per $0 < x < 1$, $t < 0$ si ha:

$$g(t,x) = \frac{x^2}{1-tx} = \frac{x^2}{1+|t|x} > \frac{x^2}{1+|t|} = \frac{x^2}{1-t} = f(t,x)$$

per ogni $\varepsilon > 0$ la soluzione del problema $\dot{y} = f(t,y)$, $y(0) = \alpha+\varepsilon$ è maggiore o uguale alla soluzione del problema $\dot{x} = g(t,x)$ in $]-\infty, 0]$ (si ricordi che si sta studiando il problema *all' indietro*, quindi per $t < 0$, è per questo che vale la stima). Si ha:

$$\int_\alpha^{\bar{y}} \frac{dy}{y^2} = \int_0^{-\infty} \frac{dt}{1-t} = +\infty$$

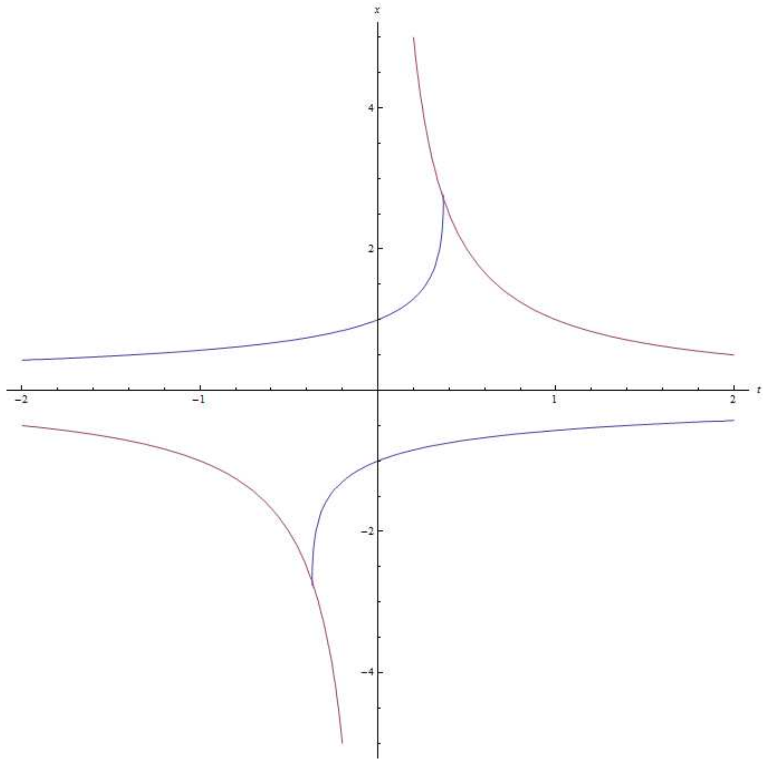


FIGURA 2. Lo studio di $\dot{x} = x^2/(1 - tx)$, $x(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

da cui necessariamente $\bar{y} = 0$, pertanto per $t \to -\infty$ si ha $0 < x(t) \leq y(t) \to 0$ e quindi la soluzione $x(t)$ tende asintoticamente a 0 per $t \to -\infty$. In figura presentiamo due soluzioni simmetriche corrispondenti ai dati iniziali $\pm\alpha$ e la curva di non differenziabilità $xt = 1$. Le soluzioni cessano di esistere nei punti $(t_+^*, x_+^*) = (e/\alpha, \alpha/e)$ e $(t_-^*, x_-^*) = (-e/\alpha, -\alpha/e)$.

CAPITOLO 24

Lezione del giorno martedì 12 gennaio 2010 (1 ora) Equazioni lineari a coefficienti costanti

Esercizio 24.1. Risolvere le seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti:
(1) $y' + y = \sin x$.
(2) $y^{IV} - 16y = 1 + \cos 2x$.
(3) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = x^2$;
(4) $y^{IV} - y'' = x - 1$.

Svolgimento.

(1) L'equazione omogenea è $y' + y = 0$, la cui soluzione generale è $y_0(x) = ce^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$. Il termine noto è della forma $\sin x$, pertanto per trovare una soluzione possiamo applicare il metodo dei coefficienti indeterminati. Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $A \sin x + B \cos x$. Si ha dall'equazione $A \cos x - B \sin x + A \sin x + B \cos x = \sin x$ da cui $A + B = 0$ e $A - B = 1$, quindi $A = -B = 1/2$. Pertanto la soluzione è $y(x) = ce^{-x} + (\sin x - \cos x)/2$, $c \in \mathbb{R}$.
(2) L'equazione omogenea è $y^{IV} - 16y = 0$, il polinomio caratteristico $\lambda^4 - 16 = 0$ ammette le radici semplici $\{\pm 2, \pm 2i\}$, pertanto la soluzione dell'omogenea è $y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x)$ con $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Il termine noto è della forma $1 + \cos 2x$, cerchiamo quindi una soluzione particolare $\bar{y}_1(x)$ di $y^{IV} - 16y = 1$ e una soluzione particolare $\bar{y}_2(x)$ di $y^{IV} - 16y = \cos 2x$. Per quanto riguarda $y^{IV} - 16y = 1$, possiamo applicare il metodo dei coefficienti indeterminati. Osservato che 0 non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione che sia un polinomio di grado 0 ovvero una costante, si ottiene così $\bar{y}_1(x) = -1/16$.
Per trovare una soluzione a $y^{IV} - 16y = \cos 2x$ possiamo applicare il metodo dei coefficienti indeterminati. Osserviamo che 2 è radice del polinomio caratteristico di molteplicità 1, quindi cerchiamo una soluzione particolare nella forma $\bar{y}(x) = x(A \cos(2x) + B \sin(2x))$. Derivando si ha:

$$\begin{aligned}
\bar{y}'(x) &= A\cos(2x) + B\sin(2x) + 2x(-A\sin(2x) + B\cos(2x))\\
\bar{y}''(x) &= 2(-A\sin(2x) + B\cos(2x)) + 2(-A\sin(2x) + B\cos(2x)) + 4x(-A\cos(2x) - B\sin(2x))\\
&= 4(-A\sin(2x) + B\cos(2x)) + 4x(-A\cos(2x) - B\sin(2x))\\
\bar{y}'''(x) &= 8(-A\cos(2x) - B\sin(2x)) + 4(-A\cos(2x) - B\sin(2x)) + 4x(A\sin(2x) - B\cos(2x))\\
&= 12(-A\cos(2x) - B\sin(2x)) + 8x(A\sin(2x) - B\cos(2x))\\
\bar{y}^{IV}(x) &= 24(A\sin(2x) - B\cos(2x)) + 8(A\sin(2x) - B\cos(2x)) + 16x(A\cos(2x) + B\sin(2x))\\
&= 32(A\sin(2x) - B\cos(2x)) + 16x(A\cos(2x) + B\sin(2x))
\end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene:

$$32(A\sin(2x) - B\cos(2x)) + 16x(A\cos(2x) + B\sin(2x)) - 16x(A\cos(2x) + B\sin(2x)) = \cos 2x$$

da cui $A = 0$, e quindi $-32B\cos(2x) = \cos 2x$ e quindi $B = -1/32$. La soluzione dell'equazione risulta quindi:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x) - \frac{1}{16} - \frac{x}{32}\sin(2x),$$

al variare di $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$.
(3) L'equazione omogenea è $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ di polinomio caratteristico $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. Cerchiamo soluzioni intere di questa equazione tra i divisori interi di -6, ovvero $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Si ha che le radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, radici semplici. Il termine noto è della forma x^2, applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati. Dopo aver osservato che 0 non è soluzione del

polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ che sia un polinomio di grado 2, quindi $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$. Sostituendo, si ottiene:

$$-12a + 11(2ax + b) - 6(ax^2 + bx + c) = x^2$$

da cui $a = -1/6$, pertanto $2 - 11x/3 + 11b - 6bx - 6c = 0$, quindi $6b = -11/3$, $b = -11/18$. Rimane $6c = -85/18$ da cui $c = -85/108$. Pertanto la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{x^2}{6} - \frac{11}{18}x - \frac{85}{108},$$

al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(4) L'equazione omogenea è $y^{IV} - y'' = 0$, il polinomio caratteristico è $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$ che ha come radici 0 di molteplicità 2 e le radici semplici ± 1 Il termine noto è della forma $x - 1$. Osserviamo che 0 è soluzione del polinomio caratteristico di molteplicità 2, quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = x^2(ax + b) = ax^3 + bx^2$. Sostituendo, si ottiene $-(6ax + 2b) = x - 1$ da cui $a = -1/6$, $b = 1/2$. Quindi la soluzione dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6}\right).$$

Esercizio 24.2. Considerare per $k \in \mathbb{N}$ il problema differenziale:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k}u''(x) + |u'(x)| &= 1, & x &\in (0,1), \\ u(0) &= 0, & u(1) &= 2. \end{aligned}$$

(1) Calcolare esplicitamente una soluzione u_k.
(2) Dimostrare che tale soluzione è unica.
(3) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di $\{u_k\}$ sull'intervallo $[0, 1]$.

Svolgimento. Posto $v(x) = u'(x)$, l'equazione diviene $v'(x) = k(|v(x)| - 1)$. Tale equazione soddisfa le ipotesi del Teorema di Esistenza e Unicità di Cauchy, pertanto, fissata una condizione iniziale, la soluzione è unica. L'equazione ammette le soluzioni costanti $v(x) \equiv 1$ e $v(x) \equiv -1$. Per l'unicità, pertanto, si può verificare solo uno dei seguenti casi: $v(x) < -1$, $v(x) = 1$, $-1 < v(x) < 1$, $v(x) = 1$, $v(x) > 1$ per ogni $x \in (0, 1)$. a seconda della condizione iniziale. Poichè:

$$u(x) = u(0) + \int_0^x v(t)\,dt,$$

per soddisfare le condizioni iniziali $u(0) = 0$ e finale $u(1) = 2$ ovvero

$$2 = \int_0^1 v(t)\,dt,$$

l'unica possibilità compatibile è che $v(x) = u'(x) > 1$. Si è visto che , inoltre, tale soluzione è unica per il Teorema di Cauchy-Lipschitz. Pertanto l'equazione si riduce a:

$$v'(x) = kv(x) - k$$

Tale equazione è lineare del primo ordine a coefficienti costanti, il suo integrale generale è:

$$v(t) = ce^{kt} + 1.$$

Si ricava quindi $u(x)$ integrando:

$$u(x) = u(0) + \int_0^x (ce^{kt} + 1)\,dx = u(0) + \frac{c}{k}[e^{kt}]_{t=0}^{t=x} + x = u(0) + \frac{c}{k}(e^{kx} - 1) + x.$$

Sostituendo le condizioni iniziali e finali si ha $u(0) = 0$ e $2 = \frac{c}{k}(e^k - 1) + 1$, da cui $k = c(e^k - 1)$ e quindi $c = ke^{-k}$. Al variare di $k \in \mathbb{N}$ le soluzioni cercate sono $u_k(x) = \frac{e^{kx}+1}{e^k+1} + x$. Le funzioni convergono puntualmente per $k \to \infty$, $0 \le x < 1$ a $u_\infty(x) = x$, che è soluzione del problema limite $|u'(x)| = 1$, verificante solo la condizione iniziale $u(0) = 0$. Si ha inoltre $u_k(1) = 2$ per ogni k, da cui $u_\infty(1) = 2$ per cui non c'è convergenza né puntuale, né uniforme su tutto $[0, 1]$.

CAPITOLO 25

Lezione del giorno giovedì 14 gennaio 2010 (2 ore) Equazioni riconducibili ad equazioni lineari, sistemi lineari a coefficienti costanti

Esercizio 25.1. Risolvere le seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti:
(1) $y'' + y = \tan x$.
(2) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.
(3) $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{1 + e^x}$
(4) $y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x}$.

Svolgimento.

(1) L'omogenea associata ha soluzione $\phi(x, c_1, c_2) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Applichiamo il metodo della variazione delle costanti, cercando quindi soluzioni particolare del tipo
$$y(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x.$$
Deriviamo ottenendo
$$y'(x) = c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x - c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x.$$
Imponiamo quindi $c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0$. Si ha allora
$$y'(x) = -c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x,$$
e derivando ulteriormente
$$y''(x) = -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x - c_1(x) \cos x - c_2(x) \sin x.$$
Sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene:
$$-c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x - c_1(x) \cos x - c_2(x) \sin x + c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x = \tan x.$$
da cui $-c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \tan x$. Si ottiene quindi il seguente sistema nelle incognite c_1' e c_2':
$$\begin{cases} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0, \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \tan x, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix}$$
La soluzione del sistema porge $c_1'(x) = -\sin x \tan x$ e $c_2'(x) = \sin x$, da cui $c_2(x) = -\cos x$. Calcoliamo $c_1(x)$ utilizzando le formule[1] che esprimono $\cos x$ in funzione di $t = \tan(x/2)$:
$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\, dx = \sin x - \int \frac{1}{\cos x} \\ &= \sin x - \int \frac{2dt}{1 - t^2} = \sin x + \int \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} \right) dt = \sin x + \log \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| \\ &= \sin x - \log \left| \frac{\cos(x/2) + \sin(x/2)}{\cos(x/2) - \sin(x/2)} \right| \end{aligned}$$
Quindi una soluzione particolare è:
$$\bar{y}(x) = \cos x \sin x - \log \left| \frac{\cos(x/2) + \sin(x/2)}{\cos(x/2) - \sin(x/2)} \right| \cos x - \cos x \sin x.$$
Si ottiene allora la soluzione generale
$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \log \left| \frac{\cos(x/2) + \sin(x/2)}{\cos(x/2) - \sin(x/2)} \right| \cos(x).$$

[1] Tali formule porgono $t = \tan(x/2)$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

(2) in modo perfettamente analogo al punto precedente, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = 1/\sin x, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sin x \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema porge $c_1'(x) = -1$, da cui $c_1 = -x$ e $c_2'(x) = \cos x/\sin x$, da cui $c_2(x) = \log|\sin x|$. Quindi una soluzione particolare è $\bar{y}(x) = \log|\sin x|\sin x - x\cos x$ Si ottiene allora la soluzione generale

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x + \log|\sin x|\sin x.$$

(3) l'omogenea associata è $y'' + 3y' + 2y = 0$, il suo polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, le cui radici sono $\lambda = -1$ e $\lambda = -2$. L'omogenea quindi ha soluzione $\Phi(x, c_1, c_2) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$. Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo della variazione delle costanti nella forma $\bar{y}(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}$. Derivando si ottiene

$$\bar{y}'(x) = c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} - c_1(x)e^{-x} - 2c_2(x)e^{-2x}.$$

Imponiamo $c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} = 0$ e $\bar{y}'(x) = -c_1(x)e^{-x} - 2c_2(x)e^{-2x}$. Derivando ulteriormente si ha:

$$\bar{y}''(x) = -c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} + c_1(x)e^{-x} + 4c_2(x)e^{-2x}.$$

Sostituendo nell'equazione:

$$-c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} + c_1(x)e^{-x} + 4c_2(x)e^{-2x} - 3c_1(x)e^{-x} - 6c_2(x)e^{-2x} + c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x} = \sqrt{1+e^x}$$

il che implica $-c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} = \sqrt{1+e^x}$. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} = 0, \\ -c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} = \sqrt{1+e^x}, \end{cases}$$

La soluzione del sistema porge $c_1'(x) = e^x\sqrt{1+e^x}$ e $c_2'(x) = -e^{2x}\sqrt{1+e^x}$, da cui:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \int \sqrt{1+t}\,dt = \int z^{1/2}\,dz = \frac{2}{3}z^{3/2} = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} = \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} \\ c_2(x) &= -\int e^{2x}\sqrt{1+e^x}\,dx = -\int t\sqrt{1+t}\,dt = -\frac{2}{3}t(1+t)^{3/2} + \frac{2}{3}\int (1+t)^{3/2}\,dt \\ &= -\frac{2}{3}t(1+t)^{3/2} + \frac{4}{15}(1+t)^{5/2} = -\frac{2}{3}e^x(1+e^x)^{3/2} + \frac{4}{15}(1+e^x)^{5/2} \end{aligned}$$

Pertanto una soluzione particolare è della forma:

$$\bar{y}(x) = \frac{4}{15}(1+e^x)^{5/2}e^{-2x},$$

e quindi l'equazione ammette la soluzione generale

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{4}{15}(1+e^x)^{5/2}e^{-2x}.$$

(4) L'equazione omogenea è $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, la sua equazione caratteristica è $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$, ovvero $(\lambda - 1)^3 = 0$, pertanto la soluzione generale dell'omogenea associata è $\Phi(x, c_1, c_2, c_3) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$. Si ha quindi il sistema:

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & e^x(x+1) & xe^x(2+x) \\ e^x & e^x(2+x) & e^x(2+4x+x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x/x \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice A dei coefficienti è:

$$\det(A) = e^{3x}((x+1)(x^2+4x+2) + x^2(x+2) + x^2(x+2) - x^2(x+1) - x(x+2)^2 - x(x^2+4x+2)) = 2e^{3x}.$$

Per costruire l'inversa di A è necessario costruire la matrice dei complementi algebrici, calcolarne la trasposta e dividere per il determinante. Il calcolo lungo ma non difficile, porge:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-x}\left(x^2+2x+2\right) & -e^{-x}x(x+1) & \frac{1}{2}e^{-x}x^2 \\ -e^{-x}(x+1) & e^{-x}(2x+1) & -e^{-x}x \\ \frac{e^{-x}}{2} & -e^{-x} & \frac{e^{-x}}{2} \end{pmatrix}.$$

Risulta quindi $c_1'(x) = x/2$, $c_2'(x) = -1$, $c_3'(x) = 1/2x$, pertanto $c_1(x) = x^2/4$, $c_2(x) = -x$, $c_3(x) = \log|x|/2$. La soluzione particolare e quella generale risultano quindi:

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= x^2e^x/4 - x^2e^x + x^2e^x\log|x|/2\\ y(t) &= c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + x^2e^x/2(\log|x| - 3/2)\end{aligned}$$

Esercizio 25.2. Risolvere le seguenti equazioni:

(1) $y' + y\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{x}{\sin x}$.
(2) $y' - \dfrac{x}{1+x^2}y = e^{-x}y^3$.
(3) $y' + y = x^2y^2$.

Svolgimento.

(1) Scriviamo l'equazione come equazione totale. Posto $\sin x \neq 0$, si ha:
$$\omega(x,y) = (x - y\cos x)\,dx - \sin x\,dy$$
Tale forma è esatta, una primitiva è data da
$$V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - y\sin x.$$
L'equazione totale ha quindi soluzione $V(x,y) = c$.
$$y(x) = \frac{x^2 - 2c}{2\sin x}.$$
(2) L'equazione data è di Bernoulli, ed ammette la soluzione identicamente nulla. Per determinare le altre soluzioni, poniamo $z = y^{1-3} = y^{-2}$ da cui $y = 1/\sqrt{z}$.
$$z' = -2y^{-3}y' = -2y^{-3}\left(e^{-x}y^3 + \frac{x}{1+x^2}y\right) = -2e^{-x} - z\,\frac{2x}{1+x^2}.$$
Siamo quindi ricondotti all'equazione lineare a coefficienti variabili
$$z' + z\,\frac{2x}{1+x^2} = -2e^{-x}.$$
Scriviamo tale equazione come equazione totale:
$$\omega(x,z) = p(x,z)\,dx + q(x,z)\,dz = \left(2e^{-x} + z\,\frac{2x}{1+x^2}\right) + dz = 0.$$
Moltiplicando per $1 + x^2$ si ottiene[2] la forma esatta:
$$(2e^{-x}(1+x^2) + 2xz)\,dx + (1+x^2)\,dz = 0.$$
Cerchiamo una primitiva di tale forma, a tal fine calcoliamo l'integrale di Ω su una spezzata con lati paralleli agli assi congiungente $(0,0)$ al generico punto (x_0, z_0):
$$V(x_0,z_0) = \int_0^{x_0}\frac{2e^x}{(1+x^2)}\,dx + \int_0^{z_0}(1+x_0^2)\,dz = 2(3 - e^{-x_0}(3 + x_0(2+x_0))) + z_0(1+x_0^2).$$
Pertanto le soluzioni dell'equazione in z sono della forma
$$-2e^{-x}(3 + x(2+x)) + z(1+x^2) = c, c \in \mathbb{R}$$
ovvero
$$z = \frac{c + e^{-x}2(3 + x(2+x))}{1+x^2}$$

[2] Si poteva arrivare a trovare questo fattore integrante anche osservando che
$$\partial_z p(x,z) - \partial_x q(x,z) = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}q(x,z)$$
Pertanto la forma ammette fattore integrante (ricordiamo che $1 + x^2 > 0$)
$$h(x,z) = e^{\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}} = (1+x^2).$$

cui corrispondono le soluzioni in y della forma

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1+x^2}{c+e^{-x}2(3+x(2+x))}} = \pm e^{x/2}\sqrt{\frac{1+x^2}{ce^x+2x^2+4x+6}}.$$

dove $c \in \mathbb{R}$.

(3) l'equazione data è di Bernoulli ed ammette la soluzione identicamente nulla. Per determinare le altre soluzioni, poniamo $z = y^{1-2} = 1/y$ da cui $y = 1/z$. Derivando, si ottiene:

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = z - x^2$$

Siamo ricondotti allo studio di $z' - z = -x^2$, tale equazione è lineare del primo ordine, la soluzione generale dell'omogenea è ke^x, $k \in \mathbb{R}$, determiniamo una soluzione particolare con il metodo dei coefficienti indeterminati: cerchiamo soluzione nella forma $ax^2 + bx + c$. Sostituendo, si ottiene $2ax + b - ax^2 - bx - c = -x^2$ da cui si ricava $a = 1$, $b - c = 0$ e $2a - b = 0$, quindi $b = c = 2$. Pertanto la soluzione dell'equazione in z è $z(x) = ke^x + x^2 + 2x + 2$. La soluzione dell'equazione in y è quindi:

$$y(x) = \frac{1}{ke^x + x^2 + 2x + 2},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 25.3. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine e si discuta la stabilità delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

$$\begin{cases} \dot{x} - 3x - 2y = \cos(2t) \\ \dot{y} - 4x - y = 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Derivando la prima equazione, si ottiene $2\dot{y} = \ddot{x} - 3\dot{x} + 2\sin(2t)$.
Sostituiamo l'espressione di $\dot{y}$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$2(4x + y) = \ddot{x} - 3\dot{x} + 2\sin(2t).$$

Riscrivendo tale espressione si ha $\ddot{x} - 3\dot{x} - 8x - 2y + 2\sin(2t) = 0$.
Sostituiamo l'espressione di $2y$ ottenuta dalla prima equazione:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 8x - (\dot{x} - 3x - \cos(2t)) + 2\sin(2t) = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 8x - \dot{x} + 3x + \cos(2t) + 2\sin(2t) = 0.$$

Tale equazione si riscrive come:

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = -2\sin(2t) - \cos(2t).$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è quindi:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

e le sue soluzioni sono gli *autovalori* della matrice A, ovvero le soluzioni di $\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0$. Nel nostro caso si ha che gli autovalori sono $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$. Essi sono reali, distinti e di segno discorde. L'omogenea associata ha quindi soluzione $\Phi(t, c_1, c_2) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}$. Determiniamo una soluzione particolare del sistema mediante il metodo dei coefficienti indeterminati, studiamo ciascun addendo del termine noto separatamente.
Poiché $\pm 2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, possiamo cercare una soluzione di $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = -2\sin(2t)$ della forma $\bar{u}_1(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$. Derivando si ottiene $\bar{u}_1'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$ e $\bar{u}_1''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$. Sostituendo nell'equazione data:

$$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) - 4(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) - 5(A\cos(2t) + B\sin(2t)) = -2\sin(2t)$$

da cui $-9A - 8B = 0$ e $8A - 9B = -2$ quindi $A = -16/145$ e $B = 18/145$, quindi la prima soluzione particolare è:

$$\bar{u}_1(t) = -\frac{16}{145}\cos(2t) + \frac{18}{145}\sin(2t).$$

Poiché $\pm 2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, possiamo cercare una soluzione di $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = -\cos(2t)$ della forma $\bar{u}_2(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$. Derivando si ottiene $\bar{u}_2'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$ e $\bar{u}_2''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$. Sostituendo nell'equazione data:

$$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) - 4(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) - 5(A\cos(2t) + B\sin(2t)) = -\cos(2t)$$

da cui $-9A - 8B = -1$ e $8A - 9B = 0$ quindi $B = 8/145$ e $A = 9/145$, quindi la seconda soluzione particolare è:

$$\bar{u}_2(t) = \frac{9}{145}\cos(2t) + \frac{8}{145}\sin(2t).$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione in x è:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, c_1, c_2) + \bar{u}_1(t) + \bar{u}_2(t) \\ &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} - \frac{16}{145}\cos(2t) + \frac{18}{145}\sin(2t) + \frac{9}{145}\cos(2t) + \frac{8}{145}\sin(2t) \\ &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} - \frac{7}{145}\cos(2t) + \frac{26}{145}\sin(2t). \end{aligned}$$

L'equazione in y ha soluzione

$$y(t) = \frac{1}{2}(\dot{x}(t) - 3x(t) - \cos 2t),$$

dove

$$\dot{x}(t) = 5c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t} + \frac{14}{145}\sin(2t) + \frac{52}{145}\cos(2t),$$

ovvero

$$y(t) = c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{-t} - \frac{32}{145}\sin(2t) - \frac{36}{145}\cos(2t).$$

Poiché $\det(A) \neq 0$, l'unica soluzione stazionaria del sistema omogeneo è l'origine. Essendo gli autovalori reali di segni discordi, l'origine è un punto di sella.

Esercizio 25.4. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine e si discuta la stabilità delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

$$\begin{cases} \dot{x} + 2x - y = 4t^2 \\ \dot{y} - 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 4t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riscrivendo il sistema dato, si ha: $\begin{cases} y = \dot{x} + 2x - 4t^2 \\ \dot{y} = 3x + 2y \end{cases}$.

Derivando la prima equazione, si ottiene $\dot{y} = \ddot{x} + 2\dot{x} - 8t$.
Sostituiamo l'espressione di $\dot{y}$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$3x + 2y = \ddot{x} + 2\dot{x} - 8t.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x - 2y - 8t = 0$.
Sostituiamo l'espressione di y ottenuta dalla prima equazione:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x - 2(\dot{x} + 2x - 4t^2) - 8t = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x - 2\dot{x} - 4x + 8t^2 - 8t = 0.$$

Tale equazione si riscrive come:

$$\ddot{x} - 7x = -8t^2 + 8t.$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è quindi $\lambda^2 - 7 = 0$ e le sue soluzioni $\lambda_1 = \sqrt{7}$, $\lambda_2 = -\sqrt{7}$ sono gli *autovalori* della matrice A. Essi sono reali distinti di segno discorde. L'omogenea ha soluzione $\Phi(t, c_1, c_2) = c_1 e^{\sqrt{7}t} + c_2 e^{-\sqrt{7}t}$. Il termine noto è un polinomio, per trovare una soluzione particolare utilizziamo il metodo dei coefficienti indeterminati osservando che 0 non è soluzione dell'equazione caratteristica. Cerchiamo quindi una soluzione del tipo $\bar{u}(t) = at^2 + bt + c$. Sostituendo, si ottiene:

$$2a - 7at^2 - 7bt - 7c = -8t^2 + 8t$$

da cui $a = 8/7$, $b = -8/7$, $c = 16/49$, quindi una soluzione particolare è data da:

$$\bar{u}(t) = \frac{8}{7}t^2 - \frac{8}{7}t + \frac{16}{49}.$$

La soluzione per l'equazione in x è allora:

$$x(t) = \Phi(t, c_1, c_2) + \bar{u}(t) = c_1 e^{\sqrt{7}t} + c_2 e^{-\sqrt{7}t} + \frac{8}{7}t^2 - \frac{8}{7}t + \frac{16}{49}.$$

Si ha quindi

$$y(t) = \dot{x} + 2x - 4t^2 = (2 + \sqrt{7})c_1 e^{\sqrt{7}t} + (2 - \sqrt{7})c_2 e^{-\sqrt{7}t} - \frac{12t^2}{7} - \frac{24}{49}.$$

Poiché $\det(A) \neq 0$, l'unica soluzione stazionaria dell'omogeneo associato è l'origine. Gli autovalori di A sono reali distinti di segno discorde, quindi essa è una sella.

CAPITOLO 26

Lezione del giorno martedì 19 gennaio 2010 (1 ora) Studi qualitativi

Esercizio 26.1. Si consideri, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente problema di Cauchy per $x \geq 0$:

$$\begin{cases} y'(x) &= 1 - x^2\, y^2(x), \\ y(0) &= \alpha. \end{cases}$$

Si chiede di effettuare uno studio qualitativo delle soluzioni del problema dato al variare del parametro reale α, con particolare riguardo al limite per $x \to +\infty$, qualora si possa considerare, o all'eventuale presenza di un asintoto verticale. Discutere l'esistenza e l'unicità di un valore α^* tale che la corrispondente soluzione y^* risulti monotona su $[0, +\infty)$. Si estenda infine lo studio precedente alla semiretta $(-\infty, 0]$. Si dica se esistono soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Vale il teorema di esistenza e unicità locale.

(1) *Punti a tangente orizzontale e regioni di monotonia:* si ha $y' = (1-xy)(1+xy)$ pertanto y' si annulla sui quattro rami delle due iperboli equilatere di equazioni $xy = \pm 1$. Per continuità si ha che $y' > 0$ nella regione connessa da essi delimitata contenente gli assi.
(2) *Simmetrie:* posto $z(x) = -y(-x)$, si ha che z soddisfa la stessa equazione soddisfatta da y, pertanto se $y(x)$ è soluzione per $x \geq 0$, anche la funzione di grafico simmetrico rispetto all'origine è soluzione per $x \leq 0$. Limitiamo quindi lo studio al caso $x \geq 0$.
(3) *Regioni invarianti:* consideriamo il sistema $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 1 - x^2y^2$. Per questo sistema si ha che le due regioni connesse di piano definite da $\{|xy| > 1,\, x \geq 0\}$ sono invarianti, pertanto tali regioni sono invarianti in avanti per l'equazione di partenza e i punti della loro frontiera sono punti di massimo relativo per la soluzione. In modo analogo si ottiene che $\{|xy| > 1,\, x \leq 0\}$ sono invarianti all'indietro e i punti della loro frontiera sono punti di minimo per la soluzione.
(4) *Studio del caso $\alpha > 0$, $x \geq 0$:* Sia $\alpha > 0$, la soluzione per $x > 0$ è crescente e quindi incontra il ramo di iperbole nel primo quadrante nel punto di massimo (x_α, y_α) con $1/x_\alpha = y_\alpha > \alpha$, e poi è decrescente: quindi per $x > x_\alpha$ essa è limitata dall'alto da y_α e dal basso dal ramo di iperbole contenuto nel primo quadrante. Pertanto se $\alpha > 0$ la soluzione è definita per ogni $x \geq 0$. Per $x > x_\alpha$ essa è strettamente decrescente e limitata dal basso e quindi ammette limite finito, pertanto deve avere un asintoto orizzontale. Poiché $y'(x) = 1 - x^2y(x)^2$ e il limite per $x \to +\infty$ di questa espressione deve essere nullo, l'unica possibilità è che si abbia $y(x) \to 0^+$ per $x \to +\infty$.
(5) *Studio del caso $\alpha > 0$, $x \geq 0$:* Se $\alpha = 0$, si ha $y'(0) = 1$ quindi esiste un intorno di 0 dove la soluzione è strettamente crescente, in particolare esiste $\varepsilon > 0$ tale che $y(\varepsilon) > 0$ e $y'(\varepsilon) > 0$. A questo punto l'andamento è il medesimo del caso per $\alpha > 0$.
(6) *Studio del caso $\alpha < 0$, $x \geq 0$:* osserviamo che il primo quadrante è una regione invariante in avanti, pertanto tutte le soluzioni che vi entrano ad un certo istante $x_0 > 0$ vi rimangono per tutti gli istanti successivi, crescono a partire da x_0 fino all'intersezione con il ramo di iperbole nel primo quadrante (che avviene nel punto (x_α, y_α) con $x_\alpha > x_0$ e $y_\alpha > 0$ e poi decrescono asintoticamente verso 0. Poiché $y' < 1$, per $x \geq 0$ la soluzione è sempre sotto alla retta $y = x + \alpha$, e in particolare per $\alpha < -1$ tale retta interseca il ramo di iperbole nel IV quadrante. Pertanto una soluzione con $\alpha < -1$ cresce fino a toccare un punto di tale ramo di iperbole (dove ha il massimo) e poi entra in una regione invariante di decrescenza. Se avesse limite finito, esso dovrebbe essere nullo perché la soluzione dovrebbe avere un asintoto orizzontale e quindi passando al limite nell'equazione, si dovrebbe avere $y \to 0$, tuttavia ciò non è consentito per l'invarianza della regione di decrescenza, dunque il suo limite è $-\infty$. È necessario stabilire se raggiunge $-\infty$ in tempo finito oppure no. A tal proposito, notiamo che per il teorema di esistenza e unicità, esiste $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$ tale che la soluzione sia senz'altro definita per $|x| < \varepsilon$ e per $x > \varepsilon$ nell'intervallo massimale di definizione vale $y' < 1 - \varepsilon^2y^2$. Consideriamo quindi la soluzione di

$\dot{z} = 1 - \varepsilon^2 z^2$ e procediamo con il confronto. Si ha:

$$\int \frac{dz}{(1-\varepsilon z)(1+\varepsilon z)} = t + C$$

da cui

$$\frac{1}{2\varepsilon} \log \left(\left| \frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z} \right| \right) = t + C$$

e quindi, per $K \in \mathbb{R}$ costante opportuna

$$\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z} = K e^{2\varepsilon t}$$

da cui:

$$z(t) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{K e^{2\varepsilon t} - 1}{K e^{2\varepsilon t} + 1}$$

Se $K < 0$ si ha che $z(t) \to -\infty$ per $t \to t_{k,\varepsilon} := \log(|1/K|)/(2\varepsilon)$, tale valore è positivo se $K < -1$, e poiché $y(x) < z(x)$, si ha che $y(x)$ ha un asintoto verticale per $t \to t_{k,\varepsilon}^-$. In particolare ciò accade se $z(\varepsilon) < -1/\varepsilon$, pertanto tutte le soluzioni che entrano nella regione invariante di decrescenza del IV quadrante hanno un asintoto verticale.

(7) *Soluzioni monotone su* $[0, +\infty[$*:* Affinché una soluzione sia monotona per $x > 0$ deve essere monotona crescente e quindi non deve mai entrare nelle regioni invarianti di decrescenza. Per l'invarianza del I quadrante si ha che essa deve essere compresa nella regione di piano del IV quadrante al di sopra del ramo di iperbole $xy = -1$. Sia $y(\alpha, x)$ la soluzione dell'equazione valutata al tempo x soddisfacente $y(\alpha, 0) = \alpha$ Osserviamo che se $\alpha_1 < \alpha_2$ si ha $y(\alpha_1, x) < y(\alpha_2, x)$ per ogni x dove le due soluzioni sono definite. Poniamo:

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \text{ esiste } x_\alpha > 0 : y(\alpha, x_\alpha) = 1/x_\alpha\},$$

esso è l'insieme delle condizioni iniziali corrispondenti a traiettorie che entrano nella regione invariante del primo quadrante. Poiché $[0, +\infty[\subset A$ e $\alpha \notin A$ per ogni $\alpha < -1$, si ha che tale insieme è non vuoto ed inferiormente limitato, pertanto esiste $\alpha^+ \in \mathbb{R}$, $\alpha^+ = \inf A$.
Analogamente si ponga:

$$B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \text{ esiste } x_\alpha > 0 : y(\alpha, x_\alpha) = -1/x_\alpha\},$$

esso è l'insieme delle condizioni iniziali corrispondenti a traiettorie che entrano nella regione invariante del quarto quadrante. Poiché $]-\infty, -1] \subset A$ e $\alpha \notin A$ per ogni $\alpha > 0$, si ha che tale insieme è non vuoto e superiormente limitato, pertanto esiste $\alpha^- \in \mathbb{R}$, $\alpha^- = \sup B$.
Proviamo che $\alpha^+ \notin A$: se per assurdo $\alpha^+ \in A$ si ha che la traiettoria $y(\alpha^+, x)$ interseca il ramo di iperbole del primo quadrante in un punto $(x_{\alpha^+}, 1/x_{\alpha^+})$. Sia $\bar{x} > x_{\alpha^+}$ e consideriamo la soluzione $\bar{y}$ che all'istante $\bar{x}$ valga $1/\bar{x}$. Tale traiettoria (poiché $y' < 1$) è definita in tutto l'intervallo $[0, \bar{x}]$ (in cui è maggiore o uguale della retta di coefficiente angolare 1 passante per $(\bar{x}, 1/\bar{x})$. Inoltre si ha $y(\alpha^+, \bar{x})$ all'interno della regione invariante, quindi $y(\alpha^+, \bar{x}) > \bar{y}(\bar{x})$, e perciò $\bar{y}(0) = \bar{\alpha} < y(\alpha^+, 0) = \alpha^+$, quindi $\bar{\alpha} \in A$ contro la definizione di α^+. In modo del tutto analogo si prova che $\alpha^- \notin B$.
Quindi se $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$ la traiettoria per $x \geq 0$ non entra in nessuna delle due regioni invarianti di decrescenza, pertanto essa è strettamente monotona crescente, contenuta nel quarto quadrante e il suo limite è nullo. Discutiamo l'unicità: siano $\alpha_1 < \alpha_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha^-, \alpha^+]$ e siano $y_1(x)$, $y_2(x)$ le corrispondenti traiettorie: si ha allora $y_1(x) < y_2(x) < 0$ per ogni x

$$\frac{d}{dx}(y_2(x) - y_1(x)) = x^2(y_1^2(x) - y_2^2(x)) > 0$$

quindi la differenza $y_2(x) - y_1(x)$ è una funzione strettamente crescente che vale $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ in 0. Tuttavia entrambe le traiettorie convergono allo stesso limite per $x \to +\infty$. Ciò è assurdo, quindi $\alpha^+ = \alpha^- = \alpha^*$.

(8) *Conclusione:* Lo studio della semiretta $x \leq 0$ è riconducibile per simmetria a quello per $x \geq 0$. Le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ sono quelle corrispondenti alle condizioni iniziali $|\alpha| \leq -\alpha^*$ (che sono prolungabili su tutto $\mathbb{R}$ da ambo le parti).

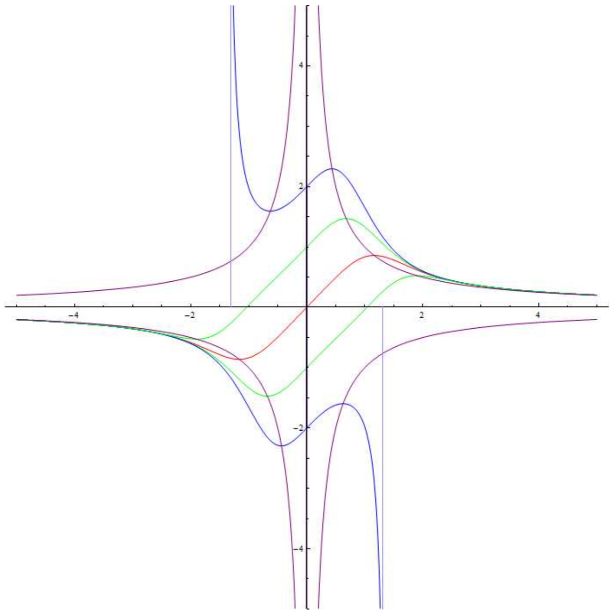


FIGURA 1. Lo studio di $\dot{y} = 1 - x^2y^2$, $y(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Esercizio 26.2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^4 - \dfrac{x^2}{(1+|x|)^2}, \\ \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

si chiede di studiare esistenza ed unicità, locale e globale, della soluzione e tracciarne un grafico qualitativo.

