



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI VERONA

# LABORATORIO DI PROBABILITA' E STATISTICA

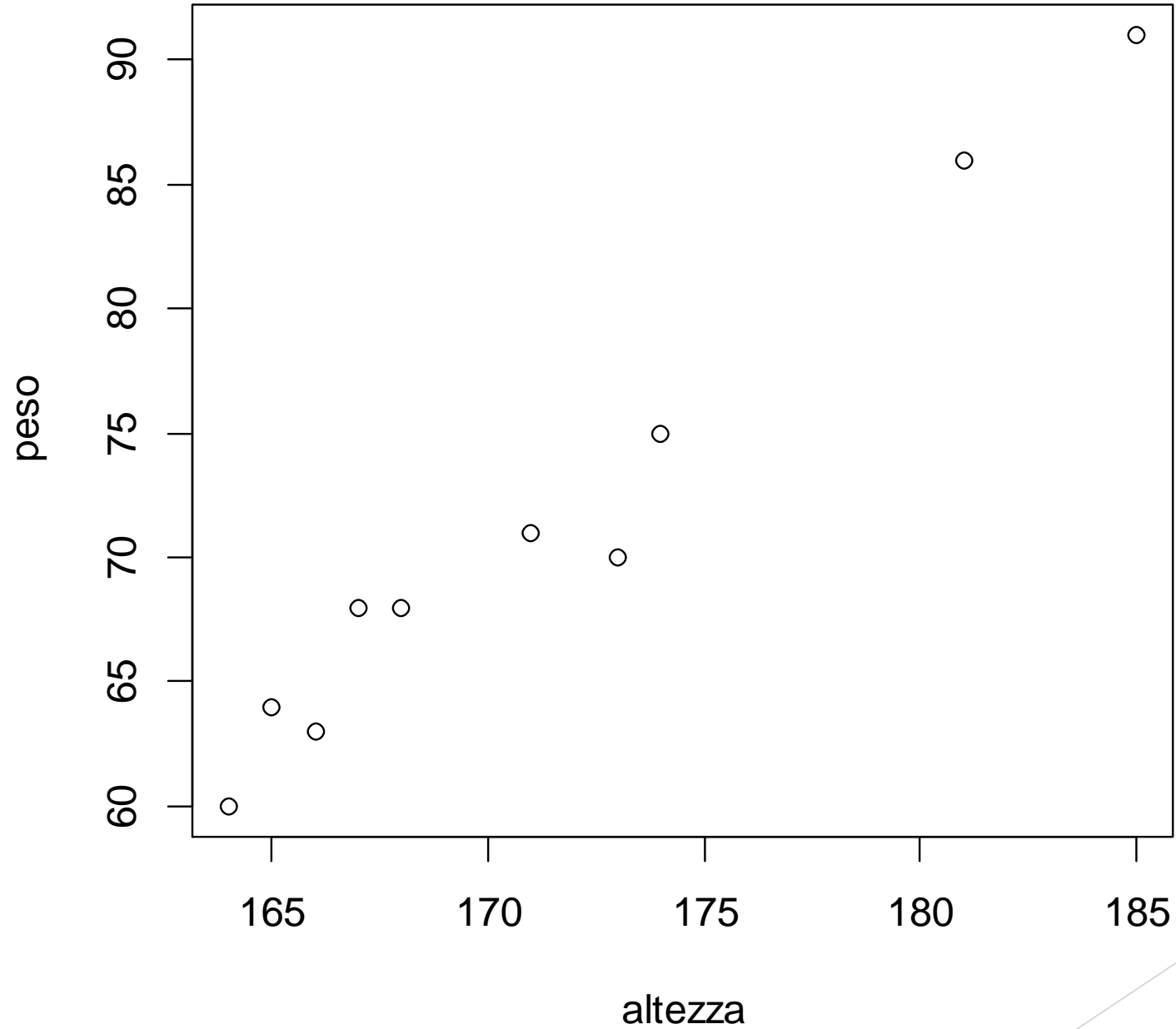
Docente: Bruno Gobbi

