

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 2

13 ottobre 2015

- (3 punti)** Siano G e H due gruppi e $f : G \rightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Si dimostri che esistono un sottogruppo K di H e due omomorfismi di gruppi $g : G \rightarrow K$ e $h : K \rightarrow H$ tali che g è suriettivo, h è iniettivo e $f = h \circ g$.
- Si consideri il gruppo abeliano $G := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
 - (3 punti)** Si dimostri che, per ogni $\bar{x} \in G$, $\text{ord}(\bar{x}) = n/\text{MCD}(n, x)$, dove $\text{MCD}(n, x)$ è il massimo comune divisore tra x e n in \mathbb{Z} .
 - (2 punto)** Si concluda che il numero di elementi \bar{x} di G tali che il sottogruppo generato da \bar{x} è G è $\phi(n)$ (ϕ è la funzione di Eulero, che associa a un numero naturale n il numero di naturali $m < n$ tali che $\text{MCD}(m, n) = 1$).
 - (2 punti)** Si dimostri che esiste un omomorfismo iniettivo di gruppi $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ se e solo se n divide k .
 - (3 punti)** Si dimostri che esiste un omomorfismo suriettivo di gruppi $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ se e solo se k divide n .
 - (3 punti)** Si dimostri che esiste un omomorfismo di gruppi non nullo $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ se e solo se $\text{MCD}(n, k) \neq 1$.
 - (4 punti)** Si dimostri che se $n = pq$, dove p e q sono numeri tali che $\text{MCD}(p, q) = 1$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
- (3 punti)** Si dimostri che per ogni ciclo $\pi = (m_1, \dots, m_k) \in S_n$ e ogni permutazione $\sigma \in S_n$ si ha $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = (\sigma(m_1), \dots, \sigma(m_k))$.
- Si considerino le seguenti permutazioni nel gruppo simmetrico su quattro oggetti S_4 .

$$\sigma = (123)(342)(12)(1243)(2143)(23)(341)$$

$$\tau = \sigma(1324)\sigma^{-1}$$

- (2 punto)** Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti.
- (3 punti)** Si scrivano σ e τ come prodotti di trasposizioni.
- (2 punto)** Si calcolino i segni di σ e τ .

Consegna: martedì 20 ottobre, 15:30, all'inizio delle esercitazioni.