COMPLEMENTI DI MODELLI MATEMATICI PER LA BIOLOGIA

ANTONIO MARIGONDA

20 maggio 2009

Sommario. Queste note offrono un supporto mnemonico per *alcune parti* del programma del corso di Modelli Matematici per la Biologia (Corso di Laurea in Matematica Applicata). **In particolare esse non sono intese per sostituire il libro di testo** [6] **adottato per tale corso o la parte sulle equazioni differenziali studiata all'interno di Analisi 1 e Analisi 2**. Si prega di segnalare eventuali errori o imprecisioni. Il contenuto delle sezioni 5,6,7 dovrebbe essere noto (in una qualche forma) dai precedenti corsi di Analisi. La Sezione 3, i Teoremi 5.2, 5.3, e le Definizioni 6.7,6.8, 6.10, 6.11 sono facoltativi.

1. Equazioni scalari alle differenze

In questa sezione studieremo le successioni reali $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definite da $x_{k+1} = f(x_k)$ dove I è intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to I$ è una funzione.

Definizione 1.1. Una successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definita da $x_{k+1} = f(x_k)$ viene detta definita *per ricorrenza* o *per induzione*. Tale successione viene detta *regolare* se ammette limite (finito o infinito) per $k \to +\infty$. Se tale limite esiste finito, esso verrà detto *punto di equilibrio* (della successione o della mappa f o del sistema dinamico (f, I)).
Sia x_0 di equilibrio per una mappa f continua. Allora x_0 è punto fisso di f, ovvero $f(x_0) = x_0$. Si ha infatti:

$$f(x_0) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x_0,$$

dove si è portata f sotto al segno di limite per continuità.

Teorema 1.1. *I seguenti risultati assicurano l'esistenza di punti fissi:*

(1) *(Lemma delle contrazioni) Sia (E, d) uno spazio metrico completo, $f : E \to E$ funzione. Supponiamo che f sia* contrazione*, ovvero esiste $0 < \alpha < 1$ tale per cui $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ per ogni $x, y \in E$ (il lettore può pensare ad E come ad un sottinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ e a $d(y, x) = |y - x|$). Allora f ha uno ed un solo punto fisso, ovvero esiste un unico $\bar{x} \in E$ tale per cui $f(\bar{x}) = \bar{x}$.*
(2) *(Teorema di Brower) In $\mathbb{R}^n$, poniamo $\overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ e sia $f : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$ una mappa continua. Allora f ammette almeno un punto fisso (non necessariamente unico). Il teorema si applica anche se $f : K \to K$ è continua e K è omeomorfo a $\overline{B(0,1)}$ (ad esempio se K è un qualunque intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$).*

Definizione 1.2. Si dice *iterata k-esima* della mappa $f : I \to I$ e si indica con $f^k(x)$ la funzione ottenuta componendo k volte f con se stessa, ovvero $f^k(x) = f \circ \cdots \circ f(x) = f(f(\ldots f(x)))$.

Definizione 1.3. Sia $f : I \to I$. Un punto di equilibrio x_0 per la successione $x_{k+1} = f(x_k)$ si dice:

(1) *localmente stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y_0 \in I$ tale che $|y_0 - x_0| < \delta$ si abbia $|f^k(y_0) - x_0| < \varepsilon$ per ogni $k \geq 0$.

(2) *instabile* se non è stabile.
(3) *localmente attrattivo* se esiste $\rho > 0$ tale che per ogni $y_0 \in I$ tale che $|y_0 - x_0| < \rho$ si abbia $\lim_{k\to\infty} f^k(y_0) = x_0$.
(4) *localmente asintoticamente stabile* (LAS) se è localmente attrattivo e localmente stabile.
(5) *globalmente attrattivo* se per ogni $y_0 \in I$ si ha $\lim_{k\to\infty} f^k(y_0) = x_0$.
(6) *globalmente asintoticamente stabile* (GAS) se è globalmente attrattivo e localmente stabile.

Se f è continua e x_0 è equilibrio globalmente attrattivo, allora è GAS, tuttavia in generale questo non vale.

Teorema 1.2. *Sia $f : I \to I$, con I intervallo di $\mathbb{R}$ una funzione crescente e continua. Allora la successione definita da $x_0 \in I$, $x_{k+1} = f(x_k)$ è monotona. In particolare se $x_1 \geq x_0$ allora $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, mentre se $x_1 \leq x_0$ allora $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è decrescente, e se $x_1 = x_0$ allora $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è costante. Posto:*

$$A = \{\bar{x} \in I : \bar{x} \text{ è di equilibrio e } \bar{x} > x_0\}, \qquad B = \{\bar{x} \in I : \bar{x} \text{ è di equilibrio e } \bar{x} < x_0\},$$

esiste il

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \begin{cases} \min(A) & \text{se } x_1 > x_0 \text{ e } A \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{se } x_1 > x_0 \text{ e } A = \emptyset, \\ \max(B) & \text{se } x_1 < x_0 \text{ e } B \neq \emptyset, \\ -\infty & \text{se } x_1 < x_0 \text{ e } B = \emptyset. \end{cases}$$

Teorema 1.3. *Sia $f : I \to I$, con I intervallo di $\mathbb{R}$ una funzione decrescente e continua. Allora la successione definita da $x_0 \in I$, $x_{k+1} = f(x_k)$ ha le sottosuccessioni x_{2k} e x_{2k+1} monotone. In particolare si ha*

(1) *se $x_2 \geq x_0$ allora x_{2k} è crescente e x_{2k+1} è decrescente.*
(2) *se $x_2 \leq x_0$ allora x_{2k} è decrescente e x_{2k+1} è crescente.*

Inoltre:

(1) *se $x_1 \geq x_0$ allora $x_{2k+1} \leq x_{2k}$ per ogni k.*
(2) *se $x_1 \leq x_0$ allora $x_{2k+1} \geq x_{2k}$ per ogni k.*

Condizione necessaria affinché x_k abbia limite è che x_2 sia compreso tra x_0 e x_1.

Definizione 1.4. Siano $f : I \to I$ una mappa di classe C^1 e $x_0 \in I$ di equilibrio per $x_{k+1} = f(x_k)$. Diremo che x_0 è *iperbolico* se $f'(x_0) \neq \pm 1$ altrimenti diremo che x_0 è non-iperbolico.

Teorema 1.4 (Stabilità dei sistemi discreti)**.** *Sia $f : I \to I$, I intervallo di $\mathbb{R}$ una funzione C^3, x_0 di equilibrio per $x_{k+1} = f(x_k)$. Allora vale il seguente schema:*

(1) *se $|f'(x_0)| < 1$ allora x_0 è LAS,*
(2) *se $|f'(x_0)| > 1$ allora x_0 è instabile,*
(3) *se $f'(x_0) = -1$ e $2f'''(x_0) + 3[f''(x_0)]^2 < 0$ allora x_0 è instabile,*
(4) *se $f'(x_0) = -1$ e $2f'''(x_0) + 3[f''(x_0)]^2 > 0$ allora x_0 è LAS,*
(5) *se $f'(x_0) = 1$ e $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è LAS superiormente (ovvero è LAS in $I \cap [x_0, +\infty[$) e instabile inferiormente (ovvero in $I \cap]-\infty, x_0]$),*
(6) *se $f'(x_0) = 1$ e $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è instabile superiormente (ovvero in $I \cap [x_0, +\infty[$) e LAS inferiormente (ovvero in $I \cap]-\infty, x_0]$),*
(7) *se $f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) < 0$ allora x_0 è LAS,*

(8) *se* $f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) = 0$ *e* $f'''(x_0) > 0$ *allora* x_0 *è instabile.*

Siamo ora interessati alla ricerca di soluzioni periodiche, oppure cicliche. Esse sono legate a punti di equilibrio dell'iterata f^p, e la loro stabilità sarà legata alla stabilità degli equilibri dell'iterata.

Definizione 1.5. Sia $f : I \to I$, I intervallo di $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Diremo che $\zeta \in I$ è *soluzione periodica di periodo p* se $f^p(\zeta) = \zeta$ e $f^j(\zeta) \neq \zeta$ per $j = 1...p-1$. Se ζ_1 è soluzione periodica di periodo $p > 1$, allora l'insieme:

$$\mathcal{O}_p := \{\zeta_1, \zeta_2 = f(\zeta_1), ..., \zeta_p = f^{p-1}(\zeta)\}$$

verrà detto p-ciclo.

Teorema 1.5 (stabilità dei cicli)**.** *Sia* $f : I \to I$ *una mappa di classe* C^1*, e sia*

$$\mathcal{O}_p := \{\zeta_1, \zeta_2 = f(\zeta_1), ..., \zeta_{p-1} = f^{p-1}(\zeta)\}$$

un p-ciclo per $x_{k+1} = f(x_k)$*. Se si ha*

$$|f'(\zeta_1) f'(\zeta_2) \cdot \dots \cdot f'(\zeta_p)| < 1,$$

tale p-ciclo è LAS.

Dimostrazione. Se ζ_1 è punto di equilibrio per l'iterata p-esima, esso è stabile se si ha

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(\zeta_1) \right| < 1$$

Sviluppando la derivata con la formula di derivazione delle funzioni composte e ricordando che $f^j(\zeta_1) = \zeta_{j+1}$ si ha quanto voluto. $\square$

Teorema 1.6 (GAS e 2-cicli)**.** *Sia* $\gamma > 0$ *e* $f : [0, \gamma[\to [0, \gamma[$ *una funzione continua con* $f(0) = 0$*. Supponiamo inoltre che esista* $\zeta \in [0, \gamma[$ *tale che* $x < f(x)$ *per ogni* $x \in]0, \zeta[$ *e* $f(x) < x$ *per ogni* $x \in]\zeta, \gamma[$*. Supponiamo inoltre che se f ammette massimo in* $y_0 \in]0, \gamma[$*, allora f sia decrescente in* $]y_0, \gamma[$*. Allora* ζ *è GAS per* $x_{k+1} = f(x_k)$ *se e solo se non esistono* 2*-cicli.*

Definizione 1.6 (dipendenza sensibile)**.** Siano $f : I \to I$, I intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Diciamo che f *esibisce dipendenza sensibile dal dato iniziale* x_0 se esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $y_0 \in I$ e $k \geq 1$ tali che se $|x_0 - y_0| < \delta$ si ha $|f^k(x_0) - f^k(y_0)| \geq \varepsilon_0$. Se una mappa f esibisce dipendenza sensibile dal dato iniziale x_0 per ogni $x_0 \in I$, diremo che f esibisce dipendenza sensibile dai dati iniziali.

Definizione 1.7. Siano $f : I \to I$, I intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$. L'*esponente di Lyapunov* in x_0 dell'equazione alle differenze $x_{k+1} = f(x_k)$ è definito da:

$$\mathcal{L}(x_0) := \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \log |f'(x_m)|.$$

Se l'esponente di Lyapunov $\mathcal{L}(x_0)$ è indipendente dal punto x_0, diremo che è l'esponente di Lyapunov della mappa f.

Proposizione 1.1 (Proprietà dell'esponente di Lyapunov)**.** *Siano* $f : I \to I$*,* I *intervallo di* $\mathbb{R}$*,* $x_0 \in I$*, sia* $x_{k+1} = f(x_k)$

(1) *Se* $\mathcal{L}(x_0) > 0$ *allora f esibisce dipendenza sensibile dal dato iniziale* x_0*.*
(2) *Se* $f \in C^1$ *allora vale* $\varepsilon e^{k\mathcal{L}(x_0)} \sim f^k(x_0 + \varepsilon) - f^k(x_0)$

(3) *Se* $f \in C^1$ *e* $f'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in I$ *allora* $\mathcal{L}(x_0) = \mathcal{L}(f^k(x_0))$ *per ogni* $k \geq 1$.
(4) *Se* $f \in C^1$, x_0 *di equilibrio per* $x_{k+1} = f(x_k)$ *con* $|f'(x_0)| > 1$ *(ovvero instabile), allora* $\mathcal{L}(x_0) > 0$. *Viceversa, se* x_0 *di equilibrio per* $x_{k+1} = f(x_k)$ *con* $|f'(x_0)| < 1$ *(ovvero GAS) allora* $\mathcal{L}(x_0) < 0$.

Dimostrazione.

(1) omessa.
(2) Si ha $\frac{d}{dx} f^k(x_0) = \prod_{j=0}^{k-1} f'(x_j)$ (la dimostrazione è immediata per induzione). Nella relazione approssimata, dividendo per ε e passando formalmente al limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene:
$$e^{k\mathcal{L}(x_0)} \sim \left| \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f^k(x_0+\varepsilon) - f^k(x_0)}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{d}{dx} f^k(x_0) \right|$$
Passando ai logaritmi e usando la formula della derivata:
$$\mathcal{L}(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \prod_{j=0}^{k-1} |f'(x_j)|,$$
da cui la tesi.
(3) Dalla definizione, si ha:
$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log|f'(x_j)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \log|f'(x_j)| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{n-1} \log|f'(x_j)| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \log|f'(x_j)| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j-k=0}^{n-1} \log|f'(x_j)|.\end{aligned}$$
Il primo limite è nullo perché $f' \neq 0$ e la somma che vi compare è limitata, il secondo limite è proprio $\mathcal{L}(f^k(x_0))$.
(4) Dalla definizione si ha $f^k(x_0) = x_0$. Sostituendo nella definizione di esponente di Lyapunov si ha $\mathcal{L}(x_0) = \log|f'(x_0)|$ da cui la tesi.

□

Proposizione 1.2. *Sia* $f : I \to I$, I *intervallo di* $\mathbb{R}$ *una mappa* C^1 *tale che* $f'(x) \neq -1$ *per ogni* $x \in I$. *Allora non esistono* 2*-cicli in* I *per* $x_{k+1} = f(x_k)$.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $\{x_0, x_1\} \subset I$ un 2-ciclo con $f^2(x_0) = f(x_1) = x_0$. Si ha allora:
$$\int_{x_0}^{x_1} (1 + f'(x))\,dx = x_1 + f(x_1) - x_(0) - f(x_0) = f^2(x_0) - x_0 = 0,$$
tuttavia per continuità di ha sempre $1 + f'(x) > 0$ oppure $1 + f'(x) < 0$. □

Proposizione 1.3 (Criteri per GAS).

(1) *Siano* $\gamma > 0$ *e* $f : [0, \gamma[\to [0, \gamma[$ *una mappa continua tale che* $0 < f(x) < x$ *per ogni* $x \in]0, \gamma[$. *Allora* 0 *è GAS per* $x_{k+1} = f(x_k)$.
(2) *Sia* $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una mappa* C^1 *con* $g(0) = 0$ *e tale per cui* $0 < g'(t) < 1$ *per ogni* $t > 0$. *Allora* 0 *è GAS su* $]0, +\infty[$ *per* $x_{k+1} = g(x_k)$.

Dimostrazione. Per continuità si ha $f(0) = 0$, quindi 0 è di equilibrio ed è l'unico equilibrio perché $f(x) < x$ se $x \in]0, \gamma[$. Inoltre per ogni $x_0 \in]0, \gamma[$ si ha $x_0 > f(x_0) = x_1 > ... > f^k(x_0) > ..$, quindi la successione $\{f^k(x_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è monotona strettamente decrescente e inferiormente limitata da 0, pertanto ammette limite ζ. Ancora per continuità si ha che:

$$f(\zeta) = f\left(\lim_{k\to\infty} f^k(x_0)\right) = \lim_{k\to\infty} f^{k+1}(x_0) = \zeta,$$

quindi ζ è punto fisso di f, ma per l'unicità si ha $\zeta = 0$.
Integrando la relazione data su g tra 0 e x si ottiene $0 < g(x) - g(0) = g(x) < x$. Quindi fissato $\gamma > 0$ si ha dal precedente che 0 è GAS su $[0, \gamma[$. Per l'arbitrarietà di γ si conclude. □

Proposizione 1.4. *Siano $\gamma > 0$ e $f : [0, \gamma[\to [0, \gamma[$ una mappa continua. Supponiamo esista $0 \leq \zeta < \gamma$ tale per cui $x < f(x) < \zeta$ per ogni $0 < x < \zeta$ e $\zeta < f(x) < x$ per ogni $\zeta < x < \gamma$. Allora ζ è GAS per $x_{k+1} = f(x_k)$.*

Dimostrazione. Ragionando come nella proposizione precedente, ζ risulta l'unico punto fisso di f (si passi al limite da destra e sinistra). Presto $0 \leq x_0\zeta$ si ha che la successione $\{f^k(x_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente e limitata dall'alto da ζ, pertanto ammette limite η_1. Analogamente, dato $\zeta < y_0 < \gamma$, la successione $\{f^k(y_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente e limitata dal basso da ζ, pertanto ammette limite η_2. Per continuità di f, si ha che η_1 ed η_2 sono punti fissi di f, per l'unicità di ha $\eta_1 = \eta_2 = \zeta$. □

Proposizione 1.5. *Siano $\gamma > 0$ e $f : [0, \gamma[\to [0, \gamma[$ una mappa continua con $f(0) = 0$. Supponiamo esista $0 \leq \zeta < \gamma$ tale per cui $x < f(x)$ per ogni $0 < x < \zeta$ e $f(x) < x$ per ogni $\zeta < x < \gamma$. Supponiamo che f non abbia punti di massimo in $]0, \zeta[$. Allora ζ è GAS per $x_{k+1} = f(x_k)$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 1.6, basta provare che non esistono 2-cicli per $x_{k+1} = f(x_k)$. Per assurdo esista un 2-ciclo $\{x_0, x_1\}$ con $f^2(x_0) = f(x_1) = x_0$. Si ha allora $x_0 < \zeta < x_1$, altrimenti se fosse ad esempio $x_0, x_1 \in]0, \zeta[$ si avrebbe $x_0 < f(x_0) = x_1 < f(x_1) = f^2(x_0) = x_0$ assurdo. Quindi $x_0 < \zeta < x_1$. D'altra parte f non ha punti di massimo assoluto in $]0, \zeta[$, quindi $f(x_0) < f(\zeta)$, altrimenti ricordando che $f(0) = 0$ si avrebbe $\max\{f(x) : 0 < x < \zeta\} = \max\{f(x) : 0 \leq x \leq \zeta\}$. Ma allora $x_0 < x_1 = f(x_0) < f(\zeta) = \zeta$, assurdo che conclude la dimostrazione. □