## 3 - LA REGRESSIONE LINEARE

## ES. STUDIO RELAZIONE ALTEZZA - PESO

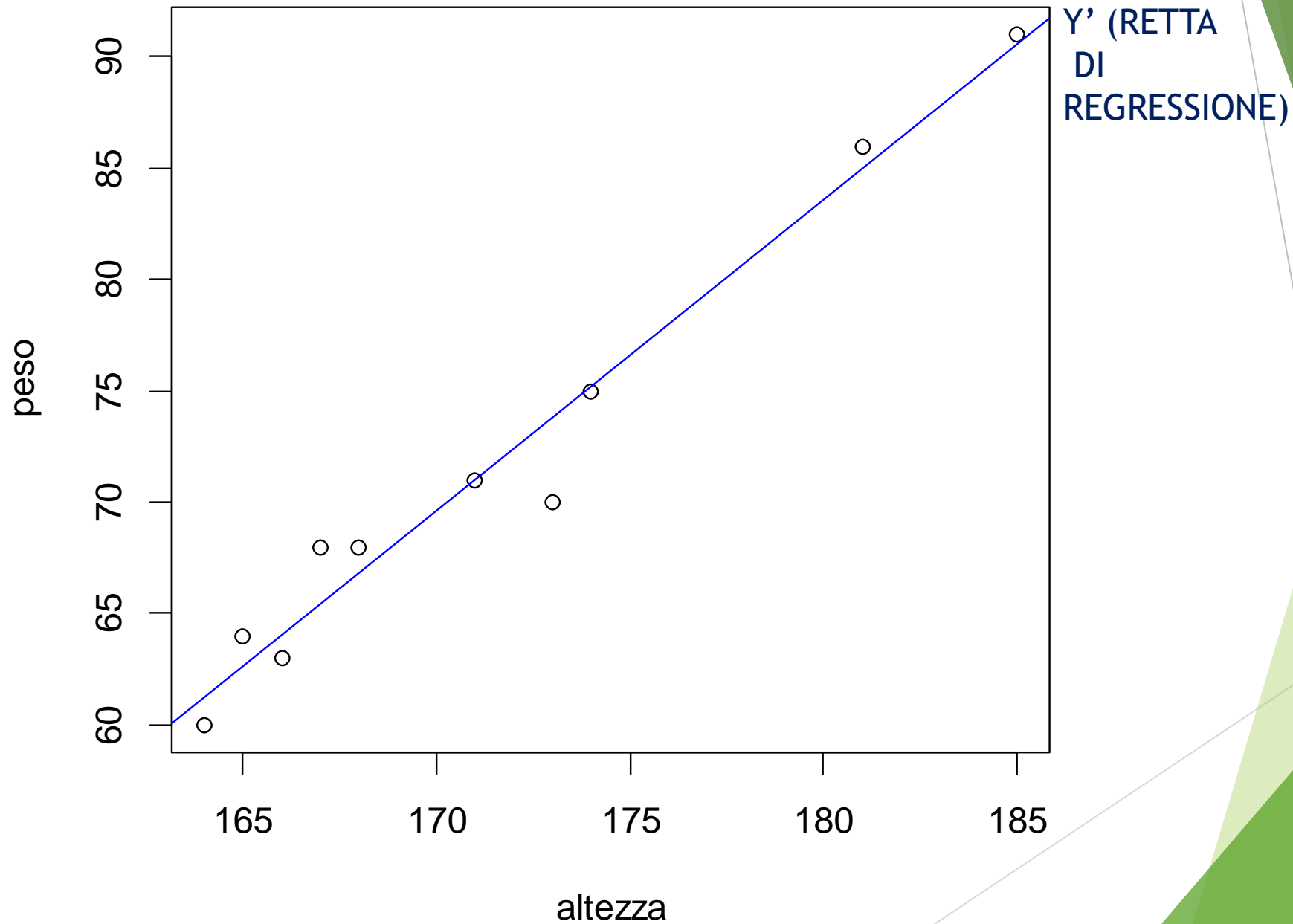
Soggetto	Altezza	Peso
A	174	75
B	166	63
C	173	70
D	171	71
E	168	68
F	167	68
G	165	64
H	164	60
I	181	86
L	185	91