SVOLGIMENTO. Poniamo

$$f(x,y) = y^4 - \frac{x^2}{(1+|x|)^2}.$$

Si ha che le ipotesi del Teorema di Cauchy sono soddisfatte, ma non è detto che le soluzioni massimali possano essere prolungate a tutto l'asse reale. Andiamo a studiare le curve di punti stazionari $\dot{y} = 0$. Esse sono date da:

$$y = \pm\sqrt{\frac{|x|}{1+|x|}},$$

quindi se $x > 0$ le curve sono

$$y = \pm\sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

mentre se $x < 0$ allora le curve dei punti stazionari sono

$$y = \pm\sqrt{\frac{-x}{1-x}}.$$

D'altra parte, posto $z(x) = -y(-x)$, si ha

$$z'(x) = y'(-x) = y^4(x) - \frac{x^2}{(1+|x|)^2} = z^4 - \frac{x^2}{(1+|x|^2)}$$

pertanto l'insieme delle soluzioni è simmetrico rispetto all'origine.
Si ha che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ è diviso in quattro regioni connesse, due a due simmetriche rispetto all'origine. Chiameremo R^-, R^+, Q^+ e Q^- le regioni connesse di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ contenenti rispettivamente $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$. Osserviamo che $R^\pm$ sono regioni di decrescenza e che R^+ è una regione invariante, pertanto l'intervallo massimale di definizione della soluzione contiene $[1,+\infty[$.
Per $t > 1$, la soluzione è strettamente monotona, e contenuta nella regione R^+ a sua volta contenuta nella regione $\{(x,y) : y \geq -1\}$, pertanto ammette limite finito ℓ a $+\infty$. Per il teorema dell'asintoto, passando al limite nell'equazione si ottiene che per $t \to +\infty$ la soluzione è asintotica a -1. Questo conclude lo studio per

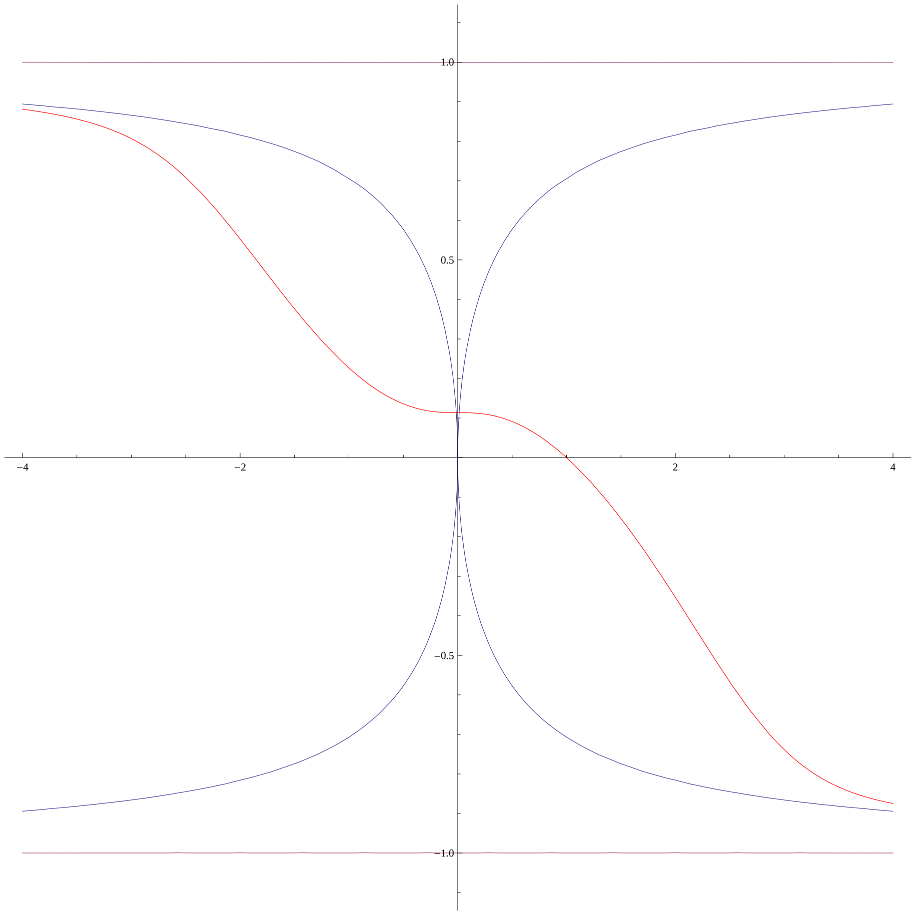


FIGURA 2. Lo studio di $y' = y^4 - \dfrac{x^2}{(1+|x|)^2}$, $y(1) = 0$.

$t > 1$. Studiamo il caso $t < 1$. Procedendo a ritroso da $t = 1$, la soluzione cresce fino ad incontrare la curva dei punti stazionari in un punto $0 < \bar{t} < 1$, ivi ha un massimo $0 < M < 1$ e poi decresce fino ad entrare nella regione R^- dove ha un punto di minimo. La regione R^- è invariante all'indietro, pertanto la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Procedendo verso $-\infty$, si ha che la soluzione è crescente e limitata da 1 perché contenuta in $\mathbb{R}^-$, quindi ammette limite e ammette asintoto orizzontale a $-\infty$. Passando al limite nell'equazione si ottiene che essa è asintotica a 1.
Curiosità: In figura i punti di massimo e di minimo appaiono estremamente vicini e pressocché indistinguibili. In effetti, una loro approssimazione numerica porge $(0,01303, 0,113630)$ per quanto riguarda il massimo e $(-0,01303, 0,113627)$ per quanto riguarda il minimo, il rapporto $\delta y/\delta x$ è di circa $1,1 \cdot 10^{-4}$, molto piccolo per essere nitidamente osservato in questa scala.

CAPITOLO 27

Lezione del giorno mercoledì 20 gennaio 2010 (2 ore) Serie di Fourier e metodo di separazione delle variabili

Esercizio 27.1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica e pari definita da $f(t) = \dfrac{\pi}{2} - t$ per $t \in [0, \pi]$.

(1) Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f;
(2) Studiarne la convergenza;
(3) Valutare la somma della serie in $t = 0$.

Svolgimento.

(1) La funzione è pari, quindi $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$. Si ha per $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\sin nt}{n}\,dt\right) \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$f = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cos nt.$$

Osservando che $a_n = 0$ se $n = 2k$ è pari e $a_n = 4/(\pi n^2)$ se $n = 2k+1$ è dispari, si ha:

$$f = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

(2) Si ha che la serie converge alla funzione in L^2, perché la funzione è periodica e limitata. Per quanto riguarda la convergenza puntuale, posto:

$$S(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cos nt,$$

si ha che:

(a) per ogni $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f è continua e derivabile, quindi vi è convergenza puntuale $S(t) = f(t)$.
(b) per ogni $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f è continua e presenta un punto angoloso, quindi anche in questo caso $S(t) = f(t)$.

(3) In particolare, $S(0) = f(0) = \pi/2$, concludiamo perciò che $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$, da cui si può dedurre che $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Esercizio 27.2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, pari, definita da $f(t) = 3(\pi + t)$ per $t \in [-\pi, 0]$. Dopo aver verificato che la f è sviluppabile in serie di Fourier, scriverne lo sviluppo. Utilizzando poi l'uguaglianza di Parseval, determinare la somma della serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^4}$.

Svolgimento. La funzione è periodica e limitata, pertanto in $L^2(0,2\pi)$ e dunque sviluppabile in serie di Fourier. Si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = 2\int_{-\pi}^{0} 9(\pi+t)^2 = 18\left[\frac{(\pi+t)^3}{3}\right]_{-\pi}^{0} = 6\pi^3.$$

Essendo f pari si avrà

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt),$$

con

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 3(\pi+t)\,dt = \frac{6}{\pi}\left[\frac{(\pi+t)^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{3}{\pi}\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 3(\pi+t)\cos(kt)\,dt\\
&= \frac{6}{\pi}\left[(\pi+t)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{6}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt = -\frac{6}{k\pi}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{6}{\pi k^2}(1-(-1)^k)
\end{aligned}$$

Quindi per $k \geq 1$ si ha che $a_k = 0$ se $k = 2n$ è pari e $a_k = -12/(\pi k^2)$ se $k = 2n-1$ è dispari. Si ha quindi:

$$S(t) = \frac{3}{2}\pi + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)t) = \frac{3}{2}\pi + \frac{12}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2}.$$

Per l'uguaglianza di Parseval si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{{a_0}^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

ovvero:

$$3\pi^2 = \frac{9}{4}\pi^2 + \frac{72}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

La somma richiesta vale pertanto $\pi^4/96$.

Esercizio 27.3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \in [-\pi, 0[\\ -1 & \text{se } t \in [0, \pi[\end{cases}$$

Dopo aver verificato che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier, scriverne lo sviluppo. Utilizzare quindi l'uguaglianza di Parseval per determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(Nota: i coefficienti di indice pari dello sviluppo sono nulli.)

Svolgimento. Proviamo che $f \in L^2(-\pi,\pi)$.

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \int_{-\pi}^{0}|f(t)|^2\,dt + \int_{0}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = 4\pi + \pi = 5\pi < +\infty.$$

Poiché $f \in L^2(-\pi,\pi)$, essa è sviluppabile in serie di Fourier. Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,dt = 2-1=1\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos kt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos kt\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin kt}{k}\right]_{t=-\pi}^{t=0} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin kt}{k}\right]_{t=0}^{t=\pi} = 0\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin kt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin kt\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin kt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos kt}{k}\right]_{t=-\pi}^{t=0} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos kt}{k}\right]_{t=0}^{t=\pi}\\
&= -\frac{2}{\pi}(1/k-\cos(-k\pi)) + \frac{1}{\pi}(\cos(k\pi)/k-1/k)\\
&= \frac{1}{\pi k}(-2+2\cos(k\pi)+\cos(k\pi)-1) = \frac{3}{\pi k}(\cos k\pi - 1)
\end{aligned}$$

Ciò implica che $b_k = 0$ se k è pari e $b_k = -6/(\pi k)$ se k è dispari.
Osservando che $g(t) = f(t) - 1/2$ è una funzione dispari (infatti vale $3/2$ per $t \in [-\pi, 0[$ e $-3/2$ per $t \in [0,\pi[$) si poteva dedurre immediatamente che $a_k = 0$ per ogni $k > 0$, infatti si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos kt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{1}{2}\right)\cos kt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt,$$

dove il primo termine è nullo per disparità. Pertanto si ha

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos kt + b_k \sin kt = \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}.$$

Per la formula di Parseval, si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum a_k^2 + b_k^2,$$

ovvero nel nostro caso:

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{4} + \frac{18}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

da cui si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 27.4. Si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica definita da:

$$u(t) = \begin{cases} -t & \text{se } -\pi \le t < 0,\\ \pi & \text{se } 0 \le t < \pi.\end{cases}$$

(1) Verificare che u è sviluppabile in serie di Fourier e calcolarne i coefficienti.
(2) Studiare la convergenza puntuale della serie.
(3) Utilizzando i risultati dei punti precedenti, calcolare la somma della serie numerica:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Svolgimento.

(1) Si ha che la funzione u è periodica e $|u(t)|$ è limitata su $[-\pi, \pi]$, pertanto la funzione è sviluppabile in serie di Fourier. Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\,dt = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}.\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -t\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\cos(nt)\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-t\sin(nt)}{n}\right]_{t=-\pi}^{t=0} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin(nt)\,dt + \frac{1}{n}[\sin nt]_{t=0}^{t=\pi}\\
&= -\frac{1}{n^2\pi}[\cos nt]_{t=-\pi}^{t=0} = -\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}.\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -t\sin(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\sin(nt)\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_{t=-\pi}^{t=0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos(nt)\,dt - \frac{1}{n}[\cos nt]_{t=0}^{t=\pi}\\
&= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n - 1}{n} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

La serie di Fourier risulta quindi:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{\sin nx}{n}.$$

(2) La funzione u è di classe C^∞ a tratti, per cui la sua serie di Fourier converge a u nei punti di continuità e alla media dei valori destro e sinistro di u nei punti di salto. Nel nostro caso, la funzione è continua in ogni punto ad eccezione dei punti $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dove il limite destro vale π e il limite sinistro vale 0 (si osservi che nei punti $(2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ la funzione è continua). Pertanto in 0 la serie di Fourier di u converge a $\pi/2$, cioè si ha:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}.$$

Notiamo che i termini di indice pari della sommatoria sono tutti nulli, per cui si ha:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

pertanto la somma richiesta vale $\pi^2/8$.

Esercizio 27.5. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione del telegrafo sul segmento $[0, \pi]$, con ambedue le estremità libere:

$$u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 0, \qquad\qquad u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,$$

assumendo come dati iniziali $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = x$. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Svolgimento. Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(x,t) = U(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione si ha:

$$\ddot{U}(t)X(x) + 2\dot{U}(t)X(x) - U(t)\ddot{X}(x) = 0$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ottiene:

$$\frac{\ddot{U}(t) + 2\dot{U}(t)}{U(t)} - \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = 0,$$

pertanto si ha:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0\\ \ddot{U}(t) + 2\dot{U}(t) - \lambda U(t) = 0, \end{cases}$$

Dai dati iniziali si ricava $u_x(0,t) = U(t)\dot{X}(0) = 0$ e $u_x(\pi,t) = U(t)\dot{X}(\pi) = 0$ da cui $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. Cerchiamo quindi soluzioni non nulle di:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ \dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0, \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. L'equazione caratteristica è $\mu^2 = \lambda$.
Se $\lambda > 0$ la soluzione è:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
$$\dot{X}(x) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\,x} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\,x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Sostituendo le condizioni iniziali e finali si ha $0 = \dot{X}(0) = (c_1 - c_2)\sqrt{\lambda}$ da cui $c_1 = c_2$, e $0 = \dot{X}(\pi) = c_1\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})$ il che implica $c_1 = 0$, quindi l'unica soluzione è quella identicamente nulla, non accettabile.
Se $\lambda = 0$ la soluzione è $X(x) = c_1 + c_2 x$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poiché $\dot{X}(x) = c_2$, si ottiene $c_2 = 0$ e si ha la soluzione accettabile $X(x) = c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Se $\lambda < 0$, posto $\omega = \sqrt{|\lambda|}$, la soluzione è $X(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Si ottiene $\dot{X}(x) = -c_1\omega\sin(\omega x) + c_2\omega\cos(\omega x)$, e sostituendo si ha $0 = \dot{X}(0) = c_2\omega$ da cui $c_2 = 0$ e $0 = \dot{X}(\pi) = -c_1\omega\sin(\omega x)$ da cui $\omega \in \mathbb{Z}$, pertanto $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.
Quindi l'equazione per $X(x)$ ammette soluzioni accettabili per $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$ e si ha $X_n(x) = c_n\cos(nx)$, il che comprende anche il caso $\lambda = n = 0$. L'equazione per $U(t)$ risulta:

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) + 2\dot{U}(t) + n^2 U(t) = 0, \\ U(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\mu^2 + 2\mu + n^2 = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 4(1 - n^2)$. Studiamo i vari casi in base al segno del discriminante, tenendo presente che $n \in \mathbb{N}$.
Se $n = 0$ si ha $\Delta > 0$ e le radici sono $\mu_1 = 0$ e $\mu_2 = -2$, pertanto le soluzioni sono $U(t) = d_1 + d_2 e^{-2t}$ al variare di $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo la condizione iniziale $U(0) = 0$ si ottiene $d_1 = -d_2$ e quindi $U_0(t) = d_1(1 - e^{-2t})$.
Se $n = 1$ si ha $\Delta = 0$ e l'unica radice doppia è $\mu = -1$, pertanto le soluzioni sono $U(t) = d_1 e^{-t} + d_2 t e^{-t}$ al variare di $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo la condizione iniziale $U(0) = 0$ si ottiene $d_1 = 0$ e quindi $U_1(t) = d_2 t e^{t}$.
Se $n > 1$ si ha $\Delta < 0$ e si hanno le due radici complesse coniugate $\mu_1 = -1 + i\sqrt{n^2 - 1}$, $\mu_2 = -1 - i\sqrt{n^2 - 1}$, pertanto le soluzioni sono $U(t) = d_1 e^{-t}\cos(\sqrt{n^2 - 1}\,t) + d_2 e^{-t}\sin(\sqrt{n^2 - 1}\,t)$. Sostituendo la condizione iniziale $U(0) = 0$ si ottiene $d_1 = 0$ e quindi $U_n(t) = d_n e^{-t}\sin(\sqrt{n^2 - 1}\,t)$.
Definiamo $u_n(x,t) = U_n(t)X_n(x)$, si ha:

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= d_0(1 - e^{-2t})c_0 = a_0(1 - e^{-2t}) \\ u_1(x,t) &= d_1 t e^{-t} c_1 \cos x = a_1 t e^{-t}\cos x \\ u_n(x,t) &= d_n e^{-t}\sin(\sqrt{n^2 - 1}\,t)\, c_n\cos(nx) = a_n e^{-t}\sin(\sqrt{n^2 - 1}\,t)\,\cos(nx). \end{aligned}$$

Derivando in t e valutando in 0:

$$\begin{aligned} \partial_t u_0(x,0) &= 2a_0 \\ \partial_t u_1(x,0) &= a_1\cos x \\ \partial_t u_n(x,0) &= a_n\sqrt{n^2 - 1}\cos(nx). \end{aligned}$$

Cerchiamo soluzioni del tipo $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$, derivando in t e valutando per $t = 0$ si deve avere:

$$x = \partial_t u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t u_n(x,0) = 2a_0 + a_1\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\sqrt{n^2 - 1}\cos(nx)$$

Pertanto è necessario calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x$ definita in $[0,\pi]$ estesa per parità in $[-\pi,\pi]$ e per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Se $n > 1$ si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = -\frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^2}$$

Pertanto si ha per $|x| \leq \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx),$$

da confrontare con

$$x = 2a_0 + a_1\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\sqrt{n^2-1}\cos(nx).$$

Ne segue che $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $a_1 = -\dfrac{4}{\pi}$, e $a_{2k} = 0$ e $a_{2k+1} = -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{4k(1+k)}(2k+1)^2}$ per $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 1$. Pertanto si ottiene:

$$u(x,t) = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2t}) - \frac{4}{\pi}te^{-t}\cos x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-t}\sin(\sqrt{4k(1+k)}\,t)}{\sqrt{4k(1+k)}(2k+1)^2}\cos((2k+1)x),$$

il termine generale della serie è maggiorato uniformemente rispetto a (t,x) in modulo da $1/(2k+1)^2$ che è termine generale di una serie convergente, quindi la serie converge totalmente, dunque uniformemente.

Esercizio 27.6. Si determini col metodo di separazione di variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione di reazione-diffusione-trasporto sul segmento $[0,\pi]$:

$$u_t - u_{xx} - 2u_x - u = 0, \qquad x \in [0,\pi],\ t > 0$$

con dati al contorno di Dirichlet omogenei $u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ \forall\, t > 0$, assumendo come dato iniziale $u(x,0) = x(\pi - x)e^{-x}$ per $0 \leq x \leq \pi$. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Svolgimento. Cerchiamo soluzioni $u(t,x) = U(t)X(x)$, sostituendo nell'equazione si ha:

$$\dot U(t)X(x) - U(t)\ddot X(x) - 2U(t)\dot X(x) - U(t)X(x) = 0,$$

e supponendo che $u(t,x) = U(t)X(x) \neq 0$ per ogni (t,x) si ottiene dividendo per tale espressione:

$$\frac{\dot U(t)}{U(t)} - \frac{\ddot X(x)}{X(x)} - 2\frac{\dot X(x)}{X(x)} - 1 = 0,$$

ovvero:

$$\frac{\dot U(t)}{U(t)} = \frac{\ddot X(x) + 2\dot X(x)}{X(x)} + 1 = \lambda \in \mathbb{R},$$

Consideriamo a questo punto le equazioni:

$$\begin{cases}\dot U(t) = \lambda U(t)\\ \ddot X(x) + 2\dot X(x) + (1-\lambda)X(x) = 0.\end{cases}$$

Dalle condizioni al contorno $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ per ogni $t > 0$, si ricava che $X(0) = X(\pi) = 0$, pertanto cerchiamo i $\lambda \in \mathbb{R}$ tali per cui vi sia soluzione non identicamente nulla per:

$$\begin{cases}\ddot X(x) + 2\dot X(x) + (1-\lambda)X(x) = 0\\ X(0) = X(\pi) = 0.\end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'equazione è $\mu^2 + 2\mu + 1 - \lambda = 0$, da cui si ricavano

$$\mu_1 = -1 - \sqrt{1-(1-\lambda)} = -1 - \sqrt{\lambda}, \qquad \mu_2 = -1 + \sqrt{\lambda}.$$

Quindi per $\lambda > 0$ si ottiene che l'equazione ammette al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni

$$X(x) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t}.$$

Verifichiamo la compatibilità con i dati iniziali. Da $X(0) = 0$ si ricava che $c_1 + c_2 = 0$, e da $X(\pi) = 0$ si ha: $0 = c_1(e^{\mu_1\pi} - e^{\mu_2\pi})$. Poiché $\mu_1 \neq \mu_2$ si ottiene che l'unica possibilità è avere $c_1 = c_2 = 0$, quindi se $\lambda > 0$ l'unica soluzione compatibile è la soluzione identicamente nulla, non accettabile.
Se $\lambda = 0$, si ha $\mu_1 = \mu_2 = -1$. L'equazione ammette al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni

$$X(x) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Verifichiamo la compatibilità con i dati iniziali. Da $X(0) = 0$ si ricava che $c_1 = 0$ e da $X(\pi) = 0$ si ottiene $c_2\pi e^{-\pi} = 0$, quindi $c_2 = 0$ e si ottiene solo la soluzione identicamente nulla, non accettabile.
Studiamo ora il caso $\lambda < 0$ e poniamo $\omega = \sqrt{|\lambda|}$. Per $\lambda < 0$ si ottiene che le radici dell'equazione caratteristica sono $\mu_1 = -1 - i\omega$ e $\mu_2 = -1 + i\omega$, e quindi l'equazione ammette al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni

$$X(x) = c_1 e^{-t}e^{-i\omega x} + c_2 e^{-x}e^{i\omega x} = e^{-x}\left(c_1 e^{-i\omega x} + c_2 e^{i\omega x}\right) = e^{-x}\left(d_1\cos\omega x + d_2\sin\omega x\right).$$

Verifichiamo la compatibilità con i dati iniziali: da $X(0) = 0$ si ottiene $d_1 = 0$ e da $X(\pi) = 0$ si ottiene $d_2 \sin \pi\omega = 0$. Poiché si cercano soluzioni non identicamente nulle, si ottiene $d_2 \neq 0$ e quindi $\omega = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. In definitiva, si ottiene che $\lambda = -n^2$ al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e le soluzioni di:

$$\begin{cases} \ddot{X}_n(x) + 2\dot{X}_n(x) + (1-n^2)X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

sono tutte della forma $X_n(x) = d_n e^{-x} \sin nx$ al variare di $d_n \in \mathbb{R}$. L'equazione $\dot{U}_n(t) = -n^2 U(t)$ ammette come soluzione $U_n(t) = U_n(0)e^{-n^2 t}$. Poniamo $u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x)$. Per ogni n, essa è una soluzione dell'equazione data soddisfacente $u_n(0,t) = u_n(\pi,t) = 0$ per ogni $t > 0$. Posto $b_n = U_n(0)d_n \in \mathbb{R}$ si ottiene per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $u_n(t,x) = b_n e^{-n^2 t} e^{-x} \sin nx$. Cerchiamo di soddisfare il dato iniziale con una serie di tali funzioni. Cerchiamo i coefficienti b_n in modo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = u(x,0)$ ovvero $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-x} \sin nx = x(\pi - x)e^{-x}$, quindi $x(\pi - x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Se ne deduce che i coefficienti b_n sono i coefficienti di Fourier della funzione ottenuta prolungando $x(\pi - x)$ a tutto $[-\pi, \pi]$ per disparità, e poi a tutto $\mathbb{R}$ per 2π-periodicità.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (-x^2 + \pi x)\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}(-x^2 + \pi x)\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \cos nx(-2x + \pi)\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \cos nx(-2x+\pi)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi n}\left[\frac{\sin nx}{n}(-2x + \pi)\right]_0^\pi + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \sin nx\,dx = \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \sin nx\,dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Quindi $b_{2k} = 0$ e $b_{2k+1} = 8/(\pi(2k+1)^3)$ per $k \in \mathbb{N}$. Si ha allora:

$$u(t,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-(2k+1)^2 t - x} \sin\big((2k+1)x\big).$$

Studiamo la convergenza della serie così ottenuta. Per ogni $t \geq 0$ e $x \in [0, \pi]$

$$\left|\frac{1}{(2k+1)^3} e^{-(2k+1)^2 t - x} \sin\big((2k+1)x\big)\right| \leq \frac{1}{(2k+1)^3}$$

quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{\substack{t>0 \\ x\in[0,\pi]}} \left|\frac{1}{(2k+1)^3} e^{-(2k+1)^2 t - x} \sin\big((2k+1)x\big)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} < +\infty,$$

infatti il termine generale della serie di sinistra $(2k+1)^{-3} < 2^{-3}k^{-3} < 1/(8k^2)$, termine generale di una serie convergente. Pertanto la serie che definisce $u(t,x)$ converge totalmente, quindi uniformemente.

CAPITOLO 28

Lezione del giorno giovedì 21 gennaio 2010 (2 ore) Metodo di separazione delle variabili - continuazione

Esercizio 28.1. Si determini col metodo di separazione di variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione del calore sul segmento $[0,\pi]$, con estremità termicamente isolate:

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0, & 0 \le x \le \pi\,,\ t > 0\,, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

assumendo come dato iniziale $u(x,0) = 2x$. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Svolgimento. Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(t,x) = U(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione si ottiene $\dot{U}(t)X(x) - 5U(t)\ddot{X}(x) = 0$, da cui dividendo per $5U(t)X(x)$ si ha

$$\frac{\dot{U}(t)}{5U(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = 5\lambda U(t), \\ \ddot{X}(x) = \lambda X(x), \end{cases}$$

da accoppiare con le condizioni iniziali $u_x(0,t) = U(t)\dot{X}(0) = 0$ e $u_x(\pi,t) = U(t)\dot{X}(\pi) = 0$ che porgono $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. Studiamo quindi:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0, \\ \dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\mu^2 - \lambda = 0$. Distinguiamo quindi i vari casi in base al segno del discriminante dell'equazione. Se $\lambda > 0$ abbiamo come radici $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$ e le soluzioni dell'equazione data sono

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Derivando si ottiene:

$$\dot{X}(x) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\,x} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\,x},$$

Valutando la derivata in 0 e ponendola pari a zero si ottiene $c_1 = c_2$, sostituendo questo fatto e valutando la derivata in π si ottiene che per soddisfare $\dot{X}(\pi) = 0$ si deve avere $c_1 = c_2 = 0$, ma la soluzione nulla non è accettabile.

Se $\lambda = 0$ l'equazione ha per soluzioni $X(x) = c_1 + c_2 x$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la cui derivata $\dot{X}(x) = c_1$. Si deve avere quindi $c_2 = 0$ e la soluzione risulta essere $X(x) = c_1$. Affinché tale soluzione sia accettabile, è necessario richiedere $c_1 \neq 0$.

Se $\lambda < 0$, posto $\omega = \sqrt{|\lambda|}$ l'equazione ha per soluzioni $X(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$, la cui derivata è $\dot{X}(x) = -\omega c_1\sin(\omega x) + \omega c_2\cos(\omega x)$. Valutando tale derivata in 0 e in π e ponendola pari a zero si ricava $c_2 = 0$ e $\sin(\omega\pi) = 0$ da cui $\omega = \sqrt{|\lambda|} \in \mathbb{Z}$.

Il sistema pertanto ammette soluzioni accettabili solo per $\lambda = -n^2$, con $n \in \mathbb{N}$ e detta X_n la soluzione corrispondente a $\lambda = -n^2$, tali soluzioni sono date da $X_n(x) = c_1\cos(nx)$. Tale scrittura comprende anche il caso $n = 0$.

L'equazione per U, ovvero $\dot{U}_n(t) = -5n^2 U_n(t)$ ha per soluzione $U_n(t) = U_n(0)e^{-5n^2 t}$, si ha quindi al variare di $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x) = a_n e^{-5n^2 t}\cos(nx)\,,$$

dove si è posto $a_n = U(0)c_1$, quindi $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cerchiamo di raggiungere il dato iniziale con una serie di queste soluzioni:

$$u(0,x) = 2x = \sum_{j=0}^{\infty} u_n(0,x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx),$$

quindi i coefficienti a_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di soli coseni della funzione $f(x) = 2x$, mentre a_0 è il doppio del coefficiente di ordine 0 dello sviluppo in serie di Fourier di f. Prolunghiamo quindi f per parità a tutto $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx = \pi \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos nx\,dx = \frac{4}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{4}{n^2\pi}[\cos(nx)]_0^{\pi} = 4\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi} \end{aligned}$$

Quindi $a_0 = \pi$, $a_{2k} = 0$ e $a_{2k-1} = -8/(\pi(2k-1)^2)$ per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. La soluzione risulta quindi:

$$u(t,x) = \pi - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-5(2k-1)^2 t}\cos\big((2k-1)x\big)}{(2k-1)^2}.$$

La serie converge totalmente quindi uniformemente, infatti si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup\left|\frac{e^{-5(2k-1)^2 t}\cos\big((2k-1)x\big)}{(2k-1)^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} < +\infty,$$

(ad esempio per confronto con la serie di termine generale $1/k^2$).

Esercizio 28.2. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione alle derivate parziali:

$$\begin{cases} -u_t + 2u_{xx} + 3u_x + u = 0, & \text{per } t > 0,\ x \in]0,\pi[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = e^{-\frac{3}{4}x}\left(\dfrac{\pi}{2} - \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right|\right), \end{cases}$$

Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Svolgimento. Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(x,t) = U(t)X(x)$, sostituendo si ottiene

$$-\dot{U}(t)X(x) + 2U(t)\ddot{X}(x) + 3U(t)\dot{X}(x) + U(t)X(x) = 0$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{-\dot{U}(t) + U(t)}{U(t)} = -\frac{2\ddot{X}(x) + 3\dot{X}(x)}{X(x)}$$

Si ottengono quindi le due equazioni ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} -\dot{U}(t) + (1-\lambda)U(t) = 0, \\ 2\ddot{X}(x) + 3\dot{X}(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Studiamo l'equazione per $X(x)$, la sua equazione caratteristica al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ è $2\mu^2+3\mu+\lambda = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 9-8\lambda$. Dalle condizioni al contorno, si ricava $u(0,t) = U(t)X(0) = 0$ per ogni t e $u(\pi,t) = U(t)X(\pi) = 0$ per ogni t, il che implica $X(0) = X(\pi) = 0$.

Se $\Delta > 0$, l'equazione caratteristica ammette le radici reali distinte λ_1 e λ_2, e l'equazione per $X(x)$ ammette come soluzione generale $X(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$. Sostituendo, si ottiene $0 = c_1 + c_2$ dalla prima e quindi $X(x) = c_1(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x})$. Sostituendo $X(\pi) = 0$, si ha $0 = c_1(e^{\lambda_1\pi} - e^{\lambda_2\pi})$, ed essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, si ottiene $c_1 = c_2 = 0$, soluzione non accettabile.

Se $\Delta = 0$, l'equazione caratteristica ammette la radice reale doppia λ_1, e l'equazione per $X(x)$ ammette come soluzione generale $X(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2xe^{\lambda_1 x}$. Sostituendo le condizioni al contorno si ha $c_1 = 0$ e $0 = c_2\pi e^{\lambda_1\pi}$, il che implica $c_2 = 0$ e anche questa soluzione non è accettabile. Supponiamo $\Delta < 0$, in tal caso l'equazione caratteristica ammette le radici complesse coniugate $\lambda_1 = \alpha+i\omega$ e $\lambda_2 = \alpha-i\omega$ dove $\alpha = -3/4$ e $\omega = \sqrt{|\Delta|}/4 \neq 0$.

La soluzione generale dell'equazione è $X(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$, sostituendo le condizioni al contorno si ha $c_1 = 0$ e $0 = c_2 e^{\alpha\pi} \sin \omega\pi$. Ciò implica $\omega \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. In particolare, poiché $4\omega = \sqrt{|\Delta|}$ si deve avere $\omega = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e quindi $16n^2 = -\Delta$ perché $\Delta < 0$, pertanto si ha $16n^2 = -9 + 8\lambda_n$ e $\lambda_n = (2n^2 + 9/8)$. Pertanto al variare di $n \in \mathbb{N}$ la soluzione relativa a λ_n è

$$X_n(x) = c_n e^{-3/4x} \sin nx.$$

Studiamo ora l'equazione per $U(t)$, essa è $-\dot{U} = (\lambda - 1)U$, la cui soluzione generale è $U(t) = U(0)e^{-(\lambda-1)t}$. Sostituendo i valori di λ accettabili, ovvero i valori λ_n si ottengono soluzioni $U_n(t) = U_n(0)e^{-(2n^2+1/8)t}$. Poniamo $b_n = U_n(0)c_n$ e costruiamo le soluzioni elementari

$$u_n(x,t) = b_n e^{-(2n^2+1/8)t} e^{-3/4x} \sin nx.$$

Per coprire il dato iniziale si deve avere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0),$$

da cui

$$\frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

pertanto i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie (di soli seni) della funzione

$$x \mapsto \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|$$

definita su $[0,\pi]$ e prolungata per disparità a $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Pertanto i coefficienti b_n sono dati da:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \right) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin nx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Quindi la soluzione risulta essere:

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} e^{-(2n^2+1/8)t} e^{-3/4x} \sin(nx).$$

Essa converge uniformemente, infatti si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{(x,t)\in[0,\pi]\times[0,+\infty[} \left| \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} e^{-(2n^2+1/8)t} e^{-3/4x} \sin(nx) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

che prova la convergenza totale e quindi uniforme della serie.

Esercizio 28.3. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} -u_{tt} + 3u_{xx} = 0 \text{ in }]0,\pi[\times]0,+\infty[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = x. \end{cases}$$

Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Svolgimento. Applichiamo il metodo di separazione delle variabili cercando soluzioni non nulle nella forma $u(x,t) = U(t)X(x)$. Dalle condizioni iniziali si ricava $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$ Sostituendo, si ottiene al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$-\ddot{U}(t)X(x) + 3U(t)\ddot{X}(x) = 0,$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{-\ddot{U}(t)}{U(t)} = \frac{-3\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Si ha dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} -\ddot{U}(t) - \lambda U(t) = 0, \\ 3\ddot{X}(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione in $X(x)$ accoppiata con i dati $X(0) = X(\pi) = 0$. L'equazione caratteristica è $3\mu^2+\lambda = 0$, il cui discriminante è $\Delta = -12\lambda$. Se $\Delta > 0$ allora necessariamente $\lambda < 0$, l'equazione caratteristica ammette due radici reali, distinte e non nulle. La soluzione generale è $X(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$ la cui derivata è $\dot{X}(x) = c_1\mu_1 e^{\mu_1 x} + c_2\mu_2 e^{\mu_2 x}$. Sostituendo i dati $\dot{X}(0) = 0$ e $\dot{X}(\pi) = 0$ si otterrebbe il sistema (nelle incognite c_1 e c_2):

$$\begin{cases} c_1\mu_1 + c_2\mu_2 = 0 \\ c_1\mu_1 e^{\mu_1\pi} + c_2\mu_2 e^{\mu_2\pi} = 0 \end{cases}$$

Il determinante di tale sistema è $\mu_1\mu_2(e^{\mu_2\pi} - e^{\mu_1\pi}) \neq 0$, pertanto l'unica soluzione è $c_1 = c_2 = 0$ non accettabile.
Se $\Delta = 0$ allora necessariamente $\lambda = 0$ e $\mu_1 = 0$ è l'unica radice dell'equazione caratteristica. Si ha $X(x) = c_1 + c_2 x$ come soluzione generale, derivando si ha $\dot{X}(x) = c_2$ e sostituendo le condizioni date si ottiene $c_2 = 0$, pertanto si ottiene la soluzione accettabile $X(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Se $\Delta < 0$ allora necessariamente $\lambda > 0$ e si ottengono le radici complesse coniugate $\pm i\omega$ dove $\omega = \sqrt{\lambda/3}$. La soluzione generale è $X(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$, derivando si ha $\dot{X}(x) = -\omega c_1 \sin(\omega x) + \omega c_2 \cos(\omega x)$ e sostituendo $\dot{X}(0) = 0$ si ha $c_2 = 0$, pertanto $X(x) = c_1 \cos(\omega x)$. Affinché sia $\dot{X}(\pi) = 0$ si deve avere $\omega \in \mathbb{N}$ e per avere $\Delta < 0$ si deve avere $\omega \neq 0$, quindi $\lambda = 3n^2$, $n \neq 0$.
Si ha dunque $X_n(x) = c_n \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ che comprende le soluzioni accettabili per $\Delta \leq 0$.
Risolviamo l'equazione per U corrispondente a $\lambda = 3n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\ddot{U}(t) + 3n^2 U(t) = 0$ con la condizione iniziale $U(0) = 0$. Se $n = 0$ si ha la soluzione $U(t) = c_1 + c_2 t$ e sostituendo la condizione iniziale, si ottiene $U(t) = c_2 t$ Se $n \neq 0$, si ha che l'equazione caratteristica è $\mu^2 + 3n^2 = 0$, le cui soluzioni sono $\mu_1 = in\sqrt{3}$ e la complessa coniugata $\mu_2 = -in\sqrt{3}$, la soluzione generale pertanto è $U(t) = c_1 \cos(n\sqrt{3}t) + c_2 \sin(n\sqrt{3}t)$ e poiché $U(0) = 0$ si ha $c_1 = 0$, quindi $U_n(t) = d_n \sin(n\sqrt{3}t)$. Si ha quindi, posto $k_n = c_n d_n$,

$$u_0(x,t) = U(t)X(x) = k_0 t$$

$$u_n(x,t) = U(t)X(x) = k_n \sin(n\sqrt{3}t)\cos(nx)$$

da cui

$$\partial_t u_0(x,0) = k_0$$

$$\partial_t u_n(x,0) = n\sqrt{3}k_n \cos(nx)$$

Sviluppiamo il dato iniziale in serie di coseni

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n),$$

da cui

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Per confronto, si ha:

$$\partial_t u(x,0) = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{3}k_n \cos(nx)$$

da cui si ottiene $k_0 = \pi/2$ e $n\sqrt{3}k_n = -\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^2}$, quindi $k_n = -\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^3}$. La soluzione è quindi:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\pi}{2}t - \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(n\sqrt{3}t)\cos(nx) \\ &= \frac{\pi}{2}t - \frac{4\sqrt{3}}{3\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin((2k+1)\sqrt{3}t)\cos((2k+1)x). \end{aligned}$$

Il termine generale della serie è maggiorato da $1/n^3$, termine generale di una serie convergente. Pertanto la serie converge totalmente, quindi uniformemente.

Esercizio 28.4. Si risolva con il metodo di separazione delle variabili la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\begin{cases} -\partial_t u(t,x) + \partial_{xx} u(t,x) + 2\partial_x u(t,x) - 3u = 0, & (t,x) \in]0,+\infty[\times[0,\pi], \\ u(t,0) = u(0,\pi) = 0, \\ u(0,x) = xe^{-x}. \end{cases}$$

Svolgimento. Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x) = U(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene:

$$-\dot{U}(t,x) + U(t)\ddot{X}(x) + 2U(t)\dot{X}(x) - 3U(t)X(x) = 0$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ottiene che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui:

$$-\frac{-\dot{U}(t,x) - 3U(t)}{U(t)} = \frac{\ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x)}{X(x)} =: \lambda$$

Questo implica che per $\lambda \in \mathbb{R}$ si hanno le due equazioni:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ -\dot{U}(t) + (-3+\lambda)\, U(t) = 0. \end{cases}$$

da accoppiarsi con le opportune condizioni al contorno.
Studiamo l'equazione per X, le condizioni al contorno sono $X(0) = X(\pi) = 0$. Il polinomio caratteristico è $\mu^2 + 2\mu - \lambda = 0$, di discriminante $\Delta = 4(1+\lambda)$. Si verificano i seguenti casi al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1) se $\Delta > 0$, poniamo $\mu_1 = \frac{-2-\sqrt{\Delta}}{2}$, $\mu_2 = \frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2}$ e la soluzione generale dell'equazione è $\Phi(c_1,c_2,x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$. Confrontiamo con i dati all contorno. Si deve avere $\Phi(c_1,c_2,0) = X(0) = 0$, da cui $c_1 = -c_2$, sostituendo e considerando $\Phi(c_1,c_2,\pi) = X(\pi) = 0$ si ottiene $c_1(e^{\mu_1\pi} - e^{\mu_2\pi}) = 0$. Essendo $\Delta > 0$, si ha $\mu_1 \neq \mu_2$, quindi si ottiene solo la soluzione nulla $c_1 = c_2 = 0$, non accettabile.
(2) se $\Delta = 0$, quindi $\lambda = -1$, poniamo $\mu_1 = \mu_2 = -1$ e la soluzione generale dell'equazione è $\Phi(c_1,c_2,x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$. Sostituendo i dati al contorno, si ottiene ancora la soluzione non accettabile $c_1 = c_2 = 0$.
(3) se $\Delta < 0$, poniamo $\alpha = -1$ e $\omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$ e la soluzione generale dell'equazione è $\Phi(c_1,c_2,x) = e^{-x}(c_1\cos\omega x + c_2 \sin\omega x)$.
Affinché i dati al bordo siano rispettati, si deve avere $c_1 = 0$ per soddisfare $\Phi(c_1,c_2,0) = X(0) = 0$ e per soddisfare $\Phi(c_1,c_2,\pi) = X(\pi) = 0$ si deve avere $\omega = n \in \mathbb{Z}$.