Proposizione 1.6. *Sia $f : I \to I$, I intervallo di $\mathbb{R}$ una mappa. Supponiamo che esistano e siano unici due punti $x_1, x_2 \in I$ tali che $f^2(x_1) = x_1$, $f^2(x_2) = x_2$, $f(x_1) \neq x_1$, $f(x_2) \neq x_2$. Allora $f(x_1) = x_2$ e $f(x_2) = x_1$.*

Dimostrazione. Notiamo che $f^2(f(x_i)) = f(x_i)$ e $f(f(x_i) \neq f(x_i)$ per $i = 1, 2$, quindi la mappa f^2 ammette i quattro punti fissi $x_1, x_2, f(x_1), f(x_2)$. Tali punti non sono fissi per la mappa f, quindi per l'unicità si deve avere $x_1 = f(x_2)$ e $x_2 = f(x_1)$. □

Definizione 1.8 (Cenni al caso vettoriale)**.** Consideriamo il sistema di due equazioni alle differenze:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = g(x_k, y_k), \end{cases} \tag{1}$$

con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f, g : D \to \mathbb{R}$ continue. Un *punto di equilibrio* (x_0, y_0) per tale sistema è una soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x = f(x,y), \\ y = g(x,y), \end{cases}$$

ovvero un punto fisso della mappa $(x,y) \mapsto F(x,y) := (f(x,y), g(x,y))$, $F : D \to D$. Supponiamo $f, g \in C^2$, allora $F \in C^2$ e la matrice Jacobiana di F è:

$$\mathrm{Jac}(F)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \\ \partial_x g(x,y) & \partial_y g(x,y) \end{pmatrix}$$

Per la formula di Taylor, per ξ, η sufficientemente piccoli si ha:

$$F(x_0+\xi, y_0+\eta) = \begin{pmatrix} f(x_0+\xi, y_0+\eta) \\ g(x_0+\xi, y_0+\eta) \end{pmatrix} \simeq \mathrm{Jac}(F)(x_0,y_0) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0,y_0) & \partial_y f(x_0,y_0) \\ \partial_x g(x_0,y_0) & \partial_y g(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Posto $\xi_k = x_k - x_0$ e $\eta_k = y_k - y_0$, studiamo il sistema alle differenze:

$$\begin{pmatrix} \xi_{k+1} \\ \eta_{k+1} \end{pmatrix} =\simeq \mathrm{Jac}(F)(x_0,y_0) \begin{pmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{pmatrix}.$$

In generale, se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ è una matrice a coefficienti reali o complessi con autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$, il raggio spettrale di A è definito da $\rho(A) = \max\{|\lambda_i| : i = 1...n\}$ e si ha $\rho(A) < 1$ se e solo se $\lim_{m\to\infty} A^m = 0_M$ dove A^m è il prodotto di A per se stessa m volte e 0_M è la matrice nulla. Quindi l'equilibrio (x_0, y_0) è stabile se $\rho(\mathrm{Jac}(F)(x_0, y_0)) < 1$.
Nel caso $\mathbb{R}^2$, l'equazione degli autovalori è:

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{Jac}(F)(x_0,y_0))\lambda + \det(\mathrm{Jac}(F)(x_0,y_0)) = 0,$$

dove tr è la traccia, ovvero la somma degli elementi sulla diagonale principale, e det è il determinante. Da questa formula è possibile dedurre le *condizioni di Jury o di Schur-Cohn*: se $F : D \to D$ è di classe C^1, dove D è un aperto contenente un equilibrio (x_0, y_0) del sistema (1), si ha che (x_0, y_0) è LAS se e solo se

$$|\mathrm{tr}(\mathrm{Jac}(F)(x_0,y_0))| < 1 + \det(\mathrm{Jac}(F)(x_0,y_0)) < 2.$$

Anche in questo caso si definisce l'esponente di Lyapunov: se $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono di classe C^1 e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, poniamo

$$\mathcal{L}(x_0,y_0) := \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \log \rho \left(\prod_{m=0}^{k-1} \mathrm{Jac}(F)(x_m,y_m) \right)$$

e se tale esponente non dipende da (x_0, y_0) parleremo di esponente di Lyapunov della mappa (f, g). Se $\mathcal{L}(x_0, y_0) > 0$ allora il sistema esibisce dipendenza sensibile dal dato iniziale (x_0, y_0).

2. Modelli discreti

Modello 2.1 (crescita malthusiana)**.** Siamo interessati al numero di individui di una popolazione. Fissiamo un intervallo di tempo finito $\Delta t > 0$ ed eseguiamo dei rilevamenti agli istanti $n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$. Ad ogni istante $n\Delta t$ si ha che alcuni individui muoiono e altri si riproducono. Indichiamo con:

p_n numero di individui che costituiscono la popolazione all'istante $n\Delta t$,
α percentuale di individui che si riproducono sul totale,
k numero di individui generati da ciascuno degli individui che si riproduce,
β percentuale di individui che muoiono sul totale.
L'evoluzione del sistema viene allora descritta da:

$$p_{n+1} = p_n + k\alpha p_n - \beta p_n, \tag{2}$$

Più compattamente, posto $r = 1 + k\alpha - \beta$, l'equazione diviene $p_{n+1} = rp_n$.
è possibile risolvere quest'equazione alle differenze esplicitamente per induzione, e il valore della popolazione all'istante $n\Delta t$ risulta essere $p_n = r^n p_0$ dove p_0 rappresenta il numero iniziale di individui della popolazione. Supporremo $p_0 > 0$. Si ha che se $r > 1$ la popolazione cresce esponenzialmente nel tempo e $p_n \to +\infty$, mentre se $r < 1$ la popolazione decresce e $p_n \to 0$. Se $r = 1$ la popolazione rimane costante $p_n \equiv p_0$. □

Nel 1798 l'economista inglese Thomas Robert Malthus pubblicò *An essay of the principle of the population as it affects the future improvement of society* (Saggio sul principio della popolazione e i suoi effetti sullo sviluppo futuro della società), in cui sostenne che l'incremento demografico avrebbe spinto a coltivare terre sempre meno fertili con conseguente penuria di generi di sussistenza per giungere all'arresto dello sviluppo economico, poiché la popolazione tenderebbe a crescere in progressione geometrica, quindi più velocemente della disponibilità di alimenti, che crescono invece in progressione aritmetica. Il modello malthusiano è ragionevole su tempi brevi, ma su tempi lunghi risulta poco realistico: se la popolazione cresce oltre un certo limite, l'ambiente non può garantire a tutti le stesse risorse costantemente nel tempo, pertanto la dinamica (2) cessa di essere valida.

Modello 2.2 (logistico classico)**.** All'interno del modello malthusiano introduciamo le seguenti correzioni: i tassi di natalità α e di mortalità β non sono più assunti costanti, bensì esistono costanti positive α_0, β_0, a, b tali per cui detta p la popolazione, si ha

$$\alpha = \alpha(p) = \alpha_0 - ap,$$
$$\beta = \beta(p) = \beta_0 - ap.$$

ovvero man mano che la popolazione aumenta il tasso di natalità diminuisce dal massimo α_0 e viceversa il tasso di mortalità aumenta dal minimo β_0.
Con questa correzione, si ha

$$r = r(p) = (1 + \alpha_0 k - \beta_0) - (ak - b)p$$

e la dinamica diventa:

$$p_{n+1} = r(p_n)p_n = (1 + \alpha_0 k - \beta_0)p_n - (ak - b)p_n^2 \tag{3}$$

Definiamo la *massima popolazione sostenibile* o *carrying capacity*

$$p_M = \frac{1 + \alpha_0 k - \beta_0}{ak - b},$$

e osserviamo che se $p > p_M$ la popolazione diminuisce perché $r(p) < 1$ mentre per $p < p_M$ la popolazione aumenta perché $r(p) > 1$, ciò giustifica il nome assegnato a tale quantità. Notiamo che per $p = p_M$ si ha $r(p_M) = 0$ ossia una catastrofe con estinzione immediata. Per semplificare la notazione, introduciamo la nuova variabile

$$x_n = \frac{p_n}{p_M},$$

detta *popolazione riscalata*. Posto $A = 1 + \alpha_0 k - \beta_0 \geq 0$, l'equazione diviene:

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n). \tag{4}$$

con il vincolo $x_n \in [0, 1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ciò implica $0 < A \leq 4$, infatti il massimo valore che può assumere x_n è in corrispondenza del vertice della parabola $Ax(1 - x)$ ovvero $A/4$ e tale valore deve essere minore o uguale a 1. Poniamo $f(x) = Ax(1 - x)$.

Studiamo i punti di equilibrio di (4). Risolvendo l'equazione dei punti uniti $x = f(x)$ si ottengono le soluzioni $x = 0$ e $x = 1 - 1/A$, quest'ultima soluzione è accettabile se e solo se è positiva, quindi se $A \geq 1$. Quindi per $0 \leq A \leq 1$ l'unico equilibrio è $x = 0$, mentre per $1 < A \leq 4$ si hanno i due equilibri $x = 0$ e $x = 1 - 1/A$. Per quanto riguarda la stabilità, si ha $f'(x) = A - 2Ax$. Si ha quindi $f'(0) = A$ e il punto $x = 0$ è stabile se e solo se $0 < A < 1$, e si ha che la popolazione è condannata ad estinguersi. Se invece $1 < A \leq 4$ si ha che $x = 0$ è instabile e la popolazione non è destinata all'estinzione. In questo caso studiamo la stabilità dell'altro punto di equilibrio: $f'(1 - 1/A) = 2 - A$ pertanto la condizione di stabilità è $|2 - A| < 1$ ovvero $1 < A < 3$. Per $1 < A < 3$ l'equilibrio $x = 1 - 1/A$ è stabile mentre è instabile per $3 < A \leq 4$. Per $3 < A \leq 4$ studiamo ora l'iterata seconda di f:

$$f^2(x) = -A^3x^4 + 2A^3x^3 - A^3x^2 - A^2x^2 + A^2x.$$

Affinché $x_{n+1} = f^2(x_n)$ abbia significato, è necessario che $0 \leq f^2(x) \leq 1$. Si ha $f^2(0) = f^2(1) = 0$ e i punti di massimo dell'iterata seconda sono in

$$x = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 2A}}{2A}$$

dove l'iterata seconda assume il suo valore massimo pari ad $A/4$, quindi essendo $3 < A \leq 4$, si ha $0 \leq f^2(x) \leq 1$. L'iterata seconda ha i quattro punti di equilibrio $x = 0$, $x = 1 - 1/A$ e

$$x_+ = \frac{A + 1 + \sqrt{A^2 - 2A - 3}}{2A}, \qquad x_- = \frac{A + 1 - \sqrt{A^2 - 2A - 3}}{2A},$$

e si ha che $x_\pm$ esistono solo per $A \geq 3$, inoltre $f(x_)) = x_+$. Studiamo la stabilità del 2-ciclo $\{x_-, x_+\}$. Per quanto riguarda la derivata dell'iterata seconda:

$$\frac{d}{dx}f^2(x) = g(x) = -4A^3x^2 + 6A^3x^2 - 2A^3x - 2A^2x + A^2.$$

Si ha $g(0) = A^2$, che risulta quindi instabile, come già visto, se $A > 1$. Poiché $g(1 - 1/A) = (A - 2)^2$, tale equilibrio è stabile se $|A - 2| < 1$, quindi $1 < A < 3$, visto che per $0 < A < 1$ questo equilibrio non esiste. Per quanto riguarda i nuovi equilibri, si ha $g(x_\pm) = -(A^2 - 2A - 4)$ e sono stabili, ovvero $|g(x_\pm)| < 1$ per $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$. Per quanto riguarda il comportamento per $1 + \sqrt{6} < A \leq 4$ è necessario passare alle iterate successive. Per A compreso tra approssimativamente 3.45 e 3.54 la soluzione oscilla tra 4 valori, mentre per A leggermente superiore a 3.54 la soluzione oscilla tra 8 valori stabili, quindi 16, 32 (*raddoppiamento del periodo*). I raddoppi del periodo sono sempre più frequenti fino a raggiungere una situazione caotica attorno ad $A \approx 3.57$. Per valori superiori, ad eccezione di alcune regioni di stabilità, il comportamento è caotico e la popolazione oscilla in tutto l'intervallo $[0, 1]$ senza alcuna

periodicità.
Si noti che se $0 \leq x_n < 1/p_M$ si ha $p_n < 1$ ovvero la popolazione si estingue.

3. Intermezzo leggero

Già nei tempi antichi si era osservato come le popolazioni potessero fluttuare in modo ciclico nel corso del tempo, e questo veniva spesso interpretato come segno di intervento divino.

Allora il faraone disse a Giuseppe: "Nel mio sogno io stavo sulla riva del Fiume; quand'ecco salire dal Fiume ***sette vacche grasse e di bell'aspetto e che si misero a pascolare nella giuncaia. Dopo quelle, ecco salire altre sette vacche, magre, di bruttissimo aspetto e scarne: tali, che non ne vidi mai di così brutte in tutto il paese d'Egitto. Le vacche magre e brutte divorarono le prime sette vacche grasse;*** *e queste entrarono loro in corpo e non si riconobbe che vi erano entrate; erano di brutto aspetto come prima. E mi svegliai. Poi vidi ancora nel mio sogno sette spighe venire su da un unico stelo, piene e belle; ed ecco germogliare altre sette spighe, vuote, sottili e arse dal vento orientale, dopo quelle altre. Le spighe sottili inghiottirono le sette spighe belle. Io ho raccontato questo ai maghi, ma non c'è stato nessuno che abbia saputo spiegarmelo". Allora Giuseppe disse al faraone: "Ciò che il faraone ha sognato è una stessa cosa. Dio ha indicato al faraone quello che sta per fare. Le sette vacche belle sono sette anni e le sette spighe belle sono sette anni; è uno stesso sogno. Le sette vacche magre e brutte che salivano dopo quelle altre, sono sette anni; come pure le sette spighe vuote e arse dal vento orientale saranno sette anni di carestia. Questo è quello che ho detto al faraone: Dio ha mostrato al faraone quello che sta per fare. Ecco,* ***stanno per venire sette anni di grande abbondanza in tutto il paese d'Egitto. Dopo verranno sette anni di carestia; tutta quell'abbondanza sarà dimenticata nel paese d'Egitto e la carestia consumerà il paese.*** *Uno non conoscerà più di quell'abbondanza nel paese, a causa della carestia che seguirà, perché questa sarà molto dura. Il fatto che il sogno si sia ripetuto due volte al faraone vuol dire che la cosa è decretata da Dio e che Dio l'eseguirà presto".*

Genesi 41, 17-32.

Alla luce delle considerazioni della sezione precedente, il testo biblico indica una situazione in cui la quantità di risorse si assesta su un 2-ciclo stabile con un periodo pari a $2\Delta t = 14$ anni. La domanda che ci poniamo a questo punto è se sia possibile in qualche modo *intervenire* in questa situazione per mitigare gli effetti della carestia, che corrisponde al valore più basso delle risorse del 2-ciclo. Questo significa introdurre nella dinamica $x_{n+1} = f(x_n)$ o nel caso continuo $\dot{x}(t) = f(x(t))$, un termine aggiuntivo, che indicheremo con u_n o $u(t)$ e chiameremo *controllo* del sistema. A questo punto la nuova dinamica è data da $x_{n+1} = g(x_n, u_n)$ o $\dot{x}(t) = g(x(t), u(t))$ dove la funzione g è in qualche modo legata alla f di partenza (ad esempio $g(x,u) = f(x)+u$). I valori assunti da u_n o $u(t)$ saranno descritti da un sottinsieme U, per lo più compatto e convesso, di $\mathbb{R}^n$. Naturalmente al variare delle funzioni $u : [0,+\infty) \to U$ o delle successioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$, l'evoluzione del sistema cambierà. Il nostro obiettivo è quello di minimizzare gli effetti della carestia, pertanto costruita una funzione che modellizzi gli effetti della carestia (la più semplice è quella di misurare di quanto le risorse si discostino dal valore ottimale), il problema sarà quello di scegliere il controllo u in modo da minimizzare tale funzione sul lungo periodo.

Ed è esattamente quello che Giuseppe suggerisce al Faraone nel seguito del racconto.

Or dunque il faraone si provveda di un uomo intelligente e saggio, e lo stabilisca sul paese d'Egitto. Il faraone faccia così: costituisca dei commissari sul paese per prelevare il quinto delle raccolte del paese d'Egitto durante i sette anni d'abbondanza. Essi raccolgano tutti i viveri di queste sette annate buone che stanno per venire e ammassino il grano a disposizione del faraone per l'approvvigionamento delle città, e lo conservino. Questi viveri saranno una riserva per il paese, in vista dei sette anni di carestia che verranno nella terra d'Egitto; così il paese non perirà per la carestia.

Genesi 41, 33-36.

4. Esercizi prima settimana

Esercizio 4.1. Sia $\alpha > 0$ e si consideri $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_\alpha(x) = x + \alpha$ se $x < \alpha$ e $f_\alpha(x) = \alpha$ se $x \geq \alpha$.

(1) Si disegni il grafico di f_α e se ne determinino gli equilibri;
(2) si provi che esiste un unico equilibrio $\bar{x}$ che risulta essere localmente attrattivo ma non stabile.

Esercizio 4.2. Calcolare il limite per $k \to \infty$, se esiste, delle successioni $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definite da:

(1) $x_0 = a \in]0, \pi[$, $x_{k+1} = x_k + \sin x_k$ (si provi che tale successione appartiene a $]0, \pi[$ ed è monotona crescente).
(2) $x_0 = a \in \mathbb{R}$, $x_{k+1} = \max\{1/4, x_k^2\}$.
(3) $x_0 = 1$, $x_{k+1} = \displaystyle\int_0^{x_k} e^{-t^2}\, dt$.
(4) $x_0 = \lambda \geq 0$, $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{1 + x_k}$.
(5) $x_0 = \lambda \in \mathbb{R}$, $x_{k+1} = 4\displaystyle\int_0^{x_k} \frac{e^{2\tau}}{(e^{2\tau}+1)^2}\, d\tau$.
(6) $x_0 = \lambda \geq 0$, $x_{k+1} = \log(1 + x_k)$.