# I VARI PUNTI SONO LE MISURAZIONI EFFETTUATE SU PESO E ALTEZZA DI 10 PERSONE

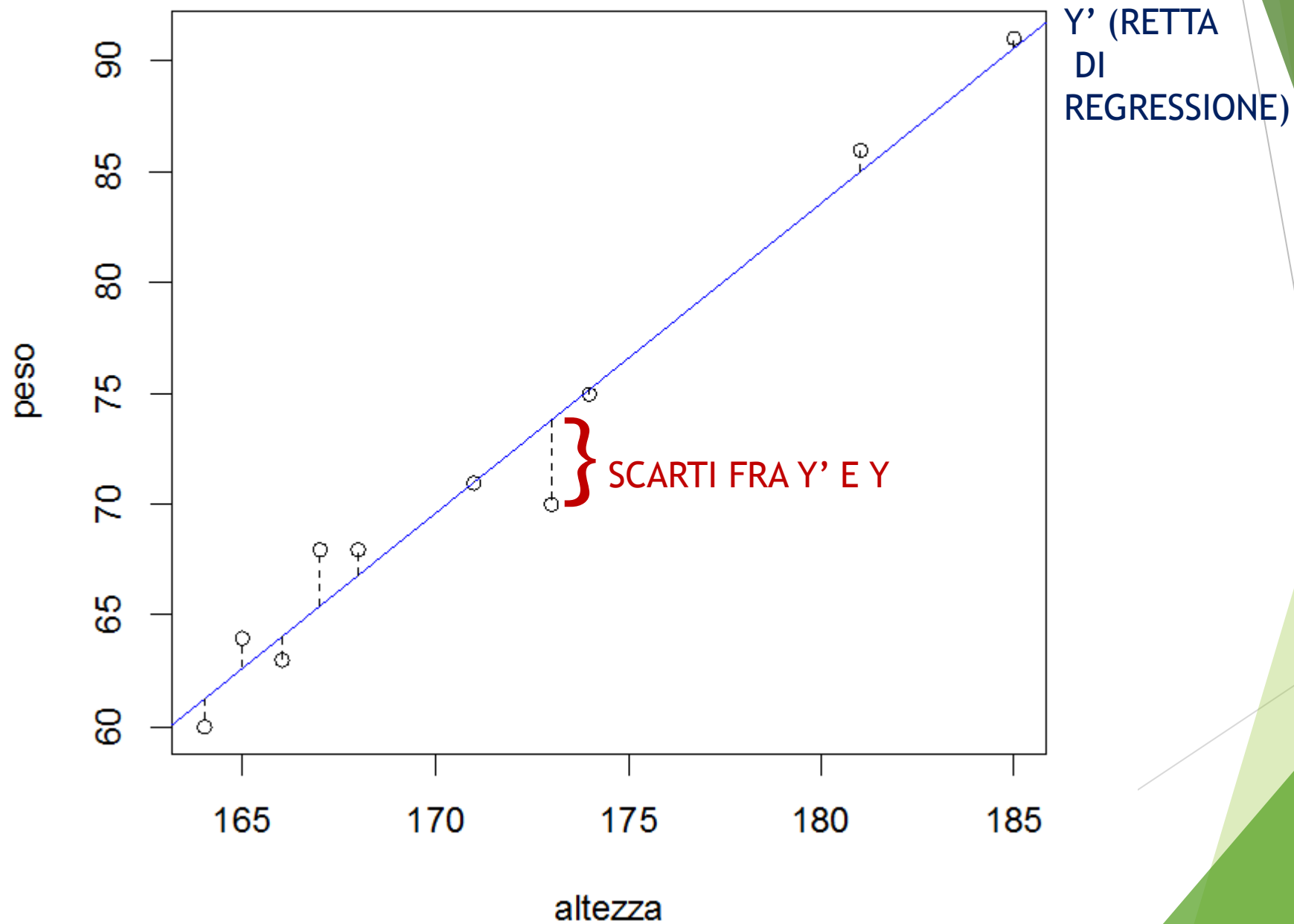


Soggetto	Altezza	Peso
A	174	75
B	166	63
C	173	70
D	171	71
E	168	68
F	167	68
G	165	64
H	164	60
I	181	86
L	185	91