Sostituendo le definizioni di ω e Δ, ricordando che per avere soluzioni accettabili deve essere $\Delta < 0$, si ottiene $-4n^2 = 4(1+\lambda)$ da cui segue che i valori accettabili per λ sono dati da $\lambda_n = -1 - n^2$. Si ottengono le soluzioni:

$$X_n(x) = c_n e^{-x}\sin(nx).$$

Studiamo ora l'equazione per U con i valori accettabili di λ, ovvero

$$-\dot{U}(t) + \left(-3 - 1 - n^2\right) U(t) = 0.$$

La soluzione è $U_n(t) = u_n(0)e^{-(4+n^2)t}$. Costuiamo le soluzioni elementari moltiplicando le soluzioni accettabili per X e U corrispondenti allo stesso valore di λ_n e mettendo insieme le costanti moltiplicative $b_n = c_n u_n(0)$.

$$u_n(t,x) = b_n e^{-(4+n^2)t} e^{-x}\sin(nx).$$

Per coprire il dato iniziale, sovrapponiamo infinite soluzioni elementari. Si deve avere:

$$u(0,x) = xe^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-x}\sin(nx) = e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

pertanto i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier delle funzione x, definita per $x \in [0,\pi]$, prolungata per disparità a $[-\pi,\pi]$ e poi estesa per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Quindi si ha:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\pi\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi)\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è data da:

$$u(t,x) = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} e^{-(4+n^2)t} \sin(nx).$$

Discussione della convergenza:

(1) se $t > \bar{t} > 0$ si ha che il termine generale della serie è maggiorato in modulo da $2e^{-n^2\bar{t}}/n$, quindi si ha convergenza totale, uniforme e puntuale nei compatti di $]0,+\infty[\times[0,\pi]$.
(2) se $t = 0$, la serie si riduce alla serie di Fourier della funzione x definita su $[0,\pi]$ prolungata per disparità a $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Tale funzione è C^1 a tratti e non è continua in $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La serie di Fourier converge puntualmente ma non uniformemente.

La serie converge puntualmente ma non uniformemente.

CAPITOLO 29

Lezione del giorno venerdì 22 gennaio 2010 (2 ore) Esercizi ricapitolativi

Esercizio 29.1. Si consideri l'insieme

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{|x|}\}$$

e la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^4}{x^2 + \sin^2 x + y}.$$

Si dica se esistono i seguenti limiti e, in caso affermativo, li si calcoli:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y)$$

Svolgimento. Testiamo il limite lungo le curve $(t,0)$ per $t \to 0^{\pm}$. Si ha:

$$\lim_{t\to 0^{\pm}} f(t,0) = \lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t} = \frac{1}{2}.$$

D'altra parte se testiamo il limite lungo le curve $(0,t)$ per $t \to 0^{\pm}$ si ha

$$\lim_{t\to 0^{\pm}} f(0,t) = \lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{-t^4}{t} = 0.$$

I limiti sono diversi, quindi il primo limite non esiste. Per quanto riguarda il secondo, osserviamo che se $(x,y) \in D$ si ha $f(x,y) \leq 0$ e

$$f(x,y) \geq \frac{-y^4}{x^2 + \sin^2 x + y} \geq -y^3$$

quindi il secondo limite esiste e vale 0.

Esercizio 29.2. Si studino i massimi e i minimi della funzione

$$F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2),$$

vincolati all'insieme $\bar{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento. Calcoliamo prima gli estremali liberi:

$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 4x\left(x^2 + y^2\right) - 2x \\ \partial_y F(x,y) = 4y\left(x^2 + y^2\right) + 2y. \end{cases}$$

L'unico punto critico libero è l'origine. Calcoliamo le derivate seconde:

$$\begin{cases} \partial_{xx} F(x,y) = -2 + 12x^2 + 4y^2 \\ \partial_{yy} F(x,y) = 2 + 4x^2 + 12y^2 \\ \partial_{xy} F(x,y) = 8xy \end{cases}$$

La matrice hessiana ha quindi sulla diagonale principale i valori -2 e 2 e nelle altre entrate è nulla. Quindi ha due autovalori di segno opposto, pertanto l'origine è una sella locale.
Eventuali estremali saranno quindi vincolati a $\partial B = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Possiamo calcolarli in vari modi:

(1) primo metodo: passiamo in coordinate polari: la circonferenza unitaria è parametrizzata da $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$, sostituendo nell'espressione di F si ottiene

$$F(\cos\theta, \sin\theta) = 1 - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$$

I massimi sono quindi raggiunti per $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ e valgono 2. Tali punti corrispondono a $(0, \pm 1)$.
I minimi sono raggiunti per $\theta = 0, \pi$ e valgono 0. Tali punti corrispondono a $(\pm 1, 0)$.

(2) secondo metodo: applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} \partial_x(F(x,y) - \lambda(x^2+y^2-1)) & = 4x\left(x^2+y^2\right) - 2x - 2\lambda x = 0 \\ \partial_y(F(x,y) - \lambda(x^2+y^2-1)) & = 4y\left(x^2+y^2\right) + 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Riscrivendo e utilizzando la terza equazione si ha:

$$\begin{cases} 0 & = 2(1-\lambda)x \\ 0 & = 2(3-\lambda)y \\ 1 & = x^2+y^2. \end{cases}$$

Si ottiene $x = 0$ e quindi $y = \pm 1$, oppure $y = 0$ e $x = \pm 1$ oppure $\lambda = 1$ il che implica $y = 0$ e $x = \pm 1$ oppure $\lambda = 3$ il che implica $x = 0$ e $y = \pm 1$, e ritroviamo esattamente i punti $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ visti in precedenza. Si ha $F(0, \pm 1) = 2$ massimo assoluto e $F(\pm 1, 0) = 0$ minimo assoluto.

Esercizio 29.3. Al variare di $\alpha > 0$ studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xy}{n^2 + |xy|^{\alpha}}.$$

Svolgimento. Il termine generale della serie è:

$$f_n(x,y,\alpha) = \frac{xy}{n^2 + |xy|^{\alpha}}.$$

Sia K un compatto di $\mathbb{R}^2$. Vale la seguente maggiorazione:

$$|f_n(x,y,\alpha)| \leq \max_{(x,y)\in K} |xy| \cdot \frac{1}{n^2}$$

e il massimo è finito perché $|xy|$ è continua e K è compatto. Questa disuguaglianza porge la convergenza totale sui compatti di $\mathbb{R}^2$, in particolare la convergenza puntuale e la convergenza uniforme sui compatti di $\mathbb{R}^2$.
Poniamo $s = |xy|$ e

$$g_n(s,\alpha) = \frac{s}{n^2 + s^{\alpha}}$$

Si ha $|f_n(x,y,\alpha)| = g_n(s,\alpha)$ Calcoliamo

$$g_n'(s,\alpha) = \frac{n^2 + (1-\alpha)s^{\alpha}}{(n^2+s^{\alpha})^2}$$

per $s > 0$ tale funzione ammette massimo in $\bar{s}_n = n^{2/\alpha}/(\alpha-1)^{1/\alpha}$. Quindi

$$|g_n(s,\alpha)| \leq \frac{\frac{n^{2/\alpha}}{(\alpha-1)^{1/\alpha}}}{n^2 + \frac{n^2}{\alpha-1}} = \frac{(\alpha-1)^{1-1/\alpha}}{\alpha}\frac{n^{2/\alpha}}{n^2} = \frac{(\alpha-1)^{1-1/\alpha}}{\alpha}\frac{1}{n^{2-2/\alpha}}$$

Per $\alpha > 2$ il membro di destra è termine generale di una serie convergente. Quindi si ha convergenza totale e uniforme su $\mathbb{R}^2$ per $\alpha > 2$.
Sia ora $\alpha < 2$ e proviamo che la successione $\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x,y,\alpha)\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ non è di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme di $\mathbb{R}^2$. Se lo fosse, per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbe $N = N_{\varepsilon}$ tale che se $N', M' \geq N$ si dovrebbe avere

$$\left\| \sum_{n=1}^{M'} f_n(x,y,\alpha) - \sum_{n=1}^{N'} f_n(x,y,\alpha) \right\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Per contraddire tale affermazione , scegliamo $N > N_\varepsilon$, $M = 2N$, $\{(x_N, y_N)\}_{N\in\mathbb{N}}$ tali che $x_N, y_N > 0$ e $x_N y_N = N$. Allora si ha:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{M'} f_n(x,y,\alpha) - \sum_{n=1}^{N'} f_n(x,y,\alpha)\right\|_\infty &\geq \left|\sum_{n=1}^{2N} f_n(x_N,y_N,\alpha) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x_N,y_N,\alpha)\right| \\ &\geq \sum_{n=N+1}^{2N} f_n(x_N,y_N,\alpha) \geq \sum_{n=N}^{2N} \frac{N}{n^2+N^\alpha} \\ &\geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{N}{4N^2+N^\alpha} = \frac{N(N-1)}{4N^2+N^\alpha}\end{aligned}$$

L'ultimo termine tende a $1/4$ per $\alpha < 2$ e $1/5$ per $\alpha = 2$, in ambedue i casi è non nullo e strettamente maggiore di $\varepsilon = 1/6 > 0$. Questo implica che la successione non è uniformemente di Cauchy pertanto la serie non converge uniformemente su $\mathbb{R}^2$ se $\alpha \leq 2$.

Esercizio 29.4. Si consideri il seguente sistema in $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x^4 + 5y^2 + \tan z - z - 6\sin \pi t = 0 \\ x^2 - 2y^4 + \cos z - z - \arctan t - t = 1 \end{cases}$$

Si verifichi che esso è risolto per $x = y = z = t = 0$, e che in un intorno di $(0,0,0,0)$ definisce due superfici in $\mathbb{R}^3$ parametrizzate da $z = z(x,y)$ e $t = t(x,y)$ con $z(0,0) = 0$ e $t(0,0) = 0$. Si calcolino $\nabla z(0,0)$ e $\nabla t(0,0)$.

Svolgimento. Poniamo

$$F(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x^4 + 5y^2 + \tan z - z - 6\sin \pi t \\ x^2 - 2y^4 + \cos z - z - \arctan t - t - 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $F(0,0,0,0) = (0,0)$. Scriviamo la matrice Jacobiana di F calcolata in $(0,0,0,0)$.

$$\mathrm{Jac}(F) = \begin{pmatrix} 4x^3 & 10y & -1 + 1/\cos^2 z & -6\pi\cos(\pi t) \\ 2x & -8y^3 & -1 - \sin z & -1 - 1/(1+t^2) \end{pmatrix},$$

Valutando in $(0,0,0,0)$ si ottiene:

$$\mathrm{Jac}(F)(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -6\pi \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

Il differenziale parziale di F relativo alle variabili (z,t) è costituito dalle ultime due colonne di tale matrice, mentre il differenziale parziale di F relativo alle variabili (x,y) è costituito dalle prime due colonne.

$$\partial_{z,t}F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6\pi \\ 0-1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad [\partial_{z,t}F(0,0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(3\pi) & -1 \\ -1/(6\pi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora si ha:

$$\begin{pmatrix} \nabla z(0,0) \\ \nabla t(0,0) \end{pmatrix} = -[\partial_{z,t}F(0,0)]^{-1}\partial_{x,y}F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 29.5. Si calcoli il seguente integrale:

$$I := \oint_\gamma \arctan y \, dx - xy \, dy$$

dove γ è la frontiera del triangolo T di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ percorso in senso antiorario. Si calcoli inoltre il momento di inerzia di T rispetto all'asse delle ordinate:

$$M := \iint_T x^2 \, dx \, dy.$$

Svolgimento. Osserviamo che

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - |y|\}$$

e

$$\gamma = \{(t, t-1) : t \in [0,1]\} \cup \{(1-t, t) : \, t \in [0,1]\} \cup \{(-t, 0) : \, t \in [1,-1]\}$$

Si ha

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \arctan y \, dx - xy \, dy,$$

osservando che la frontiera di T è percorsa in senso antiorario, applichiamo le formule di Gauss-Green per avere:

$$\begin{aligned}
I &= -\iint_T (\partial_x Q - \partial_y P)\,dxdy = -\iint_T \left(y - \frac{1}{1+y^2}\right) dx\,dy \\
&= -\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{1-|y|} \left(y - \frac{1}{1+y^2}\right) dx\right) dy \\
&= -\int_{-1}^{1} y(1-|y|)\,dy + \int_{-1}^{1} \frac{1-|y|}{1+y^2}\,dy \\
&= 2\int_0^1 \frac{1-y}{1+y^2} \\
&= [2\arctan y - \log(1+y^2)]_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi}{2} - \log 2.
\end{aligned}$$

Utilizzando ancora le formule di Gauss Green si ha:

$$M := \iint_T x^2\,dx\,dy = \iint_T (\partial_x Q - \partial_y P)\,dxdy,$$

si può scegliere $Q(x,y) = x^3/3$, $P = 0$ ottenendo

$$\begin{aligned}
M &= \int_\gamma Q(x,y)\,dy = \int_\gamma \frac{x^3}{3}\,dy = \int_0^1 \frac{t^3}{3}\,dt + \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3}\,dt - \int_{-1}^{1} 0\,dt \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Si poteva anche procedere direttamente:

$$\begin{aligned}
M &= \iint_T x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{1-|y|} x^2\,dx\right) dy \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (1-|y|)^3\,dy \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 (1-y)^3\,dy = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Esercizio 29.6. Si consideri il sottoinsieme del piano

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2+12x+9)^2 = 4(2x+3)^3\},$$

chiamato *deltoide di Eulero.*

(1) Si provi che $\cos(3\theta) = \cos\theta(1-4\sin^2\theta) = \cos\theta(\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)$

(2) Si esprima Γ in coordinate polari piane e, utilizzando il precedente, si dimostri che Γ è invariante per rotazioni di $\frac{2\pi}{3}$ attorno all'origine.

(3) Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nei punti $P_1 = (-1,0)$, $P_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e $P_3 = (1/2, -\sqrt{3}/2)$. Si provi che tali tangenti delimitano un triangolo equilatero. Si dica:
   (a) se Γ definisce implicitamente in un intorno di P_0, una funzione $y = \varphi_1(x)$ con $\varphi_1(-1) = 0$ e in caso affermativo, si calcoli $\varphi_1'(0)$.
   (b) se Γ definisce implicitamente in un intorno di P_1, una funzione $y = \varphi_2(x)$ con $\varphi_2(1/2) = \sqrt{3}/2$ e in caso affermativo, si calcoli $\varphi_2'(1/2)$.
   (c) se Γ definisce implicitamente in un intorno di P_2, una funzione $y = \varphi_3(x)$ con $\varphi_3(1/2) = -\sqrt{3}/2$ e in caso affermativo, si calcoli $\varphi_3'(1/2)$.

(4) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = x^2+y^2$ vincolati a Γ. Si dica se Γ è compatto.

(5) Si dica se in $(3,0)$ il Teorema di Dini è applicabile. Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Svolgimento. Poniamo

$$F(x,y) = (x^2+y^2+12x+9)^2 - 4(2x+3)^3.$$

Osserviamo preliminarmente che l'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse perché $F(x,y) = F(x,-y)$.

(1) la seconda uguaglianza è ovvia perché $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, per quanto riguarda la prima:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= \cos\theta(1-2\sin^2\theta) - 2\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta(1-4\sin^2\theta)
\end{aligned}$$

(2) Si ha

$$\begin{aligned} F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) &= \rho^4(\sin^4(\theta)+\cos^4(\theta)+2\sin^2(\theta)\cos^2(\theta))+\\ &+\rho^3(-8\cos^3(\theta)+24\sin^2(\theta)\cos(\theta))+18\rho^2-27\\ &=\rho^4(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))^2-8\rho^3\cos\theta(\cos^2(\theta)-3\sin^2(\theta))+18\rho^2-27\\ &=\rho^4-8\rho^3\cos(3\theta)+18\rho^2-27 \end{aligned}$$

Come funzione di θ, si ha che questa espressione è $2\pi/3$ periodica, quindi l'insieme è invariante per rotazioni di $2\pi/3$ attorno all'origine. Poiché $(0,0)\notin\Gamma$, possiamo scrivere:

$$f(\rho):=\frac{\rho^4+18\rho^2-27}{8\rho^3}=\cos(3\theta)$$

Questa scrittura implica già che Γ è compatto: se così non fosse, esisterebbe una sequenza di punti di Γ rappresentati in coordinate polari da (ρ_n,θ_n) tale per cui $\rho_n\to+\infty$. Sostituendo nella relazione precedente e passando al $\limsup\limits_{n\to\infty}$, si ottiene che il membro di destra vale $+\infty$, mentre il secondo rimane limitato.

(3) I punti considerati si ottengono uno dall'altro per rotazione di $2\pi/3$, questo già porge il fatto che le tangenti costituiranno un triangolo equilatero. Si ha $\partial_y F(0,-1)=0$ e $\partial_x F(0,-1)\neq 0$, quindi la tangente in $(0,-1)$ è verticale ed è data da $x=-1$. In questo punto non si può applicare il Teorema di Dini. Ruotando l'equazione della tangente $\alpha=\pm 2\pi/3$ attorno all'origine, si ottengono le tangenti negli altri due punti ovvero

$$-\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}y=-1$$

I coefficienti angolari delle tangenti sono quindi $\sqrt{3}$ per il punto P_3 e $-\sqrt{3}$ per il punto P_2.

(4) Studiamo brevemente la funzione $f(\rho)$. Si ha

$$f'(\rho)=\frac{4\rho^3+36\rho}{8\rho^3}-\frac{3\left(\rho^4+18\rho^2-27\right)}{8\rho^4}=\frac{(-9+\rho^2)^2}{8r^4}\geq 0,$$

e si annulla solo per $\rho=3$, quindi f è monotona crescente. Ma allora i minimi di ρ sono assunti per $\cos 3\theta=-1$, ovvero $\theta_1=\pi/3$, $\theta_2=5\pi/3$, $\theta_3=\pi$ e i massimi per $\cos 3\theta=1$, ovvero $\theta=0$, $\theta=2/3\pi$, $\theta=4\pi/3$. Il valore minimo di ρ risolve $f(\rho)=-1$, e in particolare è assunto nel punto rappresentato dalle coordinate polari $(\rho_{\min},\pi)$. Analogamente, il valore massimo di ρ risolve $f(\rho)=1$, e in particolare è assunto nel punto rappresentato dalle coordinate polari $(\rho_{\max},0)$. Studiamo $f(\rho)=-1$ ovvero

$$\rho^4+8\rho^3+18\rho^2-27=0$$

Cerchiamo soluzione intere di questa equazione tra i divisori di 27, ovvero $\pm1,\pm3,\pm9$. Si ha che 1 è soluzione, quindi:

$$\rho^4+8\rho^3+18\rho^2-27=(\rho-1)(\rho^3+b\rho^2+c\rho+d)=\rho^4+(b-1)\rho^3+(c-b)\rho^2+(d-c)\rho-d)$$

da cui $b=9$, $c=27$, $d=27$, pertanto:

$$\rho^4+8\rho^3+18\rho^2-27=(\rho-1)(\rho^3+9\rho^2+27\rho+27)=(\rho-1)(\rho+3)^3$$

Solo $\rho=1$ è soluzione positiva, quindi accettabile, ed è il valore minimo di ρ. Per quanto riguarda il valore massimo, studiamo $f(\rho)=+1$ ovvero

$$\rho^4-8\rho^3+18\rho^2-27=0$$

Cerchiamo soluzione intere di questa equazione tra i divisori di 27, ovvero $\pm1,\pm3,\pm9$. Si ha che -1 è soluzione, quindi:

$$\rho^4-8\rho^3+18\rho^2-27=(\rho+1)(\rho^3+b\rho^2+c\rho+d)=\rho^4+(b+1)\rho^3+(c+b)\rho^2+(d+c)\rho+d)$$

da cui $b=-9$, $c=27$, $d=-27$, pertanto:

$$\rho^4+8\rho^3+18\rho^2-27=(\rho+1)(\rho^3-9\rho^2+27\rho-27)=(\rho-1)(\rho-3)^3,$$

che ammette soluzione accettabile $\rho=3$, che rappresenta il massimo di ρ. Quindi il massimo di ρ^2 è 9.

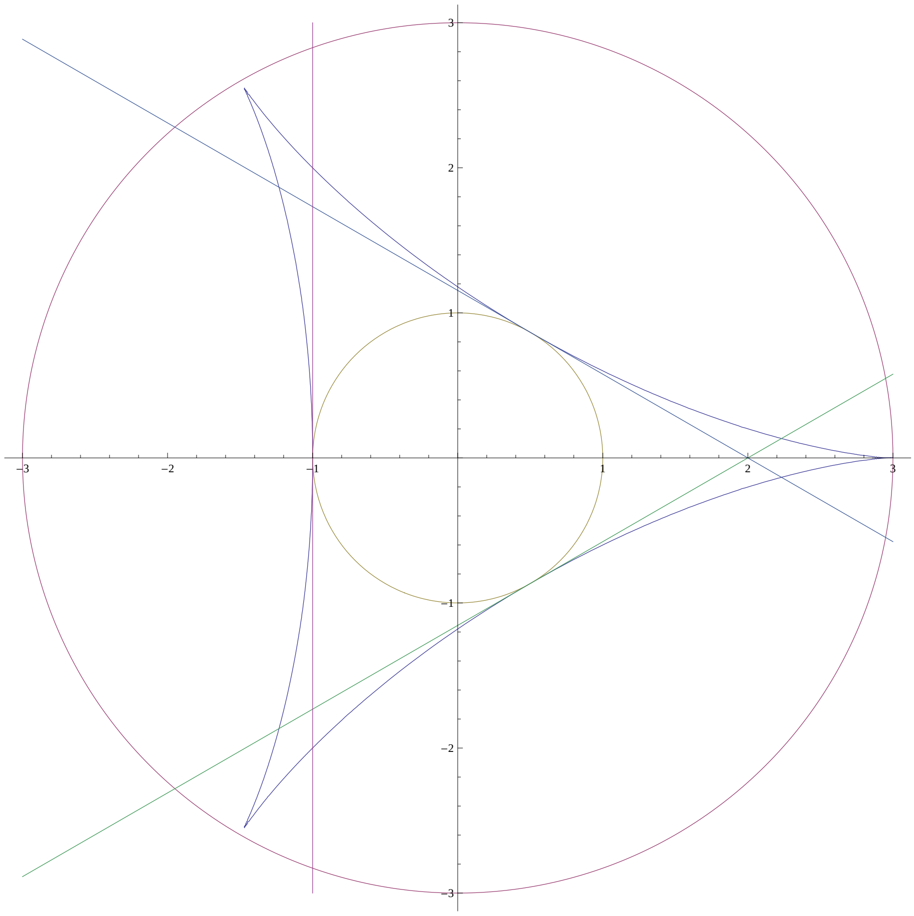


FIGURA 1. Il *Deltoide di Eulero*, le circonferenze inscritta e circoscritta e le tangenti richieste.

(5) Osserviamo che in $(3, 0)$ non è possibile applicare il teorema di Dini, infatti si ha $\partial_x F(3, 0) = \partial_y F(3, 0) = 0$ e quindi il punto $(3, 0)$ e i suoi ruotati di $2\pi/3$ sono punti di cuspide (non può esservi un cappio perché è il massimo della distanza da 0). L'insieme quindi ha l'aspetto di un triangolo equilatero con i lati leggermente incurvati verso l'interno.

CAPITOLO 30

Lezione del giorno lunedì 25 gennaio 2010 (2 ore) Esercizi ricapitolativi - continuazione

Esercizio 30.1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta, y) = (\sqrt{y^2+1}\cos\theta, y, \sqrt{y^2+1}\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi],\ |y| < 1,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y/2, x)$.

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.

(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la circonferenza di raggio $\sqrt{2}$, centrata in $(0, 1, 0)$ e appartenente al piano $y = 1$ parametrizzata da

$$\gamma(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, 1, \sqrt{2}\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.

(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(1, 0, 0)$.

(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Svolgimento. Poniamo $\varphi(\theta, y) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ e $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha

$$\mathrm{div}\vec{F}(x, y, z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 2x + 1/2,$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & y/2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x \end{pmatrix} = (0, -1, 0).$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Dal teorema di Stokes, la circuitazione è il flusso del rotore attraverso la superficie $D = \{(x, 1, z) : x^2 + z^2 \leq 2\}$ con normale $(0, -1, 0)$, infatti la normale $(0, -1, 0)$ su D induce per la regola della mano destra l'orientamento richiesto su γ. Il flusso è:

$$\int_D \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_D d\sigma = \mathrm{Area}(D) = 2\pi.$$

Verifichiamo il risultato:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\, d\gamma &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\sqrt{2}\cos\theta, 1, \sqrt{2}\sin\theta) \cdot (-\sqrt{2}\sin\theta, 0, \sqrt{2}\cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(- 2^{3/2}\cos^2\theta\sin\theta + 2\cos^2\theta \Big)\, d\theta = 2\pi\end{aligned}$$

Quindi la circuitazione non è nulla, il che conferma come $\vec{F}$ non sia conservativo.

(3) La matrice Jacobiana è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(\theta, y) = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}.$$

Per la formula di Binet, l'elemento d'area è:

$$\omega_2 = \sqrt{\det{}^2 B_1 + \det{}^2 B_2 + \det{}^2 B_3}$$

dove

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det{}^2 B_1 = (y^2+1)\sin^2\theta.$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}, \qquad \det{}^2 B_2 = y^2,$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}, \qquad \det{}^2 B_3 = (y^2+1)\cos^2\theta.$$

da cui $\omega_2 = \sqrt{2y^2+1}$.

(4) Una base dello spazio tangente è data dalle colonne della matrice Jacobiana di φ. In particolare, nel punto $(1,0,0) = \varphi(0,0)$ si ha $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. La normale deve essere ortogonale a questi due vettori, e avere norma uno, per cui è della forma $(\pm 1, 0, 0)$. Verifichiamo quale di questi due è la normale indotta dalla parametrizzazione:

$$\det \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & = \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mp 1.$$

Il determinante deve essere positivo, per cui la normale indotta nel punto $(1,0,0)$ è $(-1,0,0)$.

(5) Il flusso richiesto vale:

$$\begin{aligned}
\Phi(S,\vec{F}) &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \det \begin{pmatrix} F_1\circ\varphi & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ F_2\circ\varphi & 0 & 1 \\ F_3\circ\varphi & \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \det \begin{pmatrix} (y^2+1)\cos^2\theta & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ y/2 & 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (-y/2)\det \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta + \\
&\quad + \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (-1)\det \begin{pmatrix} (y^2+1)\cos^2\theta & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \sqrt{y^2+1}\cos\theta \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} y^2/2\,dy\,d\theta + \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \Big((y^2+1)^{3/2}\cos^3\theta + (y^2+1)\sin\theta\cos\theta\Big)\,d\theta\,dy \\
&= \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio è sfruttato il fatto che:

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi}\sin w\,dw = 0.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(1-\sin^2\theta)\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\,\cos\theta\,d\theta + \int_{\pi/2}^{3/2\pi}(1-\sin^2\theta)\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-1}^{1}(1-w^2)\,dw + \int_{1}^{-1}(1-w^2)\,dw = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 30.2. Risolvere l'equazione differenziale $y' + \dfrac{1}{\sin x}\,y = \dfrac{1}{y}$.

Svolgimento. L'equazione data è di Bernoulli e il problema è posto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$. Poniamo quindi $z = y^{1-(-1)} = y^2$. Derivando, si ottiene $z' = 2yy' = 2 - 2z/\sin x$. Scriviamo l'equazione in forma di equazione totale:

$$\omega(x, z) = p(x, z)\, dx + q(x, z)\, dz = \left(2 - \frac{2z}{\sin x}\right) dx - dz = 0$$

Si ha

$$\partial_z p(x, z) - \partial_x q(x, z) = -\frac{2}{\sin x} = \frac{2}{\sin x} q(x).$$

Calcoliamo un primitiva di $2/\sin x$ utilizzando le formule[1] che esprimono $\sin x$ in funzione di $t = \tan(x/2)$:

$$2 \int \frac{dx}{\sin x} = 2 \int \frac{1 + t^2}{2t} \frac{2\, dt}{1 + t^2} = 2 \log |\tan(x/2)|$$

Pertanto il fattore integrante è $h(x, z) = \tan^2(x/2)$. Moltiplicando per tale fattore, l'equazione diviene:

$$\left(2 \tan^2(x/2) - \frac{z \tan(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right) dx - \tan^2(x/2) dz = 0$$

Una primitiva è data da:

$$V(x, z) = 4 \tan(x/2) - 2x - z \tan^2(x/2),$$

e le soluzioni dell'equazione totale sono date da $V(x, z) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Pertanto le soluzioni dell'equazione in z sono (si moltiplichi per $\mathrm{sgn}(\tan(x/2))$):

$$z(x) = -\frac{c + 2x - 4 \tan(x/2)}{\tan^2(x/2)}$$

cui corrispondono le soluzioni in y:

$$y(x) = \pm \frac{\sqrt{c + 2x - 4 \tan(x/2)}}{|\tan(x/2)|}.$$

Esercizio 30.3. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} + 2x + 3y & = 3e^{-2t}, \\ \dot{y} + 5x + y & = 0. \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Svolgimento. Posto $z = (x, y)$, il sistema si riscrive nella forma $\dot{z} = Az + B(t)$ con

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $T = \mathrm{tr}(A) = -3$ e $D = \det(A) = -13$. L'equazione degli autovalori è $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$ ovvero $\lambda^2 + 3\lambda - 13 = 0$, che ammette come soluzioni i due autovalori reali

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-3 - \sqrt{61}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-3 + \sqrt{61}\right).$$

Poiché $D \neq 0$, l'unico punto di equilibrio per l'omogeneo associato è $(0, 0)$, e poiché gli autovalori sono di segno discorde tale punto è una sella.

Riscrivendo il sistema dato, si ha: $\begin{cases} -3y = \dot{x} + 2x - 3e^{-2t} \\ \dot{y} = -5x - y \end{cases}$.

Derivando la prima equazione, si ottiene $-3\dot{y} = \ddot{x} + 2\dot{x} + 6e^{-2t}$.
Sostituiamo l'espressione di $\dot{y}$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$-3(-5x - y) = \ddot{x} + 2\dot{x} + 6e^{-2t}.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $\ddot{x} + 2\dot{x} - 15x - 3y + 6e^{-2t} = 0$.
Sostituiamo l'espressione di y ottenuta dalla prima equazione:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 15x + (\dot{x} + 2x - 3e^{-2t}) + 6e^{-2t} = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 15x + \dot{x} + 2x - 3e^{-2t} + 6e^{-2t} = 0.$$

[1]Tali formule porgono $t = \tan(x/2)$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Tale equazione si riscrive come:

$$\ddot{x} - (-2-1)\dot{x} + (2-15)x - 3e^{-2t} + 6e^{-2t} = 0$$

In notazione compatta, si ha $\ddot{x} - T\dot{x} + D\,x = -3e^{-2t}$. L'omogenea associata ha soluzione generale $c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$ Cerchiamo una soluzione particolare di tale equazione con il metodo dei coefficienti indeterminati. Poiché -2 non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione nella forma qe^{-2t} con $q \in \mathbb{R}$. Sostituendo e semplificando e^{-2t}, si ottiene $4q - 6q - 13q = -3$ da cui $q = 1/5$, quindi si ottiene

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{5}e^{-2t}$$

Derivando, si ha:

$$\dot{x}(t) = c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} - \frac{2}{5}e^{-2t}.$$

Si ha perciò:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{3}\left(c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} - \frac{2}{5}e^{-2t} + 2\left(c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{5}e^{-2t}\right) - 3e^{-2t}\right) \\ &= \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{61}\right)t}\left(-\left(1+\sqrt{61}\right)c_1e^{\sqrt{61}t} + \left(\sqrt{61}-1\right)c_2 + 6e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{61}-1\right)t}\right). \end{aligned}$$

La soluzione del sistema è quindi:

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{-\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{61}\right)t} + c_2e^{-\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{61}\right)t} + \frac{e^{-2t}}{5} \\ y(t) = \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{61}\right)t}\left(-\left(1+\sqrt{61}\right)c_1e^{\sqrt{61}t} + \left(\sqrt{61}-1\right)c_2 + 6e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{61}-1\right)t}\right) \end{cases}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

CAPITOLO 31

Lezione del giorno martedì 26 gennaio 2010 (1 ora) Esercizi ricapitolativi - conclusione

Esercizio 31.1. Al variare di $a \in \mathbb{R}$, studiare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = t - x^2(t), \\ x(0) = a, \end{cases}$$

tracciandone un grafico approssimativo. In particolare: dire se esistono valori di a tali che la soluzione sia definita su tutto l'intervallo $(-\infty, 0]$; dire se esistono valori di a tali che la soluzione sia definita su tutto l'intervallo $[0, +\infty)$.

Svolgimento. Vale il teorema di esistenza e unicità. Studiamo i punti dove $\dot{x} = 0$. Poniamo:

$$R := \{(t, x(t)) : \dot{x}(t) > 0\} = \{(t, x) : t < x^2\},$$

tale regione è la regione di crescenza delle soluzioni. Se consideriamo il sistema autonomo:

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = t - x^2 \end{cases}$$

si ha che la regione R è invariante in avanti. Infatti $(\dot{t}, \dot{x})_{(t,x) \in \mathbb{R}} = (1, 0)$ che punta all'interno di R. Pertanto una soluzione che vi entri, ivi rimane intrappolata.
Passando al limite nell'espressione di $\dot{x}$, si deduce che non possono esservi asintoti orizzontali per $x \to +\infty$.
Calcoliamo la derivata seconda: $x'' = 1 - 2xx' = 1 - 2x(t - x^2)$ e si ha

$$\gamma := \{(t, x) : x'' = 0\} = \{(t, x) : 1 - 2xt + 2x^3\} = \{(t, x) : t = 1/(2x) + x^2\}.$$

La curva γ, vista come $t = t(x) = 1/(2x) + x^2$, è asintotica a $t = x^2$ per $x \to +\infty$, per $x \to 0^{\pm}$ il limite è $\pm\infty$ e inoltre il ramo di tale curva per $x > 0$ è contenuto in R. La curva interseca l'asse x in $-\sqrt[3]{1/2}$ e come funzione di x essa è strettamente decrescente per $x < 0$. Si ha che $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ è costituito da tre componenti connesse: di queste, quella contenente l'origine è una regione di convessità per le soluzioni, le altre due di concavità.
Poniamo quindi:

$$\begin{aligned} Q_0 &:= \{(t, x) : x'' < 0,\, x > 0,\, t > 0\} = \{(t, x) : 1 - 2xt + 2x^3 < 0\, x > 0,\, t > 0\} \\ Q_1 &:= \{(t, x) : x'' > 0\} = \{(t, x) : 1 - 2xt + 2x^3 > 0\} \\ Q_2 &:= \{(t, x) : x'' < 0,\, x < 0\} = \{(t, x) : 1 - 2xt + 2x^3 < 0,\, x < 0\}. \end{aligned}$$

E' utile che a questo punto il lettore si faccia un disegno della situazione.
Cerchiamo di capire se qualcuna di queste regioni è invariante. A tal proposito abbiamo bisogno delle normali interne. Poiché la frontiera di tali regioni è γ che è definita implicitamente da implicitamente da $F(t, x) = 0$ con $F(t, x) = 1 - 2xt + 2x^3$, la normale in un punto $(t, x) \in \gamma$ è data da $\hat{n}(t, x) = \pm\nabla F(t, x) = \mp(2x, 2t - 6x^2)$, dove il segno viene scelto in base al fatto che si desideri la normale entrante o uscente da Q_0, Q_1, Q_2.
Consideriamo la regione Q_0. La normale entrante in Q_0 deve avere prima componente positiva. Nei punti di ∂Q_0, si ha $x > 0$, pertanto il segno corretto della normale entrante in Q_0 è $\hat{n}_0(t, x) = (2x, 2t - 6x^2)$.
Consideriamo la regione Q_2. La normale entrante in Q_2 deve avere prima componente negativa. Nei punti di ∂Q_2, si ha $x < 0$, pertanto il segno corretto della normale entrante in Q_2 è $\hat{n}_2(t, x) = (2x, 2t - 6x^2) = \hat{n}_0(t, x)$.
La regione Q_1 avrà normale entrante data da $\hat{n}_1(t, x) = -n_0(t, x) = -(2x, 2t - 6x^2)$.