Esercizio 4.3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Per ciascuna delle seguenti equazioni si determinino gli equilibri al variare di α e se ne studi la natura, si tracci il diagramma di biforcazione degli equilibri e si studino gli eventuali 2-cicli e relativa stabilità.

(1) $x_{k+1} = \alpha x_k^3$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
(2) $x_{k+1} = \dfrac{\alpha x_k}{1 + x_k^2}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
(3) $x_{k+1} = \alpha - x_k^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

5. Richiami sulle Equazioni Differenziali Ordinarie

In questa sezione richiamiamo senza dimostrazione alcuni risultati relativi al problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{5}$$

Enunciamo i risultati in un $\mathbb{K}$-spazio di Banach Y, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$. Il lettore può sempre pensare a $Y = \mathbb{R}^n$.

Definizione 5.1. Sia I intervallo non degenere di $\mathbb{R}$, I intorno di t_0. Diremo che $\varphi : I \to Y$ è *soluzione* di (5) se φ è di classe C^1 nell'interno di I e $\varphi(t_0) = x_0$. In tal caso diremo che I è l'*intervallo di definizione* della soluzione φ. Sia I intervallo di definizione della soluzione φ. Diremo che I è massimale se non esistono soluzioni ψ di (5) con intervallo di definizione $J \subset \mathbb{R}$ tali che $J \supset \bar{I}$ (dove $\bar{I}$ indica la chiusura di I) e $\psi = \varphi$ su I.
Diremo che il problema (5) è *autonomo* se f non dipende da t, ossia $f = f(x)$.

Teorema 5.1 (di esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz)**.**

(1) Esistenza e Unicità Globale negli intervalli compatti
Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, I intervallo compatto di $\mathbb{R}$, $f : I \times Y \to Y$ continua e lipschitziana rispetto alla seconda variabile $y \in Y$, uniformemente nella prima $t \in I$ (ciò significa che esiste $L > 0$ tale che sia:

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_Y \leq L\|y_1 - y_2\|_Y$$

per ogni $t \in I$ e per ogni $y_1, y_2 \in Y$). Dati $t_0 \in I$, $y_0 \in Y$ esiste allora un'unica soluzione $\varphi \in C^1(I, Y)$ tale che sia $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ identicamente in I e $\varphi(t_0) = y_0$.

(2) Esistenza e Unicità Globale negli intervalli non compatti
Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, I intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \times Y \to Y$ continua; supponiamo che in ogni compatto $K \subseteq I$, f sia lipschitziana rispetto alla seconda variabile $y \in Y$, uniformemente nella prima $t \in I$ (ciò significa che esiste $L_K > 0$ tale che sia:

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_Y \leq L_K\|y_1 - y_2\|_Y$$

per ogni $t \in K$, $K \subseteq I$ compatto e per ogni $y_1, y_2 \in Y$). Dati $t_0 \in I$, $y_0 \in Y$ esiste allora un'unica soluzione $\varphi \in C^1(I, Y)$ tale che sia $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ identicamente in I e $\varphi(t_0) = y_0$.

(3) Criterio di Lipschitzianità sui compatti
Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, I intervallo di $\mathbb{R}$, K compatto di I. Se $f : I \times Y \to Y$ è differenziabile rispetto alla seconda variabile, essa è lipschitziana su $K \times Y$ (nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima) se e solo se:

$$\|\partial_Y f(t, y)\|_{L(Y)} \leq L_K < +\infty$$

per ogni $(t, y) \in K \times Y$. Se $Y \simeq \mathbb{K}^n$ ha dimensione finita, l'ipotesi è soddisfatta se e solo se $\partial_{y_1} f(t, y), ..., \partial_{y_n} f(t, y)$ sono tutte limitate in $K \times Y$.

(4) Esistenza e Unicità Locale
Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, Ω aperto di $\mathbb{R} \times Y$, $f : \Omega \to Y$ continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima (ciò significa che per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$ esistono $L, \delta_0, r_0 > 0$ tali che $B(t_0, \delta_0] \times B(y_0, r_0] \subseteq \Omega$ ed inoltre

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_Y \leq L\|y_1 - y_2\|_Y$$

per ogni $(t, y) \in B(t_0, \delta_0] \times B(y_0, r_0]$). Allora per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$ esiste $\delta > 0$ e $\varphi \in C^1(B(t_0, \delta], Y)$ soluzione del problema di Cauchy $y' = f(t, y)$ e $y(t_0) = y_0$. Inoltre se $\psi \in C^1(B(t_0, \delta], Y)$ è soluzione dello stesso problema definita in un intorno di t_0, si ha $\varphi(t) = \psi(t)$ in un intorno di t_0.

(5) Criterio di Lipschitzianità locale
Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, Ω aperto di $\mathbb{R} \times Y$, $f : \Omega \to Y$. Condizione sufficiente perchè f sia localmente lipschitziana nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima è che $\partial_Y f(t,y)$ esista continua in Ω. Nel caso in cui $Y \simeq \mathbb{K}^n$ ha dimensione finita, se $\partial_{y_k} f(t,y)$ per $k = 1, ..., n$ sono continue in Ω, allora si ha lipschitzianità locale.

(6) Unicità delle Soluzioni
Supponiamo che l'equazione $y' = f(t,y)$ soddisfi le ipotesi per l'unicità locale per (5)*. Se I è intervallo di $\mathbb{R}$ e $\phi, \psi : I \to Y$ sono soluzioni di $y' = f(t,y)$ che coincidono in almeno un punto, esse coincidono in tutto I.*

Definizione 5.2 (Dipendenza dai valori iniziali)**.** Data un'equazione $y' = f(t,y)$ tale per cui si abbia unicità locale della soluzione del relativo problema di Cauchy con condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, il suo *flusso* $\Phi(t, t_0, y_0)$ è definito come il valore al tempo t dell'unica soluzione che soddisfi $y(t_0) = y_0$.

Proposizione 5.1 (Dipendenza dai valori iniziali)**.** *Se sono soddifatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per $\dot{y} = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ in un intorno aperto di (t_0, y_0), il flusso Φ dell'equazione differenziale è definito su un aperto $D \supset I \times I \times \Omega$, dove I è intorno di t_0, Ω è intorno di y_0 e $\Phi : D \to Y$ è (continua e) localmente lipschitziana.*

Definizione 5.3. Se f non dipende da t, ovvero il sistema è autonomo, e $t \mapsto y(t)$ è soluzione, anche $t \mapsto y(t+c)$ è soluzione. Pertanto in questo caso si può definire generalmente il flusso $\Phi(t, y_0) = \phi_t(y_0)$ è definito come il valore al tempo t della soluzione che soddisfa $y(0) = y_0$. Sussistono le seguenti proprietà (dette di semigruppo): $\phi_0(y_0) = y_0$ e $\phi_s \circ \phi_t(y_0) = \phi_{s+t}(y_0)$.

Definizione 5.4. Sia $Y = \mathbb{R}^n$. Dato il sistema autonomo $y = f(y)$, ogni soluzione descrive parametricamente un tratto di curva in Y. Se $n = 1, 2, 3$, l'ambiente dove vengono rappresentate le soluzioni si chiama *spazio delle fasi*. Un complesso di più soluzioni al variare delle condizioni iniziali è detto *ritratto o diagramma di fase* del sistema.

Teorema 5.2 (Estensione delle soluzioni)**.** *Sia Y un $\mathbb{K}$-spazio di Banach, Ω aperto di $\mathbb{R} \times \Omega$, I intervallo di $\mathbb{R}$. Sia $f : \Omega \to Y$ con esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy* (5) *e sia $\varphi : I \to Y$ una soluzione massimale.*

(1) *Sia $\beta = \sup I$ (rispettivamente $\alpha = \inf I$) e supponiamo che esista $c \in I$ tale che $\varphi'(t)$ sia limitata in $[c, \beta[$ (rispettivamente in $]\alpha, c]$. Allora o si ha $\beta = +\infty$ (rispettivamente $\alpha = -\infty$) oppure $\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = y_\beta$ (rispettivamente $\lim_{t\to\alpha^+} \varphi(t) = y_\alpha$) esiste in Y e in tal caso $(\beta, y_\beta) \notin \Omega$ (rispettivamente $(\beta, y_\beta) \notin \Omega$).*
(2) *Se K è un compatto di Ω allora esistono un intorno destro U di $a = \inf I$ ed un intorno sinistro V di $b = \sup I$ tali che se $t \in U \cup V$ allora $(t, \varphi(t)) \notin K$ (le soluzioni massimali escono definitivamente dai compatti di Ω).*
(3) *Se K è compatto di Ω, esiste $\delta = \delta(K) > 0$ dipendente solo da K e da f, tale che ogni soluzione del problema di Cauchy* (5) *con $(t_0, y_0) \in \Omega$ è definita su $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.*
(4) *(Fuga dai compatti: caso autonomo) Sia A aperto di Y, $g : A \to Y$ localmente lipschitziana. Sia $\varphi : I \to A$ soluzione massimale di $y' = g(y)$ e sia C un compatto contenuto in A; sia $b = \sup I$. Allora si verifica una delle seguenti alternative:*
   (a) *esiste un intorno sinistro V di b tale che $\varphi(t) \notin C$ per $t \in V$, quindi φ esce definitivamente da C;*

(b) *si ha* $b = +\infty$

Analogo enunciato vale per $a = \inf I$

Definizione 5.5. Un *integrale primo* del sistema autonomo $y' = g(y)$, dove $g : A \to Y$ è una funzione continua definita su un aperto A dello spazio di Banach Y, è una funzione a valori reali $E \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che per ogni soluzione $\varphi : I \to A$ del sistema si abbia $E \circ \varphi$ costante.

Teorema 5.3 (Teorema di maggiorazione a priori)**.** *Sia* I *intervallo di* $\mathbb{R}$, $\mu : I \times [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *continua; Sia* Y *spazio di Banach,* $\varphi : I \to Y$ *derivabile e* $u : I \to [0, +\infty[$ *derivabile. Supponiamo che sia* $\|\varphi(t_0)\|_Y \leq u(t_0)$. *Allora:*

(1) *se* $\|\varphi'(t)\|_Y < \mu(t, \|\varphi(t)\|_Y)$ *e* $\mu(t, u(t)) \leq u'(t)$ *per ogni* $t \geq t_0$, $t \in I$, *per tali* t *si ha anche* $\|\varphi(t)\|_Y \leq u(t)$;

(2) *se* $\|\varphi'(t)\|_Y < \mu(t, \|\varphi(t)\|_Y)$ *e* $\mu(t, u(t)) \leq -u'(t)$ *per ogni* $t \leq t_0$, $t \in I$, *per tali* t *si ha anche* $\|\varphi(t)\|_Y \leq u(t)$.

In ambo i casi se $t \neq t_0$ *si ha in realtà* $\|\varphi(t)\|_Y < u(t)$. *Il teorema vale anche rispettivamente se:* $\|\varphi'(t)\|_Y \leq \mu(t, \|\varphi(t)\|_Y)$ *e* $\mu(t, u(t)) < u'(t)$ *nel primo caso oppure* $\|\varphi'(t)\|_Y \leq \mu(t, \|\varphi(t)\|_Y)$ *e* $\mu(t, u(t)) < -u'(t)$ *nel secondo caso.*

Teorema 5.4 (del confronto)**.** *Sia* Ω *aperto di* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *continua. Sia* I *intervallo di* $\mathbb{R}$ *e siano* $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto u(t)$ *funzioni derivabili in* I*; supponiamo che in* $t_0 \in I$ *si abbia* $y(t_0) \leq u(t_0)$. *Se per ogni* $t > t_0$, $t \in I$, *si ha* $y'(t) \leq f(t, y(t))$ *e* $f(t, u(t)) \leq u'(t)$ *una almeno di tali disuguaglianze essendo vera in senso stretto per ogni* $t \geq t_0$, *si ha* $y(t) \leq u(t)$ *per ogni* $t \in I$, $t \geq t_0$ *e l'uguaglianza vale solo in* t_0.

Corollario 5.1. *Sia* I *intervallo di* $\mathbb{R}$, $f, g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue e localmente lipschitziane rispetto alla seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima. Siano* $x : I \to \mathbb{R}$, $y : I \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali per cui* $\dot{x} \leq f(t, x(t))$, $\dot{y} \geq g(t, y(t))$, *per ogni* $t \in I$. *Supponiamo inoltre che sia* $f(t, x(t)) \leq g(t, y(t))$ *per ogni* $t \in I$. *Allora:*

(1) *se* $x(t_0) \leq y(t_0)$ *si ha* $x(t) \leq y(t)$ *per ogni* $t \in I$ *con* $t \geq t_0$;

(2) *se* $x(t_0) \geq y(t_0)$ *si ha* $x(t) \geq y(t)$ *per ogni* $t \in I$ *con* $t \leq t_0$.

Proposizione 5.2. *Siano* $a > 0$ *e* $x : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile tale che esistano i limiti* $\lim_{t \to +\infty} x(t) \in \mathbb{R}$ *e* $\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = \gamma \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Allora* $\gamma = 0$.

Lemma 5.1 (di Gronwall)**.** *Sia* I *intervallo di* $\mathbb{R}$, $t_o \in I$, *sia* Y *spazio di Banach. Allora:*

(1) *se* $\varphi \in C^1(I, Y)$ *è tale che* $\|\varphi'(t)\| \leq a_0 + a_1 \|\varphi(t)\|$ *per ogni* $t \in I$ *con* $a_1 > 0$ *e* $a_0 \geq 0$, *allora*
$$\|\varphi(t)\| \leq \left(\frac{a_0}{a_1} + \|\varphi(t_0)\| \right) e^{a_1 |t - t_0|} - \frac{a_0}{a_1}.$$

(2) *sia* $\psi \in C^0(I, \mathbb{R})$, $L, M \geq 0$ *tali che per ogni* $t \in I$ *valga:*
$$|\psi(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau \right| + M,$$
allora per ogni $t \in I$ *vale anche* $|\psi(t)| \leq M e^{L|t - t_0|}$.

Teorema 5.5 (di esistenza di Peano)**.** *Sia* $Y = \mathbb{R}^n$, Ω *aperto di* $\mathbb{R} \times Y$, $f : \Omega \to Y$ *continua. Allora esiste un intorno* I *di* t_0 *in* $\mathbb{R}$ *ed una* $\varphi \in C^1(I, Y)$ *che in* I *è soluzione del problema di Cauchy* $y' = f(t, x)$, $y(t_0) = y_0$. *Tale soluzione non è necessariamente unica.*

6. Vari tipi di equazioni ordinarie

In tutta la sezione, $\mathbb{K}$ indica $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definizione 6.1. Richiamiamo le note *Formule di Eulero*:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t), \qquad \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \qquad \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Definizione 6.2. Siano $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ l'esponenziale di matrice è definito da $e^{tA} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(tA)^j}{j!}$. Se A è una matrice diagonale e gli elementi sulla diagonale principale sono $\lambda_1, ..., \lambda_n$, si ha che e^{tA} è una matrice diagonale e gli elementi sulla diagonale principale sono $e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}$. Se P è matrice invertibile tale che $PAP^{-1} = D$ sia diagonale, allora $Pe^{tA}P^{-1} = e^{tD}$.

Definizione 6.3 (integrazione delle funzioni razionali fratte)**.** Indichiamo con $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$. Dati $N, D \in \mathbb{R}[x]$ polinomi a coefficienti reali, una funzione razionale fratta è il quoziente $f(x) = N(x)/D(x)$. Supponiamo che N e D non abbiano fattori comuni tra loro (altrimenti li semplifichiamo). Nella ricerca di primitive di f possono presentarsi due casi:

(1) o il grado di D è maggiore di quello di N,
(2) altrimenti se il grado di N è maggiore o uguale a quello di D è possibile eseguire la divisione tra polinomi determinando due polinomi $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ tali che $f(x) = Q(x) + R(x)/D(x)$. Una primitiva di f si ha sommando una primitiva del polinomio Q e della razionale fratta $R(x)/D(x)$ dove il grado di R è minore di quello di D.

Il problema è quindi ricondotto alla ricerca di primitive di $f(x) = N(x)/D(x)$ con N, D polinomi in cui il grado di D è strettamente maggiore di quello di N e privi di fattori in comune. Supponiamo che $x_1, ..., x_d \in \mathbb{R}$ siano le radici reali di D, e supponiamo che $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, ..., \alpha_h + i\beta_h, \alpha_h - i\beta_h \in \mathbb{C} \setminus R$ siano le radici complesse non reali di D. Ricordiamo che, essendo D a coefficienti reali, se c'è una radice complessa non reale, vi è anche la complessa coniugata ed entrambe hanno la stessa molteplicità. Allora esistono costanti $A_{kj_k}, B_{\ell s_\ell}, C_{\ell s_\ell} \in \mathbb{R}$ tali che f si scriva come una somma finita formata dai seguenti termini:

(1) per ogni radice reale x_k di molteplicità ν_k si ha il contributo:
$$\frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + ... + \frac{A_{k\nu_k}}{(x - x_k)^{\nu_k}}$$
(2) per ogni coppia di radici complesse coniugate non reali $\alpha_\ell + i\beta_\ell$, $\alpha_\ell - i\beta_\ell$, della stessa molteplicità μ_ℓ si ha il contributo:
$$\frac{B_{\ell 1}x + C_{\ell 1}}{(x - \alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2} + \frac{B_{\ell 2}x + C_{\ell 2}}{((x - \alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2)^2} + ... + \frac{B_{\ell \mu_\ell}x + C_{\ell \mu_\ell}}{((x - \alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2)^{\mu_\ell}}.$$

Pertanto dall'uguaglianza:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = &\sum_k \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + ... + \frac{A_{k\nu_k}}{(x - x_k)^{\nu_k}} + \\ &+ \sum_\ell \frac{B_{\ell 1}x + C_{\ell 1}}{(x - \alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2} + \frac{B_{\ell 2}x + C_{\ell 2}}{((x - \alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2)^2} + ... + \frac{B_{\ell \mu_\ell}x + C_{\ell \mu_\ell}}{((x - \alpha_\ell)^2 + \beta_\ell^2)^{\mu_\ell}}. \end{aligned}$$

moltiplicando per $D(x)$ e raccogliendo i termini dell stesso grado è possibile determinare le costanti $A_{kj_k}, B_{\ell s_\ell}, C_{\ell s_\ell} \in \mathbb{R}$ in modo univoco. A questo punto una primitiva di f si ottiene sommando le primitive di tutti i contributi, che risultano di calcolo immediato ricordando che $A_{kj_k}, B_{\ell s_\ell}, C_{\ell s_\ell} \in \mathbb{R}$ sono costanti e che si ha:

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \begin{cases} -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C & \text{se } n \in \mathbb{N},\ n > 1 \\ \log|x+a| + C & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + C & \text{se } n \in \mathbb{N},\ n > 1 \\ \frac{1}{2}\log|x^2+a| + C & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il calcolo di

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n},\ n \in \mathbb{N}$$

si ha $I_1 = \arctan x + C$ e per $n > 1$

$$I_n = -\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1},$$

quindi applicando questa formula ricorrente per il numero necessario di volte si perviene alla primitiva desiderata.