# CERCO DI INTERPOLARE CON UNA RETTA $Y' = a + bX$



# MISURO GLI SCARTI FRA $Y'$ (RETTA) E $Y$ (OSSERVAZIONI)



# METODO DEI MINIMI QUADRATI

- ▶ BISOGNA TROVARE QUELLA FUNZIONE  $Y'$  CHE "INTERPOLA" AL MEGLIO I DATI OSSERVATI  $Y$
- ▶ IN QUESTO CASO  $Y'$  SARA' UNA RETTA DEL TIPO:

$$Y' = a + b X$$

# METODO DEI MINIMI QUADRATI

- ▶ DOMANDA: QUALI PARAMETRI “a” E “b” PER LA RETTA  $Y' = a + bX$ ?
- ▶ LA SCELTA RICADE SU QUELLI CHE DISEGNANO LA FUNZIONE CHE RENDE MINIMA LA SOMMA DEGLI SCARTI FRA  $Y'$  (MODELLO TEORICO/RETTE) E LE VARIE  $Y$  (OSSERVAZIONI)

$$\min \Sigma (Y' - Y)$$

- ▶ GRAFICAMENTE GLI SCARTI SONO I SEGMENTI TRATTEGGIATI FRA LA RETTA E I SINGOLI PUNTI OSSERVATI
- ▶ POICHE' CI POSSONO ESSERE DEGLI SCARTI CON VALORI POSITIVI O NEGATIVI FRA  $Y'$  E  $Y$ , SI USA IL QUADRATO DEGLI SCARTI

$$\min \Sigma (Y' - Y)^2$$

# METODO DEI MINIMI QUADRATI

- ▶ AL FINE DI MINIMIZZARE LA SOMMA DEI QUADRATI DEGLI SCARTI FRA  $Y'$  E  $Y$ , IL METODO MATEMATICO DA SEGUIRE E' QUELLO DI CALCOLARE LA DERIVATA PRIMA DI QUESTA FUNZIONE E POI DI PORLA UGUALE A 0

$$\text{Der}(\min \Sigma (Y' - Y)^2) = 0$$

- ▶ SI OTTENGONO COSI' I PARAMETRI MIGLIORI PER LA FUNZIONE TEORICA, CHE NEL CASO DELLA RETTA SONO DATI DAL COEFFICIENTE ANGOLARE "b" E DALL'INTERSEZIONE CON L'ASSE DELLE ORDINATE "a".



# ES. STUDIO RELAZIONE ALTEZZA - PESO

Soggetto	Altezza	Peso
A	174	75
B	166	63
C	173	70
D	171	71
E	168	68
F	167	68
G	165	64
H	164	60
I	181	86
L	185	91

> altezza = c(174, 166, 173, 171, 168, 167, 165, 164, 181, 185)

> peso = c(75, 63, 70, 71, 68, 68, 64, 60, 86, 91)