A questo punto eseguiamo il prodotto scalare $\hat{n}_i \cdot (1, \dot{x})$ nei punti di ∂Q_i:

$$\begin{aligned}
\hat{n}_0 \cdot (1,\dot{x})_{t=1/(2x)+x^2} &= [2x + (t-x^2)(2t-6x^2)]_{t=1/(2x)+x^2} = 2x + \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x} + 2x^2 - 6x^2\right) \\
&= 2x + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x} = \frac{1}{2x^2} > 0. \\
\hat{n}_2 \cdot (1,\dot{x})_{t=1/(2x)+x^2} &= \hat{n}_0 \cdot (1,\dot{x})_{t=1/(2x)+x^2} = \frac{1}{2x^2} > 0. \\
\hat{n}_1 \cdot (1,\dot{x})_{t=1/(2x)+x^2} &= -\hat{n}_0 \cdot (1,\dot{x})_{t=1/(2x)+x^2} = -\frac{1}{2x^2} < 0.
\end{aligned}$$

Quindi le regioni Q_0 e Q_2 sono invarianti in avanti, mentre la regione Q_1 non lo è. Per vedere se la regione Q_1 è invariante all'indietro, dobbiamo eseguire il prodotto scalare tra la normale entrante a Q_1 e il campo $-(1,\dot{x})$:

$$\hat{n}_1 \cdot (-1,-\dot{x})_{t=1/(2x)+x^2} = \frac{1}{2x^2} > 0,$$

quindi la regione Q_1 è invariante all'indietro.
Studiamo la prolungabilità delle soluzioni per $t < 0$. A tal proposito, poniamo $y(t) = x(-t)$. Studiare il comportamento all'indietro di $x(t)$ equivale a studiare il comportamento in avanti di $y(t)$. Si ha $\dot{y} = -\dot{x}(-t) = -(-t - y^2(t)) = t + y^2(t)$.
Per ogni condizione iniziale, esiste $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(a)$ tale per cui dato $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}(a)$ la soluzione $y(t)$ sia definita per $|t| < \varepsilon^2$, ciò è possibile grazie al Teorema di Esistenza e Unicità. Studiamo il comportamento per $t > \varepsilon^2$: si ha $\dot{y} > \varepsilon^2 + y^2$ e quindi confrontiamo con $\dot{z} = z^2 + \varepsilon^2$, $z(0) = a$, la cui soluzione generale è

$$\frac{1}{\varepsilon}\arctan\frac{z}{\varepsilon} = t + C, \qquad C = \frac{1}{\varepsilon}\arctan\frac{a}{\varepsilon}, \qquad z(t) = \varepsilon\tan\left(\varepsilon t + \arctan\frac{a}{\varepsilon}\right).$$

Si nota che $z(t)$ ammette asintoto verticale per

$$t^* = \frac{\pi/2 - \arctan\frac{a}{\varepsilon}}{\varepsilon} > 0, \qquad \lim_{t\to t^{*-}} z(t) = +\infty,$$

e quindi anche $y(t)$ ammette asintoto verticale per $0 < t_1 < t^*$, perciò $x(t)$ ha un asintoto verticale per $t = -t_1 < 0$.
In definitiva, tutte le soluzioni $x(t)$ hanno un asintoto verticale nel semipiano $\{(t,x) : t < 0\}$ con limite da destra pari a $+\infty$, e quindi non sono prolungabili fino a $-\infty$.
Studiamo ora il comportamento per $t \geq 0$. Una soluzione che parta con condizione $a \geq 0$, per $t > 0$ decresce fino ad avere il minimo sulla curva $t = x^2$ dove entra nella regione invariante R, ha un flesso quando incontra il ramo di γ contenuto in R e poi cresce a $+\infty$ rimanendo entro Q_0 e in generale questo è il comportamento di ogni soluzione che entri in R, in particolare tali soluzioni sono definite per tutti i tempi $t > 0$. Proviamo che tali traiettorie sono asintotiche a $\sqrt{t}$. Si ha:

$$\frac{\dot{x}}{t} = 1 - \frac{x^2}{t}.$$

Per t sufficientemente grande si ha che $\dot{x}(t)$ è decrescente perché $x(t)$ si trova nella regione di concavità Q_0, pertanto il membro di sinistra tende a zero, ma allora $x^2(t)/t$ deve tendere a 1 e perciò $x(t)$ è asintotico a $\sqrt{t}$.
Se una soluzione parte all'interno di Q_2, ovvero con $a < -\sqrt[3]{1/2}$ vi rimane per ogni $t > 0$, in particolare è sempre strettamente decrescente e per l'invarianza in avanti di tale regione non può entrare in R. Non potendovi essere asintoti orizzontali, essa decresce a $-\infty$, ciò accade anche se una soluzione decresce fino ad entrare in Q_2: a quel punto decresce a $-\infty$. Mostriamo che le soluzioni che partono nella regione Q_2 hanno un asintoto verticale per $t > 0$. Studiamo ora la soluzione nell'intervallo $0 < t < 1$. Si ha $\dot{x} < 1 - x^2$, e procediamo per confronto con $\dot{z} = 1 - z^2$, $z(0) = a$. Verifichiamo la presenza di asintoti verticali per $t = t^* < 1$ con condizioni iniziali opportune: Si ha:

$$\int \frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-z}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+z}\,dz = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-z}{1+z}\right|$$

quindi in forma implicita:

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = t + C.$$

Per $z \to \pm\infty$ si ottiene $t + C \to 0$ e quindi $t^* = -C$. Sostituendo le condizioni iniziali, si ottiene:

$$C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+a}{1-a}\right|.$$

e quindi dobbiamo risolvere

$$0 < -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+a}{1-a}\right| < 1$$

ossia

$$0 < \log\left|\frac{1-a}{1+a}\right| < 2$$

Poiché $|1-a| > |1+a|$ se $a < 0$, si ha che la prima disuguaglianza è sempre soddisfatta. Per quanto riguarda la seconda, è sicuramente soddisfatta per $|a|$ sufficientemente grande, $a < 0$, perché l'argomento del logaritmo tende a 1 se $a \to -\infty$. Quindi esiste $a^* < 0$ tale che se $a < a^*$ la disuguaglianza è soddisfatta. Quindi per $a < a^*$ le soluzioni ammettono asintoto verticale a $-\infty$ per $0 < t_a^* < 1$. Se $x(t)$ è una soluzione massimale che entra all'istante $t_0 > 0$ nella regione Q_2, il suo limite verso l'estremo superiore dell'intervallo di definizione I è $-\infty$, pertanto esiste $t_1 > t_0$, $t_1 \in I$ tale che $x(t_0) = b < a^*$. Poniamo $v(t) = x(t-t_0)$ e studiamo la soluzione $x(t)$ per $t_0 < t < t_0 + 1$ esattamente come prima. Otteniamo ancora un asintoto verticale.
Proviamo ora che esiste un'unica soluzione strettamente decrescente definita per ogni $t > 0$ che separa il comportamento tra le soluzioni definite per ogni $t > 0$ e quelle che decrescono a $-\infty$ in tempo finito. Tale soluzione risulterà anche convessa e strettamente decrescente in tutto il suo intervallo di definizione. Osserviamo che per il teorema di esistenza e unicità se $a_1 < a_2 < 0$, e le soluzioni corrispondenti sono $x_1(t)$ e $x_2(t)$, allora si deve avere $x_1(t) < x_2(t)$ per ogni $t \geq 0$ dove le due soluzioni sono entrambe definite. Definiamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} A &:= \{a \in \mathbb{R} : \ \text{esiste } t_a \geq 0 \text{ tale che } t_a = x^2(a, t_a)\} \\ B &:= \left\{a \in \mathbb{R} : \ \text{esiste } t_a \geq 0 \text{ tale che } t_a = \frac{1}{2x(a,t_a)} + x^2(a,t_a),\, x(a,t_a) < 0\right\}, \end{aligned}$$

ove $x(a,t)$ è la soluzione corrispondente alla condizione iniziale a valutata al tempo t. Poiché $A \supset [0,+\infty[$ e $B \supset]-\infty, a^*]$ tali insiemi sono non vuoti. Inoltre si ha $A \cap B = \emptyset$ quindi A è inferiormente limitato e B è superiormente limitato, pertanto esistono finiti $a^+ = \inf A \leq 0$ e $a^- = \sup B \geq -1$. Proviamo che $a^+ \notin A$. Supponiamo per assurdo che $a^+ \in A$ e sia $\bar{x}(t)$ la soluzione corrispondente. Allora esiste $\bar{t} > 0$ tale che $\bar{t} = \bar{x}^2(\bar{t})$, inoltre, poiché $\bar{a} \leq 0$ si ha in realtà $\bar{x}(\bar{t}) = -\sqrt{\bar{t}}$. Consideriamo la soluzione del problema $\dot{x} = t - x^2$, $x(t_0) = -\sqrt{\bar{t}}$. Per l'invarianza delle regioni R e Q tale soluzione deve essere definita in $[0,\bar{t}]$ e contenuta all'interno della regione dove $\dot{x} < 0$, pertanto si deve avere che tale soluzione in $\bar{t}$ è minore di $\bar{x}(\bar{t}) = -\sqrt{\bar{t}}$, pertanto in 0 essa è minore di α^+, contrariamente alla definizione di α^+. In modo analogo si prova che $a^- \notin B$. Le soluzioni corrispondenti a dati iniziali $[a^-, a^+]$ non entrano né in A, né in B quindi hanno le proprietà richieste.
Proviamo che $a^- = a^+$. Supponiamo siano diversi e siano $a^- < a_1 < a_2 < a^+$. Si ha allora

$$\frac{d}{dt}(x(a_1,t) - x(a_2,t)) = x^2(a_1,t) - x^2(a_2,t) > 0$$

pertanto la distanza tra le soluzioni relative ai dati iniziali a_1 e a_2 deve aumentare dal valore iniziale $a_1 - a_2 > 0$. Tuttavia esse sono comprese tra le curve di equazione $t = x^2$ e $t = 1/(2x) + x^2$ che sono tra loro asintotiche. Ciò è assurdo e quindi $a^- = a^+ = \alpha$. Le proprietà di questa curva discendono dal fatto che essa non entra mai nelle regioni R e Q. In figura presentiamo l'andamento di alcune soluzioni e le curve che delimitano le regioni invarianti. *Curiosità:* la condizione iniziale α corrispondente alla soluzione asintotica a $-\sqrt{t}$ per $t \to +\infty$, determinata in modo simbolico, corrisponde a

$$\alpha = -\frac{3^{1/3}\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \simeq -0,729011,$$

dove $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$ è la funzione Gamma di Eulero.

Esercizio 31.2. Si utilizzi il metodo di separazione delle variabili per risolvere la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\begin{cases} -6\partial_t u(t,x) + 4\partial_{xx}u(t,x) + 3u = 0, & (t,x) \in]0,+\infty[\times[0,\pi], \\ \partial_x u_x(t,0) = \partial_x u_x(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = x(\pi - x). \end{cases}$$

Svolgimento. Cerchiamo soluzioni elementari non nulle nella forma $u(t,x) = U(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene:

$$-6\dot{U}(t,x) + 4U(t)\ddot{X}(x) + 3U(t)X(x) = 0$$

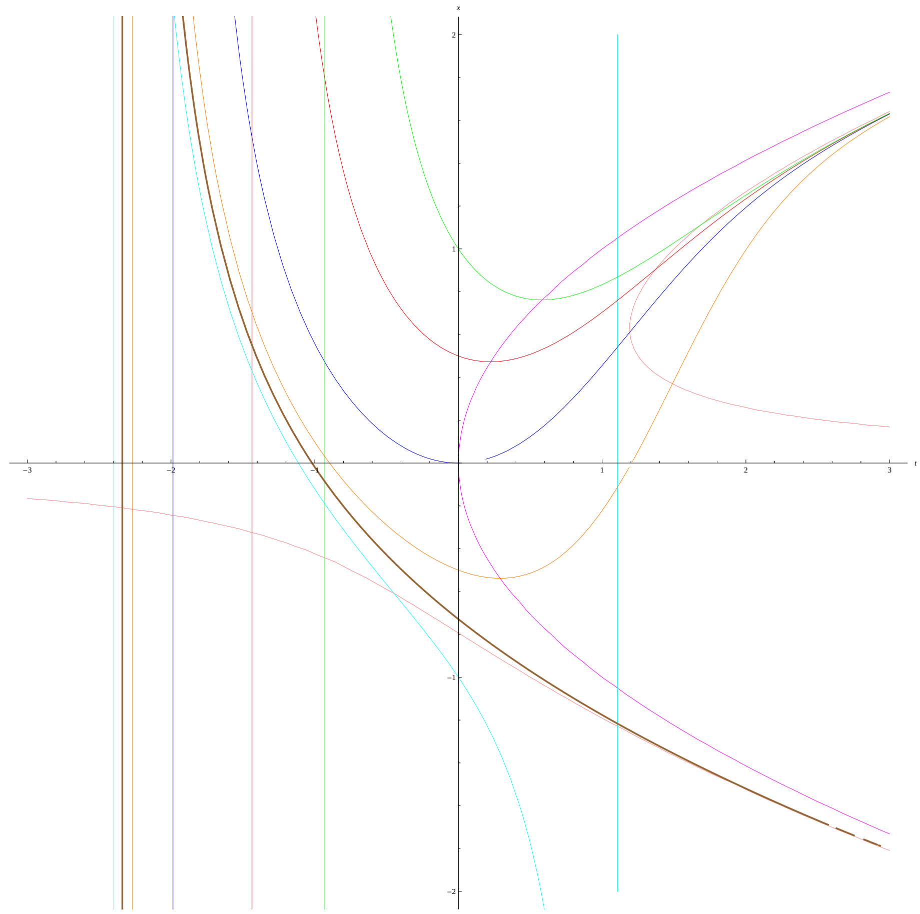


FIGURA 1. Lo studio di $\dot{x} = t - x^2$, $x(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ottiene che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui:

$$-\frac{-6\dot{U}(t,x) + 3U(t)}{U(t)} = \frac{4\ddot{X}(x)}{X(x)} =: \lambda$$

Questo implica che per $\lambda \in \mathbb{R}$ si hanno le due equazioni:

$$\begin{cases} 4\ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ -6\dot{U}(t) + (3+\lambda)\, U(t) = 0. \end{cases}$$

da accoppiarsi con le opportune condizioni al contorno.
Studiamo l'equazione per X, il cui polinomio caratteristico è $4\mu^2 - \lambda = 0$, di discriminante $\Delta = 16\lambda$. Se $\lambda > 0$, l'equazione caratteristica ammette soluzioni $\mu_1 = \sqrt{\lambda}/2$, $\mu_2 = -\mu_1$. La soluzione generale dell'equazione è $\Phi(c_1, c_2, x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$. Derivando, si ottiene $\frac{d}{dx}\Phi(c_1, c_2, x) = c_1\mu_1 e^{\mu_1 x} + c_2\mu_2 e^{\mu_2 x}$. Sostituendo le condizioni al contorno $\dot{X}(0) = \frac{d}{dx}\Phi(c_1, c_2, 0) = 0$, si ottiene $c_1\mu_1 + c_2\mu_2 = 0$, sostituendo si ha $\frac{d}{dx}\Phi(c_1, c_2, x) = c_1\mu_1(e^{\mu_1 x} - e^{\mu_2 x})$ e poiché $\mu_1 \neq \mu_2$, l'unica soluzione è quella nulla $c_1 = c_2 = 0$ non accettabile.
Se $\lambda = 0$, l'equazione in $X(x)$ ammette soluzione $X(x) = c_0 + c_1 x$, sostituendo le condizioni iniziali e finale si ottiene $c_1 = 0$, quindi si ha la soluzione accettabile $X_0(x) = c_0$ relativa a $\lambda = 0$.
Se $\lambda < 0$, l'equazione in $X(x)$, posto $\omega = \sqrt{|\lambda| 2}$, ammette soluzione $X(x) = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x$. Derivando, si ha $\dot{X}(x) = \omega(-c_1 \sin\omega x + c_2 \cos\omega x)$. Valutando in 0 si ottiene $c_2 = 0$, e valutando in π si ottiene $\omega = n \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella definizione di ω e ricordando che $\lambda < 0$, si ha che λ deve essere della forma $-4n^2$.
Pertanto i valori accettabili di λ sono $\lambda_0 = 0$ cui corrisponde la soluzione $X_0(x) = c_0$ e $\lambda_n = -4n^2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ cui corrisponde la soluzione $X_n(x) = c_n \cos nx$.
L'equazione in U per tali valori di λ_n ha soluzione

$$U_n(t) = d_n e^{\frac{3-4n^2}{6}\, t}.$$

Posto $a_n = c_n d_n$, costruiamo una soluzione elementare moltiplicando $U_n(t)X_n(x)$, si ha:

$$u_n(t,x) = a_n e^{\frac{3-4n^2}{6}\,t} \cos nx.$$

Cerchiamo di coprire il dato iniziale sovrapponendo infinite soluzioni elementari:

$$u(0,x) = x(\pi - x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Pertanto si ha che i coefficienti a_j, $j > 1$ sono i coefficienti di Fourier della funzione $x(\pi - x)$ definita su $[0,\pi]$, prolungata per parità su $[-\pi,\pi$ e per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Il coefficiente a_0 è metà del coefficiente di ordine 0.

$$a_0 = \frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\int_{0^\pi} x(\pi - x)\,dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi(x - x^2)\cos nx\,dx = -\frac{2(1+(-1)^n)}{n^2}.$$

Solo i coefficienti di ordine pari sono non nulli, e $a_{2k} = -1/k^2$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si ottiene quindi la soluzione

$$u(t,x) = \frac{\pi^2}{6}e^{t/2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{3-16k^2}{6}\,t}}{k^2}\cos(2kx) = e^{t/2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{-8k^2}{3}\,t}}{k^2}\cos(2kx)\right).$$

Il termine generale della serie è in modulo maggiorato da $1/k^2$, questo porge la convergenza totale della serie.

CAPITOLO 32

Miscellanea di Esercizi supplementari

Esercizio 32.1 (Integrali dipendenti da parametro).

(1) Studiare le seguenti funzioni (dominio, continuità, derivabilità)
  (a) $F(x) = \int_0^{2\pi} e^{xt} \frac{\sin t}{t} \, dt$, $x \in \mathbb{R}$
  (b) $G(x) = \int_0^x \frac{\log(1+xt)}{1+t^2} \, dt$, $x \in \mathbb{R}$
(2) Calcolare le derivate parziali prime della funzione
$$F(x,y) = \int_y^x e^{-(x-t)^2} \, dt$$
(3) Dimostrare, mediante derivazione sotto il segno di integrale, che la funzione:
$$F(x) = \int_0^{2\pi} e^{x \sin y} \, dy$$
ha un minimo relativo in $x = 0$.
(4) Mediante derivazione rispetto a y, calcolare l'integrale
$$F(y) = \int_0^y \frac{\log(1+xy)}{1+x^2} \, dx$$
(5) Verificare, mediante derivazione sotto il segno di integrale, che la funzione
$$F(x) = \int_0^x e^{-xt^2} \, dt - x$$
ha un massimo relativo per $x = 0$.
(6) Applicando la regola di derivazione sotto il segno di integrale, dimostrare che la funzione
$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{x}} \frac{\sin(xy)}{y} \, dy$$
è costante per $x > 0$

Esercizio 32.2. Si determini il dominio della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$$f(x,y) = \arcsin(xy).$$
Si studi continuità e differeziabilità di f e si scriva il differenziale di f nei punti laddove esso esiste.

Esercizio 32.3 (funzione implicita, studio qualitativo). Studiare le curve implicitamente definite da:
(1) $(x^2 + y^2 + 12ax + 9a^2)^2 = 4a(2x+3a)^3$, al variare di $a > 0$.
(2) $y^4 - x^4 + ay^2 + bx^2 = 0$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

Esercizio 32.4 (massimi e minimi liberi e vincolati).

(1) Si mostri che la seguente funzione:
$$f(x,y) = \log\left(\arctan\left(e^{(x^2+y^4)^3}\right) + 1\right)$$
ha un minimo relativo in $(0,0)$.
(2) Mostrare che la funzione $f(x,y) = 1/x + 1/y$ ammette estremi assoluti sull'insieme $E_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/x^2 + 1/y^2 = 1/a^2, \, x \neq 0, y \neq 0\}$ con $a > 0$.
(3) Determinare gli estremi della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto la condizione $x + y + z + 1 = 0$.
(4) Si determinino gli estremi di $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$ sotto la condizione $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

(5) Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione $f(x, y, z) = x^2 + \cos(y)$, sull'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + e^{z^2} \leq 10\}$.
(6) Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione $f(x, y, z) = y\sqrt{1 + z^2}$ sull'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x + y^2 + z^2 \leq 3\}$.
(7) Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione $f(x, y, z) = (1 + x^2)e^{z^2}$ sull'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 \leq 0\}$.
(8) Quanti sono i punti di minimo relativo di $f(x, y) = cos^2(x) + y^3 - 3y^2$ appartenenti all'insieme $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x < 2\pi,\ |y| < 3\pi\}$?
(9) Si studino, al variare di $a \in \mathbb{R}$ i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione $f_a(x, y, z) = x + ax^2 - cos(y) + z^2 e^x$ sull'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, -\pi \leq y \leq \pi, -1 \leq z \leq 1\}$.
(10) Si studino, al variare di $a \in \mathbb{R}$ i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione $f_a(x, y, z) = e^{a\cos(z)+y^2} + \sin^2(x)$ sull'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq 1\}$.

Esercizio 32.5 (integrali multipli).

(1) Calcolare l'integrale doppio $\int\int_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ esteso al dominio D dove D è la semicorona circolare di ordinate non negative che ha centro nell'origine e raggi 2 e 3
(2) Calcolare l'integrale doppio $\int\int_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dx\, dy$ dove D è il triangolo che ha per lati le rette di equazioni $y = x$, $y = -x$, $x = 1$
(3) Calcolare il seguente integrale doppio esteso a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$:
$$\int\int_D \frac{y}{1 + xy}\, dxdy$$
(4) Calcolare il seguente integrale doppio esteso a $D = B((0, 0), 3) \setminus B((0, 0), 2) \cap \{y \geq 0\}$:
$$\int\int_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$
(5) Calcolare il seguente integrale doppio esteso a $D = B((1, 0), 1) \setminus B((0, 0), 1) \cap \{y \geq 0\}$:
$$\int\int_D x^2 + y^2\, dxdy$$
(6) Calcolare il seguente integrale doppio:
$$\int\int_D x \sin|y - 2x|\, dx\, dy$$
essendo D il triangolo avente i vertici nei punti $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$
(7) Sia D il quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Calcolare l'integrale:
$$\int_D \frac{1}{x + y}\, dxdy$$
(8) Calcolare l'integrale:
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2)(1 + y^2)}\, dxdy$$
(9) Calcolare il seguete integrale triplo:
$$\int\int\int_T z\sqrt{1 - y^2}\, dx\, dy\, dz,$$
dove T è il cilindro circolare retto di altezza 1 che ha per asse l'asse z e per base il cerchio di raggio 1 centrato nell'origin.
(10) Calcolare il seguente integrale triplo:
$$\int\int\int_T xz^3\, dx\, dy\, dz,$$
dove T è il solido contenuto nel primo ottante e limitato dalle superfici di equazioni $y = 4x^2 + 9z^2$ e $y = 1$
(11) Calcolare il seguente integrale triplo:
$$\int\int\int_T e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dx\, dy\, dz,$$
dove T è il dominio $4x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$.

(12) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

dove T è il cono circolare retto con vertice nell'origine, per asse l'asse z e per direttrice il cerchio di raggio r situato sul piano $z=h$.

(13) Calcolare il momento di inerzia di un cerchio sia rispetto ad un diametro sia rispetto al suo centro.

(14) Sia:

$$D := \{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : x^2+z^2\le 2,\, x^2+(z-1)^2\ge 1,\, z\ge 0\}$$

Trovare l'area di D. Determinare la prima coordinata del baricentro di

$$D^+ := \{(x,z)\in D : x\ge 0\}$$

Determinare il volume del solido S generato da D mediante una rotazione completa attorno all'asse z.

(15) Sia $I=[0,1]$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Definiamo $f_\alpha : I\times I\to\mathbb{R}$ mediante:

$$f_\alpha(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{se } x=y\\ \frac{1}{|x-y|^\alpha} & \text{se } x\neq y\end{cases}$$

Dire per quali α la funzione f_α è integrabile su $I\times I$. Per questi valori di α, calcolare

$$\int_{I\times I} f_\alpha(x,y)\,dx\,dy$$

(16) Sia $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+y)^2\le e^{-(x-y)^2}\}$. Calcolare:

$$I=\int_D e^{-(x-y)^2}\,dxdy$$

(17) Calcolare l'area della porzione di superficie di equazione $z=\arcsin x$ che si proietta ortogonalmente sul piano (x,y) nel dominio D limitato dalla curva di equazione $y^2=x^2(1-x^2)$

(18) Calcolare l'area di quella parte della superficie conica di equazione: $x^2+y^2-z^2=0$ che è contenuta nel tetraedro $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y+z\le 1$

Esercizio 32.6 (Stokes). Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_S F\cdot n\,d\sigma, \qquad F:=(xz,xy,yz)$$

dove $S := \partial\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+y+z\le 1\}$;

$$\int_C f\,d\sigma, \qquad f(x,y,z):=(z+1)\sqrt{1+x^2+y^2}+x^3+y^2$$

dove $C := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z^2,\, 0<z<1\}$

Esercizio 32.7. Sia $\alpha>0$ e si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|\sin(xy)-xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^3} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Determinare i valori di α per cui f è continua in $(0,0)$.

Svolgimento. Determiniamo l'ordine di infinitesimo di $\sin(xy)-xy$ nel modo seguente: cerchiamo $\beta>0$ che renda finito e non nullo il limite

$$\lim_{s\to 0}\frac{\sin(s)-s}{s^\beta}$$

Applicando due volte la regola de l'Hopital si ha

$$\lim_{s\to 0}\frac{\sin(s)-s}{s^\beta}=\lim_{s\to 0}\frac{\cos(s)-1}{\beta s^{\beta-1}}=\lim_{s\to 0}\frac{-\sin(s)}{\beta(\beta-1)s^{\beta-2}},$$

e tale limite è finito e non nullo solo se $\beta-2=1$, ovvero $\beta=3$. In tal caso si ha:

$$\lim_{s\to 0}\frac{\sin(s)-s}{s^3}=-\frac{1}{6}.$$

Osserviamo che i valori $\alpha \leq 0$ non risolvono il problema, infatti se $\alpha \leq 0$ si ha per $(x,y) \to 0$

$$\frac{|\sin(xy) - xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^3} \geq \frac{1}{(x^2+y^2)^3}$$

e l'ultimo termine diverge.
Sia quindi $\alpha > 0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \left(\frac{|\sin(xy)-xy|}{|xy|^3}\right)^\alpha \frac{|xy|^{3\alpha}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{1}{6^\alpha}\left(\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}\right)^3$$

Studiamo il limite tra parentesi tonde. Si ha $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, pertanto

$$0 \leq \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2^\alpha}(x^2+y^2)^{\alpha-1}.$$

Se $\alpha > 1$, il termine di destra è infinitesimo e si ha:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} = 0, \qquad \text{da cui} \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

e dunque se $\alpha > 1$ si ha che f è continua. Supponiamo ora $\alpha \leq 1$ e poniamo $y = mx$. Si ha

$$\frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} = \frac{|m|^\alpha}{m^2+1}\frac{|x|^{2\alpha}}{x^2},$$

se $\alpha < 1$ il limite per $x \to 0$ è $+\infty$, altrimenti se $\alpha = 1$ è $|m|/(m^2+1)$ quindi dipendente da m. In ambo i casi si ottiene che f non è continua. Quindi f è continua se e solo se $\alpha > 1$.
Per studiare il limite è possibile anche passare in coordinate polari:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to0^+\\x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta}} \frac{|\rho^2\sin\theta\cos\theta|^\alpha}{\rho^2} = \lim_{\substack{\rho\to0^+\\x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta}} \frac{1}{2^\alpha}\rho^{2\alpha-2}|\sin 2\theta|^\alpha.$$

e il limite è nullo solo se $\alpha > 1$, non esiste (dipende da θ) per $\alpha = 1$, e vale $+\infty$ per $\alpha < 1$.

Esercizio 32.8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-y^2}$, e sia

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{1-x^2} \text{ per } |x| \leq 1 \text{ e } y \geq |x|-1 \text{ per } |x| \geq 1\}.$$

Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y), \qquad \lim_{\substack{|(x,y)|\to\infty\\(x,y)\in C}} f(x,y).$$

Determinare i punti di massimo e minimo vincolato per f su C.

Svolgimento. Calcoliamo il limite di f lungo gli assi:

$$\lim_{\substack{|(x,y)|\to\infty\\y=0}} f(x,y) = \lim_{|x|\to\infty} x^2 = +\infty, \qquad \lim_{\substack{|(x,y)|\to\infty\\x=0}} f(x,y) = \lim_{|y|\to\infty} y^2e^{-y^2} = 0.$$

Tali limiti sono diversi tra loro, quindi il limite $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y)$ non esiste.
Si ha $0 \leq f(x,y) \leq (1+y^2)e^{-y^2}$ per $|x| \leq 1$ e se $|x| > 1$, si ha che $(x,y) \in C$ se $y-1 \geq |x|$ ossia $(y-1)^2 \geq x^2$.
Pertanto se $(x,y) \in C$ e $|x| > 1$ vale $0 \leq f(x,y) \leq ((y-1)^4+y^2)e^{-y^2}$.
Quindi in generale se $(x,y) \in C$ si ha

$$0 \leq f(x,y) \leq (1+y^2)e^{-y^2} + ((y-1)^4+y^2)e^{-y^2}.$$

Si ha che $|(x,y)| \to \infty$ con $(x,y) \in C$ implica $y \to +\infty$, e quindi l'ultimo termine tende a 0:

$$\lim_{\substack{|(x,y)|\to\infty\\(x,y)\in C}} f(x,y) = 0.$$

Studiamo i massimi e i minimi di f. Si ha $f(x,y)>0$ e il limite di f per $|(x,y)|\to\infty$ con $(x,y)\in C$ è nullo. Questo esclude la presenza di minimi assoluti. Si ha

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y)=2xe^{-y^2}\\ \partial_y f(x,y)=2ye^{-y^2}(1-x^2-y^2)\end{cases},$$

Si ha $\partial_x f(x,y)=\partial_y f(x,y)=0$ per $(x,y)=(0,0)\notin C$, $(x,y)=(0,\pm1)$. Pertanto i massimi e i minimi vincolati si trovano eventualmente sulla frontiera di C. La frontiera di C è parametrizzata da:

$$\gamma_1(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta),\ \theta\in[0,\pi]$$
$$\gamma_2(t)=(t,t-1),\ t>1$$
$$\gamma_3(t)=(-t,t-1),\ t>1$$

Si ha $f(\gamma_1(\theta))=e^{-\sin^2\theta}$, i cui massimi sono per $\theta=0,\pi$ e il minimo è per $\theta=\pi/2$, da cui $f(\pm1,0)=1$ e $f(0,1)=1/e$. Si ha $f(0,y)=y^2e^{-y^2}$ è decrescente per $y\geq1$, quindi $(0,1)$ non è né di massimo, né di minimo per f su C.
Si ha $f(\gamma_2(t))=f(\gamma_3(t))=(t^2+(t-1)^2)e^{-(t-1)^2}$, la cui derivata è:

$$\frac{d}{dt}f\circ\gamma_2(t)=\frac{d}{dt}f\circ\gamma_3(t)=-2te^{-(t-1)^2}(2t^2-4t+1)$$

che si annulla per $t=0$ (ma $\gamma_2(0),\gamma_3(0)\notin C$), per $t=t_1:=(2-\sqrt{2})/2<1$, (ma $\gamma_2(t_1),\gamma_3(t_1)\notin C$) e per $t=t_2:=(2+\sqrt{2})/2$. Le funzioni $f\circ\gamma_2(t)$ e $f\circ\gamma_3(t)$ sono crescenti in un intorno destro di 1, pertanto $(0,\pm1)$ non è né di massimo, né di minimo per f su C. Si ha $\gamma_2(t_2)=((2+\sqrt{2})/2,\sqrt{2}/2)$ e $\gamma_3(t_2)=(-(2+\sqrt{2})/2,\sqrt{2}/2)$. Proviamo che tali punti sono di massimo relativo e assoluto per la funzione f e il valore del massimo è $M:=f(\pm(2+\sqrt{2})/2,\sqrt{2}/2)=(2+\sqrt{2})/\sqrt{e}$: infatti dato $(x,y)\in C$ si ha $|x|\leq y-1$ da cui:

$$f(x,y)\leq((y-1)^4+y^2)e^{-y^2},$$

pertanto i punti di massimo sul bordo sono punti di massimo in C.

Esercizio 32.9. Si calcoli il limite:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{I_\alpha}{\alpha^4},$$

dove

$$I_\alpha=\int\int_{C_\alpha}\frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy,\qquad C_\alpha:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\leq x\leq\alpha,\frac{1}{x}\leq y\leq x\right\}.$$

Svolgimento. Si ha:

$$I_\alpha=\int_1^\alpha\left(\int_{1/x}^x\frac{x^2}{y^2}\,dy\right)dx=\int_1^\alpha x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^\alpha(x^3-x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_1^\alpha$$
$$=\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.$$

Pertanto $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{I_\alpha}{\alpha^4}=\frac{1}{4}$.

Esercizio 32.10. Si consideri la funzione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ di classe C^1:

$$F(x,y)=y^3-2xy^2+\cos(xy)-2.$$

Si mostri che la relazione $F(x,y)=0$ definisce implicitamente una funzione $\varphi:]-\delta,\delta[\to]1-\sigma,1+\sigma[$ in un intorno del punto $(0,1)$. Si calcoli la derivata $\varphi'(0)$ e si dica infine se φ è estendibile a tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Verifichiamo le ipotesi del Teorema di Dini della Funzione Implicita. Si ha $F(0,1)=0$. Calcoliamo:

$$\partial_y F(x,y)=3y^2-4xy-x\sin(xy).$$

Si ha $\partial_y F(0,1)=3\neq0$, quindi il Teorema di Dini assicura l'esistenza di una funzione φ che soddisfi le condizioni dell'enunciato. Calcoliamo ora:

$$\partial_x F(x,y)=2y^2-y\sin(xy).$$

La derivata richiesta è data da:

$$\varphi'(0)=-\frac{\partial_x F(0,1)}{\partial_y F(0,1)}=-\frac{2}{3}.$$

Per quanto riguarda il problema dell'estendibilità osserviamo che:

(1) Sia $x \in \mathbb{R}\setminus]-\delta,\delta[$ fissato e consideriamo la funzione
$$y \mapsto y^3 - 2xy^2 + \cos(xy) - 2 := g_x(y).$$
Per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus]-\delta,\delta[$, la funzione $g_x(y)$ è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, inoltre
$$\lim_{y\to+\infty} g_x(y) = +\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} g_x(y) = -\infty$$
Per il Teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto y_x (non necessariamente unico) tale per cui $g_x(y_x) = 0$, pertanto è sempre possibile selezionare una funzione $x \mapsto y_x$ che estenda φ. Si noti che l'estensione così costruita potrebbe non avere alcuna proprietà di continuità o differenziabilità.

Esercizio 32.11. Si consideri nel piano (y,z) la regione compresa tra l'asse $z=1$ e la curva di equazione $z=\sqrt{y-2}$ con $3 \le y \le 6$.

a) Si calcoli il baricentro di D.

b) Si determini il volume del solido ottenuto ruotando D attorno all'asse delle z.

Svolgimento. Denominata con S tale regione, si ha che
$$S = \{(y,z) : 1 \le z \le \sqrt{y-2},\, 3 \le y \le 6\}.$$

a) L'area della regione S è:
$$M := \int_3^6 (\sqrt{y-2}-1)\,dy = \int_1^4 (\sqrt{t}-1)\,dt = \frac{2}{3}[t^{3/2}]_1^4 - 3 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - 3 = \frac{5}{3}.$$
Indicato con $G = (G_y, G_z)$ il baricentro:
$$G_z = \frac{1}{M}\int_S z\,dydz = \frac{3}{5}\int_3^6\int_1^{\sqrt{y-2}} z\,dzdy = \frac{3}{10}\int_3^6 ((y-2)-1)\,dy = \frac{27}{20}$$
$$G_y = \frac{1}{M}\int_S y\,dydz = \frac{3}{5}\int_3^6\int_1^{\sqrt{y-2}} y\,dzdy = \frac{3}{5}\int_3^6 y(\sqrt{y-2}-1)\,dy$$
$$(y-2=t^2) = \frac{3}{5}\int_1^2 2(t^2+2)t^2\,dt = \frac{326}{25}.$$

b) Per il Teorema di Guldino, si ha $V = 2\pi G_y M = \frac{652}{15}\pi$.

Esercizio 32.12. Si determini l'area della parte di superficie conica:
$$S = \{(x,y,z) : z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, z \ge 0, y \ge \sqrt{2}/2\}.$$

Svolgimento. Si ha $z \ge 0$ se e solo se $x^2+y^2 \le 1$, da cui $y \le 1$. Si ha allora $\sqrt{2}/2 \le y \le 1$ e $|x| \le \sqrt{1-y^2}$. Essendo la superficie un grafico $z = f(x,y)$ l'elemento di superficie è
$$\omega_2(x,y) = \sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \sqrt{2}.$$
L'area vale pertanto:
$$\begin{aligned} A &= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{2}dxdy = 2\sqrt{2}\int_{\sqrt{2}/2}^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = 2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta \\ &= 2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = 2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,d\theta = \sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos(2\theta)+1)\,d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos z\,dz = \frac{\sqrt{2}}{4}(\pi-2). \end{aligned}$$

Esercizio 32.13. Date la superficie $S = \{(x,y,z) : x = s\cos t, y = t, z = s\sin t,\ t \in (0,\pi),\ s \in (1,2)\}$ e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = yz$, si calcoli l'integrale
$$\int_S f\,d\sigma.$$

Svolgimento. Posto $\varphi(t,s) = (s\cos t, t, s\sin t)$, calcoliamo la matrice Jacobiana della parametrizzazione:

$$\operatorname{Jac}\varphi = \begin{pmatrix} -s\sin t & \cos t \\ 1 & 0 \\ s\cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Per la regola di Binet, per trovare l'elemento di superficie 2-dimensionale dobbiamo considerare tutti i minori di ordine 2, e sommarne i quadrati dei determinanti estraendo la radice.

$$\begin{aligned}\omega_2(\partial_t\varphi, \partial_s\varphi) &= \sqrt{\det^2\begin{pmatrix} -s\sin t & \cos t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det^2\begin{pmatrix} -s\sin t & \cos t \\ s\cos t & \sin t \end{pmatrix} + \det^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s\cos t & \sin t \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{1+s^2}\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale:

$$\begin{aligned}\int_S f\,d\sigma &= \int_0^\pi \left(\int_1^2 f\circ\varphi(t,s)\omega_2(\partial_t\varphi, \partial_s\varphi)\,ds\right)\,dt \\ &= \int_0^\pi \left(\int_1^2 ts\sin t\sqrt{1+s^2}\,ds\right)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi t\sin t\,dt\cdot\int_1^4\sqrt{1+w}\,dw \\ &= \frac{\pi}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Esercizio 32.14. Sia $D = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < 1\}$ e sia $S\subset\mathbb{R}^3$ la superficie parametrizzata da $\varphi : D\to\mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u+v, u-v, u^2+v^2)$. Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_S (x^2+y^2)\sqrt{1+2z}\,d\sigma.$$

Svolgimento. Calcoliamo la matrice Jacobiana della parametrizzazione:

$$\operatorname{Jac}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

Per la regola di Binet, per trovare l'elemento di superficie 2-dimensionale dobbiamo considerare tutti i minori di ordine 2, e sommarne i quadrati dei determinanti estraendo la radice.

$$\begin{aligned}\omega_2(\partial_u\varphi, \partial_v\varphi) &= \sqrt{\det^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \det^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} + \det^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{4+(2v-2u)^2+(2v+2u)^2} = 2\sqrt{1+u^2+v^2}\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale:

$$\begin{aligned}&\int_D \left((u+v)^2+(u-v)^2\right)\sqrt{1+2(u^2+v^2)}\,2\sqrt{1+u^2+v^2}\,dudv \\ &\qquad = 4\int_D (u^2+v^2)\sqrt{1+2(u^2+v^2)}\,\sqrt{1+(u^2+v^2)}\,dudv \\ &\qquad = 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\sqrt{1+2\rho^2}\,\sqrt{1+\rho^2}\rho\,d\rho d\theta \\ (w=\rho^2) &\qquad = 4\pi\int_0^1 w\sqrt{(1+2w)(1+w)}\,dw \\ &\qquad = 4\pi\int_0^1 w\sqrt{2w^2+3w+1}\,dw \\ &\qquad = 4\pi(44+132\sqrt{6}-9\sqrt{2}\log(3+2\sqrt{2})+9\sqrt{2}\log(7+4\sqrt{3})),\end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che una primitiva di $\sqrt{s^2+1}$ è data da $1/2(y\sqrt{1+y^2}+\log(z+\sqrt{1+z^2}))$.

Esercizio 32.15. Per ogni $a\geq 0$ si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S_a di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta,y) = (\sqrt{y^2+a^2}\cos\theta, y, \sqrt{y^2+a^2}\sin\theta), \qquad \theta\in[0,2\pi],\ |y|<1,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y/2, x)$.

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la circonferenza di raggio $\sqrt{1+a^2}$, centrata nell'origine e appartenente al piano $y=1$ parametrizzata da

$$\gamma(\theta) = (\sqrt{a^2+1}\cos\theta, 1, \sqrt{a^2+1}\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, si ricavi da essa l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ. Si utilizzi il risultato per calcolare l'area di S_a nel caso $a=0$.
(4) Per $a>0$, si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(a,0,0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S_a orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Svolgimento. Poniamo $\varphi(\theta,y) = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ e $\vec{F} = (F_1,F_2,F_3)$.

(1) Si ha

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 2x + 1/2,$$

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & y/2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x \end{pmatrix} = (0,-1,0).$$

(2) dal teorema di Stokes, la circuitazione è il flusso del rotore attraverso la superficie $D = \{(x,1,z) : x^2+z^2 \leq (1+a^2)\}$ con normale $(0,-1,0)$, infatti la normale $(0,-1,0)$ su D induce per la regola della mano destra l'orientamento richiesto su γ. Il flusso è:

$$\int_D \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_D d\sigma = \mathrm{Area}(D) = \pi(1+a^2).$$

Verifichiamo il risultato:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\,d\gamma &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\sqrt{a^2+1}\cos\theta, 1, \sqrt{a^2+1}\sin\theta)\cdot(-\sqrt{a^2+1}\sin\theta, 0, \sqrt{a^2+1}\cos\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\Big(-(a^2+1)^{3/2}\cos^2\theta\sin\theta + (a^2+1)\cos^2\theta\Big)\,d\theta = \pi(1+a^2)\end{aligned}$$

Quindi la circuitazione non è nulla, pertanto $\vec{F}$ non è conservativo.

(3) La matrice Jacobiana è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(\theta,y) = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+a^2}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \\ 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+a^2}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \end{pmatrix}.$$

Per la formula di Binet, l'elemento d'area è:

$$\omega_2 = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}$$

dove

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+a^2}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det^2 B_1 = (y^2+a^2)\sin^2\theta.$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+a^2}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \\ \sqrt{y^2+a^2}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \end{pmatrix}, \qquad \det^2 B_2 = y^2,$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+a^2}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \end{pmatrix}, \qquad \det^2 B_3 = (y^2+a^2)\cos^2\theta.$$

da cui $\omega_2 = \sqrt{2y^2+a^2}$. Nel caso $a=0$ si ha che l'elemento d'area è $\omega_2 = \sqrt{2}|y|$. L'area di S_0 è data da

$$\int_{S_a} d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^1 \omega_2 d\theta\,dy = 2\pi\int_{-1}^1 \sqrt{2}|y|\,dy = 4\pi\sqrt{2}\int_0^1 y\,dy = 2\pi\sqrt{2}.$$

(4) Una base dello spazio tangente è data dalle colonne della matrice Jacobiana di φ. In particolare, nel punto $(a,0,0)=\varphi(0,0)$ si ha $(0,a,0)$ e $(0,0,a)$. La normale deve essere ortogonale a questi due vettori, e avere norma uno, per cui è della forma $(\pm 1,0,0)$. Verifichiamo quale di questi due è la normale indotta dalla parametrizzazione:

$$\det\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & = \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \mp a^2.$$

Il determinante deve essere positivo, per cui la normale indotta nel punto $(a,0,0)$ è $(-1,0,0)$.

