Prof. Lidia Angeleri, Dr. Jorge Vitória
Università di Verona, 2015/2016
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 1
6 ottobre 2015

1. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere o false e si giustifichi la risposta.
   (a) **(2 punti)** Sia X un insieme e sia G l'insieme delle parti di X. Si consideri l'operazione $*$ in G definita, per ogni $Y,Z \in G$, dalla formula $Y * Z = (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z)$. Allora, $(G,*)$ è un gruppo abeliano.
   (b) **(2 punti)** $G = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R},+)$, dove $+$ indica l'usale somma dei numeri reali.
   (c) **(2 punti)** Sia G l'insieme delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ e determinante in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Allora, G è un sottogruppo del gruppo $(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$, dove $\cdot$ indica l'usuale prodotto di matrici.
   (d) **(2 punti)** Sia $SL(2,\mathbb{Z})$ l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}$ e determinante 1. Allora, $(SL(2,\mathbb{Z}),\cdot)$ è un sottogruppo normale del gruppo $(GL(2,\mathbb{R}),\cdot)$, dove $\cdot$ indica l'usuale prodotto di matrici.

2. Si consideri S_4, il gruppo simmetrico su 4 oggetti:
$$S_4 = \{id,(12),(34),(14),(13),(24),(23),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),$$
$$(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$$
   Si consideri anche il suo sottoinsieme
$$H = \{id,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}.$$
   (a) **(2 punti)** Si verifichi che H è un sottogruppo abeliano di S_4;
   (b) **(2 punti)** Si dimostri che H non è isomorfo al gruppo ciclico $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;
   (c) **(3 punti)** Si dimostri che qualsiasi gruppo di ordine 4 tali che tutti gli elementi hanno ordine 2 è isomorfo a H.
   (d) **(2 punti)** Si concluda che qualsiasi gruppo di ordine 4 è isomorfo a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ o a H.
   (e) **(3 punti)** Si calcolino i laterali destri e sinistri di S_4 modulo H e si concluda che H è un sottogruppo normale di S_4 (si ricordi che ogni laterale ha precisamente 4 elementi!).
   (f) **(4 punti)** Si costruisca un isomorfismo tra S_3 e S_4/H.

3. (a) **(3 punti)** Si dimostri che la funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ definisce un omomorfismo di gruppi $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\},\cdot)$ e si determini il suo nucleo e la sua imagine.
   (b) **(3 punti)** Sia $(G,*)$ un gruppo e g un'elemento di G. Si consideri l'applicazione $\phi_g : G \to G$ definita dalla formula $\phi_g(x) = g^{-1} * x * g$. Si dimostri che ϕ_g é un omomorfismo e che il suo nucleo è l'insieme
$$G_g := \{x \in G : x * g = g\},$$
   chiamato lo **stabilizzatore di** g.

Consegna: martedí 13 ottobre, 15:30, all'inizio delle esercitazioni