Definizione 6.4 (Equazioni lineari del primo ordine)**.**
Caso omogeneo: tali equazioni si presentano nella forma:

$$y'(t) = a(t)y$$

con $a \in C^0(I, \mathbb{K})$, I intervallo di $\mathbb{R}$. La loro soluzione è data da:

$$y(t) = c_0 e^{A(t)}$$

al variare di $c_0 \in \mathbb{K}$, dove $A(t) \in \int a(t)$ è una primitiva di $a(t)$. Si noti che è ammessa una soluzione costante identicamente nulla.
Caso non omogeneo: Tali equazioni si presentano nella forma:

$$y'(t) = a(t)y + b(t)$$

con $a, b \in C^0(I, \mathbb{K})$, I intervallo di $\mathbb{R}$. Se $A(t) \in \int a(t)$ è una primitiva di $a(t)$ e $B(t) \in \int e^{-A(t)} b(t)$ è una primitiva di $e^{-A(t)} b(t)$, allora le soluzioni sono date al variare di $c \in \mathbb{K}$ dall'equazione:

$$y(t) = ce^{A(t)} + e^{A(t)} B(t)$$

Nel caso sia assegnata una condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, la soluzione (unica) è data da:

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(t)\,dt\right) + \exp\left(\int_{t_0}^t a(t)\,dt\right) \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^t a(t)\,dt\right) b(t)\,dt,$$

dove $\exp(x) = e^x$.

Definizione 6.5 (Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti)**.** Data un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0$$

e dette $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ le radici dell'equazione caratteristica $\zeta^2 + p\zeta + q = 0$, allora le soluzioni dell'equazione omogenea si scrivono in modo unico come:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t} \text{ se } \alpha \neq \beta$$

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} \text{ se } \alpha = \beta$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.
Nel caso particolare di equazioni del tipo $y' + \omega^2 y = 0$, con $\omega \in \mathbb{R}$, grazie alle formule di Eulero le soluzioni si scrivono anche:

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

al variare di $c_1, c_2, A, \phi \in \mathbb{K}$.
Date le condizioni iniziali $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_0'$, $t_0 \in I$, e dette $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ le radici dell'equazione caratteristica $\zeta^2 + p\zeta + q = 0$, esiste una ed una sola soluzione in $C^2(I, \mathbb{K})$ dell'equazione $y''(t) + py'(t) + qy(t) = b(t)$ soddisfacente a tali condizioni:

(1) se $\alpha \neq \beta$ si ha:

$$y(t) = \frac{y_0' - \beta y_0}{\alpha - \beta} e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{y_0' - \alpha y_0}{\beta - \alpha} e^{\beta(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \frac{e^{\alpha(t-s)} - e^{\beta(t-s)}}{\alpha - \beta} b(s)\, ds$$

(2) se $\alpha = \beta$ si ha:

$$y(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)} + (y_0' - \alpha y_0)(t - t_0) e^{\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} (t - s) e^{\alpha(t-s)} b(s)\, ds$$

Se $b(t) = 0$ (caso omogeneo) e si ha $y_0 = y_0' = 0$ allora $y = 0$ identicamente.

Definizione 6.6 (Equazioni a variabili separabili)**.** Sono le equazioni del primo ordine del tipo $\dot{y} = p(t)q(y)$ dove $p : I \to \mathbb{R}$, $q : J \to \mathbb{R}$ sono almeno continue e I, J sono intervalli di $\mathbb{R}$. Se $q(y_0) = 0$ la costante $y(t) = y_0$ è soluzione, negli altri casi si può dividere per $q(y)$ (almeno finchè $q(y(t)) \neq 0$). Con il cambiamento di variabili $\eta = y(t)$ si ottiene integrando con la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{q(\eta)} = \int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau.$$

Il problema così è riportato alle quadrature, cioè alla ricerca di primitive e inversioni di funzioni.

Definizione 6.7 (Equazioni omogenee)**.** Vengono così chiamate le equazioni differenziali $\dot{y} = f(t, y)$ in cui $f(at, ay) = f(t, y)$ per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con f continua nel suo dominio. Posto $y = tu(t)$ si ottiene $tu' = f(1, u) - u$, del tipo a variabili separabili.

Definizione 6.8. Le seguenti equazioni sono immediatamente riconducibili ad omogenee o ad equazioni a variabili separabili:

(1) L'equazione differenziale $\dot{y} = g(at + by + c)$ con g continua e a, b costanti non nulle si riconduce ad un'equazione a variabili separabili ponendo $v = at + by$, si ha allora $\dot{v} = a + bg(v + c)$.

(2) L'equazione

$$\dot{y} = g\left(\frac{at + by + c}{pt + qy + r}\right) \qquad a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R}$$

si riconduce ad un'equazione a variabili separabili se le rette di equazione $at + by + c = 0$ e $pt + qy + r = 0$ sono parallele. In questo caso si ha $p = \lambda a$, $q = \lambda b$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. Posto $at + by = v$ come prima si ottiene:

$$\dot{v} = a + bg\left(\frac{v + c}{\lambda v + r}\right).$$

Se invece le rette $at + by + c = 0$ e $pt + qy + r = 0$ si incontrano nel punto (t_0, y_0), si pone $y = y_0 + \eta$, $t = t_0 + \xi$ e l'equazione diventa l'omogenea:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = g\left(\frac{a\xi + b\eta}{p\xi + q\eta}\right).$$

Definizione 6.9 (Equazioni di Bernoulli)**.** Sia $\dot{y} = a(t)y + b(t)y^\alpha$, se $\alpha = 1$ siamo nel caso lineare omogeneo, se $\alpha = 0$ siamo nel caso lineare non omogeneo. Se $\alpha \neq 0, 1$ si ponga $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ ottendo l'equazione lineare affine:

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{du}{dt} = a(t)u + b(t).$$

Definizione 6.10. Chiameremo *equazione differenziale totale* ogni scrittura della forma:

$$\omega(x, y) = p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = 0$$

dove $p, q \in C^0(A, \mathbb{R})$, A aperto di $\mathbb{R}^2$. Sia $\lambda : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua mai nulla.
Una *soluzione* di tale equazione o *integrale primo* di ω è una funzione $F : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

$$p(x, y)\, \partial_x F(x, y) + q(x, y)\, \partial_y F(x, y) = 0.$$

Le *curve di livello* di F, ovvero gli insiemi:

$$F_c := \{(x, y) \in A : \, F(x, y) = c\}$$

rappresentano in forma implicita le soluzioni delle equazioni ordinarie

$$q(x, y(x))\, \frac{dy}{dx} + p(x, y(x)) = 0, \qquad\qquad p(x(y), y)\, \frac{dx}{dy} + q(x(y), y) = 0.$$

(1) Se ω è di classe C^1 su A, un *fattore integrante* per ω è ogni una funzione $\lambda \in C^1(A, \mathbb{R})$ mai nulla tale che la forma $\lambda\omega$ sia chiusa in A.
(2) Dati ω mai nulla e di classe C^1, e G di classe C^2 su A integrale primo per $\omega = 0$, allora esiste $\lambda \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che sia:

$$\partial_x G(x, y) = \lambda(x, y)p(x, y)$$

$$\partial_y G(x, y) = \lambda(x, y)q(x, y)$$

Viceversa se esiste $\lambda \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che $\lambda\omega$ sia esatta, ogni primitiva di $\lambda\omega$ è integrale primo per l'equazione totale $\omega = 0$.
(3) Si dice *omogenea* l'equazione totale: $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ con p, q funzioni omogenee dello stesso grado α, ovvero esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $k > 0$:

$$p(kx, ky) = k^\alpha p(x, y), \qquad\qquad q(kx, ky) = k^\alpha p(x, y),$$

definite su un cono [1] C di $\mathbb{R}^2$.
Posto $x = \xi, y = \xi\eta$ si ottiene la forma esatta:

$$\frac{1}{\xi}\, d\xi + \frac{q(1, \eta)}{p(1, \eta) + \eta q(1, \eta)}\, d\eta = 0$$

[1] Ricordiamo che C è un cono di $\mathbb{R}^2$ se soddisfa la seguente proprietà: dati $(x, y) \in C$ allora $(kx, ky) \in C$ per ogni $k > 0$.

(4) Sia data l'equazione differenziale totale $\omega(x,y) = p(x,y)dx+q(x,y)dy = 0$. Supponiamo che valga
$$\partial_y p - \partial_x q = f(x)q(x,y) - g(y)p(x,y)$$
con f, q, p di classe C^1. Allora:
$$h(x,y) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{y_0}^{y} g(t)dt\right)$$
è fattore integrante per ω.

Definizione 6.11 (Miscellanea)**.** Presentiamo alcuni tipi di equazioni differenziali e tecniche risolutive:

(1) La generica equazione scalare autonoma del secondo ordine $y''(t) = f(y(t), y'(t))$ con f almeno continua, si riconduce ad un'equazione ordinaria del primo ordine ponendo $p(y) = y'(t(y))$, dove $y \mapsto t(y)$ è la funzione inversa di $t \mapsto y(t)$ da cui
$$p(y)\frac{dp}{dy} = f(y, p(y))$$
dove ora y è pensata variabile indipendente.
(2) L'equazione del secondo ordine $y''(t) = f(t, y'(t))$ con f almeno continua, si riconduce ad un'equazione ordinaria del primo ordine ponendo $z(t) = y'(t)$, da cui $z'(t) = f(t, z(t))$ e $y(t) = \int z(t) + C$.
(3) L'equazione del secondo ordine $F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0$ con
$$F(t, \alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^k F(t, x, y, z)$$
per ogni $\alpha > 0$, si riconduce ad un'equazione del primo ordine ponendo $y'(t) = y(t)z(t)$.
(4) L'equazione $x = f(y'(x))$ con $f \in C^1$ si risolve ponendo $y' = p$, quindi $dy = p\,dx$ e $x = f(p)$. Differenziando $dx = f'(p)\,dp$ perciò $dy = pf'(p)\,dp$, quindi si ottiene la soluzione in forma parametrica
$$x = f(p), \qquad\qquad y = \int pf'(p)\,dp + C.$$
(5) L'equazione $y = f(y'(x))$ con $f \in C^1$ si risolve ponendo $y' = p$, $p \neq 0$, quindi $y = f(p)$. Differenziando $dy = f'(p)\,dp$ perciò essendo $dy = p\,dx$ si ha $dx = f'(p)/p\,dp$, quindi si ottiene la soluzione in forma parametrica
$$y = f(p), \qquad\qquad x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C.$$
(6) Si chiama equazione di Clairaut l'equazione $y = xy' + f(y')$ con $f \in C^2$. Tale equazione ammette come soluzioni la famiglia di rette $y = cx + f(c)$ al variare di $c \in \mathbb{R}$ e la soluzione *inviluppo* $y(x) = xg(x) - f' \circ g(x)$ dove g è la funzione inversa di f'.
(7) L'equazione di Riccati è
$$y'(x) = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2(x).$$
Se $q_2(x) \neq 0$, $v(x) = y(x)q_2(x)$ soddisfa
$$v'(x) = v^2(x) + P(x)v(x) + Q(x),$$

dove $Q(x) = q_2(x)q_0(x)$ e $P(x) = q_1(x) + \left(\dfrac{q_2'(x)}{q_2(x)}\right)$. Infatti:

$$\begin{aligned} v'(x) &= (y(x)q_2(x))' \\ &= y'(x)q_2(x) + y(x)q_2'(x) = (q_0(x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y^2(x))q_2(x) + v(x)\frac{q_2'(x)}{q_2(x)} \\ &= q_0(x)q_2(x) + \left(q_1(x) + \frac{q_2'(x)}{q_2(x)}\right)v(x) + v^2(x). \end{aligned}$$

Posto $v(x) = -u'(x)/u(x)$, si ha che $u(x)$ soddisfa l'equazione lineare del secondo ordine:

$$u''(x) - P(x)u'(x) + Q(x)u(x) = 0,$$

poiché $v' = -(u'/u)' = -(u''/u) + (u'/u)^2 = -(u''/u) + v^2$, quindi $u''/u = v^2 - v' = -Q - Pv = -Q + Pu'/u$ da cui la formula $u'' - Pu' + Qu = 0$. Una soluzione u di questa equazione fornisce una soluzione $y(x) = -u'(x)/(q_2(x)u(x))$ dell'equazione di partenza. Data una soluzione particolare dell'equazione di Riccati $y_1(x)$, la soluzione generale è $y(x) = y_1(x) + 1/z(x)$, dove $z(x)$ è soluzione dell'equazione lineare $z'(x) = -(Q(x) + 2y_1(x)R(x))z(x) - R(x)$.

7. Richiami sulle equazioni differenziali lineari

In questa sezione richiamiamo alcuni risultati sulle equazioni differenziali lineari in un $\mathbb{K}$-spazio di Banach Y, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Come al solito, il lettore può sempre pensare $Y = \mathbb{R}^n$. In tutta la sezione, I indicherà un intervallo di $\mathbb{R}$.

Definizione 7.1. Un'*equazione differenziale lineare del primo ordine* in $I \times Y$ è della forma:

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t),$$

dove $A \in C^0(I, L_{\mathbb{K}}(Y))$, $b \in C^0(I, Y)$ e $L_{\mathbb{K}}(Y)$ indica lo spazio vettoriale degli operatori lineari continui di Y in se stesso. Se Y ha dimensione finita n, allora $L_{\mathbb{K}}(Y)$ è isomorfo allo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$, pertanto $A(t)$ in questo caso è una matrice $n \times n$ i cui coefficienti sono funzioni continue da I in $\mathbb{K}$. Questa equazione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità. Se $b(t) = 0$ per ogni t l'equazione diviene $y'(t) = A(t)y(t)$ detta anche *omogenea associata* a $y' = A(t)y + b(t)$.

Proposizione 7.1. *I seguenti fatti sono conseguenze della linearità:*

(1) *Lo spazio delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea è uno spazio vettoriale isomorfo a Y, l'isomorfismo è dato dalla valutazione delle soluzioni in t_0: ovvero se $\varphi_1, \varphi_2 : I \to Y$ sono soluzioni di $y'(t) = A(t)y(t)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sono costanti, allora $\varphi : I \to Y$ definita da $\varphi(t) = \lambda\varphi_1(t) + \mu\varphi_2(t)$ è soluzione di $y'(t) = A(t)y(t)$.*

(2) *Le soluzioni dell'equazione non omogenea $y' = A(t)y + b(t)$ si ottengono aggiungendo alle soluzioni dell'equazione omogenea associata $y' = A(t)y$ una soluzione particolare. In altre parole, se $w : I \to Y$ è soluzione dell'equazione non omogenea, tutte le altre soluzioni dell'equazione non omogenea sono della forma $w + \varphi$ con φ soluzione dell'omogenea associata.*

(3) *Se nell'equazione non omogenea $y' = A(t)y + b(t)$ si ha $b(t) = b_1(t) + ...b_k(t)$ e $\varphi_i : I \to Y$ è soluzione di $y' = A(t)y + b_i(t)$ per $i = 1, ..., k$, allora $\varphi : I \to Y$ definita da $\varphi(t) = \varphi_1(t) + ... + \varphi_k(t)$ è soluzione di $y' = A(t)y + b(t)$.*

Osservazione 1. Ad esempio se $Y = \mathbb{R}$, un termine noto della forma $b(t) = f(t)\cos(\alpha t)$ può essere scritto come somma

$$b(t) = \frac{1}{2}f(t)e^{i\alpha t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-i\alpha t}$$

e in modo analogo per un termine $b(t) = f(t)\sin(\alpha t)$. Se si sa risolvere l'equazione con termine noto $\frac{1}{2}f(t)e^{\pm i\alpha t}$, si sa risolvere anche l'equazione di partenza.