(5) Il flusso richiesto vale:

$$\begin{aligned}
\Phi(S_a,\vec{F}) &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} F_1\circ\varphi & -\sqrt{y^2+a^2}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \\ F_2\circ\varphi & 0 & 1 \\ F_3\circ\varphi & \sqrt{y^2+a^2}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} (y^2+a^2)\cos^2\theta & -\sqrt{y^2+a^2}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \\ y/2 & 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \sqrt{y^2+a^2}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (-y/2)\det\begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+a^2}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \\ \sqrt{y^2+a^2}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+a^2}} \end{pmatrix} dy\,d\theta + \\
&\quad + \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (-1)\det\begin{pmatrix} (y^2+a^2)\cos^2\theta & -\sqrt{y^2+a^2}\sin\theta \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \sqrt{y^2+a^2}\cos\theta \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} y^2/2\,dy\,d\theta + \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \Big((y^2+a^2)^{3/2}\cos^3\theta + (y^2+a^2)\sin\theta\cos\theta\Big)\,d\theta\,dy \\
&= \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio è sfruttato il fatto che:

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi}\sin w\,dw = 0.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta + \int_{\pi/2}^{3/2\pi}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-1}^{1}(1-w^2)\,dw + \int_{1}^{-1}(1-w^2)\,dw = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 32.16. Nel piano $x=0$, si consideri la curva $\gamma(y)=y^2(1-y^2)+1$ per $t\in[0,\alpha]$ dove $\alpha = \sqrt{(1+\sqrt{5})/2}$ e la superficie S ottenuta ruotando γ attorno all'asse z e orientata in modo che nel punto $(0,0,1)$ il versore normale sia diretto verso l'alto. Si definisca inoltre il campo vettoriale $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^{4y}, x-x^2, z).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$.
(2) Si tracci il grafico di γ.
(3) Si scriva una parametrizzazione di S e si determini il relativo elemento di superficie 2-dimensionale.
(4) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso S.
(5) Si dica se $\vec{F}$ è conservativo. In caso negativo, si esibisca un circuito $\tilde{\gamma}$ dove la circuitazione di $\vec{F}$ sia non nulla (sugg. si utilizzi il teorema di Stokes applicato ad un'opportuna superficie giacente nel piano $z=0$, il cui bordo sarà il circuito desiderato).

Svolgimento. Poniamo $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$.

(1) Si ha:

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 1,$$

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & e^{4y} \\ \vec{e}_2 & \partial_y & x-x^2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & z \end{pmatrix} = (0,0,1-2x-4e^{4y}).$$

(2) Si ha $\gamma(0)=1$ e $\gamma(\alpha)=0$. Per quanto riguarda le derivate, si ha

$$\dot{\gamma}(y) = 2y(1-y^2) + y^2(-2y) = 2y - 4y^3 = 2y(1-2y^2),$$

e tale derivata si annulla per $y \in [0,\alpha]$ nei punti $y=0$ e $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, è strettamente positiva per $0<y<\frac{\sqrt{2}}{2}$ e strettamente negativa per $\frac{\sqrt{2}}{2} < y \le \alpha$. La funzione ha un minimo relativo in 0, che vale 1, un massimo assoluto in $\sqrt{2}/2$ che vale $5/4$ e un minimo assoluto in $y=\alpha$ che vale 0. Si ha poi $\ddot{\gamma}(y) = 2-12y^2$, pertanto la funzione è convessa per $0<y<1/\sqrt{6}$ e concava per $1/\sqrt{6}<y<\alpha$.

(3) La superficie S può essere parametrizzata nel modo seguente:

$$\varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2(1-\rho^2)+1),$$

La matrice Jacobiana della parametrizzazione è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 2\rho-4\rho^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per la formula di Binet, l'elemento d'area è:

$$\omega_2 = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}$$

dove

$$B_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \det^2 B_1 = \rho^2.$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta \\ 2\rho-4\rho^3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det^2 B_2 = \rho^2(2\rho-4\rho^3)^2\sin^2\theta,$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 2\rho-4\rho^3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det^2 B_3 = \rho^2(2\rho-4\rho^3)^2\cos^2\theta.$$

da cui

$$\omega_2 = \sqrt{\rho^2 + \rho^2(2\rho-4\rho^3)^2} = \rho\sqrt{1+4\rho^2+16\rho^6-16\rho^4}.$$

(4) Definiamo la superficie $\Sigma = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \le \alpha^2\}$ con normale $\hat{n} = (0,0,-1)$. La superficie $\Sigma \cup S$ racchiude un solido Ω, inoltre le normali definite su S e Σ sono uscenti rispetto a Ω. Per il teorema della divergenza si ha:

$$\int_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz = \Phi(S,\vec{F}) + \Phi(\Sigma,\vec{F}).$$

Osserviamo che su Σ si ha $\vec{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1) = 0$, quindi

$$\Phi(\Sigma,\vec{F}) = \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = 0,$$

inoltre:

$$\int_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz = \int_\Omega dxdydx = \mathrm{Volume}(\Omega).$$

Si ha che Ω è parametrizzato in coordinate cilindriche da:

$$\psi(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z),$$

con $0<\rho<\alpha$ e $0<z<\rho^2(1-\rho^2)$, e quindi l'elemento di volume, ovvero il determinante Jacobiano della parametrizzazione, è ρ. Il volume di Ω è pertanto:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\alpha\int_0^{\rho^2(1-\rho^2)+1} \rho\,dzd\rho d\theta = 2\pi\int_0^\alpha (\rho^2(1-\rho^2)+1)\rho\,d\rho = 2\pi\left(\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^6}{6}\right).$$

e si ha che tale valore coincide con il flusso richiesto.
Verifichiamo il risultato ottenuto:

$$\int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} F_1 \circ \varphi & \cos\theta & \rho\sin\theta \\ F_2 \circ \varphi & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ F_3 \circ \varphi & 2\rho - 4\rho^3 & 0 \end{pmatrix} d\theta\, d\rho =$$

$$= \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} e^{4\rho\sin\theta} & \cos\theta & \rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta - \rho^2\cos^2\theta & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ \rho^2(1-\rho^2)+1 & 2\rho - 4\rho^3 & 0 \end{pmatrix} d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} (\rho^2(1-\rho^2)+1)\rho\, d\rho d\theta +$$

$$- \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} (e^{4\rho\sin\theta}\rho\cos\theta - \rho\cos\theta - \rho^2\cos^2\theta\rho\sin\theta)\, d\theta\, d\rho$$

$$= 2\pi\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^6}{6}\right) - \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\frac{d}{d\theta}(e^{4\rho\sin\theta})\, d\theta d\rho + \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\frac{d}{d\theta}(\cos^3\theta)\, d\theta d\rho$$

$$= 2\pi\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^6}{6}\right),$$

che verifica il calcolo svolto in precedenza.

(5) $\vec{F}$ non è conservativo. A tal proposito, se D è una superficie contenuta in $z = 0$, la sua normale nei punti non di bordo sarà $(0, 0, \pm 1)$, e quindi il flusso del rotore sarà

$$\int_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_D (1 - 2x - 4e^{4y})\, dxdy,$$

e quindi per il teorema di Stokes,

$$\oint_{\tilde{\gamma}} \vec{F}\, d\gamma_1 = \int_D (1 - 2x - 4e^{4y})\, dxdy,$$

affinchè $\tilde{\gamma}$ sia un circuito di quelli richiesti è necessario determinare D in modo tale che l'integrale del membro di destra sia non nullo. Consideriamo la superficie $D := \{(x, y, 0) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ con normale $\hat{n} = (0, 0, 1)$. Il flusso del rotore attraverso questa superficie è

$$\begin{aligned}
\int_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma &= \int_D (1 - 2x - 4e^{4y})\, dxdy \\
&= \operatorname{Area}(D) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2x + 4e^{4y})\, dxdy \\
&= 4 - 2\int_{-1}^1 2x\, dx - 2\int_{-1}^1 4e^{4y}\, dy \\
&= 4 - 8\left[\frac{e^{4y}}{4}\right]_{y=-1}^{y=1} = 4 - 2(e - e^{-1}) \neq 0
\end{aligned}$$

Per il teorema di Stokes, la circuitazione sul bordo di D, che è il quadrato con lati paralleli agli assi x e y giacente nel piano $z = 0$, con centro nell'origine e lato 2, percorso in senso antiorario, è pari a $4 - 2(e - e^{-1})$, quindi non nulla.

Esercizio 32.17 (Integrazione di 1-forme).

(1) Riconoscere che la forma differenziale:

$$\omega(x, y) = (3x^2y - y^2)\, dx + (x^3 - 2xy + 1)\, dy$$

è un differenziale esatto e calcolare il suo integrale indefinito.

(2) Riconoscere che la forma differenziale:

$$\omega(x, y) = [\sin(x + y) + x\cos(x + y)]\, dx + x\cos(x + y)\, dy$$

è un differenziale esatto e calcolare il suo integrale indefinito.

(3) Riconoscere che la forma differenziale:
$$\omega(x,y) = \frac{y^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$
nel dominio $x > 0$ è un differenziale esatto e determinare la primitiva che nel punto $(1,1)$ assume il valore 0.

(4) Studiare l'integrazione della forma differenziale lineare:
$$\omega(x,y) = y\left(\log\frac{y}{x} - 1\right)dx + x\left(\log\frac{y}{x} + 1\right)dy$$

(5) Mostrare che la forma differenziale:
$$y^2\,dx + 2xy\,dy$$
è esatta e verificare che l'integrale curvilineo di ω ha il medesimo valore lungo le seguenti curve congiungenti l'origine con $A = (1,1)$:
  (a) segmento rettilineo di equazione $y = x$, $x \in [0,1]$
  (b) arco di parabola di equazione $y = x^2$, $x \in [0,1]$
  (c) arco di parabola di equazione $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$
  (d) arco di curva di equazione $y = 2x^3 - x$, $x \in [0,1]$

Esercizio 32.18. Si studi l'integrazione delle forme:
$$\omega_1(x,y) = yx^{y-1}\,dx + x^y\log x\,dy, \qquad \omega_2(x,y) = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

Esercizio 32.19 (Equazioni totali). Risolvere le seguenti equazioni totali:

(1) $(x^2+y^2+2x)\,dx + 2y\,dy = 0$.
(2) $\left(3x^2y^4 + \dfrac{1}{1+x^2}\right)dx + (4x^3y^3 + \cos y)\,dy = 0$, e determinare l'integrale particolare $y(x)$ individuato dalla condizione iniziale $y(1) = 0$.
(3) $\dfrac{2x}{y^3}\,dx + \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$, e determinare la curva integrale passante per il punto $(2,1)$.
(4) $(y^2-1)\,dx + xy(1-x^2)\,dy = 0$.
(5) $(x+2y+1)\,dx + (x+2y+2)\,dy = 0$.
(6) $(x+y-1)^2\,dx - 4x^2\,dy = 0$.
(7) $(1-x^2y)\,dx + (x^2y - x^3)\,dy = 0$.
(8) $\dfrac{3x+y}{\sqrt{x+y}}\,dx - \dfrac{x+3y}{\sqrt{x+y}}\,dy = 0$.
(9) $(3y^2-x)\,dx + 2y(y^2-3x)\,dy = 0$, *sugg.* cercare un fattore integrante del tipo $e^{f(x+y^2)}$

Esercizio 32.20 (Metodo dei coefficienti indeterminati). Risolvere le seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti:

(1) $y'' - y = (2x+1)e^{3x}$.
(2) $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$.
(3) $y'' - 6y' + 5y = e^{5x}$.
(4) $y'' - y = 2x^2 + 5 + 3e^{2x}$.
(5) $2y'' - y' - y = x^2 - 3e^x$.
(6) $y'' + 4y' + 5y = \cos x$.
(7) $y'' + y = \sin x$.
(8) $y'' + y' = 5\sin 3x - 2\cos 3x$.

Esercizio 32.21 (Equazioni varie).

(1) Dire quante sono lo soluzioni localmente distinte del problema di Cauchy:
$$y' = \operatorname{sgn}(y)\cdot\sqrt{|y|}, \qquad y(0) = 0$$
e disegnarne il grafico.

(2) Risolvere l'equazione:
$$y' = \cos x\cdot\sqrt{y-1}$$

(3) Risolvere l'equazione $y' = y^{2/3}$ e determinare le curve integrali passanti per il punto $(1,0)$.

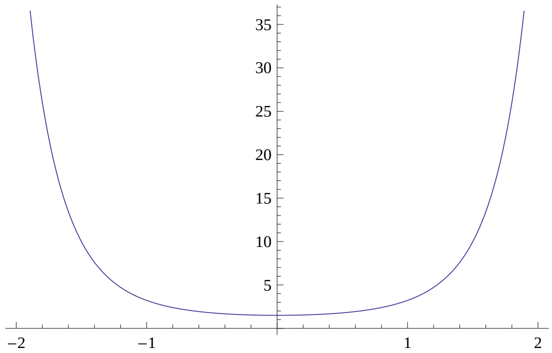


FIGURA 1. La soluzione di $y' = 2xy - x$ con $y(0) = 3/2$.

(4) Risolvere l'equazione $y' = (x + y)^2$.
(5) Risolvere l'equazione lineare $y' + \dfrac{1}{x}y = x^3$. e determinare l'integrale particolare $y(x)$ individuato dalla condizione iniziale $y(1) = -3$.
(6) Risolvere l'equazione lineare $y' + y\tan x = \sin 2x$.
(7) Risolvere l'equazione di Bernoulli $y' - 2y\tan x = 2\sqrt{y}$.
(8) Risolvere l'equazione di Bernoulli $y' = xy + x^3y^2$.

Esercizio 32.22. Si consideri l'equazione differenziale:
$$\frac{dy}{dx} = 2xy - x.$$
a.) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale;
b.) si scriva la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente $y(0) = 3/2$.
c.) Si dica se essa è definita su tutto $\mathbb{R}$;
d.) si dica se essa ammette asintoti e, in caso affermativo, li si determini;
e.) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo della soluzione soddisfacente $y(0) = 3/2$.

SVOLGIMENTO. In forma di equazione totale si ha
$$\omega(x, y) = p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = (-2xy + x)\, dx + dy = 0.$$
Tale forma non è esatta, tuttavia si ha: $\partial_y p - \partial_x q = -2x = -2x\,q$, quindi la forma ammette il fattore integrante $h(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$. La forma $h\omega$ è chiusa e definita su tutto $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso perché convesso, quindi è esatta. Determiniamone una primitiva V congiungendo l'origine al generico punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con una spezzata $\gamma(t)$ costituita da segmenti paralleli agli assi:
$$V(x_0, y_0) = \int_\gamma h\omega = \int_0^{x_0} e^{-x/2} x\, dx + \int_0^{y_0} e^{-x/2}\, dy = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + ye^{-x^2} = (y - 1/2)e^{-x^2}.$$
Un altro modo per determinare V è osservare che:
$$\begin{aligned} h(x)\omega(x, y) &= e^{-x^2}(-2xy + x)\, dx + e^{-x^2} dy = d(ye^{-x^2}) + e^{-x^2} x\, dx \\ &= d(ye^{-x^2}) + d\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) = d\left((y - 1/2)e^{-x^2}\right). \end{aligned}$$
Pertanto in forma implicita le soluzioni sono espresse da $(y - 1/2)e^{-x^2} = c$, $c \in \mathbb{R}$ ovvero, esplicitando, $y(x) = ce^{x^2} + 1/2$. Sostituendo la condizione $y(0) = 3/2$ si ricava $c = 1$, quindi $y(x) = e^{x^2} + 1/2$. Tale soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e non ammette asintoti. La soluzione ha limite $+\infty$ per $x \to \pm\infty$, è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$, il punto $x = 0$ è di minimo e la soluzione ivi vale $3/2$.

APPENDICE A

Studio di funzioni implicitamente definite

implìcito = *lat.* IMPLÌCITUS = IMPLICÀTUS, che è il participio passato di IMPLICÀRE *avviluppare*, *avvolgere* (v. *Piegare*). *Prop.* Intricato; e *fig.* Che è compreso e quasi avviluppato in altro, d'onde si deduce per via d'illazioni, d'induzioni; Compreso tacitamente nel discorso, Sottinteso. Contrario di Esplicito.

Vocabolario etimologico della lingua italiana,
di Ottorino Pianigiani, 1907.

Questa tipologia di esercizi consiste nello studio di insiemi Γ definiti implicitamente mediante equazioni del tipo $f(x,y)=0$, con $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. In tutta la discussione supporremo che $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Alcune questioni specifiche:

(1) Appartenenenza di un punto (x_0,y_0) all'insieme: il punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ appartiene a Γ se e solo se $f(x_0,y_0)=0$;

(2) Rappresentazione in coordinate polari: ponendo $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, si scriva $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. Allora l'insieme in coordinate polari è rappresentato da
$$\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta):\ g(\rho,\theta)=0,\rho\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi]\}$$

> **Importante:** non dimenticare che da sola l'equazione $g(\rho,\theta)=0$ *non* rappresenta l'insieme, infatti *deve* essere aggiunta anche la condizione $\rho\geq 0$: i valori di θ tali per cui $g(\rho,\theta)=0$ implica $\rho<0$ non sono accettabili.

(3) Informazioni derivanti dalla rappresentazione in coordinate polari: può capitare che la relazione $g(\rho,\theta)=0$ possa essere scritta[1] nella forma più semplice $\rho=h(\theta)$, in tal caso è possibile determinare l'insieme $A\subseteq[0,2\pi]$ dove si ha $h(\theta)\geq 0$, esso è l'insieme dei θ accettabili: esso dà ulteriori informazioni sulla posizione dell'insieme.[2] Se $\theta^*\in A$ allora la retta di equazione $\cos(\theta^*)y=\sin(\theta^*)x$ interseca Γ in almeno un punto. Se inoltre $\alpha\in A$ è tale per cui $h(\alpha)=0$, allora la retta di equazione $\cos(\alpha)y=\sin(\alpha)x$ interseca Γ nell'origine (e magari anche in altri punti). Se inoltre la funzione h è limitata, allora ρ è limitato, quindi l'insieme è limitato. Se f è continua, allora Γ è chiuso, per cui se si ha f continua e ρ limitato, allora Γ è compatto. Nel caso in cui Γ sia compatto, nessuna delle funzioni da esso implicitamente definite può ammettere asintoti di nessun tipo.

(4) simmetrie in coordinate cartesiane: se la funzione f presenta particolari simmetrie, esse si riflettono su simmetrie di Γ. Lo studio delle simmetrie è *cruciale* per lo svolgimento di questi esercizi.
Alcuni esempi frequenti:
   (a) Se $f(x,y)=f(y,x)$ si avrà che Γ è simmetrico rispetto alla bisettrice $y=x$ (perché posto $x=y'$ e $y=x'$ si ha $f(x,y)=f(y',x')=f(x',y')$, quindi il punto (x,y) annulla f se e solo se (x',y'), il suo simmetrico rispetto alla bisettrice, annulla f). Con ragionamenti analoghi, la stessa conclusione vale se $f(x,y)=-f(y,x)$;
   (b) se $f(x,y)=f(x,-y)$, si avrà che Γ è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse (perché posto $x=x'$ e $y=-y'$ si ha $f(x,y)=f(x',-y')=f(x',y')$, quindi il punto (x,y) annulla f se e solo se (x',y'),

[1] Attenzione alle divisioni per zero: se si ottiene ad esempio $g(\rho,\theta)=\rho^3-\rho^2(\cos^2\theta+1)$ *non* si può concludere che l'insieme $g(\rho,\theta)=0$ sia rappresentato da $\rho=h(\theta)$ con $h(\theta)=\cos^2\theta+1$, $\rho\geq 0$. Infatti tale equazione non comprende il punto $(0,0)$, identificato da $\rho=0$, che invece soddisfa $g(0,\theta)=0$. Quindi bisognerà tenere sempre conto del fatto che alla soluzione $\rho=h(\theta)$ va aggiunta l'origine che andrà studiata a parte. Viceversa, se si ottiene $g(\rho,\theta)=\rho^3-\rho^2(\cos^2\theta-1)$, allora si può concludere che l'insieme $g(\rho,\theta)=0$ sia rappresentato da $\rho=h(\theta)$ con $h(\theta)=\cos^2\theta-1$, $\rho\geq 0$, perché l'origine viene rappresentata da $\theta=0,\pi$.

[2] Se ad esempio $A=[0,\pi/2]$, l'insieme è contenuto nel primo quadrante, se invece $A=[0,\pi/3]$, l'insieme è contenuto nel primo quadrante in un cono con vertice nell'origine, apertura di $\pi/3$, delimitato dall'asse delle ascisse e dalla retta $y=\tan(\pi/3)x$. Se $\theta/2\notin A$, se ci sono intersezioni di Γ con l'asse delle ordinate esse non possono essere positive, se $\pi/2\notin A$ e $3\pi/2\notin A$ non ci sono intersezioni di Γ con l'asse delle ordinate.

il suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse, annulla f). Con ragionamenti analoghi, la stessa conclusione vale se $f(x,y) = -f(x,-y)$;

(c) se $f(x,y) = f(-x,y)$, si avrà che Γ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (perché posto $x = -x'$ e $y = y'$ si ha $f(x,y) = f(-x',y') = f(x',y')$, quindi il punto (x,y) annulla f se e solo se (x',y'), il suo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, annulla f). Con ragionamenti analoghi, la stessa conclusione vale se $f(x,y) = -f(-x,y)$;

(d) se $f(x,y) = f(-x,-y)$, si avrà che Γ è simmetrico rispetto all'origine (perché posto $x = -x'$ e $y = -y'$ si ha $f(x,y) = f(-x',-y') = f(x',y')$, quindi il punto (x,y) annulla f se e solo se (x',y'), il suo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, annulla f). Con ragionamenti analoghi, la stessa conclusione vale se $f(x,y) = -f(-x,-y)$.

(5) Invarianze per rotazioni: se in coordinate polari l'insieme è rappresentato da $g(\rho,\theta) = 0$, $\rho \geq 0$, eventuali strutture speciali della funzione g sono associate a notevoli proprietà di Γ. Supponiamo che esista $0 < \alpha < 2\pi$ tale per cui $g(\rho,\theta+\alpha) = \pm g(\rho,\theta)$. Allora l'insieme Γ è invariante per rotazioni di angolo $n\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$.

(6) Parametrizzazione secondo rette passanti per l'origine[3]. Poniamo $y = mx$ e supponiamo che dalla relazione $f(x,mx) = 0$ si riesca ad esplicitare $x = k(m)$ in funzione di m. Si ottiene allora $x = k(m)$ e $y = mk(m)$. Lo studio di tali funzioni permette di determinare moltissime informazioni sull'insieme. Risulta di particolare interesse nel calcolo di eventuali asintoti: infatti se esiste $m^* \in \mathbb{R}$ tale per cui $\lim\limits_{m\to m^*} k(m) = \pm\infty$ allora si ottiene che la retta $y = m^*x + q$ può essere un asintoto obliquo per le funzioni implicitamente definite dall'insieme[4]. Lo è se $q = \lim\limits_{m\to m^*} mk(m) - m^*k(m) \in \mathbb{R}$.

(7) Supponiamo di avere un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ e di voler calcolare la tangente a Γ in tale punto. Si avrà naturalmente $f(x_0,y_0) = 0$. Scriviamo

$$df(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0)\,dx + \partial_y f(x_0,y_0)\,dy.$$

Se almeno una delle due derivate parziali è diversa da zero, allora la tangente a Γ in (x_0,y_0) è unica ed è data da $\partial_x f(x_0,y_0)x + \partial_y(x_0,y_0)y = q$ con q determinato in modo che tale retta passi per (x_0,y_0), quindi $q = \partial_x f(x_0,y_0)x_0 + \partial_y(x_0,y_0)y_0$. In altre parole si ha che la tangente è espressa dall'equazione

$$\nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

purché $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$.

Importante: se $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$ il punto (x_0,y_0) è un punto critico per f. In un intorno di tale punto non si può esplicitare nessuna delle due variabili rispetto all'altra tramite il teorema di Dini. Se la tangente esiste, non è detto che sia unica. Tale punto potrebbe essere il nodo di un cappio per Γ. Tuttavia il teorema di Dini dà solo condizioni sufficienti (ma non necessarie) per l'esplicitabilità, pertanto un punto siffatto potrebbe anche essere regolare con un'unica tangente: deve essere studiato separatamente.

Se la tangente in punto (x_0,y_0) è nota grazie al procedimento descritto, allora è noto anche se in un intorno di tale punto sia possibile esplicitare una delle due variabili rispetto all'altra attorno a tale punto: infatti se $\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$, ovvero la tangente non è verticale del tipo $x = x_0$, è possibile applicare il teorema di Dini ed ottenere l'esistenza in un intorno di x_0 di un'unica funzione φ con $\varphi \in C^1$ e $\varphi(x_0) = y_0$. La derivata di φ in x_0 non è altro che il coefficiente angolare della tangente in tale punto, ossia

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0,y_0)}{\partial_y f(x_0,y_0)}.$$

Se $\partial_x f(x_0,y_0) \neq 0$, ovvero la tangente non è orizzontale del tipo $y = y_0$, è possibile applicare il teorema di Dini ed ottenere l'esistenza in un intorno di y_0 di un'unica funzione ψ con $\psi \in C^1$ e $\psi(y_0) = x_0$. La derivata di ψ in y_0 non è altro che il coefficiente angolare della tangente in tale punto, ossia

$$\varphi'(y_0) = -\frac{\partial_y f(x_0,y_0)}{\partial_x f(x_0,y_0)}.$$

Se $\partial_y f(x_0,y_0) = 0$ e $\partial_x f(x_0,y_0) \neq 0$, allora in un intorno di (x_0,y_0) non esiste una esplicitazione $y = \varphi(x)$.

[3]o per un punto (x_0,y_0) fissato una volta per tutte. In tal caso si sceglierà $y - y_0 = m(x - x_0)$ oppure $x - x_0 = m(y - y_0)$. Il lettore può adattare facilmente la discussione a questo caso.

[4]Si ricordi che $y = \varphi(x) = mk(m)$, $x = k(m)$, le formule poi sono esattamente analoghe allo studio degli asintoti di funzioni di una variabile.

Se $\partial_x f(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, allora in un intorno di (x_0, y_0) non esiste una esplicitazione $x = \varphi(y)$.
Se entrambe le derivate parziali sono nulle, non si può dire alcunché.
Ricordando che all' inizio di tutta la discussione è stata fatta l'ipotesi $f \in C^1$, si ha che tutte le funzioni implicitamente definite, laddove esse esistono, sono sempre di classe C^1.

(8) Massimi e minimi vincolati a Γ: viene assegnata una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, e si chiede di determinare massimi e minimi di F vincolati a Γ. In questi casi lo strumento principale è il teorema dei moltiplicatori di Lagrange: si cercano le soluzioni $(\bar{x}, \bar{y})$ del sistema dipendente da λ:

$$\begin{cases} \partial_x (F(x, y) + \lambda f(x, y)) = 0, \\ \partial_y (F(x, y) + \lambda f(x, y)) = 0, \\ f(x, y) = 0. \end{cases}$$

Valutando F tra tutte le soluzioni del sistema, si possono poi distinguere massimi e minimi assoluti. Ricordiamo che se Γ è compatto, esisteranno sempre almeno un punto di minimo e uno di massimo assoluto di F vincolata a Γ

(9) Casi notevoli di massimi e minimi vincolati a Γ: se Γ ammette una parametrizzazione del tipo $\rho(\theta) = h(\theta)$, allora è possibile costruire la funzione di una sola variabile

$$\tilde{F}(\theta) = F(\rho(\theta) \cos\theta, \rho(\theta) \sin\theta)$$

con $\theta \in A := \{\theta \in [0, 2\pi] : h(\theta) \geq 0\}$. Massimi e minimi di F vincolati a Γ sono massimi e minimi di $\tilde{F}$ sull'insieme A. Tali massimi e minimi possono essere trovati imponendo $\tilde{F}'(\theta) = 0$ e studiando il segno di $\tilde{F}''(\theta)$ o delle derivate successive.

> **Importante:** non dimenticare che si sta studiando $\tilde{F}$ ristretta all'insieme A. Lo studio delle derivate, permette di determinare estremali nell'interno di A. I punti di frontiera di A vanno studiati separatamente. Inoltre se $(0, 0) \in \Gamma$ ma $h(\theta) \neq 0$ per ogni $\theta \in A$, anche l'origine va studiata a parte.

Se Γ ammette una parametrizzazione rispetto a rette per l'origine $y = mx$, ovvero è possibile esplicitare globalmente x da $f(x, mx) = 0$ ottenendo $x = k(m)$, $y = mk(m)$, allora allora è possibile costruire la funzione di una sola variabile

$$\bar{F}(m) = F(k(m), mk(m))$$

e studiarne i massimi e i minimi mediante le derivate successive.

> **Importante:** se la funzione $k(m)$ è definita su un dominio K, mediante le derivate si troveranno i massimi e minimi interni a K. I punti di frontiera di K vanno studiati separatamente. Inoltre se si sceglie la parametrizzazione $y = mx$ si stanno escludendo i punti di $\Gamma \cap \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$, ovvero le intersezioni di Γ con l'asse delle ordinate. Tali punti vanno determinati e studiati separatamente.

Un discorso perfettamente analogo al precedente si ha per parametrizzazioni $x = my$, in tal caso vanno studiati a parte i punti di intersezione di Γ con l'asse delle ascisse.

(10) Molteplicità delle funzioni implicitamente definite: dato $x_0 \in \mathbb{R}$, può essere richiesto il numero di funzioni $\varphi_i = \varphi_i(x)$ implicitamente definite da Γ in un intorno di x_0. In tal caso è necessario studiare le soluzioni di $f(x_0, y) = 0$ nell'incognita y. Il numero di soluzioni distinte y_λ di tale equazione fornisce il numero delle funzioni implicitamente definite da Γ in un intorno di x_0 se in $\partial_y f(x_0, y_\lambda) \neq 0$ per ogni λ. Spesso questa è la parte meno agevole dello studio. Se $f(x_0, y)$ è un polinomio $p_{x_0}(y)$, si può stimare il numero di soluzioni in modo indiretto: se il polinomio ha grado dispari, allora i suoi limiti per $y \to \pm\infty$ sono infiniti di segno opposto, quindi esiste sempre almeno un punto y in cui $p_{x_0}(y) = 0$, e il numero massimo di soluzioni è dato dal grado del polinomio. Ulteriori considerazioni possono essere fatte studiando eventuali massimi e minimi relativi di p_{x_0} e se tali massimi o minimi sono positivi o negativi, e se vengono assunti in punti y maggiori o minori di zero e poi applicando il teorema di esistenza degli zeri. Può essere necessario inoltre stimare la posizione delle radici del polinomio rispetto a particolari funzioni di x_0 (quelle che si ottengono da $\partial_y f(x_0, y) = 0$ oppure $\partial_x f(x_0, y) = 0$). In questo studio, è fondamentale l'analisi delle simmetrie di Γ. Possono anche essere utili varie sostituzioni per ridurre il grado di p_{x_0}. Se è disponibile per Γ una parametrizzazione $\rho(\theta) = h(\theta)$, $\theta \in A$ si può cercare di studiare i massimi e minimi di $x(\theta) = \rho(\theta) \cos\theta$ e $y(\theta) = \rho(\theta) \sin\theta$, $\theta \in A$ ovvero i massimi e i minimi assoluti e relativi di x e y vincolati a Γ (non dimenticarsi dei punti di frontiera di A). Analogamente

nel caso di parametrizzazioni con rette passanti per l'origine $y = mx$, si possono studiare massimi e minimi assoluti e relativi di $x = k(m)$ e $y = mk(m)$ (anche qui senza dimenticarsi le avvertenze per lo studio di massimi e minimi con tale parametrizzazione).

(11) Grafico qualitativo: i dati raccolti in tutti i punti precedenti portano al grafico qualitativo di Γ.

APPENDICE B

Esercizi su flussi, circuitazioni, teorema di Stokes e affini

Tutto scorre,
non si può tornare
due volte nello stesso fiume.

Eraclito.

In questi esercizi gli ingredienti fondamentali sono: una superficie parametrizzata da $\varphi : I \times J \to \mathbb{R}^3$ dove I, J sono intervalli di $\mathbb{R}$ e uno o più campi vettoriali $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Le variabili di φ saranno indicate con $u \in I$ e $v \in J$, e le componenti di φ saranno indicate con $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ e quelle di $\vec{F}$ con $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Osserviamo che la superficie Σ può essere definita anche implicitamente da un'equazione $f(x, y, z) = 0$ con $\nabla f \neq (0, 0, 0)$ in ogni punto di Σ. In tal caso, infatti, il Teorema della funzione implicita ci permette di costruire parametrizzazioni di Σ nell'intorno di ogni punto di Σ. Tali parametrizzazioni sono *locali* ciò significa che potrebbero essere necessarie più parametrizzazioni per descrivere *interamente* la superficie[1].

Ricordiamo i seguenti fatti salienti:

(1) La *divergenza* di $\vec{F}$ è il campo scalare $\operatorname{div} \vec{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$.

(2) Il *rotore* di $\vec{F}$ è il campo vettoriale definito da

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{i}\,(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) + \mathbf{j}\,(\partial_z F_1 - \partial_x F_3) + \mathbf{k}\,(\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \\
&= (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_z F_1 - \partial_x F_3, \partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,.
\end{aligned}$$

(3) La *matrice Jacobiana della parametrizzazione*, le cui colonne verranno indicate con $\partial_u \varphi(u, v)$ e $\partial_v \varphi(u, v)$ rispettivamente, è la matrice:

$$\operatorname{Jac}\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1 & \partial_v \varphi_1 \\ \partial_u \varphi_2 & \partial_v \varphi_2 \\ \partial_u \varphi_3 & \partial_v \varphi_3 \end{pmatrix}$$

(4) per calcolare l'*elemento d'area* o *di superficie* 2*-dimensionale*, consideriamo le tre sottomatrici quadrate 2×2 di $\operatorname{Jac}\varphi$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_2 & \partial_v \varphi_2 \\ \partial_u \varphi_3 & \partial_v \varphi_3 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1 & \partial_v \varphi_1 \\ \partial_u \varphi_3 & \partial_v \varphi_3 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1 & \partial_v \varphi_1 \\ \partial_u \varphi_2 & \partial_v \varphi_2 \end{pmatrix}$$

e per il teorema di Binet si ha che l'elemento d'area è:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}\, du\, dv$$

[1]Ad esempio, nel caso di Σ superficie sferica unitaria di $\mathbb{R}^3$ data da $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, si ha $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ e $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)$. Si ha $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ solo se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, ma $(0, 0, 0) \notin \Sigma$ perché $f(0, 0, 0) = -1 \neq 0$. Quindi nell'intorno di ogni punto di Σ esiste una parametrizzazione locale. Si può mostrare come non esistano parametrizzazioni *globali* e che il numero minimo di parametrizzazioni per descrivere interamente Σ sia 2. Tra le tante possibili scelte, segnaliamo $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, quindi le due parametrizzazioni $\varphi_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, $\varphi_2(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, entrambe definite sull'insieme $u^2 + v^2 \leq 1$.

Si può anche calcolare l'elemento d'area prendendo il modulo del prodotto vettoriale delle colonne di $\operatorname{Jac}\varphi$:

$$d\sigma = |\partial_u\varphi(u,v) \wedge \partial_v\varphi(u,v)|\,du\,dv$$

(5) La *normale unitaria indotta dalla parametrizzazione* nel punto (x_0, y_0, z_0) si calcola nel modo seguente: innanzitutto si determina il punto $(u_0, v_0) \in I \times J$ tale per cui $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$. A questo punto, la normale unitaria è data da:

$$\hat{n}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial_u\varphi(u_0, v_0) \wedge \partial_v\varphi(u_0, v_0)}{|\partial_u\varphi(u_0, v_0) \wedge \partial_v\varphi(u_0, v_0)|}$$

ovvero si calcola la matrice Jacobiana della parametrizzazione in (u_0, v_0), si esegue il prodotto vettoriale delle sue colonne ottenendo un vettore $\vec{v}$. La normale richiesta è allora $\vec{v}/|\vec{v}|$.

(6) Normali assegnate e indotte. Sia Σ parametrizzata da φ e supponiamo venga assegnato $\hat{n}(x, y, z)$ campo vettoriale. Il campo vettoriale è *normale* alla superficie se e solo se per ogni $(u, v) \in I \times J$ si ha che i prodotti scalari $\hat{n}\circ\varphi(u, v)\cdot\partial_u\varphi(u, v)$ e $\hat{n}\circ\varphi(u, v)\cdot\partial_v\varphi(u, v)$ sono entrambi nulli. Per verificare se il campo delle normali assegnate è concorde con le normali indotte dalla parametrizzazione è necessario calcolare:

$$\det\begin{pmatrix} n_1\circ\varphi(u,v) & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v) \\ n_2\circ\varphi(u,v) & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v) \\ n_3\circ\varphi(u,v) & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v) \end{pmatrix}.$$

Se tale determinante è positivo, la normale assegnata coincide con quella indotta, altrimenti la normale assegnata è opposta a quella indotta. In realtà non è necessario calcolare il determinante precedente per ogni (u, v): essendo le superfici e i campi regolari, è sufficiente calcolarlo in un punto di Σ, quindi per un valore di $(\bar{u}, \bar{v})$. Spesso il problema può assegnare il valore della normale in un punto $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ di Σ. In tal caso si determinano $(\bar{u}, \bar{v})$ in modo che $\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x})$ e si calcola il precedente determinante per quel valore $(\bar{u}, \bar{v})$.

(7) Se la superficie Σ è implicitamente definita da un'equazione $f(x, y, z) = 0$, il campo $\nabla f(x, y, z)$ è normale a Σ nei punti di Σ. Tuttavia non è detto che se viene data anche una parametrizzazione di Σ, il campo ∇f sia concorde con tale parametrizzazione: per verificarlo è necessario utilizzare il criterio del punto precedente. Solitamente, se Σ è data sia con una parametrizzazione φ che in modo implicito mediante $f = 0$, per calcolare la normale è molto più facile considerare ∇f e verificare in un punto che esso è concorde con la normale indotta dalla parametrizzazione, piuttosto che eseguire il prodotto vettoriale $\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi$.

(8) Il *flusso* di $\vec{F}$ attraverso la superficie con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione è dato da:

$$\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_I\int_J \det\begin{pmatrix} F_1\circ\varphi & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ F_2\circ\varphi & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ F_3\circ\varphi & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix} du\,dv$$

(9) Se γ è una curva , la *circuitazione* di G lungo la curva assegnata $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 a tratti è

$$\oint_\gamma \vec{G}\cdot\,ds = \int_0^T \vec{G}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt.$$

(10) Se Σ è una superficie parametrizzata da una mappa $\psi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$, il suo *bordo* orientato positivamente è contenuto nella giustapposizione delle curve $\gamma_1(t) = \psi(t, c)$ con $t \in [a, b]$, $\gamma_2(t) = \psi(b, t)$ con $t \in [c, d]$, $\gamma_3(t) = \psi(b + a - t, d)$ con $t \in [a, b]$ e $\gamma_4(t) = \psi(a, d + c - t)$ con $t \in [a, b]$, in altre parole nell'immagine mediante ψ della frontiera del rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ percorso in senso antiorario. Più precisamente:
   (a) se $\psi(a, t) \neq \psi(b, t)$ per ogni $t \in]c, d[$ e $\psi(t, c) \neq \psi(t, d)$ per ogni $t \in]a, b[$ allora il bordo coincide con tale immagine;
   (b) se $\psi(a, t) = \psi(b, t)$ per ogni $t \in]c, d[$ e $\psi(t, c) \neq \psi(t, d)$ per ogni $t \in]a, b[$ allora il bordo coincide con l'unione delle curve γ_1 e γ_3;
   (c) se $\psi(a, t) \neq \psi(b, t)$ per ogni $t \in]c, d[$ e $\psi(t, c) = \psi(t, d)$ per ogni $t \in]a, b[$ allora il bordo coincide con l'unione delle curve γ_2 e γ_4;
   (d) se $\psi(a, t) = \psi(b, t)$ per ogni $t \in]c, d[$ e $\psi(t, c) = \psi(t, d)$ per ogni $t \in]a, b[$ allora il bordo è vuoto.

(11) Il teorema di Stokes afferma che il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione è dato dalla circuitazione di $\vec{F}$ lungo il bordo di Σ orientato positivamente:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \oint_\gamma \vec{F}\cdot ds.$$

(12) Il teorema della divergenza afferma che il flusso di $\vec{F}$ attraverso una superficie *chiusa* (qui chiusa non va intesa in senso topologico, ma in quello intuitivo di superficie che separa $\mathbb{R}^3$ in due componenti connesse) orientata con normale uscente è pari all'integrale fatto sul volume Ω racchiuso da C della divergenza di $\vec{F}$. In altre parole

$$\int_C \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Si osservi che la normale che compare nel teorema della divergenza, è la normale *uscente* da Ω. Tale orientamento potrebbe non concordare con quello assegnato dal problema. Sarà necessario verificare quindi se i due orientamenti coincidono e, in caso negativo, mutare segno al risultato.

(13) Il teorema della divergenza può essere utile per calcolare flussi attraverso superfici parametrizzate S nelle situazioni seguenti: supponiamo che $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ e che il bordo di S sia una curva γ che giaccia su un piano Π. Tale curva individua su Π una superficie Σ. Supponiamo che $\Sigma \cap S = \gamma$, ovvero non vi siano altri punti oltre al bordo dove Σ e S si intersechino. Allora $S \cup \Sigma = C$ è superficie chiusa che racchiude un certo volume Ω. Per il teorema della divergenza si ha

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma + \int_\Sigma \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_C \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

perché la divergenza è nulla. Inoltre la normale a Σ è la normale al piano Π, quindi è costante. Si ottiene quindi che il flusso di $\vec{F}$ attraverso Σ è pari all'opposto del flusso di $\vec{F}$ attraverso Σ che, in linea di principio, è più facile da calcolare: infatti la normale a Σ coincide con la normale a Π, quindi è costante. Tuttavia si presti attenzione agli orientamenti, infatti per applicare il teorema della divergenza è necessario che la normale sia uscente dal volume racchiuso, mentre il testo spesso richiede che il flusso sia calcolato con la normale indotta dalla parametrizzazione. Se i due orientamenti non coincidono, sarà necessario cambiare il segno al risultato.