# ES. STUDIO RELAZIONE ALTEZZA - PESO

# CREIAMO IL GRAFICO DELLE VARIABILI

```
> plot(altezza, peso)
```

# EFFETTIAMO LA REGRESSIONE LINEARE FRA PESO E ALTEZZA

# INVERTIRE L'ORDINE DELLE VARIABILI!!!

```
> retta = lm(peso ~ altezza) # lm = LINEAR MODEL
```

# PER DISEGNARE LA RETTA DI REGRESSIONE LINEARE

```
> abline (retta, col="blue") # (PARAMETRI DELLA RETTA, COLORE)
```

# PER AGGIUNGERE DEI SEGMENTI CHE COLLEGANO LA RETTA AI SINGOLI PUNTI

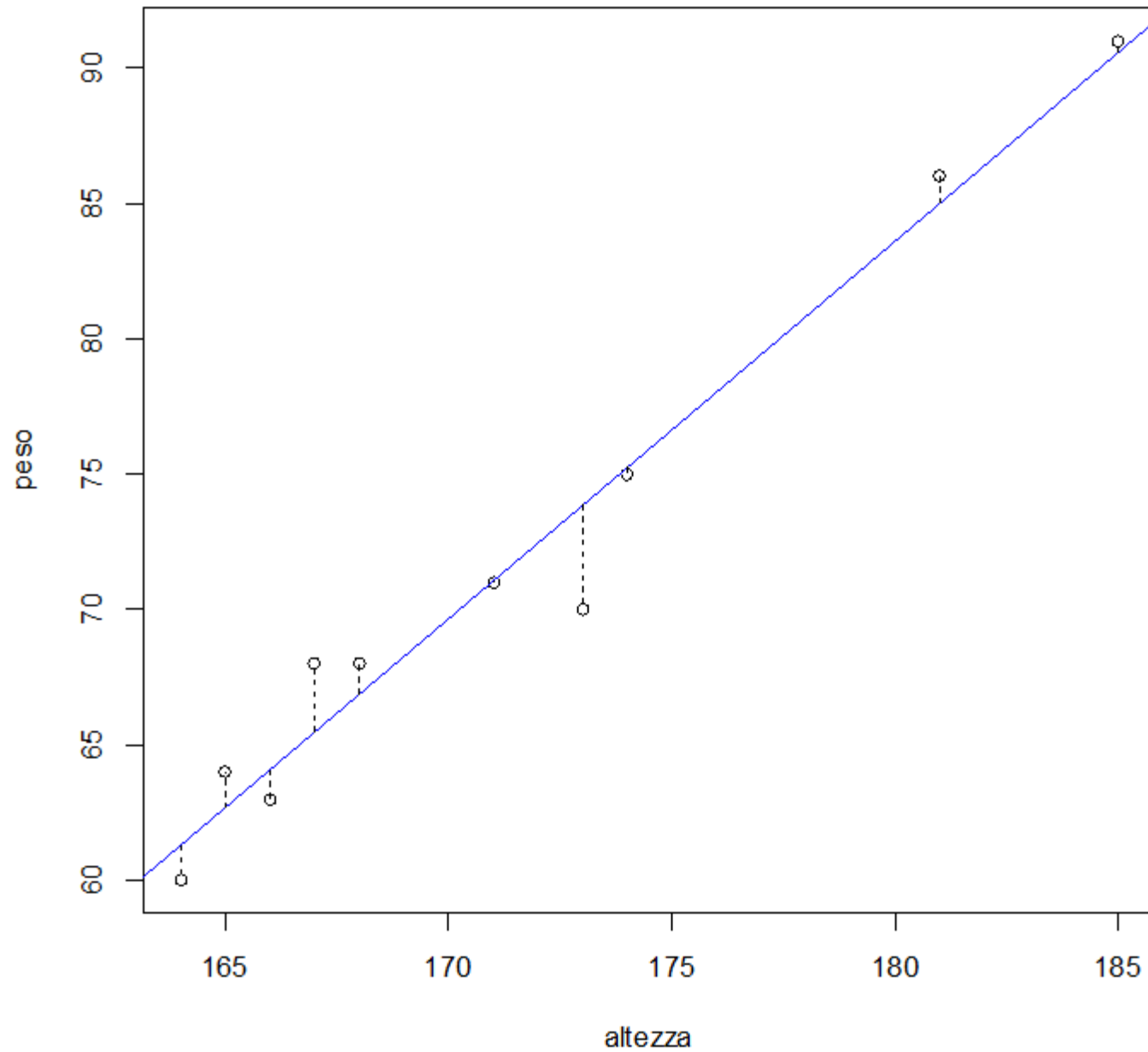
```
> segments(altezza, fitted(retta), altezza, peso, lty=2)
```