Proposizione 7.2. *Se $\varphi_1, ..., \varphi_r$ sono soluzioni dell'omogenea $y' = A(t)y$, allora sono equivalenti le condizioni:*

(1) *le funzioni $\varphi_1, ..., \varphi_r \in C^1(I, Y)$ sono linearmente indipendenti (come elementi dello spazio vettoriale $C^1(I, Y)$);*
(2) *esiste $t_0 \in I$ tale che i vettori $\varphi_1(t_0), ..., \varphi_r(t_0) \in Y$ sono linearmente indipendenti;*
(3) *per ogni $t \in I$ i vettori $\varphi_1(t), ..., \varphi_r(t) \in Y$ sono linearmente indipendenti.*

Definizione 7.2. Consideriamo l'equazione $y' = A(t)y$, sia $\phi : I \times I \times Y \to Y$ il suo flusso, cioè $\phi(t, t_0, y_0)$ è il valore all'istante t della soluzione che all'istante t_0 vale y_0. Il flusso è ben definito perché la soluzione che all'istante t_0 vale y_0 è unica. Fissati $t, t_0 \in I$ si ha che $y \mapsto \phi(t, t_0, y)$ è funzione lineare di Y in Y. Quindi $\phi(t, t_0, y_0) = R(t, t_0)y_0$ con $R(t, t_0) \in L_{\mathbb{K}}(Y)$. Nel caso in cui Y abbia dimensione finita n, si ha che $R(t, t_0)$ è una matrice $n \times n$ i cui coefficienti dipendono da t e t_0.
Indicata con id_Y l'identità in Y (ovvero la matrice identità nel caso di dimensione finita), si hanno le seguenti relazioni per ogni $t_2, t_1, t_0 \in I$:

$$R(t_0, t_0) = \mathrm{id}_Y \qquad R(t_2, t_1) \circ R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$$

Fissato $t_0 \in I$, si ha che $R_{t_0}(t)$ soddisfa a $X' = A(t)X$ con $X : I \to L_{\mathbb{K}}(Y)$, nel caso di dimensione finita X è una matrice $n \times n$ i cui coefficienti dipendono dal tempo.
Data $\Phi \in C^1(I, L_{\mathbb{K}}(Y))$, si ha $\Phi' = A(t)\Phi(t)$ per ogni t se e solo se per ogni y_0 la funzione $\varphi_{y_0}(t) = \Phi(t)y_0$ è soluzione di $y' = A(t)y$. Inoltre o $\Phi(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$ oppure $\Phi(t)$ non è invertibile per nessun $t \in I$. Una *risolvente* per $y' = A(t)y$ è $\Phi \in C^1(I, L_{\mathbb{K}}(Y))$ soddifacente a $\Phi(t)' = A(t)\Phi(t)$ e invertibile per ogni $t \in I$.

Proposizione 7.3 (Metodo della variazione delle costanti)**.** *Sia Φ risolvente di $y' = A(t)$ per il problema non omogeneo $y' = A(t)y + b(t)$ con dato $u(0) = y_0$, allora:*

$$u(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau)b(\tau)\, d\tau$$

ricordando che per ogni risolvente Φ si ha $R(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$.

Chiariamo gli ultimi due concetti con un esempio.

Esempio 1. Consideriamo il sistema $\dot{z} = Az + b(t)$ in $\mathbb{R}^2$ con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad\qquad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

(a.) Soluzione dell'omogenea: per determinare la risolvente è necessario trovare soluzioni dell'equazione omogenea $\dot{z} = Az$. Per risolvere tale equazione, cerchiamo una base opportuna in cui il sistema sia *disaccoppiato*, un sistema di riferimento in cui l'operatore lineare, associato alla matrice A nella base canonica, in questo nuovo sistema di riferimento abbia matrice diagonale o almeno triangolare. Il sistema di riferimento cercato è quello costituito dagli *autovettori* di A, ovvero da quei vettori $u \in \mathbb{R}^2$ non nulli tali per cui $Au = \lambda u$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$, detto autovalore associato a u. Per trovare gli autovalori si risolve l'equazione $\det(\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} - A) = 0$. In questo caso si ottiene:

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -3 \\ -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 3) - 6 = \lambda^2 - 8\lambda + 9 = 0,$$

ovvero $\lambda_1 = 4 + \sqrt{7}$ e $\lambda_2 = 4 - \sqrt{7}$. Per determinare gli autovettori dobbiamo trovare due vettori u_1, u_2 tali per cui

$$(\lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} - A)u_i = \begin{pmatrix} \lambda_i - 5 & -3 \\ -2 & \lambda_i - 3 \end{pmatrix} u_i = 0,\ i = 1, 2.$$

Per definizione di autovalore, le due righe di questa matrice sono dipendenti, pertanto è sufficiente risolvere:

$$-2u_1^x + (1 + \sqrt{7})u_1^y = 0, \qquad -2u_2^x + (1 - \sqrt{7})u_2^y = 0$$

avendo posto $u_i = (u_i^x, u_i^y)$ e cercando soluzioni non nulle. Possiamo quindi scegliere $u_1 = (1 + \sqrt{7}, 2)$, $u_2 = (1 - \sqrt{7}, 2)$. Indichiamo con P la matrice che ha per colonne i vettori u_1 e u_2:

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{7} & 1 - \sqrt{7} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1/(2\sqrt{7}) & (-1 + \sqrt{7})/(4\sqrt{7}) \\ -1/(2\sqrt{7}) & (1 + \sqrt{7})/(4\sqrt{7}) \end{pmatrix},$$

si ha $\det P = 4\sqrt{7} \neq 0$. E' noto dalla teoria che $P^{-1}AP$ è la matrice diagonale avente sulla diagonale principale gli autovalori. Posto $w = P^{-1}z$, si ha $\dot{w} = P^{-1}\dot{z} = P^{-1}APw$, da cui:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{7} & 0 \\ 0 & 4 - \sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

quindi $\dot{w}_i = \lambda_i w_i$, perciò $w_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. Applicando la trasformazione inversa $z = Pw$, si ottiene:

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{7} & 1 - \sqrt{7} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} u_2.$$

Data una condizione iniziale z_0, si ottiene $z_0 = C_1 u_1 + C_2 u_2$, ovvero le costanti C_1, C_2 sono le coordinate di z_0 rispetto al sistema di riferimento degli autovettori. Quindi:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = P^{-1} z_0, \qquad z_0 = P \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Poniamo:

$$T(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \qquad T^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 \tau} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 \tau} \end{pmatrix} = T(-\tau).$$

Osseviamo anche che $T(t)T^{-1}(\tau) = T(t - \tau)$. Perciò per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^2$ la mappa: $z(t) = PT(t)P^{-1}z_0$ è la soluzione di $\dot{z} = Az$ con $z(0) = z_0$.

(b.) Determinazione della risolvente: dal punto precedente si è ricavata una formula per la risoluzione dell'omogenea a partire da qualunque dato iniziale. Per definizione si ha che la risolvente è $\Phi(t) = PT(t)P^{-1}$, $\Phi^{-1}(\tau) = PT^{-1}(\tau)P^{-1}$ e si ha $R(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = PT(t)T^{-1}(\tau)P^{-1} = PT(t - \tau)P^{-1}$.

(c.) Metodo della variazione delle costanti: applicando la formula si ottiene come soluzione

$$\begin{aligned}
u(t) &= R(t,0)z_0 + \int_0^t R(t,\tau)b(\tau)\,d\tau = PT(t)P^{-1}z_0 + \int_0^t PT(t-\tau)P^{-1}\begin{pmatrix}\tau\\ e^{-\tau}\end{pmatrix}d\tau\\
&= PT(t)P^{-1}z_0 + \int_0^t PT(t)P^{-1}PT(-\tau)P^{-1}\begin{pmatrix}\tau\\ e^{-\tau}\end{pmatrix}d\tau\\
&= PT(t)P^{-1}z_0 + PT(t)P^{-1}\int_0^t PT(-\tau)P^{-1}\begin{pmatrix}\tau\\ e^{-\tau}\end{pmatrix}d\tau\\
&= PT(t)P^{-1}\left(z_0 + P\int_0^t T(-\tau)P^{-1}\begin{pmatrix}\tau\\ e^{-\tau}\end{pmatrix}d\tau\right).
\end{aligned}$$

Definizione 7.3 (Sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti)**.** Consideriamo i sistemi $y' = Ay + b(t)$ e l'omogeneo associato $y' = Ay$ con $A \in L_{\mathbb{K}}(Y)$ trasformazione costante, ovvero matrice indipendente da t nel caso di dimensione finita.
Diremo che il sistema è *accoppiato* se A non è una matrice triangolare, altrimenti diremo che il sistema è *non accoppiato*. Se il sistema è non accoppiato è possibile integrare le singole equazioni a partire dall'ultima sostituendo le soluzioni via via trovate.
La soluzione del problema omogeneo con $y(0) = y_0$ è $\varphi(t) = e^{tA}y_0$ dove l'esponenziale di matrice è definito da $e^{tA} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(tA)^j}{j!}$.
Sia $u \in Y$, $u \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Si ha che $\varphi(t) = e^{\lambda t}u$ è soluzione di $y' = Ay$ se e solo se λ è autovalore di A con u come autovettore associato. Supponiamo che A abbia n autovettori linearmente indipendenti (cioè sia diagonalizzabile) associati agli autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n$, allora si ha:

$$e^{tA} = [e^{\lambda_1 t}u_1....e^{\lambda_n t}u_n][u_1...u_n]^{-1}$$

(ricordiamo che u_j è un vettore colonna, quindi queste matrici sono quadrate di ordine n).
Dal metodo della variazione delle costanti si ricava:

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}b(\tau)\,d\tau$$

come soluzione del sistema non omogeneo che soddisfa $y(0) = y_0$.

Definizione 7.4 (Equazioni lineari di ordine n)**.** L'equazione lineare di ordine $n \geq 1$:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

dove $b, a_0, ..., a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ e la sua equazione omogenea associata:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

con le posizioni $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $z_n = y^{(n-1)}$ si riconducono al sistema lineare $z' = A(t)z + B(t)$ oppure $z' = A(t)z$ nel caso omogeneo associato con $A(t) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. La matrice A come si verifica facilmente ha per ultima riga $-a_0(t), ..., -a_{n-1}(t)$, gli elementi immediatamente sopra la diagonale principale sono 1, gli altri sono 0. $B(t)$ è un vettore colonna la cui ultima componente è $b(t)$ mentre le altre sono nulle.

(1) Wronskiano: Date r funzioni scalari $\varphi_1, ..., \varphi_r : I \to \mathbb{K}$ di classe almeno C^{m-1} su I, la loro *matrice wronskiana* a m righe è la matrice $m \times r$ di funzioni a valori in $\mathbb{K}$ in cui la colonna i-esima è formata dalle derivate successive (da 0 a $m-1$) di φ_r.

Quindi r soluzioni del sistema omogeneo sono indipendenti se e solo se la loro matrice wronskiana a n riche ha rango r in almeno un punto t_0. In questo caso ha rango r in ogni $t \in I$. Quindi lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea di ordine n ha dimensione n, dette $\varphi_1, ..., \varphi_n$ n soluzioni, esse sono indipendenti se e solo se il loro wronskiano $w(t)$, cioè il determinante della loro matrice wronskiana a n righe, è diverso da 0 in almeno un punto e dunque in tutti.
Indicheremo con $w_j(t)$ il determinante del minore della matrice wronskiana a n righe di n soluzioni ottenuto sopprimendo l'ultima riga e la j-esima colonna.

(2) Risoluzione dell'equazione lineare non omogenea di grado n: Se $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sono un sistema fondamentale di soluzioni per:
$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$
allora la soluzione dell'equazione non omogenea
$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$
che è nulla in $t_0 \in I$ assieme a tutte le sue derivate fino all'ordine $n-1$ è data da:
$$\varphi_0(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(t)\varphi_j(t)$$
dove:
$$\gamma_j(t) = \int_{t_0}^{t} (-1)^{n+j} \frac{w_j(\tau)}{w(\tau)} \, b(\tau) \, d\tau$$
con $w(t)$ e $w_j(t)$ come sopra.

Proposizione 7.4. *Data l'equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti:*
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = b(t),$$
l'omogenea associata è $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0$. *Il loro polinomio caratteristico è* $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0$. *Se* λ *è radice di* $p(z)$ *di molteplicità* ν, *allora l'omogenea associata ammette soluzioni:* $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, ..., t^{\nu-1}e^{\lambda t}$. *Per ogni coppia di soluzioni complesse coniugate* $\lambda = \alpha_j + i\beta_j$, $\bar{\lambda} = \alpha_j - i\beta_j$ *possiamo sostituire alle soluzioni:* $t^k e^{\lambda_j t}$, $t^k e^{\bar{\lambda}_j t}$ *le soluzioni* $t^k e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$, $t^k e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t)$.

Definizione 7.5. L'equazione lineare a coefficienti non costanti:
$$t^n y^{(n)} + c_{n-1}t^{n-1}y^{(n-1)} + ... + c_1 t y' + c_0 y = 0$$
con $t > 0$ è riconducibile ad un'equazione a coefficienti costanti ponendo $t = e^s$: detto $y(e^s) = u(s)$, si ottiene $t\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(s)}{ds}$ e così via.

Il seguente risultato permette di determinare una soluzioni particolare per equazioni differenziali lineare di ordine n a coefficienti costanti non omogenee in cui il termine noto abbia una certa forma.

Proposizione 7.5 (Metodo dei coefficienti indeterminati)**.** *Sia* $a(t)$ *polinomio in* t *a coefficienti complessi,* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Si consideri l'equazione:*
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = a(t)e^{\alpha t}.$$

Allora:

(1) *se α non è radice del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea, si ha per la non omogenea la soluzione $c(t)e^{\alpha t}$ dove c è un polinomio dello stesso grado di a;*
(2) *se α è radice del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea di molteplicità ν, si ha per la non omogenea la soluzione $t^\nu c(t)e^{\alpha t}$ dove c è un polinomio dello stesso grado di a.*

Tali soluzioni sono uniche. I coefficienti del polinomio $t \mapsto c(t)$ vengono determinati sulla base delle condizioni iniziali e sostituendo nell'equazione data.

Osservazione 2. Per estendere l'applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati, si ricordi che una funzione trigonometrica può essere espressa come somma di esponenziali e che se il termine noto è della forma $b(t) = b_1(t) + ... + b_k(t)$ si possono sommare le soluzioni relative ai problemi con termine noto $b_j(t)$.

Esempio 2. Consideriamo l'equazione $y'' + 2y' + y = \sin(2t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. L'omogenea associata è $y'' + 2y' + 1 = 0$ di polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ che ha come unica radice $\lambda = -1$ di molteplicità $\nu = 2$. Possiamo scrivere $\sin 2t = (e^{i2t} - e^{-i2t})/(2i)$ e studiare separatamente $y'' + 2y' + 1 = e^{i2t}/(2i)$ e $y'' + 2y' + 1 = e^{i2t}/(2i)$. Nel primo caso, si ha che il termine noto è della forma $c(t)e^{\alpha t}$ con $\alpha = 2i$ e $c(t) = 1/2i$ polinomio di grado zero, ovvero costante. Poiché $\alpha = 2i$ non è radice del polinomio caratteristico, si ha per l'equazione non omogenea $y'' + 2y' + 1 = e^{i2t}/(2i)$ una soluzione particolare del tipo c_3e^{2it} con $c_3 \in \mathbb{C}$ costante. In modo analogo, si ha per l'equazione non omogenea $y'' + 2y' + 1 = e^{-i2t}/(2i)$ una soluzione particolare del tipo c_4e^{-2it} con $c_4 \in \mathbb{C}$ costante. L'equazione omogenea $y''+2y'+y = 0$ ammette le soluzioni $c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$ con c_1, c_2 costanti. Quindi l'equazione $y'' + 2y' + y = \sin(2t)$ ammette le soluzioni nella forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3e^{2it} + c_4e^{-2it} = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + d_1\cos(2t) + d_2\sin(2t) \\ &= (c_1 + tc_2)e^{-t} + d_1\cos(2t) + d_2\sin(2t), \end{aligned}$$

dove i coefficienti c_1, c_2, d_1 e d_2 non sono tutti liberi, ma vanno determinati sostituendo questa formula nell'equazione e utilizzando le condizioni iniziali. Si ha:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + d_1 = 1 \\ \dot{y}(t) &= (-c_1 + c_2 - tc_2)e^t + 2d_2\cos(2t) - 2d_1\sin(2t) \\ \dot{y}(0) &= -c_1 + c_2 + 2d_2 = 2 \\ \ddot{y}(t) &= (c_1 - 2c_2 + tc_2)e^t - 4d_1\cos(2t) - 4d_2\sin(2t) \\ \ddot{y}(t) + 2\dot{y} + y &= \sin(2t) = (-3d_1 + 4d_2)\cos(2t) - (4d_1 + 3d_2)\sin(2t). \end{aligned}$$

Si ha quindi dall'ultima equazione $4d_1 + 3d_2 = -1$, $4d_2 - 3d_1 = 0$ e dalle condizioni iniziali $c_1 + d_1 = 1$ e $-c_1 + c_2 + 2d_2 = 2$ da cui: $d_1 = -4/25$, $d_2 = -3/25$, $c_1 = 29/25$, $c_2 = 85/25$, quindi la soluzione è:

$$y(t) = \frac{1}{25}\left((29 + 85t)e^{-t} - 4\cos(2t) - 3\sin(2t)\right).$$

Osservazione 3. Il seguente caso particolare del metodo della variazione delle costanti può essere utile nei casi di equazioni

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

in cui il metodo dei coefficienti indeterminati non risulti applicabile.
Per equazioni del secondo ordine

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t),$$

il metodo consiste nella ricerca di soluzioni del tipo

$$\tilde{y} = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

costruite a partire da due soluzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dell'equazione omogenea associata

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0.$$

Si ha:

$$\tilde{y}' = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2'.$$

Al fine di semplificare i calcoli, si impone $c_1'y_1+c_2'y_2 = 0$. Questo fa sì che risulti $\tilde{y}' = c_1y_1'+c_2y_2'$ e di conseguenza:

$$\tilde{y}'' = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

Sostituendo quanto appena ricavato nell'equazione di partenza si ottiene:

$$(c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2'') + a(c_1y_1' + c_2y_2') + b(c_1y_1 + c_2y_2) = f$$

e quindi

$$c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + (c_1'y_1' + c_2'y_2') = f.$$

I primi due addendi sono identicamente nulli, poiché y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea, quindi il tutto si riduce a:

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f$$

Tutto ciò porta allo studio del sistema lineare di due equazioni nelle incognite c_1' e c_2':

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f. \end{cases}$$

Il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

è il Wronskiano di y_1 e y_2: questo è nullo se e solo se le due soluzioni sono dipendenti. Ne segue che in questo caso non è mai nullo, ed il sistema ha sempre una soluzione, data da:

$$c_1' = \frac{-y_2f}{y_2'y_1 - y_1'y_2} \qquad c_2' = \frac{y_1f}{y_2'y_1 - y_1'y_2}$$

Integrando c_1' e c_2' si può ottenere a scelta o una soluzione particolare dell'equazione di partenza (integrando definitamente) o l'integrale generale dell'equazione di partenza (integrando indefinitamente). Per le equazioni di ordine n

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y + a_0 = f(x),$$

il metodo di variazione delle costanti acquista la seguente forma: Si considerano le n soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ e si cerca una soluzione particolare dell'equazione nella forma:

$$\tilde{y} = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x).$$

Si risolve il seguente sistema lineare nelle n incognite $c_i'(x)$

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + \cdots + c_n'y_n = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + \cdots + c_n'y_n' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1'y_1^{(n-2)} + c_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Il determinante di questo sistema viene detto determinante Wronskiano e, come sopra, si può dimostrare che è sempre non nullo a partire dall'indipendenza delle soluzioni dell'equazione omogenea. Si determinano le funzioni incognite integrando gli n termini soluzioni del sistema di cui sopra, per ricavare l'integrale generale dell'equazione.