Osservazione B.1. Nello sviluppo di tutti gli integrali considerati è di fondamentale importanza sfruttare eventuali simmetrie degli intervalli della parametrizzazione, oppure proprietà di periodicità. Ricordiamo a tal proposito i seguenti fatti:

(1) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo T, ovvero $f(x) = f(x+T)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $\displaystyle\int_0^T f(x)\, dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx = \int_a^{a+T} f(x)\, dx$

(2) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari, ossia $f(x) = f(-x)$, allora si ha $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$

(3) Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari, ossia $g(-x) = -g(x)$, allora si ha $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(x)\, dx = 0$

Osservazione B.2. Dai precedenti si ricavano i seguenti fatti:

(1) Dati $p, q \in \mathbb{N}$, q dispari, si ha $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^p\theta \sin^q\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^p\theta \sin^q\theta\, d\theta = 0$ perché l'integranda è 2π-periodica, dispari e nell'ultimo integrale si ha che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine.

(2) per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ha $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 p\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 p\theta\, d\theta = \pi$, infatti sfruttando la periodicità si ha:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 p\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(p\theta + \pi/2)\, d\theta = \int_{\pi/2}^{5/2\pi} \sin^2 p\sigma\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \sin^2(p\sigma)\, d\sigma,$$

da cui $\displaystyle 2\pi = \int_0^{2\pi} (\cos^2 p\theta + \sin^2 p\theta)\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \cos^2 p\theta\, d\theta.$

(3) per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, si ha $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos m\theta \sin n\theta\, d\theta = 0.$

(4) per calcolare potenze superiori di seno e coseno, si sfruttino le formule di Eulero[2] oppure la sostituzione $z = \tan(\theta/2)$ che muta l'integranda in una funzione razionale fratta[3]

[2]Ad esempio:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 d\theta = \frac{1}{2^4}\int_0^{2\pi} (e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2)^2 \, d\theta \\ &= \frac{1}{2^4}\int_0^{2\pi} (e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}+4+2+4e^{2i\theta}+4e^{-2i\theta}) \, d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (\cos(4\theta)+3+4\cos(2\theta)) \, d\theta = \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

[3]Tale sostituzione implica:

$$\sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad d\theta = \frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

APPENDICE C

Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie

ordinàrio = *lat.* ORDINÀRIUS da ÒRDO - acc. ÒRDINEM - *ordine* (v. q. voce). Che sta nell'ordine delle cose, e quindi Che si fa regolarmente, Che avviene di solito. Dal significato di Consueto, Comune, viene poi quello di Grossolano, Di poco conto, Alquanto ignobile.
Nello stile chiesastico, dicesì così, in forma di *sost.* il Prelato che ha giurisdizione ordinaria nella diocesi, in opposizione a Delegato, che ha giurisdizione straordinariamente conferita.
[*Ordinario* si applica a ciò che avviene secondo l'ordine anche giornaliero della natura o delle umane istituzioni, e quindi differisce da *Solito*, cha attiene all'abitudine dell'individuo, da *Consueto* che riguarda le consuetudini o l'uso di più persone, da *Comune* che dicesi ciò che conviene o appartiene a tutti. Differisce inoltre da *Volgare* o *Triviale* perché *Ordinario* aggrada alla maggior parte della gente, il secondo alla bassa gente, il terzo alla gente bassa ineducata.]

Vocabolario etimologico della lingua italiana,
di Ottorino Pianigiani, 1907.

In questa sezione richiamiamo senza dimostrazione alcuni risultati relativi al problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Enunciamo i risultati in un $\mathbb{K}$-spazio di Banach Y, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$. Il lettore può sempre pensare a $Y = \mathbb{R}^n$.

Definizione C.1. Sia I intervallo non degenere di $\mathbb{R}$, I intorno di t_0. Diremo che $\varphi : I \to Y$ è *soluzione* di (1) se φ è di classe C^1 nell'interno di I e $\varphi(t_0) = x_0$. In tal caso diremo che I è l'*intervallo di definizione* della soluzione φ. Sia I intervallo di definizione della soluzione φ. Diremo che I è massimale se non esistono soluzioni ψ di (1) con intervallo di definizione $J \subset \mathbb{R}$ tali che $J \supset \bar{I}$ (dove $\bar{I}$ indica la chiusura di I) e $\psi = \varphi$ su I. Diremo che il problema (1) è *autonomo* se f non dipende da t, ossia $f = f(x)$.

Teorema C.2 (di esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz).

(1) ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE NEGLI INTERVALLI COMPATTI
Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, I intervallo compatto di $\mathbb{R}$, $f : I \times Y \to Y$ continua e lipschitziana rispetto alla seconda variabile $y \in Y$, uniformemente nella prima $t \in I$ (ciò significa che esiste $L > 0$ tale che sia:

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_Y \le L\|y_1 - y_2\|_Y$$

per ogni $t \in I$ e per ogni $y_1, y_2 \in Y$). Dati $t_0 \in I$, $y_0 \in Y$ esiste allora un'unica soluzione $\varphi \in C^1(I, Y)$ tale che sia $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ identicamente in I e $\varphi(t_0) = y_0$.

(2) ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE NEGLI INTERVALLI NON COMPATTI
Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, I intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \times Y \to Y$ continua; supponiamo che in ogni compatto $K \subseteq I$, f sia lipschitziana rispetto alla seconda variabile $y \in Y$, uniformemente nella prima $t \in I$ (ciò significa che esiste $L_K > 0$ tale che sia:

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_Y \le L_K\|y_1 - y_2\|_Y$$

per ogni $t \in K$, $K \subseteq I$ compatto e per ogni $y_1, y_2 \in Y$). Dati $t_0 \in I$, $y_0 \in Y$ esiste allora un'unica soluzione $\varphi \in C^1(I, Y)$ tale che sia $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ identicamente in I e $\varphi(t_0) = y_0$.

(3) Criterio di Lipschitzianità sui compatti
Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, I intervallo di $\mathbb{R}$, K compatto di I. Se $f : I \times Y \to Y$ è differenziabile rispetto alla seconda variabile, essa è lipschitziana su $K \times Y$ (nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima) se e solo se:
$$\|\partial_Y f(t,y)\|_{L(Y)} \leq L_K < +\infty$$
per ogni $(t,y) \in K \times Y$. Se $Y \simeq \mathbb{K}^n$ ha dimensione finita, l'ipotesi è soddisfatta se e solo se $\partial_{y_1} f(t,y), ..., \partial_{y_n} f(t,y)$ sono tutte limitate in $K \times Y$.

(4) Esistenza e Unicità Locale
Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, Ω aperto di $\mathbb{R} \times Y$, $f : \Omega \to Y$ continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima (ciò significa che per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$ esistono $L, \delta_0, r_0 > 0$ tali che $B(t_0, \delta_0] \times B(y_0, r_0] \subseteq \Omega$ ed inoltre
$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\|_Y \leq L\|y_1 - y_2\|_Y$$
per ogni $(t,y) \in B(t_0, \delta_0] \times B(y_0, r_0]$). Allora per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$ esiste $\delta > 0$ e $\varphi \in C^1(B(t_0, \delta], Y)$ soluzione del problema di Cauchy $y' = f(t,y)$ e $y(t_0) = y_0$. Inoltre se $\psi \in C^1(B(t_0, \delta], Y)$ è soluzione dello stesso problema definita in un intorno di t_0, si ha $\varphi(t) = \psi(t)$ in un intorno di t_0.

(5) Criterio di Lipschitzianità locale
Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, Ω aperto di $\mathbb{R} \times Y$, $f : \Omega \to Y$. Condizione sufficiente perchè f sia localmente lipschitziana nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima è che $\partial_Y f(t,y)$ esista continua in Ω. Nel caso in cui $Y \simeq \mathbb{K}^n$ ha dimensione finita, se $\partial_{y_k} f(t,y)$ per $k = 1, ..., n$ sono continue in Ω, allora si ha lipschitzianità locale.

(6) Unicità delle Soluzioni
Supponiamo che l'equazione $y' = f(t,y)$ soddisfi le ipotesi per l'unicità locale per (1)*. Se I è intervallo di $\mathbb{R}$ e $\phi, \psi : I \to Y$ sono soluzioni di $y' = f(t,y)$ che coincidono in almeno un punto, esse coincidono in tutto I.*

Definizione C.3 (Dipendenza dai valori iniziali). Data un'equazione $y' = f(t,y)$ tale per cui si abbia unicità locale della soluzione del relativo problema di Cauchy con condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, il suo *flusso* $\Phi(t, t_0, y_0)$ è definito come il valore al tempo t dell'unica soluzione che soddisfi $y(t_0) = y_0$.

Proposizione C.4 (Dipendenza dai valori iniziali). *Se sono soddifatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per $\dot{y} = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ in un intorno aperto di (t_0, y_0), il flusso Φ dell'equazione differenziale è definito su un aperto $D \supset I \times I \times \Omega$, dove I è intorno di t_0, Ω è intorno di y_0 e $\Phi : D \to Y$ è (continua e) localmente lipschitziana.*

Definizione C.5. Se f non dipende da t, ovvero il sistema è autonomo, e $t \mapsto y(t)$ è soluzione, anche $t \mapsto y(t+c)$ è soluzione. Pertanto in questo caso si può definire generalmente il flusso $\Phi(t, y_0) = \phi_t(y_0)$ è definito come il valore al tempo t della soluzione che soddisfa $y(0) = y_0$. Sussistono le seguenti proprietà (dette di semigruppo): $\phi_0(y_0) = y_0$ e $\phi_s \circ \phi_t(y_0) = \phi_{s+t}(y_0)$.

Definizione C.6. Sia $Y = \mathbb{R}^n$. Dato il sistema autonomo $y = f(y)$, ogni soluzione descrive parametricamente un tratto di curva in Y. Se $n = 1, 2, 3$, l'ambiente dove vengono rappresentate le soluzioni si chiama *spazio delle fasi*. Un complesso di più soluzioni al variare delle condizioni iniziali è detto *ritratto o diagramma di fase* del sistema.

Teorema C.7 (Estensione delle soluzioni). *Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, Ω aperto di $\mathbb{R} \times \Omega$, I intervallo di $\mathbb{R}$. Sia $f : \Omega \to Y$ con esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy* (1) *e sia $\varphi : I \to Y$ una soluzione massimale.*

(1) *Sia $\beta = \sup I$ (rispettivamente $\alpha = \inf I$) e supponiamo che esista $c \in I$ tale che $\varphi'(t)$ sia limitata in $[c, \beta[$ (rispettivamente in $]\alpha, c]$. Allora o si ha $\beta = +\infty$ (rispettivamente $\alpha = -\infty$) oppure $\lim_{t \to \beta^-} \varphi(t) = y_\beta$ (rispettivamente $\lim_{t \to \alpha^+} \varphi(t) = y_\alpha$) esiste in Y e in tal caso $(\beta, y_\beta) \notin \Omega$ (rispettivamente $(\beta, y_\beta) \notin \Omega$).*
(2) *Se K è un compatto di Ω allora esistono un intorno destro U di $a = \inf I$ ed un intorno sinistro V di $b = \sup I$ tali che se $t \in U \cup V$ allora $(t, \varphi(t)) \notin K$ (le soluzioni massimali escono definitivamente dai compatti di Ω).*

(3) *Se K è compatto di Ω, esiste $\delta = \delta(K) > 0$ dipendente solo da K e da f, tale che ogni soluzione del problema di Cauchy* (1) *con* $(t_0, y_0) \in \Omega$ *è definita su* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

(4) *(Fuga dai compatti: caso autonomo) Sia A aperto di Y, $g : A \to Y$ localmente lipschitziana. Sia $\varphi : I \to A$ soluzione massimale di $y' = g(y)$ e sia C un compatto contenuto in A; sia $b = \sup I$. Allora si verifica una delle seguenti alternative:*
   (a) *esiste un intorno sinistro V di b tale che $\varphi(t) \notin C$ per $t \in V$, quindi φ esce definitivamente da C;*
   (b) *si ha $b = +\infty$*

   Analogo enunciato vale per $a = \inf I$

Definizione C.8. Un *integrale primo* del sistema autonomo $y' = g(y)$, dove $g : A \to Y$ è una funzione continua definita su un aperto A dello spazio di Banach Y, è una funzione a valori reali $E \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che per ogni soluzione $\varphi : I \to A$ del sistema si abbia $E \circ \varphi$ costante.

Teorema C.9 (Teorema di maggiorazione a priori). *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $\mu : I \times [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continua; Sia Y spazio di Banach, $\varphi : I \to Y$ derivabile e $u : I \to [0, +\infty[$ derivabile. Supponiamo che sia $\|\varphi(t_0)\|_Y \leq u(t_0)$. Allora:*

(1) *se $\|\varphi'(t)\|_Y < \mu(t, \|\varphi(t)\|_Y)$ e $\mu(t, u(t)) \leq u'(t)$ per ogni $t \geq t_0$, $t \in I$, per tali t si ha anche $\|\varphi(t)\|_Y \leq u(t)$;*

(2) *se $\|\varphi'(t)\|_Y < \mu(t, \|\varphi(t)\|_Y)$ e $\mu(t, u(t)) \leq -u'(t)$ per ogni $t \leq t_0$, $t \in I$, per tali t si ha anche $\|\varphi(t)\|_Y \leq u(t)$.*

In ambo i casi se $t \neq t_0$ si ha in realtà $\|\varphi(t)\|_Y < u(t)$. Il teorema vale anche rispettivamente se: $\|\varphi'(t)\|_Y \leq \mu(t, \|\varphi(t)\|_Y)$ e $\mu(t, u(t)) < u'(t)$ nel primo caso oppure $\|\varphi'(t)\|_Y \leq \mu(t, \|\varphi(t)\|_Y)$ e $\mu(t, u(t)) < -u'(t)$ nel secondo caso.

Teorema C.10 (del confronto). *Sia Ω aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua. Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ e siano $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto u(t)$ funzioni derivabili in I; supponiamo che in $t_0 \in I$ si abbia $y(t_0) \leq u(t_0)$. Se per ogni $t > t_0$, $t \in I$, si ha $y'(t) \leq f(t, y(t))$ e $f(t, u(t)) \leq u'(t)$ una almeno di tali disuguaglianze essendo vera in senso stretto per ogni $t \geq t_0$, si ha $y(t) \leq u(t)$ per ogni $t \in I$, $t \geq t_0$ e l'uguaglianza vale solo in t_0.*

Corollario C.11. *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $f, g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e localmente lipschitziane rispetto alla seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima. Siano $x : I \to \mathbb{R}$, $y : I \to \mathbb{R}$ due funzioni tali per cui $\dot{x} \leq f(t, x(t))$, $\dot{y} \geq g(t, y(t))$, per ogni $t \in I$. Supponiamo inoltre che sia $f(t, x(t)) \leq g(t, y(t))$ per ogni $t \in I$. Allora:*

(1) *se $x(t_0) \leq y(t_0)$ si ha $x(t) \leq y(t)$ per ogni $t \in I$ con $t \geq t_0$;*

(2) *se $x(t_0) \geq y(t_0)$ si ha $x(t) \geq y(t)$ per ogni $t \in I$ con $t \leq t_0$.*

Proposizione C.12. *Siano $a > 0$ e $x : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che esistano i limiti $\lim_{t \to +\infty} x(t) \in \mathbb{R}$ e $\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = \gamma \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora $\gamma = 0$.*

Lemma C.13 (di Gronwall). *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $t_o \in I$, sia Y spazio di Banach. Allora:*

(1) *se $\varphi \in C^1(I, Y)$ è tale che $\|\varphi'(t)\| \leq a_0 + a_1 \|\varphi(t)\|$ per ogni $t \in I$ con $a_1 > 0$ e $a_0 \geq 0$, allora*
$$\|\varphi(t)\| \leq \left(\frac{a_0}{a_1} + \|\varphi(t_0)\| \right) e^{a_1 |t - t_0|} - \frac{a_0}{a_1}.$$

(2) *sia $\psi \in C^0(I, \mathbb{R})$, $L, M \geq 0$ tali che per ogni $t \in I$ valga:*
$$|\psi(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^t \psi(\tau)\, d\tau \right| + M,$$
allora per ogni $t \in I$ vale anche $|\psi(t)| \leq M e^{L|t - t_0|}$.

Teorema C.14 (di esistenza di Peano). *Sia $Y = \mathbb{R}^n$, Ω aperto di $\mathbb{R} \times Y$, $f : \Omega \to Y$ continua. Allora esiste un intorno I di t_0 in $\mathbb{R}$ ed una $\varphi \in C^1(I, Y)$ che in I è soluzione del problema di Cauchy $y' = f(t, x)$, $y(t_0) = y_0$. Tale soluzione non è necessariamente unica.*

APPENDICE D

Equazioni differenziali totali

Il tutto è maggiore
della somma delle sue parti.

Aristotele.

Definizione D.1. Sia data una 1-forma differenziale $\omega(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ dove le funzioni M, N sono definite in un dominio (di solito semplicemente connesso) D del piano $\mathbb{R}^2$ e ivi continue. Chiameremo *equazione differenziale totale* ogni espressione del tipo $\omega(x,y) = 0$. Risolvere un'equazione differenziale totale significa determinare una funzione $F(x,y)$ e una funzione $\lambda(x,y)$ tale per cui $dF(x,y) = \lambda(x,y)\omega(x,y)$ e $\lambda(x,y) \neq 0$ in D. Una soluzione o *integrale generale* dell'equazione totale sarà $F(x,y) = c$, con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Se $S = \{(x,y) \in D : M(x,y) = N(x,y) = 0\}$, il problema è posto in $D \setminus S$.

Breve sintesi delle tipologie più comuni:

(1) **Equazioni differenziali totali esatte:** Sono del tipo $\omega(x,y) = 0$ con

$$\omega(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \text{ forma } \textit{esatta},$$

ovvero esiste una funzione differenziabile (detta *primitiva* di ω) $F(x,y)$ tale che $dF = \omega$, cioè:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y).$$

Se $F(x,y)$ è una primitiva di ω, l'integrale generale in forma implicita è $F(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, ovvero si può scegliere $\lambda(x,y) \equiv 1$. Nel caso in cui il dominio sia semplicemente connesso, l'essere forma esatta è equivalente alla condizione di *chiusura*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Differenziando tale relazione, si ha infatti $dF(x,y) = \omega(x,y) = 0$.

(2) **Equazioni differenziali totali a variabili separate:** Si presentano nella forma $\omega(x,y) = 0$ con

$$\omega(x,y) = M(x)\,dx + N(y)\,dy$$

Se $f(x)$ è una primitiva di M e $g(y)$ è primitiva di N, l'integrale generale in forma implicita è $f(x) + g(y) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

(3) **Equazioni differenziali totali a variabili separabili:** Si presentano nella forma $\omega(x,y) = 0$ con

$$\omega(x,y) = \varphi(x)\psi(y)\,dx + \varphi_1(x)\psi_1(y)\,dy$$

Supposto $\psi(y) \neq 0$, $\varphi_1(x) \neq 0$, si divide l'equazione per $\psi(y)\varphi_1(y)$ riconducendosi al caso precedente (variabili separate).

(4) **Equazioni differenziali totali omogenee:** Sia $\omega(x,y) = M(x)\,dx + N(y)\,dy$. Se le funzioni M e N sono funzioni omogenee in D, ovvero esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $k > 0$:

$$M(kx,ky) = k^\alpha M(x,y), \qquad N(kx,ky) = k^\alpha N(x,y),$$

definite su un cono [1] C di $\mathbb{R}^2$.

Posto $x = \xi, y = \xi\eta$ si ottiene la forma esatta:

$$\frac{1}{\xi}\,d\xi + \frac{N(1,\eta)}{M(1,\eta) + \eta N(1,\eta)}\,d\eta = 0.$$

[1] Ricordiamo che $C \subseteq \mathbb{R}^2$ è un cono di $\mathbb{R}^2$ se soddisfa la seguente proprietà: dati $(x,y) \in C$ allora $(kx,ky) \in C$ per ogni $k > 0$.

Se M, N sono omogenee di un comune grado di omogeneità $\alpha \neq -1$, allora qualunque sia il dominio D si ha

$$F(x,y) = \frac{1}{\alpha+1}[x \cdot M(x,y) + y \cdot N(x,y)].$$

Definizione D.2. Data nel dominio A l'equazione $\omega = 0$, un *fattore integrante* è una funzione $g : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 mai nulla tale che $g\omega$ sia chiusa. L'equazione $\omega = 0$ risulta allora equivalente a $g\omega = 0$ che su un semplicemente connesso è un'equazione esatta. Si può scegliere $g > 0$ quindi $g = e^f$ con $f : A \to \mathbb{R}$. Se

$$\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$$

allora condizione necessaria e sufficiente affinchè $e^f\omega$ sia chiusa è:

$$\partial_y p - \partial_x q = -p\partial_y f + q\partial_x f$$

Definizione D.3. Casi particolari di fattore integrante:

(1) se $\partial_y p - \partial_x q = h(x)q$ si ha il fattore integrante $e^{\int h(x)\,dx}$, in modo equivalente se $\dfrac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{q(x,y)}$ è una funzione *della sola* x, allora si ha il fattore integrante $e^{\int h(x)\,dx}$ dove

$$h(x) = \frac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{q(x,y)};$$

(2) se $\partial_y p - \partial_x q = k(y)p$ si ha il fattore integrante $e^{-\int k(y)\,dy}$, in modo equivalente se $\dfrac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{-p(x,y)}$ è una funzione *della sola* y, allora si ha il fattore integrante $e^{\int k(y)\,dy}$ dove

$$k(y) = \frac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{-p(x,y)};$$

(3) Supponiamo

$$\partial_y p - \partial_x q = f(x)q(x,y) - g(y)p(x,y)$$

con f, q, p di classe C^1. Allora:

$$h(x,y) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{y_0}^{y} g(t)dt\right)$$

è fattore integrante per ω.

(4) L'equazione differenziale totale:

$$x^r y^s(my\,dx + nx\,dy) + x^\rho y^\sigma(\mu y\,dx + \nu x\,dy) = 0$$

con $r, s, \rho, \sigma, m, n, \mu, \nu$ costanti tali che $m\nu - n\mu \neq 0$ ammette fattore integrante $x^\alpha y^\beta$ per α, β opportuni.

(5) L'equazione differenziale totale:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = yf(xy)\,dx + xg(xy)\,dy = 0$$

con $f \neq g$, ammette fattore integrante $\dfrac{1}{Mx - Ny}$.

(6) L'equazione differenziale totale:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

con M, N omogenee dello stesso ordine e $Mx + Ny \neq 0$, ammette fattore integrante $\dfrac{1}{Mx + Ny}$.

A volte la forma del fattore integrante è suggerita dalla presenza di alcuni termini nella forma particolare dell'equazione.

Termini	Fattore Int.	Diff. Esatto
$x\,dy - y\,dx$	$\dfrac{1}{x^2}$	$d\left(\dfrac{y}{x}\right)$
$x\,dy - y\,dx$	$\dfrac{1}{y^2}$	$d\left(-\dfrac{x}{y}\right)$
$x\,dy - y\,dx$	$\dfrac{1}{xy}$	$d\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$
$x\,dy - y\,dx$	$\dfrac{1}{x^2+y^2}$	$d\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$
$x\,dy + y\,dx$	$\dfrac{1}{(xy)^n}$	$\begin{cases} d(\ln(xy)) & \text{se } n=1 \\ d\left(-\dfrac{1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right) & \text{se } n\neq 1 \end{cases}$
$x\,dy + y\,dx$	$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^n}$	$\begin{cases} d\left(\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) & \text{se } n=1 \\ d\left(-\dfrac{1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right) & \text{se } n\neq 1 \end{cases}$

Osservazione D.4. Grazie al Teorema della Funzione Implicita, se $\lambda\omega = 0$ è esatta e per se in $P(x_0, y_0) \in D$ vale $N(x_0, y_0) \neq 0$, l'equazione data si può scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

in un intorno di P. Tale affermazione è resa rigorosa dalla seguente osservazione: $\lambda\omega$ ammette F come primitiva, perché F è esatta. Inoltre vale $\partial_y F(x_0, y_0) = \lambda(x_0, y_0) N(x_0, y_0) \neq 0$, pertanto F definisce implicitamente in un intorno di $P(x_0, y_0)$ una funzione $y = y(x)$ con $y_0 = y(x_0)$. Poiché $M, N \in C^1$, e $\lambda \neq 0$ si ha che $N(x, y) \neq 0$ in un intorno di $P(x_0, y_0)$, pertanto il teorema di Dini può essere applicato in un intorno. Si ha quindi che $y = y(x)$ è di classe C^1 e vale

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Analogamente se vale $M(x_0, y_0) \neq 0$, l'equazione data si può scrivere:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$$

in un intorno di P.
Viceversa, l'equazione $y' = f(x, y)$ può essere sempre scritta nella forma:

$$f(x,y)\,dx - dy = 0.$$

In altre parole, le *curve di livello* di F, ovvero gli insiemi:

$$F_c := \{(x,y) \in A : F(x,y) = c\}$$

rappresentano in forma implicita le soluzioni delle equazioni ordinarie

$$N(x, y(x))\frac{dy}{dx} + M(x, y(x)) = 0, \qquad\qquad M(x(y), y)\frac{dx}{dy} + N(x(y), y) = 0.$$

Osservazione D.5. Se $\omega = 0$ è esatta, sia γ una qualunque curva C^1 a tratti congiungente $P(x_0, y_0)$ ad un generico punto $(x, y) \in D$, allora la primitiva di ω che valga 0 in P è data da:

$$F(x,y) = \int_\gamma \omega$$

In particolare, se D è un rettangolo, può essere scelta la spezzata costituita dai segmenti congiungenti P a (x_0, y) e poi a (x, y) oppure congiungente P a (x, y_0) e poi a (x, y). Nel primo caso si avrà:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)\,ds.$$

Nel secondo caso si avrà:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x,s)\,ds.$$

Osservazione D.6. Se $\omega(x,y)$ è forma di classe C^l, ω mai nulla, e G è integrale primo per $\omega = 0$, di classe $\mathcal{C}^{l+1}$ su D, allora esiste $\lambda \in \mathcal{C}^l(A,\mathbb{R})$ tale che sia:

$$\partial_x G(x,y) = \lambda(x,y)p(x,y)$$
$$\partial_y G(x,y) = \lambda(x,y)q(x,y)$$

Viceversa se esiste $\lambda \in C^l(D,\mathbb{R})$ tale che $\lambda\omega$ sia esatta, ogni primitiva di $\lambda\omega$ è integrale primo per l'equazione totale $\omega = 0$.

Per completezza, diamo ora brevi cenni al caso $\mathbb{R}^3$, ad ogni modo tale argomento è facoltativo.

Osservazione D.7 (Equazioni totali in $\mathbb{R}^3$). Sia:

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

una 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$, l'equazione $\omega = 0$ è detta equazione differenziale totale. La condizione di integrabilità per un'equazione totale in tre variabili è:

$$P(\partial_z Q - \partial_y R) + Q(\partial_x R - \partial_z P) + R(\partial_y P - \partial_x Q) = 0$$

(1) se $\omega(x,y,z) = dF(x,y,z)$ è esatta, la soluzione è data da $F(x,y,z) = C \in \mathbb{R}$.
(2) se $\omega(x,y,z)$ non è esatta, può essere possibile trovare un fattore integrante $\lambda(x,y,z)$ tale che $\lambda\omega = dF$ sia esatta. La soluzione è data da $F(x,y,z) = C \in \mathbb{R}$ con $\lambda(x,y,z) \neq 0$.
(3) se non è posssibile applicare nessuno dei precedenti, trattare una delle variabili, ad es. z come una costante. Si integra l'equazione risultante indicando con $\phi(z)$ la costante di integrazione. Si prende il differenziale totale dell'integrale ottenuto e per confronto con l'equazione di partenza si determina $\phi(z)$.

Coppie di Equazioni diff. totali in $\mathbb{R}^3$: Supponiamo di dover risolvere simultaneamente $\omega_1(x,y,z) = 0$ e $\omega_2(x,y,z) = 0$. La soluzione sarà data da una coppia di relazioni $F_1(x,y,z) = C_1 \in \mathbb{R}$ e $F_2(x,y,z) = C_2 \in \mathbb{R}$. La procedura è la seguente:

(1) se ω_1 e ω_2 sono entrambe integrabili (eventualmente tramite due fattori integranti λ_1 e λ_2), la soluzione è data dalle loro primitive.
(2) se ω_1 è integrabile ma ω_2 non lo è, si integra $\omega_1 = 0$ per ottenere la relazione $F_1(x,y,z) = C$. Usando questa relazione assieme a $\omega_1 = 0$ e $\omega_2 = 0$ si eliminano una variabile e i suoi differenziali e poi si integra l'equazione che ne risulta.

Se nessuna delle due è integrabile, si procede considerando due variabili (ad es. x, y) come funzioni della terza (ad es. z). Oppure si cerca di eliminare a turno dy e dz (oppure un'altra coppia) tra le due equazioni:

$$\begin{cases} \omega_1 & = P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz & = 0 \\ \omega_2 & = P_2\,dx + Q_2\,dy + R_2\,dz & = 0 \end{cases}$$

Si ha allora:

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} dx - \det\begin{pmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{pmatrix} dz = 0 \\ \det\begin{pmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{pmatrix} dx - \det\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} dy = 0 \end{cases}$$

e si esprima il risultato nella forma:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

dove si ha (per $\lambda \neq 0$):

$$X = \lambda \det\begin{pmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{pmatrix}, \qquad Y = \lambda \det\begin{pmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{pmatrix}, \qquad Z = \lambda \det\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

Si ottengono le tre equazioni, due qualsiasi delle quali equivalenti al sistema di partenza:

$$Y\,dx = X\,dy, \qquad Y\,dz = Z\,dy, \qquad X\,dz = Z\,dx.$$

Se sono integrabili o se una di esse lo è si procede come visto in precedenza. Se nessuna è integrabile, allora si ha:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{l_1\,dx + m_1\,dy + n_1\,dz}{l_1 X + m_1 Y + n_1 Z} = \frac{l_2\,dx + m_2\,dy + n_2\,dz}{l_2 X + m_2 Y + n_2 Z}$$

dove $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2$ sono arbitrarie (moltiplicatori) e tali che i denominatori non si annullino. Con appropriate scelte dei moltiplicatori si possono ottenere equazioni integrabili. Se $lX + mY + nY = 0$, allora anche $l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$ e se questa relazione è integrabile, il suo integrale fornisce una delle relazioni richieste.

APPENDICE E

Richiami sulle equazioni differenziali lineari

linearità *sost.* **Sinonimi**: austerità, chiarezza, finezza, drittura, moralità, modestia, sobrietà, geometria ‖ *Vedi anche:* essenzialità, pulizia, comprensibilità, semplicità, purezza, squisitezza **Contrari:** difficoltà ‖ *Vedi anche* delicatezza, scabrosità, spinosità.

Dizionario dei sinonimi e contrari.

In questa sezione richiamiamo alcuni risultati sulle equazioni differenziali lineari in un $\mathbb{K}$-spazio di Banach Y, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Come al solito, il lettore può sempre pensare $Y = \mathbb{R}^n$. In tutta la sezione, I indicherà un intervallo di $\mathbb{R}$. Cominceremo col ricordare alcuni strumenti fondamentali per la risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie lineari.

Definizione E.1 (esponenziale di matrice). Siano $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ l'esponenziale di matrice è definito da $e^{tA} = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(tA)^j}{j!}$. Se A è una matrice diagonale e gli elementi sulla diagonale principale sono $\lambda_1, ..., \lambda_n$, si ha che e^{tA} è una matrice diagonale e gli elementi sulla diagonale principale sono $e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}$. Se P è matrice invertibile tale che $PAP^{-1} = D$ sia diagonale, allora $Pe^{tA}P^{-1} = e^{tD}$.

Definizione E.2 (integrazione delle funzioni razionali fratte). Indichiamo con $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$. Dati $N, D \in \mathbb{R}[x]$ polinomi a coefficienti reali, una funzione razionale fratta è il quoziente $f(x) = N(x)/D(x)$. Supponiamo che N e D non abbiano fattori comuni tra loro (altrimenti li semplifichiamo). Nella ricerca di primitive di f possono presentarsi due casi:

(1) o il grado di D è maggiore di quello di N,
(2) altrimenti se il grado di N è maggiore o uguale a quello di D è possibile eseguire la divisione tra polinomi determinando due polinomi $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ tali che $f(x) = Q(x) + R(x)/D(x)$. Una primitiva di f si ha sommando una primitiva del polinomio Q e della razionale fratta $R(x)/D(x)$ dove il grado di R è minore di quello di D.

Il problema è quindi ricondotto alla ricerca di primitive di $f(x) = N(x)/D(x)$ con N, D polinomi in cui il grado di D è strettamente maggiore di quello di N e privi di fattori in comune.
Supponiamo che $x_1, ..., x_d \in \mathbb{R}$ siano le radici reali di D, e supponiamo che $\alpha_1+i\beta_1, \alpha_1-i\beta_1, ..., \alpha_h+i\beta_h, \alpha_h-i\beta_h \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ siano le radici complesse non reali di D. Ricordiamo che, essendo D a coefficienti reali, se c'è una radice complessa non reale, vi è anche la complessa coniugata ed entrambe hanno la stessa molteplicità. Allora esistono costanti $A_{kj_k}, B_{\ell\, s_\ell}, C_{\ell\, s_\ell} \in \mathbb{R}$ tali che f si scriva come una somma finita formata dai seguenti termini:

(1) per ogni radice reale x_k di molteplicità ν_k si ha il contributo:

$$\frac{A_{k1}}{x-x_k} + \frac{A_{k2}}{(x-x_k)^2} + ... + \frac{A_{k\nu_k}}{(x-x_k)^{\nu_k}}$$

(2) per ogni coppia di radici complesse coniugate non reali $\alpha_\ell + i\beta_\ell$, $\alpha_\ell - i\beta_\ell$, della stessa molteplicità μ_ℓ si ha il contributo:

$$\frac{B_{\ell\,1}x + C_{\ell\,1}}{(x-\alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2} + \frac{B_{\ell\,2}x + C_{\ell\,2}}{((x-\alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2)^2} + ... + \frac{B_{\ell\,\mu_\ell}x + C_{\ell\,\mu_\ell}}{((x-\alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2)^{\mu_\ell}}.$$

Pertanto dall'uguaglianza:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = &\sum_k \frac{A_{k1}}{x-x_k} + \frac{A_{k2}}{(x-x_k)^2} + ... + \frac{A_{k\nu_k}}{(x-x_k)^{\nu_k}} + \\ &+ \sum_\ell \frac{B_{\ell\,1}x + C_{\ell\,1}}{(x-\alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2} + \frac{B_{\ell\,2}x + C_{\ell\,2}}{((x-\alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2)^2} + ... + \frac{B_{\ell\,\mu_\ell}x + C_{\ell\,\mu_\ell}}{((x-\alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2)^{\mu_\ell}}. \end{aligned}$$

moltiplicando per $D(x)$ e raccogliendo i termini dell stesso grado è possibile determinare le costanti $A_{kj_k}, B_{\ell\, s_\ell}, C_{\ell\, s_\ell} \in \mathbb{R}$ in modo univoco. A questo punto una primitiva di f si ottiene sommando le primitive di tutti i contributi, che risultano di calcolo immediato ricordando che $A_{kj_k}, B_{\ell\, s_\ell}, C_{\ell\, s_\ell} \in \mathbb{R}$ sono costanti e che si ha:

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C, & \text{se } n \in \mathbb{N},\ n > 1; \\ \\ \log|x+a| + C, & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^n}\, dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + C, & \text{se } n \in \mathbb{N},\ n > 1; \\ \\ \dfrac{1}{2}\log|x^2+a| + C, & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il calcolo di

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n},\ n \in \mathbb{N}$$

si ha $I_1 = \arctan x + C$ e per $n > 1$

$$I_n = -\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1},$$

quindi applicando questa formula ricorrente per il numero necessario di volte si perviene alla primitiva desiderata.

Definizione E.3. Un'*equazione differenziale lineare del primo ordine* in $I \times Y$ è della forma:

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t),$$

dove $A \in C^0(I, L_{\mathbb{K}}(Y))$, $b \in C^0(I, Y)$ e $L_{\mathbb{K}}(Y)$ indica lo spazio vettoriale degli operatori lineari continui di Y in se stesso. Se Y ha dimensione finita n, allora $L_{\mathbb{K}}(Y)$ è isomorfo allo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$, pertanto $A(t)$ in questo caso è una matrice $n \times n$ i cui coefficienti sono funzioni continue da I in $\mathbb{K}$. Questa equazione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità. Se $b(t) = 0$ per ogni t l'equazione diviene $y'(t) = A(t)y(t)$ detta anche *omogenea associata* a $y' = A(t)y + b(t)$. Un'equazione lineare omogenea ammette sempre la soluzione identicamente nulla.

Un caso particolare della precedente definizione, ovvero con $Y = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, è dato da:

Definizione E.4 (Equazioni lineari del primo ordine scalari).
Caso omogeneo: tali equazioni si presentano nella forma:

$$y'(t) = a(t)y$$

con $a \in C^0(I, \mathbb{K})$, I intervallo di $\mathbb{R}$. La loro soluzione è data da:

$$y(t) = c_0 e^{A(t)}$$

al variare di $c_0 \in \mathbb{K}$, dove $A(t) \in \displaystyle\int a(t)$ è una primitiva di $a(t)$. Ricordiamo che tale equazione ammette sempre la soluzione identicamente nulla. *Caso non omogeneo*: Tali equazioni si presentano nella forma:

$$y'(t) = a(t)y + b(t)$$

con $a, b \in C^0(I, \mathbb{K})$, I intervallo di $\mathbb{R}$. Se $A(t) \in \int a(t)$ è una primitiva di $a(t)$ e $B(t) \in \int e^{-A(t)} b(t)$ è una primitiva di $e^{-A(t)} b(t)$, allora le soluzioni sono date al variare di $c \in \mathbb{K}$ dall'equazione:

$$y(t) = ce^{A(t)} + e^{A(t)} B(t)$$

Nel caso sia assegnata una condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, la soluzione (unica) è data da:

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(t)\, dt\right) + \exp\left(\int_{t_0}^t a(t)\, dt\right) \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^t a(t)\, dt\right) b(t)\, dt,$$

dove $\exp(x) = e^x$.

Più in generale ricordiamo la seguente:

Proposizione E.5 (conseguenze della linearità). *I seguenti fatti sono conseguenze della linearità:*

(1) *Lo spazio delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea è uno spazio vettoriale isomorfo a Y, l'isomorfismo è dato dalla valutazione delle soluzioni in t_0: ovvero se $\varphi_1, \varphi_2 : I \to Y$ sono soluzioni di $y'(t) = A(t)y(t)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sono costanti, allora $\varphi : I \to Y$ definita da $\varphi(t) = \lambda\varphi_1(t) + \mu\varphi_2(t)$ è soluzione di $y'(t) = A(t)y(t)$.*
(2) *Le soluzioni dell'equazione non omogenea $y' = A(t)y + b(t)$ si ottengono aggiungendo alle soluzioni dell'equazione omogenea associata $y' = A(t)y$ una soluzione particolare. In altre parole, se $w : I \to Y$ è soluzione dell'equazione non omogenea, tutte le altre soluzioni dell'equazione non omogenea sono della forma $w + \varphi$ con φ soluzione dell'omogenea associata.*
(3) *Se nell'equazione non omogenea $y' = A(t)y + b(t)$ si ha $b(t) = b_1(t) + ...b_k(t)$ e $\varphi_i : I \to Y$ è soluzione di $y' = A(t)y + b_i(t)$ per $i = 1, ..., k$, allora $\varphi : I \to Y$ definita da $\varphi(t) = \varphi_1(t) + ... + \varphi_k(t)$ è soluzione di $y' = A(t)y + b(t)$.*

Osservazione E.6. Ad esempio se $Y = \mathbb{R}$, un termine noto della forma $b(t) = f(t)\cos(\alpha t)$ può essere scritto come somma
$$b(t) = \frac{1}{2}f(t)e^{i\alpha t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-i\alpha t}$$
e in modo analogo per un termine $b(t) = f(t)\sin(\alpha t)$. Se si sa risolvere l'equazione con termine noto $\frac{1}{2}f(t)e^{\pm i\alpha t}$, si sa risolvere anche l'equazione di partenza.

Proposizione E.7. *Se $\varphi_1, ..., \varphi_r$ sono soluzioni dell'omogenea $y' = A(t)y$, allora sono equivalenti le condizioni:*
(1) *le funzioni $\varphi_1, ..., \varphi_r \in C^1(I, Y)$ sono linearmente indipendenti (come elementi dello spazio vettoriale $C^1(I, Y)$);*
(2) *esiste $t_0 \in I$ tale che i vettori $\varphi_1(t_0), ..., \varphi_r(t_0) \in Y$ sono linearmente indipendenti;*
(3) *per ogni $t \in I$ i vettori $\varphi_1(t), ..., \varphi_r(t) \in Y$ sono linearmente indipendenti.*

Definizione E.8. Consideriamo l'equazione $y' = A(t)y$, sia $\phi : I \times I \times Y \to Y$ il suo flusso, cioè $\phi(t, t_0, y_0)$ è il valore all'istante t della soluzione che all'istante t_0 vale y_0. Il flusso è ben definito perché la soluzione che all'istante t_0 vale y_0 è unica. Fissati $t, t_0 \in I$ si ha che $y \mapsto \phi(t, t_0, y)$ è funzione lineare di Y in Y. Quindi $\phi(t, t_0, y_0) = R(t, t_0)y_0$ con $R(t, t_0) \in L_{\mathbb{K}}(Y)$. Nel caso in cui Y abbia dimensione finita n, si ha che $R(t, t_0)$ è una matrice $n \times n$ i cui coefficienti dipendono da t e t_0.
Indicata con id_Y l'identità in Y (ovvero la matrice identità nel caso di dimensione finita), si hanno le seguenti relazioni per ogni $t_2, t_1, t_0 \in I$:
$$R(t_0, t_0) = \mathrm{id}_Y \qquad R(t_2, t_1) \circ R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$$
Fissato $t_0 \in I$, si ha che $R_{t_0}(t)$ soddisfa a $X' = A(t)X$ con $X : I \to L_{\mathbb{K}}(Y)$, nel caso di dimensione finita X è una matrice $n \times n$ i cui coefficienti dipendono dal tempo.
Data $\Phi \in C^1(I, L_{\mathbb{K}}(Y))$, si ha $\Phi' = A(t)\Phi(t)$ per ogni t se e solo se per ogni y_0 la funzione $\varphi_{y_0}(t) = \Phi(t)y_0$ è soluzione di $y' = A(t)y$. Inoltre o $\Phi(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$ oppure $\Phi(t)$ non è invertibile per nessun $t \in I$.
Una *risolvente* per $y' = A(t)y$ è $\Phi \in C^1(I, L_{\mathbb{K}}(Y))$ soddifacente a $\Phi(t)' = A(t)\Phi(t)$ e invertibile per ogni $t \in I$.

Proposizione E.9 (Metodo della variazione delle costanti). *Sia Φ risolvente di $y' = A(t)$ per il problema non omogeneo $y' = A(t)y + b(t)$ con dato $u(0) = y_0$, allora:*
$$u(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau)b(\tau)\, d\tau$$
ricordando che per ogni risolvente Φ si ha $R(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$.

Nella pratica, il metodo della variazione delle costanti si riduce a quanto segue: data l'equazione lineare di ordine n non omogenea a coefficienti costanti
$$y^{(n)} + ... + a_n y = Q(x)$$
se $y(x) = c_1y_1(x) + ... + c_ny_n(x)$ è l'integrale dell'omogenea associata, $c_k \in \mathbb{R}$, sostituiamo le costanti c_k con funzioni $c_k = c_k(x)$ e risolviamo seguente sistema di n equazioni nelle n incognite $c_k'(x)$:
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + ... + c_n'(x)y_n(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + ... + c_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1^{(n)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(n)}(x) = Q(x). \end{cases}$$

Tale sistema lineare può essere riscritto nella forma:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}' \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q(x) \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è chiamata il *wronskiano* delle soluzioni (indipendenti) $y_1(x), ..., y_n(x)$. Ottenute le soluzioni $c_k'(x)$, si ricavano le funzioni $c_k(x)$ per integrazione. Allora una soluzione particolare dell'equazione sarà

$$\bar{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + ... + c_n(x)y_n(x),$$

e l'integrale generale dell'equazione sarà

$$y(x) + \bar{y}(x) = (c_1(x) + c_1)y_1(x) + ... + (c_n(x) + c_n)y_n(x), \qquad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}.$$

Osservazione E.10. Per equazioni del secondo ordine

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t),$$

il metodo della variazione delle costanti si riduce alla ricerca di soluzioni del tipo

$$\tilde{y} = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

costruite a partire da due soluzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dell'equazione omogenea associata

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0.$$

Si ha:

$$\tilde{y}' = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2'.$$

Al fine di semplificare i calcoli, si impone $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$. Questo fa sì che risulti $\tilde{y}' = c_1y_1' + c_2y_2'$ e di conseguenza:

$$\tilde{y}'' = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

Sostituendo quanto appena ricavato nell'equazione di partenza si ottiene:

$$(c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2'') + a(c_1y_1' + c_2y_2') + b(c_1y_1 + c_2y_2) = f$$

e quindi

$$c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + (c_1'y_1' + c_2'y_2') = f.$$

I primi due addendi sono identicamente nulli, poiché y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea, quindi il tutto si riduce a:

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f$$

Tutto ciò porta allo studio del sistema lineare di due equazioni nelle incognite c_1' e c_2':

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f. \end{cases}$$

Il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

è il Wronskiano di y_1 e y_2: questo è nullo se e solo se le due soluzioni sono dipendenti. Ne segue che in questo caso non è mai nullo, ed il sistema ha sempre una soluzione, data da:

$$c_1' = \frac{-y_2 f}{y_2'y_1 - y_1'y_2} \qquad c_2' = \frac{y_1 f}{y_2'y_1 - y_1'y_2}$$

Integrando c_1' e c_2' si può ottenere a scelta o una soluzione particolare dell'equazione di partenza (integrando definitamente) o l'integrale generale dell'equazione di partenza (integrando indefinitamente).

Chiariamo gli ultimi concetti con un esempio.

Esempio E.11. Consideriamo il sistema $\dot{z} = Az + b(t)$ in $\mathbb{R}^2$ con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

(a.) Soluzione dell'omogenea: per determinare la risolvente è necessario trovare soluzioni dell'equazione omogenea $\dot{z} = Az$. Per risolvere tale equazione, cerchiamo una base opportuna in cui il sistema sia *disaccoppiato*, un sistema di riferimento in cui l'operatore lineare, associato alla matrice A nella base canonica, in questo nuovo sistema di riferimento abbia matrice diagonale o almeno triangolare. Il sistema di riferimento cercato è quello costituito dagli *autovettori* di A, ovvero da quei vettori $u \in \mathbb{R}^2$ non nulli tali per cui $Au = \lambda u$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$, detto autovalore associato a u. Per trovare gli autovalori si risolve l'equazione $\det(\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} - A) = 0$. In questo caso si ottiene:

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -3 \\ -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 3) - 6 = \lambda^2 - 8\lambda + 9 = 0,$$

ovvero $\lambda_1 = 4 + \sqrt{7}$ e $\lambda_2 = 4 - \sqrt{7}$. Per determinare gli autovettori dobbiamo trovare due vettori u_1, u_2 tali per cui

$$(\lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} - A)u_i = \begin{pmatrix} \lambda_i - 5 & -3 \\ -2 & \lambda_i - 3 \end{pmatrix} u_i = 0,\ i = 1, 2.$$

Per definizione di autovalore, le due righe di questa matrice sono dipendenti, pertanto è sufficiente risolvere:

$$-2u_1^x + (1 + \sqrt{7})u_1^y = 0, \qquad -2u_2^x + (1 - \sqrt{7})u_2^y = 0$$

avendo posto $u_i = (u_i^x, u_i^y)$ e cercando soluzioni non nulle. Possiamo quindi scegliere $u_1 = (1 + \sqrt{7}, 2)$, $u_2 = (1 - \sqrt{7}, 2)$. Indichiamo con P la matrice che ha per colonne i vettori u_1 e u_2:

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{7} & 1 - \sqrt{7} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1/(2\sqrt{7}) & (-1 + \sqrt{7})/(4\sqrt{7}) \\ -1/(2\sqrt{7}) & (1 + \sqrt{7})/(4\sqrt{7}) \end{pmatrix},$$

si ha $\det P = 4\sqrt{7} \neq 0$. E' noto dalla teoria che $P^{-1}AP$ è la matrice diagonale avente sulla diagonale principale gli autovalori. Posto $w = P^{-1}z$, si ha $\dot{w} = P^{-1}\dot{z} = P^{-1}APw$, da cui:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{7} & 0 \\ 0 & 4 - \sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

quindi $\dot{w}_i = \lambda_i w_i$, perciò $w_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. Applicando la trasformazione inversa $z = Pw$, si ottiene:

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{7} & 1 - \sqrt{7} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} u_2.$$

Data una condizione iniziale z_0, si ottiene $z_0 = C_1 u_1 + C_2 u_2$, ovvero le costanti C_1, C_2 sono le coordinate di z_0 rispetto al sistema di riferimento degli autovettori. Quindi:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = P^{-1} z_0, \qquad z_0 = P \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Poniamo:

$$T(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \qquad T^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 \tau} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 \tau} \end{pmatrix} = T(-\tau).$$

Osseviamo anche che $T(t)T^{-1}(\tau) = T(t - \tau)$. Perciò per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^2$ la mappa: $z(t) = PT(t)P^{-1}z_0$ è la soluzione di $\dot{z} = Az$ con $z(0) = z_0$.

(b.) Determinazione della risolvente: dal punto precedente si è ricavata una formula per la risoluzione dell'omogenea a partire da qualunque dato iniziale. Per definizione si ha che la risolvente è $\Phi(t) = PT(t)P^{-1}$, $\Phi^{-1}(\tau) = PT^{-1}(\tau)P^{-1}$ e si ha $R(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = PT(t)T^{-1}(\tau)P^{-1} = PT(t-\tau)P^{-1}$.

(c.) Metodo della variazione delle costanti: applicando la formula si ottiene come soluzione

$$\begin{aligned}u(t) &= R(t,0)z_0 + \int_0^t R(t,\tau)b(\tau)\,d\tau = PT(t)P^{-1}z_0 + \int_0^t PT(t-\tau)P^{-1}\begin{pmatrix}\tau\\ e^{-\tau}\end{pmatrix}d\tau\\ &= PT(t)P^{-1}z_0 + \int_0^t PT(t)P^{-1}PT(-\tau)P^{-1}\begin{pmatrix}\tau\\ e^{-\tau}\end{pmatrix}d\tau\\ &= PT(t)P^{-1}z_0 + PT(t)P^{-1}\int_0^t PT(-\tau)P^{-1}\begin{pmatrix}\tau\\ e^{-\tau}\end{pmatrix}d\tau\\ &= PT(t)P^{-1}\left(z_0 + P\int_0^t T(-\tau)P^{-1}\begin{pmatrix}\tau\\ e^{-\tau}\end{pmatrix}d\tau\right).\end{aligned}$$

Casi particolari della precedente trattazione sono dati da:

Definizione E.12 (Sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti). Consideriamo i sistemi $y' = Ay+b(t)$ e l'omogeneo associato $y' = Ay$ con $A \in L_{\mathbb{K}}(Y)$ trasformazione costante, ovvero matrice indipendente da t nel caso di dimensione finita.
Diremo che il sistema è *accoppiato* se A non è una matrice triangolare, altrimenti diremo che il sistema è *non accoppiato*. Se il sistema è non accoppiato è possibile integrare le singole equazioni a partire dall'ultima sostituendo le soluzioni via via trovate.
La soluzione del problema omogeneo con $y(0) = y_0$ è $\varphi(t) = e^{tA}y_0$ dove l'esponenziale di matrice è definito da $e^{tA} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(tA)^j}{j!}$.
Sia $u \in Y$, $u \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Si ha che $\varphi(t) = e^{\lambda t}u$ è soluzione di $y' = Ay$ se e solo se λ è autovalore di A con u come autovettore associato. Supponiamo che A abbia n autovettori linearmente indipendenti (cioè sia diagonalizzabile) associati agli autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n$, allora si ha:

$$e^{tA} = [e^{\lambda_1 t}u_1....e^{\lambda_n t}u_n][u_1...u_n]^{-1}$$

(ricordiamo che u_j è un vettore colonna, quindi queste matrici sono quadrate di ordine n).
Dal metodo della variazione delle costanti si ricava:

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}b(\tau)\,d\tau$$

come soluzione del sistema non omogeneo che soddisfa $y(0) = y_0$.

Definizione E.13 (Equazioni lineari di ordine n). L'equazione lineare di ordine $n \geq 1$:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

dove $b, a_0, ..., a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ e la sua equazione omogenea associata:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

con le posizioni $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $z_n = y^{(n-1)}$ si riconducono al sistema lineare $z' = A(t)z + B(t)$ oppure $z' = A(t)z$ nel caso omogeneo associato con $A(t) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. La matrice A come si verifica facilmente ha per ultima riga $-a_0(t), ..., -a_{n-1}(t)$, gli elementi immediatamente sopra la diagonale principale sono 1, gli altri sono 0. $B(t)$ è un vettore colonna la cui ultima componente è $b(t)$ mentre le altre sono nulle.

(1) Wronskiano: Date r funzioni scalari $\varphi_1, ..., \varphi_r : I \to \mathbb{K}$ di classe almeno C^{m-1} su I, la loro *matrice wronskiana* a m righe è la matrice $m\times r$ di funzioni a valori in $\mathbb{K}$ in cui la colonna i-esima è formata dalle derivate successive (da 0 a $m-1$) di φ_r. Quindi r soluzioni del sistema omogeneo sono indipendenti se e solo se la loro matrice wronskiana a n righe ha rango r in almeno un punto t_0. In questo caso ha rango r in ogni $t \in I$. Quindi lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea di ordine n ha dimensione n, dette $\varphi_1, ..., \varphi_n$ n soluzioni, esse sono indipendenti se e solo se il loro wronskiano $w(t)$, cioè il determinante della loro matrice wronskiana a n righe, è diverso da 0 in almeno un punto e dunque in tutti.
Indicheremo con $w_j(t)$ il determinante del minore della matrice wronskiana a n righe di n soluzioni ottenuto sopprimendo l'ultima riga e la j-esima colonna.

(2) Risoluzione dell'equazione lineare non omogenea di grado n: Se $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sono un sistema fondamentale di soluzioni per:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

allora la soluzione dell'equazione non omogenea

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

che è nulla in $t_0 \in I$ assieme a tutte le sue derivate fino all'ordine $n-1$ è data da:

$$\varphi_0(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(t)\varphi_j(t)$$

dove:

$$\gamma_j(t) = \int_{t_0}^{t} (-1)^{n+j} \frac{w_j(\tau)}{w(\tau)}\, b(\tau)\, d\tau$$

con $w(t)$ e $w_j(t)$ come sopra.

Proposizione E.14. *Data l'equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti:*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b(t),$$

l'omogenea associata è $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$. Il loro polinomio caratteristico è $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$. Se λ è radice di $p(z)$ di molteplicità ν, allora l'omogenea associata ammette soluzioni: $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, ..., t^{\nu-1}e^{\lambda t}$. Per ogni coppia di soluzioni complesse coniugate $\lambda = \alpha_j + i\beta_j$, $\bar{\lambda} = \alpha_j - i\beta_j$ possiamo sostituire alle soluzioni: $t^k e^{\lambda_j t}$, $t^k e^{\bar{\lambda}_j t}$ le soluzioni $t^k e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$, $t^k e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t)$.

Particolarmente significativo è il caso $n = 2$, per il quale si ha:

Definizione E.15 (Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti). Data un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0$$

e dette $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ le radici dell'equazione caratteristica $\zeta^2 + p\zeta + q = 0$, allora le soluzioni dell'equazione omogenea si scrivono in modo unico come:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t} \text{ se } \alpha \neq \beta$$
$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} \text{ se } \alpha = \beta$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.
Nel caso particolare di equazioni del tipo $y' + \omega^2 y = 0$, con $\omega \in \mathbb{R}$, grazie alle formule di Eulero le soluzioni si scrivono anche:

$$y(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

al variare di $c_1, c_2, A, \phi \in \mathbb{K}$.
Date le condizioni iniziali $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$, $t_0 \in I$, e dette $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ le radici dell'equazione caratteristica $\zeta^2 + p\zeta + q = 0$, esiste una ed una sola soluzione in $C^2(I, \mathbb{K})$ dell'equazione $y''(t) + py'(t) + qy(t) = b(t)$ soddisfacente a tali condizioni:

(1) se $\alpha \neq \beta$ si ha:

$$y(t) = \frac{y'_0 - \beta y_0}{\alpha - \beta}\, e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{y'_0 - \alpha y_0}{\beta - \alpha}\, e^{\beta(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \frac{e^{\alpha(t-s)} - e^{\beta(t-s)}}{\alpha - \beta}\, b(s)\, ds$$

(2) se $\alpha = \beta$ si ha:

$$y(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)} + (y'_0 - \alpha y_0)(t - t_0)e^{\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} (t-s)e^{\alpha(t-s)} b(s)\, ds$$

Se $b(t) = 0$ (caso omogeneo) e si ha $y_0 = y'_0 = 0$ allora $y = 0$ identicamente.

Il seguente risultato permette di determinare una soluzioni particolare per equazioni differenziali lineare di ordine n a coefficienti costanti non omogenee in cui il termine noto abbia una certa forma. Daremo diverse versioni di tale risultato, oltre a quella più generale.

Proposizione E.16 (Metodo dei coefficienti indeterminati). *Sia $a(t)$ polinomio in t a coefficienti complessi, $\alpha \in \mathbb{C}$. Si consideri l'equazione:*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = a(t)e^{\alpha t}.$$

Allora:

(1) *se α non è radice del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea, si ha per la non omogenea la soluzione $c(t)e^{\alpha t}$ dove c è un polinomio dello stesso grado di a;*
(2) *se α è radice del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea di molteplicità ν, si ha per la non omogenea la soluzione $t^\nu c(t)e^{\alpha t}$ dove c è un polinomio dello stesso grado di a.*

Tali soluzioni sono uniche. I coefficienti del polinomio $t \mapsto c(t)$ vengono determinati sulla base delle condizioni iniziali e sostituendo nell'equazione data.

Corollario E.17. *Supponiamo di avere l'equazione*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b(t).$$

(1) *supponiamo che $b(t)$ sia un polinomio a coefficienti reali. Se 0 non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo come soluzione particolare $x_p(t)$ un polinomio dello stesso grado di $b(t)$. Se invece 0 è radice del polinomio caratteristico di molteplicità ν, cerchiamo come soluzione particolare $x_p(t) = t^\nu c(t)$ con $c(t)$ polinomio dello stesso grado di $b(t)$.*
(2) *supponiamo che $b(t) = a(t)e^{\alpha t}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $a(t)$ polinomio a coefficienti reali. Se α non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo come soluzione particolare $x_p(t) = c(t)e^{\alpha t}$ dove $c(t)$ è un polinomio dello stesso grado di $a(t)$. Se invece α è radice del polinomio caratteristico di molteplicità ν, cerchiamo come soluzione particolare $x_p(t) = t^\nu c(t)e^{\alpha t}$ con $c(t)$ polinomio dello stesso grado di $a(t)$. Il caso precedente corrisponde alla scelta $\alpha = 0$.*
(3) *supponiamo che $b(t) = a(t)\cos\beta x$ oppure $b(t) = a(t)\sin\beta x$ con $a(t)$ polinomio a coefficienti reali. Se $i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo come soluzione particolare $x_p(t) = c(t)(A\cos\beta t + B\sin\beta x)$ dove $c(t)$ è un polinomio dello stesso grado di $a(t)$. Se invece $i\beta$ è radice del polinomio caratteristico di molteplicità ν, cerchiamo come soluzione particolare $x_p(t) = t^\nu c(t)(A\cos\beta t + B\sin\beta x)$ con $c(t)$ polinomio dello stesso grado di $a(t)$.* ***Importante:*** *anche se il termine $b(t)$ contiene* solo *un coseno o* solo *un seno, la soluzione particolare va cercata contenente* sia *il seno* sia *il coseno.*
(4) *supponiamo che $b(t) = a(t)e^{\alpha x}\cos\beta x$ oppure $b(t) = a(t)e^{\alpha x}\sin\beta x$ con $a(t)$ polinomio a coefficienti reali. Se $\alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo come soluzione particolare $x_p(t) = c(t)e^{\alpha x}(A\cos\beta t + B\sin\beta x)$ dove $c(t)$ è un polinomio dello stesso grado di $a(t)$. Se invece $i\beta$ è radice del polinomio caratteristico di molteplicità ν, cerchiamo come soluzione particolare $x_p(t) = t^\nu c(t)e^{\alpha x}(A\cos\beta t + B\sin\beta x)$ con $c(t)$ polinomio dello stesso grado di $a(t)$.* ***Importante:*** *anche se il termine $b(t)$ contiene* solo *un coseno o* solo *un seno, la soluzione particolare va cercata contenente* sia *il seno* sia *il coseno.*

Per determinare i coefficienti del polinomio $c(t)$, e quindi la soluzione particolare $x_p(t)$, si pongono tali coefficienti pari a costanti e si sostituisce l'espressione generica di $x_p(t)$ nell'equazione. Uguagliando i termini simili, si trovano alcune relazioni tra i coefficienti. I coefficienti che rimangono indeterminati possono essere posti uguali a zero.

Osservazione E.18. Osserviamo che se $h(t) = h_1(t) + ... + h_k(t)$ e $x_j(t)$ è soluzione di

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = h_j(t)$$

per ogni $j = 1...k$, allora $x(t) = x_1(t) + ... + x_k(t)$ è soluzione di $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx(t) = h_1(t) + ... + h_k(t) = h(t)$. In altre parole, se il termine noto $h(t)$ è una *somma finita* di funzioni, per trovare una soluzione dell'equazione di partenza è sufficiente trovare una soluzione di ciascuna equazione che si ottiene prendendo come termine noto ciascuno degli addendi, e poi sommare tutte queste soluzioni. Il *metodo dei coefficienti indeterminati* si può quindi applicare a termini noti $b(t)$ che possano essere decomposti in somme finite delle funzioni viste in precedenza.

Esempio E.19. Consideriamo l'equazione $y'' + 2y' + y = \sin(2t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. L'omogenea associata è $y'' + 2y' + 1 = 0$ di polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ che ha come unica radice $\lambda = -1$ di molteplicità $\nu = 2$. Possiamo scrivere $\sin 2t = (e^{i2t} - e^{-i2t})/(2i)$ e studiare separatamente $y'' + 2y' + 1 = e^{i2t}/(2i)$ e $y'' + 2y' + 1 = e^{i2t}/(2i)$. Nel primo caso, si ha che il termine noto è della forma $c(t)e^{\alpha t}$ con $\alpha = 2i$ e $c(t) = 1/2i$ polinomio di grado zero, ovvero costante. Poiché $\alpha = 2i$ non è radice del polinomio caratteristico, si ha per l'equazione non omogenea $y'' + 2y' + 1 = e^{i2t}/(2i)$ una soluzione particolare del tipo $c_3 e^{2it}$ con $c_3 \in \mathbb{C}$ costante.

In modo analogo, si ha per l'equazione non omogenea $y'' + 2y' + 1 = e^{-i2t}/(2i)$ una soluzione particolare del tipo $c_4 e^{-2it}$ con $c_4 \in \mathbb{C}$ costante. L'equazione omogenea $y'' + 2y' + y = 0$ ammette le soluzioni $c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$ con c_1, c_2 costanti. Quindi l'equazione $y'' + 2y' + y = \sin(2t)$ ammette le soluzioni nella forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{2it} + c_4 e^{-2it} = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t) \\ &= (c_1 + t c_2) e^{-t} + d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t), \end{aligned}$$

dove i coefficienti c_1, c_2, d_1 e d_2 non sono tutti liberi, ma vanno determinati sostituendo questa formula nell'equazione e utilizzando le condizioni iniziali. Si ha:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + d_1 = 1 \\ \dot{y}(t) &= (-c_1 + c_2 - t c_2) e^t + 2d_2 \cos(2t) - 2d_1 \sin(2t) \\ \dot{y}(0) &= -c_1 + c_2 + 2d_2 = 2 \\ \ddot{y}(t) &= (c_1 - 2c_2 + t c_2) e^t - 4d_1 \cos(2t) - 4d_2 \sin(2t) \\ \ddot{y}(t) + 2\dot{y} + y = \sin(2t) &= (-3d_1 + 4d_2) \cos(2t) - (4d_1 + 3d_2) \sin(2t). \end{aligned}$$

Si ha quindi dall'ultima equazione $4d_1 + 3d_2 = -1$, $4d_2 - 3d_1 = 0$ e dalle condizioni iniziali $c_1 + d_1 = 1$ e $-c_1 + c_2 + 2d_2 = 2$ da cui: $d_1 = -4/25$, $d_2 = -3/25$, $c_1 = 29/25$, $c_2 = 85/25$, quindi la soluzione è:

$$y(t) = \frac{1}{25} \left((29 + 85t) e^{-t} - 4 \cos(2t) - 3 \sin(2t) \right).$$

APPENDICE F

Altre equazioni ordinarie e metodi di riduzione

mètodo = *lat.* MÈTHODUS dal *gr.* METHÒDOS propr. *l'andar dietro per ricercare, per investigare,* e quindi *la via* o *il modo della investigazione* (onde METHODÈYÒ *vado dietro*): comp. della partic. METÀ *dopo*, e HÒDOS *cammino, via* (v. *Esodo*).
Modo ordinato e conforme a certi principî, d'investigare, di esporre il vero, di governarsi nell'operare; più strettamente Modo di operare per ottenere uno scopo.

Vocabolario etimologico della lingua italiana,
di Ottorino Pianigiani, 1907.

Definizione F.1. Un integrale *singolare* o *di frontiera* dell'equazione $y' = f(x, y)$ definita su un dominio A è un integrale la cui corrispondente curva integrale risulti interamente tracciata sulla frontiera di A.

Definizione F.2. L'equazione differenziale $F(x, y, y') = 0$ è *in forma normale* se può essere scritta nella forma $y' = f(x, y)$, altrimenti si dirà in forma *non normale*.

Definizione F.3 (Vari tipi di equazioni differenziali). Alcuni tipi di equazioni differenziali e tecniche risolutive:

(1) **Equazioni a variabili separabili:** Sono le equazioni del primo ordine del tipo $\dot{y} = p(t)q(y)$ dove $p : I \to \mathbb{R}$, $q : J \to \mathbb{R}$ sono almeno continue e I, J sono intervalli di $\mathbb{R}$. Se $q(y_0) = 0$ la costante $y(t) = y_0$ è soluzione, negli altri casi si può dividere per $q(y)$ (almeno finchè $q(y(t)) \neq 0$). Con il cambiamento di variabili $\eta = y(t)$ si ottiene integrando con la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$:
$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{q(\eta)} = \int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau.$$
Il problema così è riportato alle *quadrature*, cioè alla ricerca di primitive e inversioni di funzioni. La soluzione, in generale, sarà in forma implicita. In alternativa, si scriva l'equazione come equazione totale e si ottiene una equazione totale a variabile separabili.

(2) **Equazioni del tipo $y' = f(ax + by)$:** con f continua e $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posto $z = ax + by$ si ottiene l'equazione a variabili separabili $z' = a + bf(z)$. Ad ogni integrale $z(x)$ di questa equazione corrisponde l'integrale dell'equazione di partenza $y(x) = \frac{z(x) - ax}{b}$.

(3) **Equazioni a coefficienti omogenei:** Si presentano nella forma
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$
In generale, il secondo membro è funzione continua omogenea di grado 0. Si pone $z = \frac{y}{x}$ giungendo all'equazione a variabili separabili $z' = \frac{f(z) - z}{x}$. Ad ogni integrale di questa equazione corrisponde l'integrale $y(x) = xz(x)$ dell'equazione di partenza. Un altra forma con cui può essere data un'equazione a coefficienti omogenei è $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ con M, N funzioni omogenee dello stesso grado. Si pone anche qui $y = xz$ per studiare il caso $x \neq 0$, oppure $x = yz$ per studiare il caso $y \neq 0$.

(4) **Equazioni del tipo $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$:** con f continua, a, b, c, a', b', c' costanti reali tali che $ab' - a'b \neq 0$ e c, c' non entrambe nulle. In queste ipotesi le due rette $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ hanno in comune un punto $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Una volta determinato tale punto, poniamo $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ ottenendo l'equazione a coefficienti omogenei
$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{a' + b'\frac{v}{u}}\right)$$
Ad ogni integrale $v = v(u)$ di essa corrisponde l'integrale $y = \beta + v(x - \alpha)$ dell'equazione di partenza.

(5) **Equazioni lineari:** Si presentano in forma
$$y' + p(x)y = q(x)$$
con p, q funzioni continue. L'integrale generale è
$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\right]$$
Si rimanda alla corrispondente sezione per un'analisi più dettagliata.

(6) **Equazioni di Bernoulli:** Si presentano in forma
$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$
con p, q continue, $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0, 1$. Si pone $y^{1-n} = z$ ottenendo l'equazione lineare $z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$. Ad ogni integrale di questa corrisponde l'integrale $y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-n}}$ dell' equazione di partenza. Se $n > 0$ vi è anche l'integrale $y = 0$.

(7) **Abbassamento di grado per equazioni non autonome dove non compare la y:** L'equazione del secondo ordine $y''(t) = f(t, y'(t))$ con f almeno continua, si riconduce ad un'equazione ordinaria del primo ordine ponendo $z(t) = y'(t)$, da cui $z'(t) = f(t, z(t))$ e $y(t) = \int z(t) + C$.

(8) **Equazioni riconducibili a lineari:** Supponiamo che l'equazione si presenti nella forma:
$$f'(y)y' + f(y)P(x) = Q(x)$$
In questo caso il cambiamento di variabile $v = f(y)$ riduce l'equazione alla forma $v' + P(x)v = Q(x)$.

(9) **Integrali singolari per $F(x, y, y') = 0$.** Data l'equazione in forma non normale $F(x, y, y') = 0$, con F continua in A e sulla frontiera di A. Un integrale singolare di primo tipo è un integrale $y = y(x)$ tale che la curva di equazioni parametriche $y = y(x)$, $y' = y'(x)$ risulti interamente tracciata sulla frontiera di A.
Consideriamo ora le equazioni $F(x, y, y') = 0$ e $F_{y'}(x, y, y') = 0$. Supponiamo di eliminare la y' tra le due equazioni ottenendo $\varphi(x, y) = 0$ e sia $y = y(x)$ una funzione implicitamente definita da quest'ultima relazione. Se tale $y = y(x)$ soddisfa contemporaneamente $F(x, y, y') = 0$ e $F_{y'}(x, y, y') = 0$ allora si dirà un integrale singolare del secondo tipo.

(10) **Equazioni della forma $x = f(y')$:** supponiamo che f abbia derivata prima continua. Poniamo $y' = p$ da cui $dy = p\,dx$ da cui $x = f(p)$ e $dx = f'(p)\,dp$, da cui $dy = pf'(p)\,dp$ quindi l'integrale generale in forma parametrica è: $x = f(p)$, $y = \int pf'(p)\,dp + c$.

(11) **Equazioni del tipo $x = f(y, y')$:** derivando in y pensata come indipendente e ponendo $p = y'$ si ottiene un'equazione $\dfrac{1}{p} = F\left(y, p, \dfrac{dp}{dy}\right)$. Risolvendo, si ottiene $\phi(y, p, C) = 0$ al variare di C. Se possibile, eliminare p tra l'equazione di partenza $x = f(y, p)$ e la relazione $\phi(y, p, C) = 0$, altrimenti si esprimono separatamente x, y in funzione di p.

(12) **Equazioni della forma $y = f(y')$:** supponiamo che f abbia derivata prima continua. Poniamo $y' = p$, $p \neq 0$, si ha $y = f(p)$ e $dy = f'(p)\,dp$. Quindi poichè $dy = p\,dx$, si ottiene $dx = \frac{f'(p)}{p}\,dp$ da cui l'integrale generale in forma parametrica: $y = f(p)$, $y = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + c$.

(13) **Equazioni del tipo $y = f(x, y')$:** derivando in x e ponendo $p = y'$ si ottiene un'equazione $p = F(x, p, p')$. Risolvendo, si ottiene $\phi(x, p, C) = 0$ al variare di C. Se possibile, eliminare p tra l'equazione di partenza $y = f(x, p)$ e la relazione $\phi(x, p, C) = 0$, altrimenti si esprimono separatamente x, y in funzione di p.

(14) **Equazioni di Clairaut:** si presenta nella forma
$$y = xy' + f(y')$$
Il suo integrale generale è dato da $y = cx + f(c)$ e da un integrale singolare che si ottiene eliminando la y' tra l'equazione data e l'equazione che si ottiene da essa derivandola rispetto a y'.

(15) **Equazioni di D'Alembert:** si presenta nella forma
$$y = xf(y') + g(y')$$
Se $f(y') = y'$ ci si riconduce al caso precedente. Posto $y' = p$ e differenziando (ricordando che $dy = p\,dx$), si ottiene $(f(p) - p)\,dx + xf'(p)\,dp = -g'(p)\,dp$. Supposto $f(p) - p \neq 0$ e dividendo per $f(p) - p$ si ottiene un'equazione lineare nella funzione incognita x e nella variabile p. Detto $x = x(p, c)$ l'integrale generale di tale equazione, si ottiene l'integrale dell'equazione di partenza in forma parametrica $y = x(p, c)f(p) + g(p)$, $x = x(p, c)$.

(16) **Abbassamento di grado per equazioni autonome:** La generica equazione scalare autonoma del secondo ordine $y''(t) = f(y(t), y'(t))$ con f almeno continua, si riconduce ad un'equazione ordinaria del primo ordine ponendo $p(y) = y'(t(y))$, dove $y \mapsto t(y)$ è la funzione inversa di $t \mapsto y(t)$ da cui

$$p(y)\frac{dp}{dy} = f(y, p(y))$$

dove ora y è pensata variabile indipendente.

(17) **Abbassamento di grado per equazioni non normali in forma omogenea:** L'equazione del secondo ordine $F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0$ con

$$F(t, \alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^k F(t, x, y, z)$$

per ogni $\alpha > 0$, si riconduce ad un'equazione del primo ordine ponendo $y'(t) = y(t)z(t)$.

(18) **Caso particolare di equazione lineare a coefficienti variabili:** L'equazione lineare a coefficienti non costanti:

$$t^n y^{(n)} + c_{n-1}t^{n-1}y^{(n-1)} + ... + c_1 ty' + c_0 y = 0$$

con $t > 0$ è riconducibile ad un'equazione a coefficienti costanti ponendo $t = e^s$: detto $y(e^s) = u(s)$, si ottiene $t\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(s)}{ds}$ e così via.

(19) **Equazione di Riccati:** si presenta nella forma

$$y'(x) = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2(x).$$

Se $q_2(x) \neq 0$, $v(x) = y(x)q_2(x)$ soddisfa

$$v'(x) = v^2(x) + P(x)v(x) + Q(x),$$

dove $Q(x) = q_2(x)q_0(x)$ e $P(x) = q_1(x) + \left(\frac{q_2'(x)}{q_2(x)}\right)$. Infatti:

$$\begin{aligned} v'(x) &= (y(x)q_2(x))' \\ &= y'(x)q_2(x) + y(x)q_2'(x) = (q_0(x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y^2(x))q_2(x) + v(x)\frac{q_2'(x)}{q_2(x)} \\ &= q_0(x)q_2(x) + \left(q_1(x) + \frac{q_2'(x)}{q_2(x)}\right)v(x) + v^2(x). \end{aligned}$$

Posto $v(x) = -u'(x)/u(x)$, si ha che $u(x)$ soddisfa l'equazione lineare del secondo ordine:

$$u''(x) - P(x)u'(x) + Q(x)u(x) = 0,$$

poiché $v' = -(u'/u)' = -(u''/u) + (u'/u)^2 = -(u''/u) + v^2$, quindi $u''/u = v^2 - v' = -Q - Pv = -Q + Pu'/u$ da cui la formula $u'' - Pu' + Qu = 0$. Una soluzione u di questa equazione fornisce una soluzione $y(x) = -u'(x)/(q_2(x)u(x))$ dell'equazione di partenza.
Data una soluzione particolare dell'equazione di Riccati $y_1(x)$, la soluzione generale è $y(x) = y_1(x) + 1/z(x)$, dove $z(x)$ è soluzione dell'equazione lineare $z'(x) = -(Q(x) + 2y_1(x)R(x))z(x) - R(x)$.

Definizione F.4 (Miscellanea sulle equazioni autonome scalari). Un'equazione differenziale si dice *autonoma* se è del tipo $\dot{y} = g(y)$. Se $t \mapsto y(t)$ è soluzione di tale equazione, anche $t \mapsto y(t + c)$ è soluzione, in questo senso si dice che l'insieme delle soluzioni di un'equazione autonoma è invariante per traslazioni. Un'equazione non autonoma può essere resa autonoma aggiungendo una variabile e imponendo $\dot{t} = 1$. Discutiamo ora alcuni fatti salienti sull'equazione autonoma $y' = g(y)$ con $g : J \to \mathbb{R}$ continua, J intervallo di $\mathbb{R}$.

(1) le soluzioni costanti sono esattamente gli zeri di g.
(2) se $g(y_0) \neq 0$, il problema di Cauchy $\dot{y} = g(y)$, $y(t_0) = y_0$ ha un'unica soluzione definita in un intorno di t_0. **Ciò vale anche se le ipotesi del Teorema di Esistenza e Unicità non sono soddisfatte**.
(3) Sia $g(y_0) \neq 0$. In un intorno opportuno $]t_1, t_2[\times]\eta_1, \eta_2[$ di (t_0, y_0) con $g(\eta) \neq 0$ per ogni $\eta \in]\eta_1, \eta_2[$ si ha:

$$\int_{y_0}^{\eta_2} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^{t_2} dt, \qquad \int_{\eta_1}^{y_0} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_1}^{t_0} dt$$

Il valore di t_i indica il tempo al quale la soluzione raggiunge il valore η_i. Possono verificarsi ad esempio i seguenti casi:

(a) se $g(\eta) > 0$ per $y_0 < \eta < \eta_2$ e $g(\eta_2) = 0$, se è finito l'integrale:

$$\int_{y_0}^{\eta_2} \frac{d\eta}{g(\eta)} = T < +\infty$$

allora si ha che la soluzione raggiunge il punto η_2 in un tempo $t_2 < +\infty$ dato da $t_2 = T + t_0$.

(b) supponiamo $g(\eta) > 0$ per $y_0 < \eta < \eta_2$ e cerchiamo un asintoto orizzontale per $t \to \infty$. In questo caso se il suo valore è η_2 si deve avere

$$\int_{y_0}^{\eta_2} \frac{d\eta}{g(\eta)} = +\infty$$

e quindi necessariamente η_2 deve essere uno zero di g.

(c) supponiamo $g(\eta) > 0$ per $y_0 < \eta < \eta_2$ e cerchiamo un asintoto verticale. In tal caso deve esistere T tale che in $t_2 = t_0 + T$ la soluzione arrivi a $+\infty$, quindi dovrà essere finito l'integrale

$$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{d\eta}{g(\eta)} = T < +\infty.$$

Osservazione F.5. Supponiamo di avere il sistema autonomo

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(x(t), y(t)), \\ \\ \dfrac{dx}{dt} = g(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Sia $\bar{t}$ tale per cui $g(x(\bar{t}), y(\bar{t})) \neq 0$. Allora in un intorno di $\bar{t}$, la relazione $x = x(t)$ è invertibile, e si ottiene $t = t(x)$ con $\bar{x} = x(\bar{t})$, $\bar{t} = t(\bar{x})$. Si ha $x(t(x)) = x$ e $y(t(x)) = \tilde{y}(x)$ Si ha quindi, applicando il teorema della funzione implicita in un intorno di $\bar{x}$,

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f(x(t(x)), y(t(x))) \cdot \frac{1}{g(x(t(x)), y(t(x)))} = \frac{f(x, \tilde{y}(x))}{g(x, \tilde{y}(x))}$$

Pertanto nei punti dove $g \neq 0$, il sistema equivale all'equazione non autonoma

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = \frac{f(x, \tilde{y}(x))}{g(x, \tilde{y}(x))}.$$

Per memorizzare tale procedimento, si può osservare che, formalmente:

$$\frac{\dfrac{d\tilde{y}}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{d\tilde{y}}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)},$$

e la giustificazione rigorosa è data sopra.
Viceversa, data l'equazione

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = \frac{f(x, \tilde{y}(x))}{g(x, \tilde{y}(x))},$$

introduciamo un parametro t in modo tale che

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{g(x, \tilde{y}(x))}$$

se $g(x, \tilde{y}(x)) \neq 0$ tale relazione è invertibile porgendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(x(t), y(t)) \\ \\ \dfrac{dx}{dt} = g(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Nella pratica, dato un sistema autonomo o un'equazione non autonoma, l'altra formulazione può talvolta essere più semplice per ottenere l'andamento delle soluzioni (riparametrizzate in modo opportuno).