8. Equazioni di Eulero-Lagrange

Lemma 8.1 (Fondamentale del Calcolo delle Variazioni)**.** *Sia $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ tale che*

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0, \qquad \text{per ogni } h \in C^\infty(a,b) \text{ con } h(a) = h(b) = 0.$$

Allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo esista $\bar{x} \in]a,b[$ tale che $f(\bar{x}) > 0$. Per continuità, esistono $a < c < d < b$ tale che $f(x) > f(\bar{x})/2$ per $x \in [c,d]$. Sia ora $h \in C^\infty(a,b)$ con $h(x) \geq 0$, $h(x) = 2f(\bar{x})$ per $x \in [c + (d-c)/3, d - (d-c)/3]$, $h(x) = 0$ per $x \notin [c,d]$ (negli intervalli complementari h è arbitraria purché positiva e C^∞). Si ha allora, ricordando che $f(x)h(x) \geq 0$ per $x \in [c,d]$ e $f(x)g(x) = 0$ se $x \notin [c,d]$:

$$0 = \int_a^b f(x)h(x)\,dx = \int_c^d f(x)h(x)\,dx \geq \frac{1}{2}f(\bar{x})\int_{c+(d-c)/3}^{d-(d-c)/3} h(x)\,dx = |f(\bar{x})|^2\frac{d-c}{3},$$

il che è assurdo perché $d \neq c$ e $f(\bar{x}) \neq 0$. Se $f(\bar{x}) < 0$ si ragiona su $g(x) = -f(x)$. □

Ci poniamo il seguente problema: dato un insieme X di curve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, e data una funzione $F : X \to \mathbb{R}$, vogliamo determinare (se esiste) una curva $\bar{\gamma} \in X$ tale che $F(\bar{\gamma}) \leq F(\gamma)$ per ogni $\gamma \in X$, ovvero $\bar{\gamma}$ è un *punto di minimo* del funzionale F. Nel caso di dimensione finita, i minimi di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 vanno cercati tra i punti dove $\mathrm{Jac}(f)$ è la matrice nulla, ovvero $Df(\bar{x}) = 0$. In dimensione infinita non abbiamo l'analogo della matrice Jacobiana, tuttavia alcune idee possono essere adattate in situazioni particolari.
Supponiamo che

$$X := \{\gamma : [a,b] \to \mathbb{R} : \gamma(a) = \gamma_0,\ \gamma(b) = \gamma_1, \gamma \in C^2\},$$

e $F : X \to \mathbb{R}$ sia definita da

$$F(\gamma) = \int_a^b L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))\,dt,$$

dove $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2, $L = L(t,x,p)$.
Supponiamo che $\gamma^* \in X$ sia un minimo (regolare) di F. Data $\eta \in C^\infty([a,b],\mathbb{R})$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$, e dato $\varepsilon \in \mathbb{R}$ si ha $\gamma^* + \varepsilon\eta \in X$ e quindi per definizione di minimo

$$F(\gamma^*) \leq F(\gamma^* + \varepsilon\eta).$$

Pertanto, per ogni η la funzione $J_\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $J_\eta(\varepsilon) := F(\gamma^* + \varepsilon\eta)$ ha un minimo in $\varepsilon = 0$ e quindi $\frac{dJ_\eta}{d\varepsilon}(0) = 0$. Si ha allora (ricordando la regolarità di L che permette di passare al limite sotto al segno di integrale):

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J_\eta(\varepsilon) - J_\eta(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(\gamma^* + \varepsilon\eta) - F(\gamma^*)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\displaystyle\int_a^b L(t, \gamma^*(t) + \varepsilon\eta(t), \dot\gamma^*(t) + \varepsilon\dot\eta(t))\, dt - \int_a^b L(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t))\, dt}{\varepsilon} \\
&= \int_a^b \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{L(t, \gamma^*(t) + \varepsilon\eta(t), \dot\gamma^*(t) + \varepsilon\dot\eta(t)) - L(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t))}{\varepsilon}\, dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t))\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial p}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t))\dot\eta(t) \right] dt
\end{aligned}$$

Integrando per parti il secondo addendo e ricordando che $\eta(a) = \eta(b) = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t))\eta(t)\, dt + \left[\frac{\partial L}{\partial p}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t))\eta(t) \right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t))\eta(t)\, dt \\
&= -\int_a^b \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t)) - \frac{\partial L}{\partial x}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t)) \right] \eta(t)\, dt
\end{aligned}$$

Questo integrale è nullo per ogni η. Applicando il Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni si ottiene che un minimo regolare γ^* di F deve *necessariamente* soddisfare l'*equazione di Eulero-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t)) - \frac{\partial L}{\partial x}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t)) = 0.$$

Il ragionamento può essere esteso ad insiemi di curve

$$X := \{\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \gamma(a) = \gamma_0,\ \gamma(b) = \gamma_1, \gamma \in C^2\},$$

con funzionali $F : X \to \mathbb{R}$ definiti da

$$F(\gamma) = \int_a^b L(t, \gamma(t), \dot\gamma(t))\, dt,$$

dove $L : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2, $L = L(t, x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n)$. Si perviene al sistema di equazioni differenziali note come *Equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p_i}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t)) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(t, \gamma^*(t), \dot\gamma^*(t)) = 0, \qquad i = 1, ..., n.$$

Chiameremo *punti critici* di F in X tutte le soluzioni di tali equazioni.

Sottolineiamo il fatto che questa è una condizione **necessaria** (e **non sufficiente**) affinché γ^* sia un minimo **regolare**. Il fatto che la condizione sia solo necessaria proviene dall'aver imposto la condizione $\frac{dJ_\eta}{d\varepsilon}(0) = 0$: tale condizione, infatti non caratterizza i minimi di J_η, ma è solo una condizione necessaria per i minimi delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ differenziabili. Un altro aspetto importante è che le equazioni di Eulero-Lagrange sono soddisfatte dai minimi regolari del funzionale: per mantenere l'analogia con il caso di dimensione finita, la funzione $f(x) = |x|$

non ha minimi regolari, quindi non ha punti dove la derivata prima sia nulla, anche se ha un minimo assoluto nell'origine.

Esempio 3. Si consideri il funzionale:

$$F(\gamma) = \int_0^1 (\dot{\gamma}(t)^2 - 1)^2 \, dt,$$

definito su

$$X := \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R} : \gamma(0) = \gamma(1) = 0, \gamma \in C^2\},$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt}(4(\dot{\gamma}(t)^2 - 1)\dot{\gamma}(t)) = 0$$

quindi:

$$(\dot{\gamma}(t)^2 - 1)\dot{\gamma}(t) = Cost. = (\dot{\gamma}(0)^2 - 1)\dot{\gamma}(0).$$

pertanto $\gamma(t)$ può assumere solo i valori corrispondenti alle radici del polinomio $\lambda^3 - \lambda - C = 0$ dove $C = (\dot{\gamma}(0)^2 - 1)\dot{\gamma}(0)$. Se tale polinomio ammette radici distinte, necessariamente $\dot{\gamma}(t)$ deve essere costante, altrimenti γ non sarebbe C^1 (perché γ può assumere solo al massimo tre valori, quindi dovrebbe saltare dall'uno all'altro). L'unica possibilità per una funzione con derivata costante per soddisfare ai dati $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$ è che $\gamma(t) = 0$ per ogni t, quindi l'unica soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange soddisfacente ai dati iniziali e finali è $\gamma(t) = 0$ per $t \in [0,1]$. Si ha che sulla funzione costantemente nulla F vale 1. Tuttavia è possibile costruire facilmente altre funzioni che soddisfino i dati iniziali e finali, meno regolari, dove il funzionale vale 0, ad esempio le funzioni $\pm|x|$, oppure le funzioni $f_n(x) = \int_0^x g_n(t)\, dt$ dove $g_n(t) = 1$ se $t \in [0, 1/2n]$ e $g_n(t) = -1$ se $t \in [1/2n, 1/n]$ e poi $g_n(t + k/n) = g_n(t)$ per $k = 1...n$, e anche le loro opposte. Queste funzioni sono tutte punti di minimo assoluto del funzionale (perché su di essi il funzionale è nullo) e in generale $F(\gamma) \geq 0$ per ogni γ, tuttavia non sono minimi regolari per la presenza di punti angolosi (si tratta di minimi lipschitziani).

In generale, la determinazione della classe di regolarità ottimale è parte del problema di minimizzazione: per classe di regolarità ottimale si intende una classe di curve dove esista un minimo e, possibilmente, tale minimo sia unico.

Definizione 8.1. Parleremo di funzionali di *tipo energia* se:

$$F(\gamma) = \int_a^b L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt,$$

dove $L(t, x, p) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) p_i p_j$ con $g_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Tali funzionali hanno numerose applicazioni in Meccanica e Geometria Differenziale.

Definizione 8.2. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione. f si dice *convessa* se $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Si dice *strettamente* convessa se la precedente disuguaglianza vale in senso stretto per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Se $f \in C^2$, f è convessa se e solo se la sua matrice Hessiana $D^2 f$ è semidefinita positiva, ed è strettamente convessa se e solo se tale matrice è definita positiva.

Il seguente criterio è utile per determinare i minimi di alcuni tipi particolari di funzionali:

Proposizione 8.1 (Disuguaglianza di Jensen). *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una funzione integrabile, allora si ha:*

$$\int_0^1 f \circ g(t)\, dt \geq f\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right).$$

Corollario 8.1. *Se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è convessa e $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ è una curva tale che $\dot{\gamma}$ esista in tutti i punti di $[0,1]$ eccettuato al più un insieme finito, si ha:*

$$F(\gamma) = \int_0^1 L(\dot{\gamma}(t))\, dt \geq L\left(\int_0^1 \dot{\gamma}(t)\, dt\right) = L(\gamma(1) - \gamma(0)),$$

pertanto se si ha che l'insieme delle curve ammissibili X contiene la curva

$$\gamma(t) = \gamma(0) + t(\gamma(1) - \gamma(0))$$

si ha che tale curva, ovvero il segmento di retta, è un minimo assoluto del funzionale F. Inoltre se L è strettamente convessa, tale minimo è unico.

9. Sistemi continui scalari

Definizione 9.1 (Equilibri per sistemi continui scalari). Sia $f : I \to I$, I intervallo di $\mathbb{R}$. Diremo che $x_0 \in I$ è punto di equilibrio per $\dot{x} = f(t,x)$ se $f(t, x_0) = 0$ per ogni t. Un punto di equilibrio x_0 per $\dot{x} = f(t,x)$ si dice:

(1) *localmente stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y_0 \in I$ tale che $|y_0 - x_0| < \delta$ si abbia $|x(t) - x_0| < \varepsilon$ per ogni $t \geq t_0$, dove $x(t)$ è soluzione di $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = y_0$.
(2) *instabile* se non è stabile.
(3) *localmente attrattivo* se esiste $\rho > 0$ tale che per ogni $y_0 \in I$ tale che $|y_0 - x_0| < \rho$ si abbia $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$,dove $x(t)$ è soluzione di $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = y_0$.
(4) *localmente asintoticamente stabile* (LAS) se è localmente attrattivo e localmente stabile.
(5) *globalmente attrattivo* se per ogni $y_0 \in I$ si ha $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$, dove $x(t)$ è soluzione di $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = y_0$.
(6) *globalmente asintoticamente stabile* (GAS) se è globalmente attrattivo e localmente stabile.

Proposizione 9.1 (Stabilità per sistemi continui scalari). *Sia $f \in C^3(I, I)$, I intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ di equilibrio per $\dot{x} = f(x)$. Allora:*

(1) *se $f'(x_0) < 0$ allora x_0 è LAS,*
(2) *se $f'(x_0) > 0$ allora x_0 è instabile,*
(3) *se $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ allora x_0 è instabile,*
(4) *se $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) < 0$ allora x_0 è LAS,*
(5) *se $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) > 0$ allora x_0 è instabile.*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre a meno di traslazioni $x_0 = 0$. Si ha allora (per $x(t) \neq 0$):

$$\frac{d}{dt}|x(t)| = \frac{x(t)}{|x(t)|} f(x(t))$$

Per la Formula di Taylor si ha

$$f(x(t)) = f(x_0) + f'(x_0)x(t) + \frac{1}{2}f''(x_0)x^2(t) + \frac{1}{6}f'''(x_0)x^3(t) + ...$$

e quindi sostituendo nella precedente si vede se $x(t)$ si avvicina all'origine, ovvero se tale derivata è negativa, oppure se ne allontana. □

Definizione 9.2 (Miscellanea sulle equazioni autonome scalari)**.** Un'equazione differenziale si dice *autonoma* se è del tipo $\dot{y} = g(y)$. Se $t \mapsto y(t)$ è soluzione di tale equazione, anche $t \mapsto y(t+c)$ è soluzione, in questo senso si dice che l'insieme delle soluzioni di un'equazione autonoma è invariante per traslazioni. Un'equazione non autonoma può essere resa autonoma aggiungendo una variabile e imponendo $\dot{t} = 1$. Discutiamo ora alcuni fatti salienti sull'equazione autonoma $y' = g(y)$ con $g : J \to \mathbb{R}$ continua, J intervallo di $\mathbb{R}$.

(1) le soluzioni costanti sono esattamente gli zeri di g.
(2) se $g(y_0) \neq 0$, il problema di Cauchy $\dot{y} = g(y)$, $y(t_0) = y_0$ ha un'unica soluzione definita in un intorno di t_0. **Ciò vale anche se le ipotesi del Teorema di Esistenza e Unicità non sono soddisfatte**.
(3) Sia $g(y_0) \neq 0$. In un intorno opportuno $]t_1, t_2[\times]\eta_1, \eta_2[$ di (t_0, y_0) con $g(\eta) \neq 0$ per ogni $\eta \in]\eta_1, \eta_2[$ si ha:
$$\int_{y_0}^{\eta_2} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^{t_2} dt, \qquad \int_{\eta_1}^{y_0} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_1}^{t_0} dt$$
Il valore di t_i indica il tempo al quale la soluzione raggiunge il valore η_i. Possono verificarsi ad esempio i seguenti casi:
   (a) se $g(\eta) > 0$ per $y_0 < \eta < \eta_2$ e $g(\eta_2) = 0$, se è finito l'integrale:
   $$\int_{y_0}^{\eta_2} \frac{d\eta}{g(\eta)} = T < +\infty$$
   allora si ha che la soluzione raggiunge il punto η_2 in un tempo $t_2 < +\infty$ dato da $t_2 = T + t_0$.
   (b) supponiamo $g(\eta) > 0$ per $y_0 < \eta < \eta_2$ e cerchiamo un asintoto orizzontale per $t \to \infty$. In questo caso se il suo valore è η_2 si deve avere
   $$\int_{y_0}^{\eta_2} \frac{d\eta}{g(\eta)} = +\infty$$
   e quindi necessariamente η_2 deve essere uno zero di g.
   (c) supponiamo $g(\eta) > 0$ per $y_0 < \eta < \eta_2$ e cerchiamo un asintoto verticale. In tal caso deve esistere T tale che in $t_2 = t_0 + T$ la soluzione arrivi a $+\infty$, quindi dovrà essere finito l'integrale
   $$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{d\eta}{g(\eta)} = T < +\infty.$$

10. Sistemi continui lineari planari omogenei

Definizione 10.1 (Classificazione sistemi planari)**.** Consideriamo il sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti in $\mathbb{R}^2$ $\dot{z} = Az$ con $A = (a_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Come si è visto il comportamento di tale sistema è legato agli autovalori ed autovettori della matrice A. Si noti che se $\det(A) \neq 0$, l'unica soluzione costanti, ovvero per cui $0 = A\bar{z}$ è $\bar{z} = (0, 0)$.
L'equazione caratteristica degli autovalori in questo caso assume la forma $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$ con $T = \mathrm{tr}(A)$ e $D = \det(A)$, e possono presentarsi i seguenti casi:

(1) Autovalori reali e distinti: se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono gli autovalori di A, gli autovettori rispettivi $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ si ottengono da $(\lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} - A)u_i = 0$, ovvero

$$\begin{pmatrix} \lambda_i - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_i - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^x \\ u_i^y \end{pmatrix}.$$

Per definizione di autovalori, le due righe della matrice sono dipendenti, per cui il sistema equivale all'equazione:

$$(\lambda_i - a_{11})u_i^x - a_{12}u_i^y = 0$$

Pertanto possiamo scegliere gli autovettori $u_1 = (a_{12}, \lambda_1 - a_{11})$ e $u_2 = (a_{12}, \lambda_2 - a_{11})$. Tali vettori sono linearmente indipendenti perché associati ad autovalori distinti. La soluzione dell'equazione risulta essere $z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} u_2$.

(a) se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ allora l'origine è GAS e prende il nome di *nodo proprio* o *a due tangenti* stabile, infatti si ha

$$\lim_{t\to\infty} |z(t)| \le |c_1| \cdot |u_1| e^{\lambda_1 t} + |c_2| \cdot |u_2| e^{\lambda_2 t} = 0,$$

il limite è nullo perché c_i e $|u_i|$ sono costanti. In un intorno dell'origine, le direzioni delle soluzioni tendono ad allinearsi nella direzione dell'autovettore relativo all'autovalore di minimo modulo (perché se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, quindi λ_2 ha il modulo minimo, si ha che $e^{\lambda_1 t}$ tende a zero più rapidamente di $e^{\lambda_2 t}$.