Definizione F.6 (Regioni invarianti). Sia $\phi_t(\cdot)$ il flusso associato al sistema $\dot{x} = f(x)$. Diremo che $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è una *regione invariante* del sistema se $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \phi_t(z) \subseteq P$ per ogni $z \in P$. Diremo che è *positivamente invariante* o *invariante in avanti* se $\bigcup_{t\geq 0} \phi_t(z) \subseteq P$ per ogni $z \in P$. Diremo che è *negativamente invariante* o *invariante all'indietro* se $\bigcup_{t\leq 0} \phi_t(z) \subseteq P$ per ogni $z \in P$.

Teorema F.7 (sull'insieme invariante). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 e sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto di classe C^1. Consideriamo il sistema $\dot{x} = \vec{F}(x)$. Supponiamo che $\vec{F}(x) \cdot \hat{n}(x) \leq 0$ per ogni $x \in \partial D$, dove $\hat{n}$ rappresenta la normale esterna*[1] *a D. Allora D è regione invariante in avanti, ovvero se una traiettoria entra in D all'istante t_0, vi rimane per tutti i tempi $t > t_0$, in particolare se parte da un punto interno rimane per tutti i tempi successivi all'interno di D.*

Dimostrazione. Diamo un'idea della dimostrazione. Consideriamo una soluzione $x(t)$ e valutiamo la variazione della distanza[2] della soluzione dalla frontiera di Ω. Si ha:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{dist}(x(t), \partial\Omega) = \nabla d(x(t), \partial\Omega) \cdot \dot{x}(t) = \nabla d(x(t), \partial\Omega) \cdot \vec{F}(\dot{x}(t)).$$

Se Ω è di classe C^2 e $x(t)$ è sufficientemente vicino a $\bar{x} \in \partial\Omega$, si ha

$$\frac{d}{dt}\mathrm{dist}(x(t), \partial\Omega) \simeq -\hat{n}(\bar{x}) \cdot \vec{F}(\bar{x}) \geq 0.$$

pertanto la traiettoria tende ad allontanarsi da $\partial\Omega$. Si ricordi che, se l'insieme è C^2, la normale è legata al gradiente della distanza. $\square$

Corollario F.8. *Nel caso di equazioni non autonome scalari del tipo $x'(t) = f(t, x(t))$, si pone:*

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,x) \end{pmatrix} =: \vec{F}(y),$$

una regione invariante in avanti per $\dot{y} = \vec{F}(y)$ è una regione invariante in avanti per $x'(t) = f(t, x(t))$. Viceversa, posto

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -f(t,x) \end{pmatrix} =: \vec{G}(y),$$

una regione invariante in avanti per $\dot{y} = \vec{G}(y)$ è una regione invariante all'indietro per $x'(t) = f(t, x(t))$.

Osservazione F.9. Negli esercizi che richiedono lo studio di equazioni del tipo $x'(t) = f(t, x(t))$, con f di classe C^1, spesso può essere utile considerare l'insieme

$$\Gamma = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : f(t,x) = 0\}.$$

Sui punti di Γ si ha $f(\bar{t}, \bar{x}) = 0$ perché tale punto appartiene a Ω, pertanto i vettori $\vec{F}(\bar{t}, \bar{x})$ e $\vec{G}(\bar{t}, \bar{x})$ del precedente corollario si riducono a $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Supponendo che Γ sia sufficientemente regolare, [3] si ha in molti casi che $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ è costituito da un numero finito di regioni connesse con bordo sufficientemente regolare per poterne considerare la normale esterna $\hat{n}$. In un punto di bordo $(\bar{t}, \bar{x})$. Essendo le espressioni di $\vec{F}$ e $\vec{G}$ molto semplici, risulta quindi particolarmente facile decidere se tali regioni siano invarianti in indietro o in avanti.

[1] non entriamo nei dettagli di una definizione rigorosa di normale esterna, il lettore interessato può consultare [5]

[2] A priori la distanza non è differenziabile in ogni punto, nemmeno se l'insieme ha bordo molto regolare. Tuttavia è possibile dimostrare che l'insieme dei punti di differenziabilità della funzione distanza da un generico chiuso di $\mathbb{R}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$ e che in verità tale funzione è differenziabile *quasi ovunque* in un senso che verrà reso rigoroso nei successivi corsi di Analisi.

[3] Per esempio C^1 a meno di un numero finito di punti.

APPENDICE G

Sistemi 2×2 di equazioni ordinarie lineari del primo ordine

sistèma = *lat.* SYSTÈMA dal *gr.* SỲSTÊMA composto della particella SYN *con, insieme* e -STÊMA attinente all'inusitato STÊNAI pres. ÌSTÊMI *stare, collocare* (v. *Stare*).
Aggregato di parti, di cui ciascuna può esistere isolatamente, ma che dipendono le une dalle altre secondo leggi e regole fisse, e tendono a un medesimo fine; Aggregato di proposizioni su cui si fonda una dottrina; e anche Dottrina le cui varie parti sono fra loro collegate e seguonsi in mutua dipendenza; Complesso di parti similmente organizzate e sparse per tutto il corpo, quali il sistema linfatico, nervoso, vascolare ecc.

Vocabolario etimologico della lingua italiana,
di Ottorino Pianigiani, 1907.

Definizione G.1. Sia $F \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio di grado n, ovvero

$$F(x) = a_0 x^n + ... + a_n, \qquad\qquad a_0, ..., a_n \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0.$$

Se $y = y(t)$ è una funzione di classe C^n, in questa sezione porremo

$$(F(D)y)(t) = a_0 \frac{d^n y}{dt^n}(t) + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dt}(t) + a_n y(t).$$

Talvolta la dipendenza da t verrà omessa e scriveremo semplicemente $F(D)y$.

Definizione G.2. Un *sistema di equazioni ordinarie a coefficienti costanti* è del tipo:

$$\begin{cases} F_1(D)x + G_1(D)y = f(t), \\ F_2(D)x + G_2(D)y = g(t). \end{cases}$$

con F_1, G_1, F_2, G_2 polinomi a coefficienti reali e f, g funzioni continue. Il grado rispetto a D della matrice dei coefficienti:

$$\det \begin{pmatrix} F_1(D) & G_1(D) \\ F_2(D) & G_2(D) \end{pmatrix}$$

indica il numero delle costanti arbitrarie che appaiono nella soluzione generale del sistema. Il procedimento fondamentale per la risoluzione di un sistema di questo genere consiste nell'ottenere un sistema equivalente nel quale compare un'equazione in una sola variabile. Risolta tale equazione, si procede in modo analogo per le altre variabili dipendenti. Si segue un metodo simile a quello per la risoluzione dei sistemi lineari (in x e y).

Ci limiteremo al caso 2×2 e al primo ordine, in questo caso trattasi di problemi dove si richiede la soluzione di un sistema del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} - ax - by = f(t) \\ \dot{y} - cx - dy = g(t) \end{cases},$$

dove $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni di classe $C^1(\mathbb{R})$, e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sono quattro costanti reali. Si chiede poi il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie dell'omogeneo associato.

Osservazione G.3. Osserviamo che sotto queste ipotesi il sistema obbedisce al teorema di esistenza e unicità locale, pertanto le soluzioni massimali sono uniche e dipendono solo dalle condizioni iniziali x_0 e y_0. Da ciò si ricava questa informazione: *la soluzione del sistema dovrà dipendere da due costanti arbitrarie reali.* Si vedrà che tali costanti saranno legate a x_0 e y_0.

OSSERVAZIONE G.4. Se $b = 0$ nell'equazione per $\dot{x}$ non compare più l'incognita y, pertanto si tratta di risolvere l'equazione ordinaria $\dot{x} = ax + f(t)$. Detta $\phi(c_1, t)$ la sua soluzione generale (che dipenderà da una costante c_1), si può sostituire nella seconda equazione $\dot{y} = dy + c\phi(c_1, t) + g(t)$ ottenendo un'altra equazione ordinaria dove compare la sola incognita y. La soluzione di quest'equazione dipenderà da due costanti c_1, che compare nel termine noto, e c_2.
Un ragionamento del tutto analogo può essere fatto se $c = 0$ invertendo i ruoli di x e y.

Indichiamo con A la matrice del sistema omogeneo, con $B(t)$ i termini noti e sia $H(t)$ la matrice che ha per colonne i coefficienti della y e $B(t)$, ovvero:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \qquad H(t) = \begin{pmatrix} b & f(t) \\ d & g(t) \end{pmatrix}.$$

Inoltre indicheremo con $T = \mathrm{tr}(A) = a + d$ la traccia di A, con $D = \det(A) = ad - bc$ il determinante di A, e con $h(t) = \det(H(t)) = bg(t) - df(t)$. Per le osservazioni precedenti, da questo momento in poi consideriamo il caso con $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Procedura risolutiva

(1) **Derivazione dell'equazione nella sola incognita** x:
Riscrivendo il sistema dato, si ha: $\begin{cases} by = \dot{x} - ax - f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{cases}$.
Derivando la prima equazione, si ottiene $b\dot{y} = \ddot{x} - a\dot{x} - f'(t)$.
Sostituiamo l'espressione di $\dot{y}$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$b(cx + dy + g(t)) = \ddot{x} - a\dot{x} - f'(t).$$

Riscrivendo tale espressione si ha $\ddot{x} - a\dot{x} - bcx - bdy - f'(t) - bg(t) = 0$.
Sostituiamo l'espressione di by ottenuta dalla prima equazione:

$$\ddot{x} - a\dot{x} - bcx - d(\dot{x} - ax - f(t)) - f'(t) - bg(t) = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$\ddot{x} - a\dot{x} - bcx - d\dot{x} + adx + df(t) - f'(t) - bg(t) = 0.$$

Tale equazione si riscrive come:

$$\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x + df(t) - f'(t) - bg(t) = 0$$

In notazione compatta, si ha $\ddot{x} - T\dot{x} + D\,x = \psi(t)$ dove $\psi(t) = f'(t) + h(t)$.

(2) **Studio degli autovalori del sistema**: L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è quindi:

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0,$$

e le sue soluzioni sono gli *autovalori* della matrice A, ovvero le soluzioni di $\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0$.
Possono presentarsi i seguenti casi:
 (a) se $T^2 - 4D > 0$, l'equazione caratteristica ammette due radici reali distinte $\lambda_1 = (T - \sqrt{T^2 - 4D})/2$ e $\lambda_2 = (T + \sqrt{T^2 - D})/2$, pertanto la soluzione generale dell'omogenea associata è $\Phi(c_1, c_2, t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
 (b) se $T^2 - 4D < 0$, l'equazione caratteristica ammette due radici complesse coniugate $\lambda_1 = T + i\beta$ e $\lambda_2 = T - i\beta$ dove $\beta = \sqrt{|T^2 - 4D|}$, pertanto la soluzione generale dell'omogenea associata è $\Phi(c_1, c_2, t) = c_1 e^{Tt} \cos(\beta t) + c_2 e^{Tt} \sin(\beta t)$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
 (c) se $T^2 - 4D = 0$, l'equazione caratteristica ammette una radice reale doppia $\lambda = T$ pertanto la soluzione generale dell'omogenea associata è $\Phi(c_1, c_2, t) = c_1 e^{Tt} + c_2 t e^{Tt}$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(3) **Soluzione generale del sistema**: Per trovare la soluzione $t \mapsto x(t)$, è necessario sommare a $\Phi(c_1, c_2, t)$ una *soluzione particolare* $x_p(t)$ dell'equazione $\ddot{x} - T\dot{x} + D\,x = \psi(t)$. Tale soluzione può essere determinata con il metodo dei coefficienti indeterminati o con il metodo di variazione delle

costanti. Si ottiene quindi, ricordando la prima equazione,

$$\begin{cases} x(t) &= \Phi(c_1, c_2, t) + x_p(t) \\ \\ y(t) &= \dfrac{1}{b}(\dot{x} - ax - f(t)) = \dfrac{1}{b}\left(\left(\dfrac{d}{dt}\Phi(c_1, c_2, t) + x_p'(t)\right) - a(\Phi(c_1, c_2, t) + x_p(t)) - f(t)\right). \end{cases}$$

(4) **Discussione della stabilità delle soluzioni stazionare dell'omogeneo associato**: Le soluzioni stazionarie sono determinate dall'equazione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Vi sono due casi possibili: se $\det A \neq 0$, l'unica soluzione stazionaria è $x = y = 0$, mentre se $\det A = 0$, le soluzioni stazionarie sono tutte le coppie (x, y) soddisfacenti l'equazione $ax + by = 0$, infatti se $\det A = 0$ le due righe sono linearmente dipendenti, pertanto possiamo scegliere la prima. La stabilità delle soluzioni stazionarie dipende dal segno della parte reale degli autovalori λ_1 e λ_2. In particolare, si ha che:

(a) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono reali strettamente negativi, allora le soluzioni stazionarie sono nodi propri stabili.
(b) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono reali strettamente positivi, allora le soluzioni stazionarie sono nodi propri instabili.
(c) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono reali non nulli di segno discorde, allora le soluzioni stazionarie sono selle locali.
(d) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ è reale strettamente positivo, abbiamo un nodo improprio instabile.
(e) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ è reale strettamente negativo, abbiamo un nodo improprio stabile.
(f) Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha > 0$ si ha un fuoco instabile,
(g) Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha < 0$ si ha un fuoco stabile,
(h) Se $\lambda_1 = i\beta$ e $\lambda_2 = -i\beta$ si ha un centro.
(i) Se uno degli autovalori è nullo, l'altro è reale. Se questi è strettamente positivo la soluzione stazionaria è instabile, se è strettamente negativo la soluzione stazionaria è stabile.
(j) Se entrambi gli autovalori sono nulli, allora si ha $a = b = c = d = 0$, le soluzioni sono tutte e sole le costanti e sono stabili.

APPENDICE H

Esercizi su equazioni alle derivate parziali e separazione delle variabili

In principio Dio creò il cielo e la terra. La terra era informe e deserta e le tenebre ricoprivano l'abisso e lo spirito di Dio aleggiava sulle acque. Dio disse: ≪Sia la luce!≫. E la luce fu. Dio vide che la luce era cosa buona e separò la luce dalle tenebre e chiamò la luce giorno e le tenebre notte. E fu sera e fu mattina: primo giorno. Dio disse: ≪Sia il firmamento in mezzo alle acque per separare le acque dalle acque≫. Dio fece il firmamento e separò le acque, che sono sotto il firmamento, dalle acque, che son sopra il firmamento. E così avvenne. Dio chiamò il firmamento cielo. E fu sera e fu mattina: secondo giorno.

Genesi 1,1-8.

Non sanno dunque i miscredenti che i cieli e la terra formavano una massa compatta, e poi li separammo?

Corano 21:30

Trattasi di esercizi dove si richiede la soluzione di un'equazione alle derivate parziali del tipo:

$$a\partial_{tt}u(t,x) + b\partial_t u(t,x) + c\partial_{xx}u(t,x) + d\partial_x u(t,x) + eu = 0, \qquad (t,x) \in]0,+\infty[\times[0,\pi],$$

dove $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ sono costanti reali con alcune *condizioni al contorno* di varia natura.
Il metodo di separazione delle variabili consiste nella ricerca di soluzioni elementari non nulle nella forma $u(t,x) = U(t)X(x)$ e poi giungere ad una soluzione del problema sovrapponendo infinite soluzioni elementari.

Procedura risolutiva:

(1) **Separazione delle variabili**: Sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene:

$$a\ddot{U}(t)X(x) + b\dot{U}(t,x) + cU(t)\ddot{X}(x) + dU(t)\dot{X}(x) + eU(t)X(x) = 0$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ottiene che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui:

$$-\frac{a\ddot{U}(t) + b\dot{U}(t,x) + eU(t)}{U(t)} = \frac{c\ddot{X}(x) + d\dot{X}(x)}{X(x)} =: \lambda$$

Questo implica che per $\lambda \in \mathbb{R}$ si hanno le due equazioni:

$$\begin{cases} c\ddot{X}(x) + d\dot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ a\ddot{U}(t) + b\dot{U}(t) + (e+\lambda)\,U(t) = 0. \end{cases}$$

da accoppiarsi con le opportune condizioni al contorno.

(2) **Studio dell'equazione per** X: nel passaggio precedente si è ottenuta l'equazione

$$c\ddot{X}(x) + d\dot{X}(x) - \lambda X(x) = 0$$

il cui polinomio caratteristico è $c\mu^2 + d\mu - \lambda = 0$, di discriminante $\Delta = d^2 + 4c\lambda$. Si verificano i seguenti casi:

(a) se $\Delta > 0$, poniamo $\mu_1 = \frac{-d-\sqrt{\Delta}}{2c}$, $\mu_2 = \frac{-d+\sqrt{\Delta}}{2c}$ e la soluzione generale dell'equazione è $\Phi(c_1, c_2, x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$.

(b) se $\Delta = 0$, poniamo $\mu_1 = \mu_2 = \frac{-d}{2c}$ e la soluzione generale dell'equazione è $\Phi(c_1, c_2, x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 x e^{\mu_1 x}$.

(c) se $\Delta < 0$, poniamo $\alpha = \frac{-d}{2c}$ e $\omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2c}$ e la soluzione generale dell'equazione è $\Phi(c_1, c_2, x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x)$.

(3) **Compatibilità con i dati al bordo dell'equazione per** X: Ottenuta la soluzione generale per $X(x)$ è necessario accoppiarle con opportune condizioni al contorno derivate dai dati iniziali e considerare solo le soluzioni non nulle.
Considereremo solo due casi di condizioni al contorno, le *condizioni di Dirichlet omogenee* (Do) e le *condizioni di Neumann omogenee* (No).

(Do): Condizioni di Dirichlet omogenee: $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$			
Esse implicano $X(0) = X(\pi) = 0$. Imponiamo tali condizioni $\Phi(c_1, c_2, 0) = 0$ e $\Phi(c_1, c_2, \pi) = 0$ sulle soluzioni generali trovate ottenendo un sistema lineare omogeneo in c_1, c_2, di cui dobbiamo escludere le soluzioni identicamente nulle.			
Segno di Δ	Sistema	Determinante del sistema	Soluzioni
$\Delta > 0$	$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ e^{\mu_1\pi} c_1 + e^{\mu_2\pi} c_2 = 0 \end{cases}$	$e^{\mu_2\pi} - e^{\mu_1\pi} \neq 0$ perché $\mu_1 \neq \mu_2$	$c_1 = c_2 = 0$ Non accettabile
$\Delta = 0$	$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 e^{\mu_1\pi} + c_2 \pi e^{\mu_1\pi} = 0 \end{cases}$	$\pi e^{\mu_1\pi} \neq 0$	$c_1 = c_2 = 0$ Non accettabile
$\Delta < 0$	$\begin{cases} c_1 = 0 \\ e^{\alpha\pi}(c_1 \cos\omega\pi + c_2 \sin\omega\pi) = 0 \end{cases}$	$e^{\alpha\pi} \sin\omega\pi$ Nullo solo se $0 \neq \omega \in \mathbb{Z}$	$c_1 = 0, c_2 \in \mathbb{R}$ Accettabile solo se $0 \neq \omega \in \mathbb{Z}$

(No): Condizioni di Neumann omogenee: $u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0$			
Esse implicano $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. Imponiamo tali condizioni $\dot{\Phi}(c_1, c_2, 0) = 0$ e $\dot{\Phi}(c_1, c_2, \pi) = 0$ sulle soluzioni generali trovate ottenendo un sistema lineare omogeneo in c_1, c_2, di cui dobbiamo escludere le soluzioni identicamente nulle. Osserviamo che se $\lambda \neq 0$ allora $\mu_1, \mu_2 \neq 0$. Studiamo a parte $\lambda = 0$.			
Segno di Δ	Sistema	Determinante del sistema	Soluzioni
$\Delta > 0$ $\lambda \neq 0$	$\begin{cases} \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 = 0 \\ \mu_1 e^{\mu_1\pi} c_1 + \mu_2 e^{\mu_2\pi} c_2 = 0 \end{cases}$	$\mu_1\mu_2(e^{\mu_2\pi} - e^{\mu_1\pi}) \neq 0$ perché $\mu_1 \neq \mu_2$ e $\mu_1, \mu_2 \neq 0$	$c_1 = c_2 = 0$ Non accettabile
$\Delta = 0$ $\lambda \neq 0$	$\begin{cases} \mu_1 c_1 + c_2 = 0 \\ \mu_1 e^{\mu_1\pi} c_1 + e^{\mu_1\pi}(1 + \mu_1\pi) c_2 = 0 \end{cases}$	$\mu_1 \pi e^{\mu_1\pi} \neq 0$ perché $\mu_1 \neq 0$	$c_1 = 0$, $c_2 = 0$ Non accettabile
$\Delta < 0$ $\lambda \neq 0$	$\begin{cases} \alpha c_1 + \omega c_2 = 0 \\ -c_1\omega \sin(\pi\omega) + c_2\alpha \sin(\pi\omega) = 0 \end{cases}$	$(\alpha^2 + \omega^2) \sin\omega\pi$ Nullo solo se $0 \neq \omega \in \mathbb{Z}$	$c_1 \in \mathbb{R}$,$c_2 = \frac{d\, c_1}{2c\omega}$ Accettabile solo se $0 \neq \omega \in \mathbb{Z}$
$\lambda = 0$ $d \neq 0$	Si ha $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$ perché $\Delta \neq 0$		$c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 = 0$ Accettabile
$\lambda = 0$ $d = 0$	Si ha $\mu_1 = \mu_2 = 0$ perché $\Delta = 0$		$c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 = 0$ Accettabile

Osserviamo che $\omega \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $\Delta < 0$ se e solo se $2cn = \sqrt{|\Delta|}$ e $\Delta < 0$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ da cui λ deve essere della forma $-\frac{d^2+4c^2n^2}{4c}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Quadro riassuntivo		
Condizioni	Valori λ accettabili	Soluzione relativa a λ
Do	$\lambda_n = -\dfrac{d^2 + 4c^2n^2}{4c}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$X_n(x) = c_n e^{-\frac{d}{2c}x} \sin nx$
No	$\lambda_n = -\dfrac{d^2 + 4c^2n^2}{4c}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\lambda = 0$	$X_n(x) = c_n e^{-\frac{d}{2c}x} \left(\cos nx + \frac{d}{2nc} \sin nx\right)$. $X_0(x) = c_0$

(4) **Studio dell'equazione per** U: L'equazione per U è la seguente

$$a\ddot{U}(t) + b\dot{U}(t) + (e+\lambda)\,U(t) = 0.$$

(a) Se $a = 0$, $b \neq 0$ si ottiene $U(t) = U(0)e^{-\frac{e+\lambda}{b}\,t}$.
(b) Se $a \neq 0$, l'equazione è di secondo grado. Il suo polinomio caratteristico è $a\mu^2 + b\mu + (e+\lambda) = 0$ e il discriminante è $\tilde{\Delta} = b^2 - 4a(e+\lambda)$.
   (i) se $\tilde{\Delta} > 0$, poniamo $\nu_1 = \frac{-b-\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2a}$, $\nu_2 = \frac{-b+\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2a}$ e la soluzione generale dell'equazione è $U_n(d_1, d_2, t) = d_1 e^{\nu_1 t} + d_2 e^{\nu_2 x}$.
   (ii) se $\tilde{\Delta} = 0$, poniamo $\nu_1 = \nu_2 = \frac{-b}{2a}$ e la soluzione generale dell'equazione è $U_n(d_1, d_2, t) = d_1 e^{\nu_1 t} + c_2 t e^{\nu_1 t}$.
   (iii) se $\tilde{\Delta} < 0$, poniamo $\beta = \frac{-b}{2a}$ e $\theta = \frac{\sqrt{|\tilde{\Delta}|}}{2a}$ e la soluzione generale dell'equazione è $U_n(d_1, d_2, t) = e^{\beta t}(d_1 \cos\theta t + d_2 \sin\theta t)$.

(5) **Costruzione delle soluzioni elementari**: Si è visto come sulla base delle condizioni al contorno e della struttura dell'equazione solo un insieme numerabile di valori di λ sia accettabile. Se λ_n è un valore accettabile, si ottiene una soluzione $U_n(t)$ e una $X_n(x)$ relative a tale valore λ_n. Per moltiplicazione si ha una soluzione elementare $u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x)$. Ricordando che il prodotto di costanti arbitrarie è una costante arbitraria, si ha che se $a \neq 0$ allora $u_n(t,x)$ dipende da due costanti arbitrarie, altrimenti se $a = 0$ dipende da una sola costante arbitraria d_n. Nel caso dipenda da due costanti arbitrarie, siano esse d_n^1, d_n^2. In questo caso si hanno i due dati iniziali $u(0,x) = f(x)$ e $u_t(0,x) = g(x)$. Tali dati iniziali, sviluppati in serie di Fourier di soli seni (condizioni (Do)) o di soli coseni (condizioni (No)) derminano in modo univoco le soluzioni. Si ha infatti:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(0)X_n(x)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(0)\dot{X}_n(x)$$

oppure

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(0)X_n(x)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(0)\dot{X}_n(x)$$

e per confronto dei termini simili si determinano d_n^1 e d_n^2 per ogni n.
Se $a = 0$ viene assegnato solo il dato iniziale $u(0,x) = f(x)$, il cui sviluppo in serie di soli seni o soli coseni permette di determinare le costanti arbitrarie d_n da cui dipendono le soluzioni elementari $u_n(t,x)$ per ogni n.

(6) **Esempi:** diamo ora due esempi in alcuni casi particolari:
(a) *Soluzione per $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ e condizioni (Do)*
L'equazione è

$$\begin{cases} b\,\partial_t u + c\,\partial_{xx} u + d\,\partial_x u + e\,u = 0 \text{ in }]0,\pi[\times]0,+\infty[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

Supponiamo che $a = 0$, $b \neq 0$ e valgano (Do). I valori di λ accettabili sono allora $\lambda_n = -\frac{d^2+4c^2n^2}{4c}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Costruiamo una soluzione elementare moltiplicando la soluzione generale accettabile di X per quella di U Si ha allora, mettendo assieme tutte le costanti moltiplicative,

$$u_n(t,x) = b_n \exp\left(\frac{d^2 + 4c^2n^2 - 4ce}{4bc}\,t\right) e^{-\frac{d}{2c}x} \sin nx.$$

Per coprire il dato iniziale $u(0,x) = f(x)$, si deve quindi avere:

$$u(0,x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{d}{2c}x} \sin nx = e^{-\frac{d}{2c}x} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Pertanto i b_n sono i coefficienti di Fourier della funzione $f(x)e^{\frac{d}{2c}x}$ estesa per disparità a $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità, quindi

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)e^{\frac{d}{2c}x}\sin nx\,dx,$$

e la soluzione risulta essere

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi}e^{-\frac{d}{2c}x}\sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\pi f(s)e^{\frac{d}{2c}s}\sin ns\,ds\right)\exp\left(\frac{d^2+4c^2n^2-4ce}{4bc}\,t\right)\sin nx.$$

(b) *Soluzione per $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d=0$ e condizioni (No)*
L'equazione è

$$\begin{cases} b\,\partial_t u + c\,\partial_{xx}u + e\,u = 0 \text{ in }]0,\pi[\times]0,+\infty[,\\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0,\\ u(0,x) = f(x).\end{cases}$$

Supponiamo che $a=0$, $b\neq 0$, $d=0$ e valgano (No). I valori di λ accettabili sono allora $\lambda_n = -cn^2$ al variare di $n\in\mathbb{N}$, $n>0$. Costruiamo una soluzione elementare moltiplicando la soluzione generale accettabile di X per quella di U Si ha allora, mettendo assieme tutte le costanti moltiplicative,

$$u_n(t,x) = a_n\exp\left(\frac{cn^2-e}{b}\,t\right)\cos nx.$$

Per coprire il dato iniziale $u(0,x)=f(x)$, si deve quindi avere:

$$u(0,x) = f(x) = \sum_{n=1}^\infty u_n(0,x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos nx$$

Pertanto gli a_n sono i coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$ estesa per parità a $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità, quindi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx,$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx,$$

e la soluzione risulta essere

$$u(t,x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi f(s)\,ds\right)e^{-\frac{e}{b}\,t} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty e^{\frac{cn^2-e}{b}\,t}\left(\int_0^\pi f(s)\cos ns\,ds\right)\cos nx.$$

Funzioni trigonometriche ed iperboliche

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la circonferenza γ centrata nell'origine di raggio 1, essa ha equazione $x^2 + y^2 = 1$. Si consideri una semiretta uscente dall'origine che formi un angolo θ con la direzione positiva dell'asse delle ascisse: essa interseca γ in un unico punto P. Chiameremo $\cos\theta$ l'ascissa di P e $\sin\theta$ l'ordinata di P. Sussiste $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ perché $P \in \gamma$. Si ha anche $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ se e solo se l'area del settore circolare definito dai punti (x, y), $(0, 0)$ e $(1, 0)$ è $\theta/2$.
Rimangono definite quindi due funzioni: $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ (*coseno* e $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ (*seno*), tali funzioni sono periodiche di periodo 2π, ovvero $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ e $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$. Si può inoltre definire $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ (*tangente*) ponendo $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Analogamente, è possibile definire $\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ (*cotangente*) ponendo $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Le funzioni tan e cot sono periodiche di periodo π, ovvero $\tan(x + \pi) = \tan x$ e $\cot(x + \pi) = \cot x$. Per completezza citiamo anche le funzioni $\sec : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ (*secante*) e $\csc : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ (*cosecante*) definite da $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ e $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$. Per esse vale la relazione $\sec^2 x + \csc^2 x = \csc^2 x \cdot \sec^2 x$ per ogni $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Tutte queste funzioni sono invertibili in alcuni intervalli del loro dominio, e danno luogo alle *funzioni trigonometriche inverse*:

Nome	Notazione	Definizione	Dominio	Codominio
arcoseno	$y = \arcsin x$	$x = \sin y$	$x \in [-1, 1]$	$y \in [-\pi/2, \pi/2]$
arcocoseno	$y = \arccos x$	$x = \cos y$	$x \in [-1, 1]$	$y \in [0, \pi]$
arcotangente	$y = \arctan x$	$x = \tan y$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in]-\pi/2, \pi/2[$
arcosecante	$y = \operatorname{arc}\sec x$	$x = \sec y$, $y = \arccos(1/x)$	$\|x\| \geq 1$	$y \in]0, \pi[\setminus \{\pi/2\}$
arcocosecante	$y = \operatorname{arc}\csc x$	$x = \csc y$, $y = \arcsin(1/x)$	$\|x\| \geq 1$	$y \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus \{0\}$
arcocotangente	$y = \operatorname{arc}\cot x$	$x = \cot y$, $y = \arctan(1/x)$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in]0, \pi[$

Grazie al teorema della funzione inversa si ha:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \cos x, & \frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x, & \frac{d}{dx}\arccos x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{d}{dx}\tan x &= \sec^2 x = 1 + \tan^2 x, & \frac{d}{dx}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \\
\frac{d}{dx}\cot x &= -\csc^2 x, & \frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cot x &= \frac{-1}{1+x^2} \\
\frac{d}{dx}\sec x &= \tan x \sec x, & \frac{d}{dx}\operatorname{arc}\sec x &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \\
\frac{d}{dx}\csc x &= -\csc x \cot x, & \frac{d}{dx}\operatorname{arc}\csc x &= \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

Ulteriori proprietà delle funzioni trigonometriche si trovano nella tabella allegata.

In perfetta analogia con quanto visto per le funzione trigonometriche, vogliamo costruire una nuova classe di funzioni basate non più sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, bensì sull'iperbole equilatera di equazione $x^1 - y^2 = 1$. Tali funzioni si chiameranno *funzioni iperboliche*.
In $\mathbb{R}^2$ consideriamo l'iperbole equilatera Γ centrata nell'origine con vertici nei punti di raggio $(\pm 1, 0)$, essa ha equazione $x^2 - y^2 = 1$. Consideriamo una semiretta uscente dall'origine, essa interseca γ in un unico punto

$P = (x, y)$. Consideriamo l'area della regione delimitata da tale semiretta, dall'asse x e dall'iperbole, detta settore iperbolico. Diremo che $(x, y) = (\cosh\theta, \sinh\theta)$ se e solo se tale area (con segno) è $\theta/2$, nel senso che per $\theta \geq 0$ stiamo considerando un settore iperbolico giacente nel primo quadrante di area $\theta/2$, mentre per $\theta < 0$ stiamo considerando un settore iperbolico nel quarto quadrante di area $|\theta|/2$. Rimangono definite quindi due funzioni: $\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ (*coseno iperbolico* e $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*seno iperbolico*). Si può inoltre definire $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ (*tangente iperbolica*) ponendo $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Analogamente, è possibile definire $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$ (*cotangente iperbolica*) ponendo $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$.
Per completezza citiamo anche le funzioni $\mathrm{sech} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ (*secante iperbolica*) e $\mathrm{csc} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ (*cosecante iperbolica*) definite da $\sec(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$ e $\csc(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$. Si possono dare le definizioni di tutte queste funzioni in termini di funzioni esponenziali, tali definizioni si trovano nella tabella allegata. Tali espressioni permettono di estendere le definizioni di queste funzioni al campo complesso. A partire da tali definizioni è possibile dare le espressioni delle funzioni iperboliche inverse:

$$\begin{aligned}
\mathrm{arcsinh}(x) &= \sinh^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\
\mathrm{arccosh}(x) &= \cosh^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ x \geq 1 \\
\mathrm{arctanh}(x) &= \tanh^{-1}(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ |x| < 1 \\
\mathrm{arcoth}(x) &= \coth^{-1}(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\ |x| > 1 \\
\mathrm{arcsech}(x) &= \mathrm{sech}^{-1}(x) = \log\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}\right),\ 0 < x \leq 1 \\
\mathrm{arccsch}(x) &= \mathrm{csch}^{-1}(x) = \log\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x}\right).
\end{aligned}$$

Le derivate di queste funzioni sono date da:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) \\
&\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x) \\
&\frac{d}{dx}\tanh(x) = 1 - \tanh^2(x) = \mathrm{sech}^2(x) = 1/\cosh^2(x) \\
&\frac{d}{dx}\coth(x) = 1 - \coth^2(x) = -\mathrm{csch}^2(x) = -1/\sinh^2(x) \\
&\frac{d}{dx}\mathrm{csch}(x) = -\coth(x)\mathrm{csch}(x) \\
&\frac{d}{dx}\mathrm{sech}(x) = -\tanh(x)\mathrm{sech}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x\right) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} x\right) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right) &= \frac{1}{1-x^2} \\
\frac{d}{dx}\left(\mathrm{csch}^{-1} x\right) &= -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \\
\frac{d}{dx}\left(\mathrm{sech}^{-1} x\right) &= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right) &= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

L'utilità dell'introduzione delle funzioni iperboliche è particolarmente evidente nel calcolo di alcune primitive:

$$\int \sinh ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$$
$$\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\sinh ax + C$$
$$\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) + C$$
$$\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sinh ax) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C; u^2 < a^2$$
$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C; u^2 > a^2$$
$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\mathrm{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\mathrm{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + \frac{\pi}{2} + c$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{arcsinh}(x) + c = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + c$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arccosh}(x) + c = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + c$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$
$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{\mathrm{arcsinh}(x) + x\sqrt{x^2+1}}{2} + c = \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + x\sqrt{x^2+1}}{2} + c$$
$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{-\mathrm{arccos}h(x) + x\sqrt{x^2-1}}{2} + c = \frac{-\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + x\sqrt{x^2-1}}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + c$$
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arctanh}(x) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$$

Relazione fondamentale per $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \mathrm{Re}(z)(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Funzioni goniometriche	Funzioni iperboliche
$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cosh iz$ $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -i\sinh iz$ $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = -i\tanh(iz)$ $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = \frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i\coth(iz)$	$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \cos iz$ $\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = -i\sin iz$ $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = -i\tan(iz)$ $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1} = i\cot(iz)$
$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$	$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$ $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$ $\tan(z_1 \pm z_2) = \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$ $\cot(z_1 \pm z_2) = \frac{\cot z_1 \cot z_2 \mp 1}{\cot z_2 \pm \cot z_1}$	$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$ $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$ $\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 \tanh z_2}$ $\coth(z_1 \pm z_2) = \frac{\coth z_1 \coth z_2 \pm 1}{\coth z_2 \pm \coth z_1}$
$\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z$ $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ $\tan(2z) = \frac{2\tan z}{1-\tan^2(z)}$ $\cot(2z) = \frac{\cot^2(z)-1}{2\cot z}$	$\cosh(2z) = \cosh^2 z + \sinh^2 z = 2\cosh^2 z - 1 = 1 + 2\sinh^2 z$ $\sinh(2z) = 2\sinh z \cosh z$ $\tanh(2z) = \frac{2\tanh z}{1+\tanh^2(z)}$ $\coth(2z) = \frac{\coth^2(z)+1}{2\coth z}$

Funzioni goniometriche	Funzioni iperboliche
$\cos\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}}$	$\cosh\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cosh z}{2}}$
$\sin\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos z}{2}}$	$\sinh\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{-\frac{1-\cosh z}{2}}$
$\tan\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos z}{1+\cos z}} = \frac{\sin z}{1+\cos z} = \frac{1-\cos z}{\sin z}$	$\tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{-\frac{1-\cosh z}{1+\cosh z}} = \frac{\sinh z}{1+\cosh z} = -\frac{1-\cosh z}{\sinh z}$
$\cot\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos z}{1-\cos z}} = \frac{1+\cos z}{\sin z} = \frac{\sin z}{1-\cos z}$	$\coth\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{-\frac{1+\cosh z}{1-\cosh z}} = \frac{1+\cosh z}{\sinh z} = -\frac{\sinh z}{1-\cosh z}$
$\cos z_1 + \cos z_2 = 2\cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$	$\cosh z_1 + \cosh z_2 = 2\cosh\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cosh\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$
$\cos z_1 - \cos z_2 = -2\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$	$\cosh z_1 - \cosh z_2 = 2\sinh\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sinh\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$
$\sin z_1 + \sin z_2 = 2\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$	$\sinh z_1 + \sinh z_2 = 2\sinh\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cosh\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$
$\sin z_1 - \sin z_2 = 2\cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$	$\sinh z_1 - \sinh z_2 = 2\cosh\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sinh\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$
$\tan z_1 \pm \tan z_2 = \frac{\sin(z_1 \pm z_2)}{\cos z_1 \cos z_2}$	$\tanh z_1 \pm \tanh z_2 = \frac{\sinh(z_1 \pm z_2)}{\cosh z_1 \cosh z_2}$
$\cot z_1 \pm \cot z_2 = \frac{\sin(z_2 \pm z_1)}{\sin z_1 \sin z_2}$	$\coth z_1 \pm \coth z_2 = \frac{\sinh(z_2 \pm z_1)}{\sinh z_1 \sinh z_2}$
$2\cos z_1 \sin z_2 = \sin(z_1+z_2) - \sin(z_1-z_2)$	$2\cosh z_1 \sinh z_2 = \sinh(z_1+z_2) - \sinh(z_1-z_2)$
$2\sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1-z_2) - \cos(z_1+z_2)$	$2\sinh z_1 \sinh z_2 = \cosh(z_1+z_2) - \cosh(z_1-z_2)$
$2\cos z_1 \cos z_2 = \cos(z_1-z_2) + \cos(z_1+z_2)$	$2\cosh z_1 \cosh z_2 = \cosh(z_1-z_2) + \cosh(z_1+z_2)$
$\cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$	$\cosh z = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad t = \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$
$\sin z = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$	$\sinh z = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad t = \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$
$\tan z = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$	$\tanh z = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad t = \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$
$\cot z = \frac{1-t^2}{2t}, \qquad t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$	$\cot z = \frac{1+t^2}{2t}, \qquad t = \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$

Bibliografia

[1] Monica Conti, Davide Ferrario, Susanna Terracini, and Gianmaria Verzini, *Analisi matematica. Dal calcolo all'analisi Vol. 1*, Apogeo, Milano, 2006.

[2] Vivina Barutello, Monica Conti, Davide Ferrario, Susanna Terracini, and Gianmaria Verzini, *Analisi matematica. Dal calcolo all'analisi Vol. 2*, Apogeo, Milano, 2006.

[3] Giuseppe De Marco, *Analisi Uno. Primo corso di analisi matematica. Teoria ed esercizi*, Decibel-Zanichelli, Padova, 1995.

[4] ______, *Analisi Due/1. Secondo corso di analisi matematica per l'università. Prima parte*, Decibel-Zanichelli, Padova, 1995.

[5] ______, *Analisi Due/2. Secondo corso di analisi matematica per l'università. Seconda parte*, Decibel-Zanichelli, Padova, 1995.

[6] Enrico Giusti, *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 2002.

[7] ______, *Analisi matematica 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

[8] Marco Squassina and Simone Zuccher, *Introduzione allo studio qualitativo delle equazioni ordinarie*, Apogeo, Milano, 2008.

[9] Giuseppe Zwirner, *Esercizi e complementi di Analisi Matematica parte seconda*, Cedam, Padova, 1967.