(b) se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ allora l'origine è instabile e prende il nome di *nodo proprio* o *a due tangenti* instabile, infatti si ha

$$\lim_{t\to\infty} |z(t)| = +\infty,$$

In un intorno dell'origine, le direzioni delle soluzioni tendono ad allinearsi nella direzione dell'autovettore relativo all'autovalore di minimo modulo (perché se $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, quindi λ_2 ha il modulo minimo, si ha che $e^{\lambda_1 t}/e^{\lambda_2 t}$ tende a zero).

(c) se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1\lambda_2 < 0$, l'origine è instabile e prende il nome di *punto di sella* o *colle*.

(2) Autovalori coincidenti: se gli autovalori di A sono coincidenti, non possono essere che reali. Distinguiamo due casi:

(a) se $A = \bar{\lambda}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, il sistema è disaccoppiato e le due equazioni possono essere integrate separatamente ottenendo $x(t) = C_1 e^{\lambda t}$ e $y(t) = C_2 e^{\lambda t}$, pertanto se $\lambda < 0$ l'origine è GAS e prende il nome di *stella stabile*, mentre se $\lambda > 0$ l'origine è instabile e prende il nome di *stella instabile*. Se $\lambda = 0$ l'unica soluzione è quella costante $x(t) = x(0)$ e $y(t) = y(0)$.

(b) se A ha autovalori coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \bar{\lambda}$ ma non è multipla della matrice identica, essa ha polinomio caratteristico $(\lambda - \bar{\lambda})^2 = 0$, in particolare si ha $T^2 - 4D = 0$, quindi $(a_{11} + a_{22})^2 = 4a_{11}a_{22} - 4a_{12}a_{21}$ e $\bar{\lambda} = T/2$. Questa volta non otteniamo più due autovettori linearmente indipendenti: da $(\bar{\lambda}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} - A)u_1 = 0$, ovvero

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \bar{\lambda} - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^x \\ u_1^y \end{pmatrix},$$

si ottiene (visto che come prima le due righe della matrice sono dipendenti):

$$(\bar{\lambda} - a_{11})u_1^x - a_{12}u_1^y = 0$$

e quindi $u_1 = (a_{12}, \bar\lambda - a_{11})$. Per ottenere un altro autovettore, che verrà chiamato autovettore generalizzato, è necessario risolvere il sistema $(\bar\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} - A)u_2 = u_1$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} \bar\lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \bar\lambda - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^x \\ u_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \bar\lambda - a_{11} \end{pmatrix}.$$

Il rango della matrice dei coefficienti è 1 per definizione di autovalore. La matrice completa del sistema è

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar\lambda - a_{11} & -a_{12} & a_{12} \\ -a_{21} & \bar\lambda - a_{22} & \bar\lambda - a_{11} \end{array}\right),$$

e affinché il sistema abbia soluzione tale matrice deve avere rango 1, quindi dovranno essere nulli tutti i minori di ordine 2. Si ha, per definizione di autovalore:

$$0 = \det \begin{pmatrix} \bar\lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \bar\lambda - a_{22} \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda gli altri ($\bar\lambda = T/2 = (a_{11} + a_{22})/2$):

$$\det \begin{pmatrix} -a_{12} & a_{12} \\ \bar\lambda - a_{22} & \bar\lambda - a_{11} \end{pmatrix} = -a_{12}(a_{22} - a_{11}) - a_{12}(a_{11} - a_{22}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \bar\lambda - a_{11} & a_{12} \\ -a_{21} & \bar\lambda - a_{11} \end{pmatrix} = 0,$$

perché nel secondo determinante si è sfruttato il fatto che la prima colonna deve essere un multiplo di $(-a_{12}, \bar\lambda - a_{22})$ per definizione di autovalore. Il sistema è quindi equivalente alla singola equazione:

$$(\bar\lambda - a_{11})u_2^x - a_{12}u_2^y = a_{12}$$

ovvero

$$(\bar\lambda - a_{11})u_2^x = a_{12}(u_2^y + 1)$$

pertanto scegliamo $u_2 = (a_{12}, \bar\lambda - a_{11} - 1)$. La soluzione dell'equazione omogenea è

$$z(t) = (C_1 t + C_2)e^{\bar\lambda t}u_1 + C_1 e^{\bar\lambda t}u_2.$$

L'origine è GAS per $\bar\lambda < 0$ e prende il nome di *nodo improprio* o *ad una tangente* stabile, mentre per $\bar\lambda > 0$ è instabile e prende il nome di *nodo improprio* o *ad una tangente* instabile. In un intorno dell'origine le traiettorie tendono ad allinearsi nella direzione di u_1.

(3) Autovalori complessi coniugati non reali: se gli autovalori sono complessi non reali, essi debbono essere complessi coniugati perché il polinomio caratteristico è a coefficienti reali, in particolare sono distinti. Procedendo esattamente come nel caso degli autovalori reali distinti si ottengono i due autovettori: $u_1 = (a_{12}, \lambda_1 - a_{11})$ e $u_2 = (a_{12}, \lambda_2 - a_{11})$. Tenendo conto che $\lambda_1 = \mu + i\omega$ e $\lambda_2 = \mu - i\omega$, i due autovettori sono anch'essi complessi coniugati e $u_1 = (a_{12}, \mu - a_{11}) + i(0, \omega)$, $u_2 = (a_{12}, \mu - a_{11}) - i(0, \omega)$. Poniamo $u_1 = u_1^r + iu_1^i$. La soluzione dell'equazione risulta essere $z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}u_2$. Poiché $|e^{\lambda_i t}| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t} = e^{\mu}$, il comportamento riguardo alla stabilità dipende solo da μ, in particolare se $\mu < 0$ si ha che l'origine è GAS e prende il nome di *fuoco stabile*, le traiettorie convergono a spirale nell'origine. Se invece $\mu > 0$ l'origine è instabile e prende il nome di *fuoco instabile*, le traiettorie escono a spirale dall'origine. Se $\mu = 0$ si ha che la soluzione è $z(t) = c_1 e^{i\omega t}u_1 + c_2 e^{-i\omega t}u_2$, quindi le orbite sono periodiche e

assumono la forma di ellissi con assi nelle direzioni di u_1 e u_2, infatti poiché $u_1 = \overline{u_2}$, per avere $z(t) \in \mathbb{R}$ si deve avere $c_1 = \overline{c_2}$ e quindi:

$$z(t) = 2\mathrm{Re}(c_1 e^{i\omega t}(u_1^r + iu_1^i)) = \mathrm{Re}((c_1^r + ic_1^i)(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))(u_1^r + iu_1^i)).$$

Sviluppando i calcoli e prendendo la parte reale, si ottiene

$$z(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)u_1^r + (B\cos\omega t - A\sin\omega t)u_1^i,$$

dove $A = 2c_1^r$ e $B = -2c_1^i$. In questo caso l'origine è un *centro*, è stabile, ma non asintoticamente.

Definizione 10.2. I due sistemi planari $\dot{z} = Az$ e $\dot{y} = By$ si dicono topologicamente equivalenti se esiste un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che mappi le orbite dell'uno in quelle dell'altro preservandone il verso temporale. Diremo che A, B sono *iperboliche* se la parte reale dei loro autovalori è non nulla, in tal caso se i sistemi sono topologicamente equivalenti si può scegliere h in modo che $h(e^{At}x) = e^{Bt}h(x)$.

Definizione 10.3. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diremo che sono *simili* o *coniugate* se esiste $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, P invertibile, tale che $A = P^{-1}BP$.

Proposizione 10.1. *Se i due sistemi planari $\dot{z} = Az$ e $\dot{y} = By$ hanno matrici simili, allora sono linearmente equivalenti, ovvero h è lineare.*

Dimostrazione. Esiste P invertibile per cui $A = P^{-1}BP$. Posto $y = Pz$, il sistema $\dot{y} = By$ diventa $P\dot{z} = BPz$ ovvero $\dot{z} = P^{-1}BPz = Az$. In particolare, si ha $e^{At} = P^{-1}e^{Bt}P = e^{P^{-1}APt}$. □

Teorema 10.1 (Classificazione topologica sistemi planari lineari omogenei iperbolici)**.** *Se due matrici A, B hanno autovalori a parte reale non nulla, allora i corrispondenti sistemi lineari omogenei sono topologicamente equivalenti se e solo se A e B hanno lo stesso numero di autovalori con parte reale positiva (e quindi anche lo stesso numero a parte reale negativa). Pertanto esistono solo tre classi di equivalenza topologica per sistemi iperbolici planari:*

(1) pozzo iperbolico*: due autovalori a parte reale negativa, ad esempio $A = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, 0 è GAS.*
(2) sorgente iperbolica*: due autovalori a parte reale positiva, ad esempio $A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, 0 è instabile.*
(3) sella iperbolica*: due autovalori a parte reale di segno discorde, ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 0 è instabile.*

In particolare, un nodo proprio stabile, un nodo improprio stabile, una stella stabile e un fuoco stabile sono tutti pozzi iperbolici.

Teorema 10.2 (Classificazione topologica sistemi planari lineari omogenei non iperbolici)**.** *Se una matrice A ha almeno un autovalore a parte reale nulla, allora il corrispondente sistema lineare omogeneo è topologicamente equivalente ad uno dei seguenti cinque sistemi le cui matrici dei coefficienti sono:*

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*, la matrice nulla (soluzioni costanti),*
(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*, un autovalore a parte reale positiva e uno nullo (soluzioni parallele all'asse x e attratte dall'asse y),*

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *un autovalore a parte reale positiva e uno nullo (soluzioni parallele all'asse x e respinte dall'asse y),*

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *due autovalori nulli e un solo autovettore (soluzioni parallele all'asse x, costanti se $y_0 = 0$, e dirette verso le x crescenti o decrescenti rispettivamente se $y_0 > 0$ o $y_0 < 0$),*

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *due autovalori puramente immaginari (le soluzioni sono circonferenze centrate nell'origine).*

11. Esercizi seconda settimana

Esercizio 11.1. Si studino i seguenti sistemi alle differenze:

(a) $\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{(\alpha_1+1)x_k}{1+x_k+\beta_1 y_k}, \\ \\ y_{k+1} = \dfrac{(\alpha_2+1)y_k}{1+\beta_2 x_k+y_k}, \end{cases}$ dove $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ con $\beta_1\beta_2 > 1$.

(b) $\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - \alpha x_k^2, \\ y_{k+1} = \beta x_k, \end{cases}$ con $\alpha, \beta > 0$.

(c) $\begin{cases} x_{k+1} = \alpha x_k e^{-y_k}, \\ y_{k+1} = x_k(1-e^{-y_k}), \end{cases}$ con $\alpha > 0$.

(d) $\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{\alpha_1 x_k}{1+y_k}, \\ \\ y_{k+1} = \dfrac{\alpha_2 y_k}{1+\frac{y_k}{x_k}}, \end{cases}$ con $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Esercizio 11.2. Si studino qualitativamente i seguenti problemi:
(1) $\dot{x} = e^{t-x}/x$, $x(\alpha) = 1$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(2) $\dot{x} = x^2/(1-tx)$, $x(0) = \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 11.3. Si consideri il seguente funzionale di tipo energia:

$$J(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt.$$

dove $L(x,p) = x^2p^2$, $\gamma \in C^0([0,1], \mathbb{R})$.
(1) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange per il funzionale J.
(2) Si risolva tale equazione con i seguenti dati $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = -1$ e si rappresenti la soluzione nel piano (t,x) (suggerimento: si usi la sostituzione $\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)z(t)$).

12. Sistemi autonomi non linari

In questa sezione discuteremo sistemi non lineari autonomi del tipo $\dot{y} = f(y)$ in $\mathbb{R}^n$ (principalmente per $n = 2$).

Definizione 12.1 (Stabilità)**.** Un punto di equilibrio $\bar{y}$ per il sistema (ovvero $f(\bar{y}) = 0$) si dice:

(1) *localmente stabile* secondo Lyapunov se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che ogni soluzione $t \mapsto y(t)$ di $\dot{y} = f(y)$ con $y(0) = y_0$ tale che $|\bar{y} - y_0| < \delta$ soddisfi $|y(t) - \bar{y}| < \varepsilon$ per ogni $t \geq 0$.
(2) *instabile* se non è localmente stabile.
(3) *localmente asintoticamente stabile* (LAS) se è localmente stabile ed esiste $\rho > 0$ tale che ogni soluzione $t \mapsto y(t)$ di $\dot{y} = f(y)$ con $y(0) = y_0$ tale che $|\bar{y} - y_0| < \rho$ soddisfi $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \bar{y}$ (ovvero $\lim_{t\to+\infty} |y(t) - \bar{y}| = 0$) .
(4) *globalmente asintoticamente stabile* (GAS) se è localmente stabile e per ogni soluzione si abbia $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \bar{y}$.

Si dice inoltre *bacino di attrazione* di $\bar{y}$ il seguente insieme:

$$\mathcal{B}(\bar{y}) := \left\{ y_0 \in \mathbb{R}^n : \text{ esiste una soluzione } \varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n \text{ con } \varphi(0) = y_0 \text{ tale che } \lim_{t\to+\infty} y(t) = \bar{y} \right\}.$$

Definizione 12.2 (insiemi limite)**.** Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ la soluzione del sistema $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$. Definiamo gli insiemi *α-limite* e *ω-limite* come:

$$\alpha(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^m : \text{ esiste } \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ tale che } t_j \to -\infty \text{ r } \lim_{j\to\infty} x(t_j) = \xi\}$$
$$\omega(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^m : \text{ esiste } \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ tale che } t_j \to +\infty \text{ r } \lim_{j\to\infty} x(t_j) = \xi\}$$

Se la soluzione di $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ non è definita per tutti i tempi $t \geq 0$ poniamo $\omega(x_0) = \emptyset$, e se non è definita per tutti i tempi $t \leq 0$ poniamo $\alpha(x_0) = \emptyset$.
Diciamo che un'orbita chiusa γ è un *ciclo limite* se $\omega \subseteq \alpha(x_0)$ o $\omega \subseteq \omega(x_0)$, nel caso in cui $\omega \subseteq \alpha(x_0)$ parleremo di ciclo α-limite e nel caso in cui $\omega \subseteq \omega(x_0)$ parleremo di ciclo ω-limite.
Data $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ soluzione del sistema $\dot{x} = f(x)$ e $\bar{x}$ punto di equilibrio, diremo che è un'orbita *omoclina* se $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \bar{x}$. Nel caso $m = 2$ condizione necessaria per l'esistenza di orbite omocline è che $\bar{x}$ sia di sella.
Data $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ soluzione del sistema $\dot{x} = f(x)$ e $\bar{x}, \bar{y}$ punti di equilibrio distinti, diremo che è un'orbita *eteroclina* se $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \bar{x}$ e $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \bar{y}$.

Teorema 12.1 (stabilità per linearizzazione)**.** *Consideriamo il sistema $\dot{x} = f(x)$, e sia $\bar{x}$ un punto di equilibrio. Supponiamo che $f \in C^1$ e che* $\det \operatorname{Jac} f(\bar{x}) \neq 0$. *Allora se tutti gli autovalori di tale matrice hanno parte reale strettamente negativa, l'equilibrio è LAS, mentre se esiste almeno un autovalore con parte reale strettamente positiva, allora l'equilibrio è instabile.*

Proposizione 12.1. *Presentiamo i seguenti criteri per il segno della parte reale degli autovalori:*

(1) *Gershgorin: $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{i,j=1...n}$. Se $a_{ii} < -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ per ogni $i = 1...n$ allora tutti gli autovalori di A o sono negativi o hanno parte reale negativa.*

(2) *Routh-Hurwitz: dato il polinomio a coefficienti reali* $\lambda_m + \sum_{j=1}^m a_j \lambda m - j$*, poniamo* $a_0 = 1$ *e costruiamo la matrice:*

$$H_m := \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_m \end{pmatrix}.$$

Se per ogni $j = 1...m$ *il minore formato dalle prime* j *righe e* j *colonne ha determinante positvo, allora le radici di del polinomio hanno tutte parte reale negativa e viceversa.*

(3) *se* $m = 2$ *e* $\bar{x}$ *un punto di equilibrio, allora esso è LAS se e solo se* $\det \mathrm{Jac}\, f(\bar{x}) > 0$ *e* $\mathrm{trJac}\, f(\bar{x}) < 0$.

Definizione 12.3 (Funzioni di Lyapunov)**.** Sia Ω un intorno di $\bar{z}$ in $\mathbb{R}^m$, diremo che $V : \Omega \to \mathbb{R}$ è una *funzione di Lyapunov* per $\dot{z} = f(z)$ relativa a $\bar{z}$ se $V(\bar{z}) = 0$ e $V(z) > 0$ per ogni $z \in \Omega \backslash \{\bar{z}\}$ e inoltre

$$\frac{d}{dt} V(z(t)) \leq 0$$

per ogni $t > 0$ ed ogni soluzione non costante $z : [0, +\infty[\to \Omega$ del sistema. Diremo che tale funzione di Lyapunov è *stretta* se:

$$\frac{d}{dt} V(z(t)) \leq 0$$

per ogni $t > 0$ ed ogni soluzione non costante $z : [0, +\infty[\to \Omega$ del sistema.

Teorema 12.2 (Stabilità secondo Lyapunov)**.** *Sia* $\bar{z}$ *di equilibrio per* $\dot{z} = f(z)$*. Allora se esiste una funzione di Lyapunov relativa a* $\bar{z}$*, allora* $\bar{z}$ *è stabile. Se esiste una funzione di Lyapunov stretta relativa a* $\bar{z}$*, allora* $\bar{z}$ *è LAS.*

Definizione 12.4 (Regioni invarianti)**.** Sia $\phi_t(\cdot)$ il flusso associato al sistema $\dot{x} = f(x)$. Diremo che $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è una *regione invariante* del sistema se $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(z) \subseteq P$ per ogni $z \in P$. Diremo che è *positivamente invariante* o *invariante in avanti* se $\bigcup_{t \geq 0} \phi_t(z) \subseteq P$ per ogni $z \in P$. Diremo che è *negativamente invariante* o *invariante all'indietro* se $\bigcup_{t \leq 0} \phi_t(z) \subseteq P$ per ogni $z \in P$.

Teorema 12.3 (sull'insieme invariante)**.** *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto,* $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *di classe* C^1 *e sia* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto di classe* C^1*. Consideriamo il sistema* $\dot{x} = \vec{F}(x)$*. Supponiamo che* $\vec{F}(x) \cdot \hat{n}(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in \partial D$*, dove* $\hat{n}$ *rappresenta la normale esterna*[2] *a* D*. Allora* D *è regione invariante, ovvero se una traiettoria entra in* D *all'istante* t_0*, vi rimane per tutti i tempi* $t > t_0$*, in particolare se parte da un punto interno rimane per tutti i tempi successivi all'interno di* D*.*

Teorema 12.4 (Principio di invarianza di LaSalle)**.** *Sia* $\bar{x}$ *un punto di equilibrio per* $\dot{x} = f(x)$ *e supponiamo che esista una funzione di Lyapunov ad esso relativo* $V : \Omega \to \mathbb{R}$*,* Ω *intorno aperto di* $\bar{x}$*. Sia* $P \subset \Omega$ *intorno chiuso e limitato di* $\bar{x}$*, positivamente invariante tale che non*

[2] non entriamo nei dettagli di una definizione rigorosa di normale esterna, il lettore interessato può consultare [4]

esista nessuna soluzione definita su $\mathbb{R}$ contenuta in $P \setminus \{\bar{x}\}$ su cui V sia costante. Allora $\bar{x}$ è LAS e $P \subset \mathcal{B}(\bar{x})$.

Definizione 12.5 (sistemi dissipativi, attrattori)**.** Un sistema dissipativo ammette un unico attrattore globale.

Definizione 12.6 (Varietà stabili e instabili)**.** Sia U un intorno di un punto di equilibrio $z_0 = (x_0, y_0)$ per il sistema in $\mathbb{R}^2$ dato da $\dot{z} = \vec{F}(z)$ con $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$, $\vec{F} \in C^1$. Indicato con $\phi_t(z)$ il flusso di tale sistema, definiamo le varietà stabili e instabili locali ponendo:

$$W^s_U(z_0) = \{z \in U : \phi_t(z) \in U \text{ per } t \geq 0, \lim_{t\to+\infty} \phi_t(z) = z_0\}$$

$$W^u_U(z_0) = \{z \in U : \phi_t(z) \in U \text{ per } t \leq 0, \lim_{t\to-\infty} \phi_t(z) = z_0\}$$

Se z_0 è un punto di sella, localmente tali varietà sono grafici di funzioni regolari.

Definizione 12.7 (Soluzioni periodiche)**.** Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una funzione. Diremo che $t \mapsto x(t)$ è una funzione *periodica* esiste $T > 0$ tale che per ogni t valga $x(t+T) = x(t)$. Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funzione periodica, poniamo $T_0 = \inf\{T > 0 : x(t+T) = x(t) \text{ per ogni } t\}$. Se $T_0 \neq 0$ diremo che $t \mapsto x(t)$ è periodica di periodo T_0, altrimenti se $T_0 = 0$ si ha che $t \mapsto x(t)$ è costante.

Teorema 12.5 (della curva di Jordan)**.** *Una curva chiusa in $\mathbb{R}^2$ che non si autointerseca separa $\mathbb{R}^n$ in due componenti connesse: una limitata (detta* interno *della curva) e una illimitata (detta* esterno *della curva).*

Teorema 12.6 (Poincaré-Bendixson)**.** *Nel piano $\mathbb{R}^2$ gli insiemi α-limite ed ω-limite non vuoti e compatti che non contengono punti di equilibrio sono orbite periodiche. Una regione invariante limitata che non contenga punti di equilibrio deve contenere (almeno) un ciclo limite.*

Definizione 12.8. Un insieme $\Omega\mathbb{R}^n$ si dice *connesso* se non esistono due chiusi $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ e $\Omega = (C_1 \cap \Omega) \cup (C_2 \cap \Omega)$. Se $n = 1$, un connesso è un intervallo.
Un insieme connesso $\Omega\mathbb{R}^n$ si dice *semplicemente connesso* se per ogni curva $\gamma : [0,1] \to \Omega$ esiste un elemento $z_\gamma \in \Omega$ e una funzione continua (detta *omotopia*) $H_\gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tale che $H_\gamma(t,0) = \gamma(t)$ e $H(t,1) = z_\gamma$. Si noti che $H(t,s) \in \Omega$ per ogni $t, s \in [0,1]$.

Definizione 12.9. Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione C^1. La divergenza di $\vec{F}$ è definita per ogni $x \in \Omega$ da

$$\operatorname{div} \vec{F}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x),$$

se $\vec{F}(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. In particolare, in $\mathbb{R}^2$ se $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x,y) = \partial_x f(x,y) + \partial_y g(x,y)$.

Teorema 12.7 (Dulac)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto di classe C^1 semplicemente connesso. Consideriamo $\dot{z} = \vec{F}(z)$ con $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1. Se $\operatorname{div} \vec{F}(z) > 0$ per ogni $z \in \Omega$ oppure $\operatorname{div} \vec{F}(z) < 0$ per ogni $z \in \Omega$ allora il sistema non ammette alcuna orbita periodica completamente contenuta in Ω.*

Corollario 12.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto di classe C^1 semplicemente connesso. Consideriamo $\dot{z} = \vec{F}(z)$ con $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1. Supponiamo esista $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\rho \in C^1$ tale che $\operatorname{div}(\rho\vec{F})(z) > 0$ per ogni $z \in \Omega$ oppure $\operatorname{div}(\rho\vec{F})(z) < 0$ per ogni $z \in \Omega$. Allora il sistema non ammette alcuna orbita periodica completamente contenuta in Ω.*

Definizione 12.10 (Equivalenza topologica)**.** Due sistemi in $\mathbb{R}^2$ definiti da $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$ definiti rispettivamente sui sottinsiemi U e V di $\mathbb{R}^2$ si dicono topologicamente equivalenti se esiste un omeomorfismo $\psi : U \to V$ tale che $\psi(\phi_t^f(x_0)) = \phi_t^g(\psi(x_0))$ per ogni $x_0 \in U$ e t tale che $\phi_t^f(x_0) \in U$, dove ϕ^f e ϕ^g sono i flussi relativi a f, g.

Teorema 12.8 (Grobman-Hartman)**.** *Sia dato il sistema nel piano $\dot{x} = f(x)$, sia x_0 punto di equilibrio iperbolico, ovvero $f(x_0) = (0,0)$ e per ogni autovalore λ di $\mathrm{Jac}(f)(x_0)$ si abbia $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$. Allora esiste un intorno di x_0 e un intorno di $(0,0)$ tale per cui il sistema nonlineare è topologicamente al sistema lineare $\dot{y} = \mathrm{Jac}(f)(x_0)y$.*

Definizione 12.11 (Biforcazione)**.** Sia $\alpha^* \in \mathbb{R}$ e consideriamo il sistema planare $\dot{x} = f(x, \alpha)$ dipendente da un parametro α che varia in un intorno di α^*. Diremo che α^* è un *punto di biforcazione*:

(1) *sella-nodo* se per $\alpha < \alpha^*$ il sistema ammette due punti di equilibrio, per $\alpha = \alpha^*$ esiste un solo punto di equilibrio e per $\alpha > \alpha^*$ non esistono punti di equilibrio.
(2) *a forcella* se per $\alpha \leq \alpha^*$ il sistema ammette un punto di equilibrio e per $\alpha > \alpha^*$ il sistema ne ammette due.
(3) *transcritica* se $\alpha < \alpha^*$ il sistema ammette due punti di equilibrio, uno stabile e l'altro instabile, mentre per $\alpha > \alpha^*$ le caratteristiche dei due equilibri si invertono (da stabile a instabile e viceversa).

13. Esercizi terza settimana

Esercizio 13.1. Si determinino e studino i punti di equilibrio dei seguenti sistemi:

(1) $\dot{x} = y - x^2$, $\dot{y} = x - y$.

(2) $\dot{x} = \sin x(\alpha + \cos y)$, $\dot{y} = \sin y(\alpha - \cos x)$, al variare di $\alpha \in \mathbb{Z}$.

(3) $\dot{x} = -2x + y - x^3$, $\dot{y} = -y + x^2$.
(4) $\dot{x} = \alpha + x^2$, $\dot{y} = -y$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(5) $\dot{x} = \alpha x - y$, $\alpha x + \alpha y$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(6) $\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - \alpha)$, $\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - \alpha)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

14. Alcuni esercizi svolti

Esercizio 14.1. Si studi qualitativamente $\dot{x} = e^{t-x}/x$, $x(\alpha) = 1$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. La retta $x = 0$ è una retta di punti di non differenziabilità per le soluzioni, infatti:

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{e^{t-x}}{x} = \pm\infty$$

Una soluzione con condizione iniziale $x(\alpha) = 1$ rimarrà quindi confinata nel semipiano $x \geq 0$ Se $x \neq 0$ si ottiene $xe^x\dot{x} = e^t$ da cui, integrando,

$$\int_1^{x(t)} xe^x \, dx = \int_\alpha^t e^t \, dt = e^t - e^\alpha.$$

Si ha, per parti:

$$\int_1^{x(t)} xe^x \, dx = [xe^x]_1^{x(t)} - \int_1^{x(t)} e^x \, dx = (x(t) - 1)e^{x(t)}.$$

Pertanto le soluzioni sono descritte in forma implicita dall'equazione:

$$e^t = (x-1)e^x + e^\alpha.$$

Quindi se $(x-1)e^x + e^\alpha > 0$ si ha $t = \log((x-1)e^x + e^\alpha)$. Poniamo $g(x) = (x-1)e^x + e^\alpha$, si ha $g'(x) = xe^x$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ Per $x > 0$ quindi g è strettamente monotona crescente e il suo minimo è assunto in 0 e vale $e^\alpha - 1$.

i. Se $\alpha > 0$ si ha che $e^\alpha - 1 > 0$, quindi $g(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$. In particolare si ha $t = \log g(x)$ per ogni $x \geq 0$ e posto

$$t_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \log g(x) = \log(e^\alpha - 1)$$

si ha che t_α è finito e rappresenta il tempo in cui la soluzione che parte da $x(\alpha) = 1$ impiega per raggiungere l'asse $x = 0$. Si osservi che per $t_\alpha < \alpha$ (per $t < t_\alpha$ la soluzione non è definita). Per la stretta monotonia di g e del logaritmo, anche $t = \log g(x)$ è strettamente monotona, pertanto la soluzione $x(t)$, inversa di tale funzione, è strettamente monotona.

ii. Se $\alpha = 0$ si ha che $g(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$ e $g(0) = 0$ e posto

$$t_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \log g(x) = -\infty$$

e quindi la soluzione $x(t)$ raggiunge l'asse $x = 0$ asintoticamente per $t \to -\infty$. Per la stretta monotonia di g e del logaritmo, anche $t = \log g(x)$ è strettamente monotona, pertanto la soluzione $x(t)$, inversa di tale funzione, è strettamente monotona.

iii. Se $\alpha < 0$ allora il minimo di g è negativo, pertanto dal momento che g è monotona crescente e non limitata esiste un'unico valore x^* tale per cui $g(x^*) = 0$, tale valore soddisfa $(x^* - 1)e^{x^*} = -e^\alpha$ e necessariamente si ha $0 < x^* < 1$ perché $e^\alpha > 0$. Si ha che $g(x) > 0$ per $x > x^*$ e

$$t^* = \lim_{x\to(x^*)^+} \log g(x) = -\infty$$

pertanto la soluzione tende asintoticamente per $t \to -\infty$ al valore x^*.

Riassumendo: la soluzione è sempre strettamente monotona crescente nel suo intervallo di definizione. Essa è definita per ogni $t \geq \alpha$ e il suo limite per $t \to +\infty$ è $+\infty$. Se $\alpha > 0$, essa è definita in $]\log(e^\alpha - 1), +\infty[$ e il suo limite per $t \to t_\alpha^+ = \log(e^\alpha - 1)^+$ vale 0 (si noti che $t_\alpha < t$). Se $\alpha = 0$, essa è definita in tutto $\mathbb{R}$ e il suo limite per $t \to -\infty$ è 0. Se $\alpha < 0$, essa è definita in tutto $\mathbb{R}$ e il suo limite per $t \to -\infty$ è $0 < x^* < 1$, dove x^* è l'unico punto che soddisfi $(x^* - 1)e^{x^*} = -e^\alpha$.

Esercizio 14.2. Si studi qualitativamente $\dot{x} = x^2/(1 - tx)$, $x(0) = \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. La curva $tx = 1$ è una curva di nondifferenziabilità, pertanto una soluzione con condizioni iniziali $x(0) = \alpha$ deve rimanere contenuta nella regione $tx < 1$. Osserviamo inoltre che posto $s = -t$ e $y(s) = -x(s)$ si ha:

$$\frac{dy}{ds}(s) = -\frac{dx}{dt}(-t)\frac{dt}{ds} = \dot{x}(-t) = \frac{x^2(-t)}{1 - tx(-t)} = \frac{x^2(s)}{1 + sx(s)} = \frac{y^2(s)}{1 - sy(s)},$$

pertanto le soluzioni sono simmetriche rispetto all'origine. E' sufficiente quindi limitarsi al caso $\alpha \geq 0$. Nella regione $tx < 1$ vale il teorema di esistenza e unicità locale, quindi l'unica soluzione corrispondente ad $\alpha = 0$ è la soluzione identicamente nulla. Nella regione di definizione, la soluzione è strettamente monotona crescente. In particolare, esiste un tempo $0 < t_\alpha < +\infty$

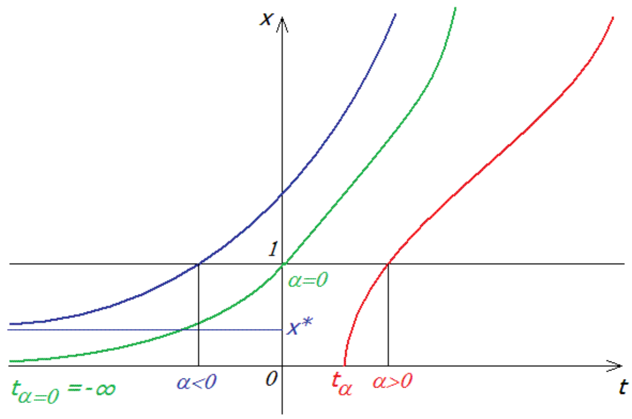

FIGURA 1. Lo studio di $\dot{x} = e^{t-x}/x$, $x(\alpha) = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

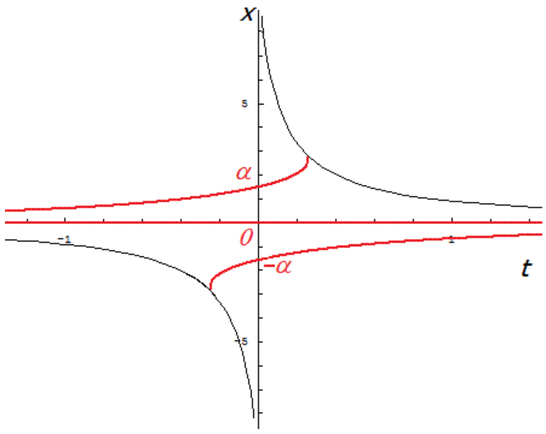

FIGURA 2. Lo studio di $\dot{x} = x^2/(1 - tx)$, $x(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

finito in cui incontra il ramo di iperbole $tx = 1$ nel primo quadrante e quindi risulta definita per $-\infty \leq t \leq t_\alpha$ perché limitata dal basso dalla funzione identicamente nulla che non può incontrare per il teorema di esistenza e unicità. Poiché per $0 < x < 1$, $t < 0$ si ha:

$$g(t,x) = \frac{x^2}{1-tx} = \frac{x^2}{1+|t|x} > \frac{x^2}{1+|t|} = \frac{x^2}{1-t} = f(t,x)$$

per ogni $\varepsilon > 0$ la soluzione del problema $\dot{y} = f(t,y)$, $y(0) = \alpha + \varepsilon$ è maggiore o uguale alla soluzione del problema $\dot{x} = g(t,x)$ in $]-\infty, 0]$ (si ricordi che si sta studiando il problema *all' indietro*, quindi per $t < 0$, è per questo che vale la stima). Si ha:

$$\int_\alpha^{\bar{y}} \frac{dy}{y^2} = \int_0^{-\infty} \frac{dt}{1-t} = +\infty$$

da cui necessariamente $\bar{y} = 0$, pertanto per $t \to -\infty$ si ha $0 < x(t) \leq y(t) \to 0$ e quindi la soluzione $x(t)$ tende asintoticamente a 0 per $t \to -\infty$. Il grafico della soluzione con condizione iniziale $\alpha < 0$ si ottiene prendendo il simmetrico rispetto all'origine di quello della soluzione con condizione iniziale $-\alpha > 0$.

Riferimenti bibliografici

[1] Linda J.S. Allen, *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson Education, Upper Saddle River, NJ 07458, 2007.
[2] Giuseppe De Marco, *Analisi 1*, Decibel Zanichelli, Padova, 1993.
[3] ______, *Analisi 2/1*, Decibel Zanichelli, Padova, 1993.
[4] ______, *Analisi 2/2*, Decibel Zanichelli, Padova, 1993.
[5] Giuseppe Gaeta, *Modelli matematici in Biologia*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2007.
[6] Marco Squassina and Simone Zuccher, *Introduzione allo studio qualitativo delle equazioni ordinarie*, Apogeo, Milano, 2008.

Dipartimento di Informatica, Università di Verona

Strada Le Grazie 15 - I-37134 Verona, Italy.
E-mail address: antonio.marigonda@univr.it