# (X DI PARTENZA, Y DI PARTENZA, X DI ARRIVO, Y DI ARRIVO, TIPO TRATTO)  
(lty=2 → TRATTEGGIATO)

```
> title (main="Regressione lineare fra peso e altezza")
```

Per scrivere la tilde ~ in  
Ubuntu premere:  
**ALT GR + `**

## Regressione lineare fra peso e altezza



# OUTPUT DI > summary(retta)

Call:

```
lm(formula = peso ~ altezza)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-3.8336	-0.8535	0.1863	1.1094	2.5425

} 1 parte

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	-167.67812	15.31583	-10.95	4.30e-06	***
altezza	1.39602	0.08929	15.63	2.79e-07	***

} 2 parte

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.878 on 8 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9683, Adjusted R-squared: 0.9643

F-statistic: 244.4 on 1 and 8 DF, p-value: 2.793e-07

} 3 parte

# PRIMA PARTE DELL'OUTPUT DI `> summary(retta)`

Call:

```
lm(formula = peso ~ altezza)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-3.8336	-0.8535	0.1863	1.1094	2.5425

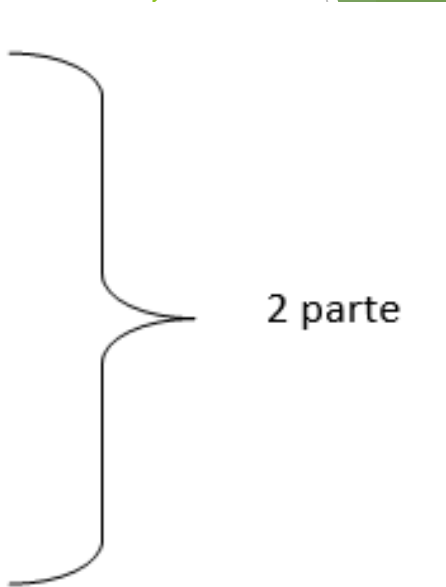
} 1 parte

Nella **prima parte** dei risultati è riportata la descrizione dei residui del modello, cioè della distanza che c'è fra la retta di regressione in blu e i singoli punti.

## SECONDA PARTE DELL'OUTPUT DI `> summary(retta)`

Coefficients:

```
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -167.67812   15.31583  -10.95 4.30e-06 ***
altezza      1.39602    0.08929   15.63 2.79e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



2 parte

Nella **seconda parte** sono riportati le stime dei coefficienti (Estimate). I coefficienti -167.67512 (riferito all'intercetta) e quello 1.39602 (riferito all'altezza) significano che il modello della retta di regressione ( $Y' = a + bX$ ) sarà:

$$\text{peso} = -167.67812 + 1.39602 * \text{altezza}$$

I valori di Std. Error indicano il margine di errore che si commette con questa retta per ogni coefficiente. I due successivi t value e PR(>|t|) indicano la significatività di questi coefficienti così stimati, ossia quanto sono affidabili come stime.

## TERZA PARTE DELL'OUTPUT DI `> summary(retta)`

Residual standard error: 1.878 on 8 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9683, Adjusted R-squared: 0.9643

F-statistic: 244.4 on 1 and 8 DF, p-value: 2.793e-07

} 3 parte

Nella **terza parte** sono riportati l'errore standard dei residui (Residual standard error) e la bontà di adattamento del modello  $R^2$  (Multiple R-Squared). Vedremo più avanti il significato di questo indicatore.

## ANALISI DEI RESIDUI

Al fine di valutare la bontà della regressione lineare che abbiamo condotto, risulta utile fare l'**analisi dei residui**, ossia delle distanze fra ogni punto osservato e la retta di regressione.

Questi residui dovrebbero avere il più possibile una **media nulla** (perché sommando le distanze “positive” sopra la retta e “negative” sotto la retta dovremmo avere un valore vicino a 0) e dovrebbero essere **incorrelati** fra di loro.



# ANALISI DEI RESIDUI

$$Y' = -167,67812 + 1,39602 * \text{Altezza}$$

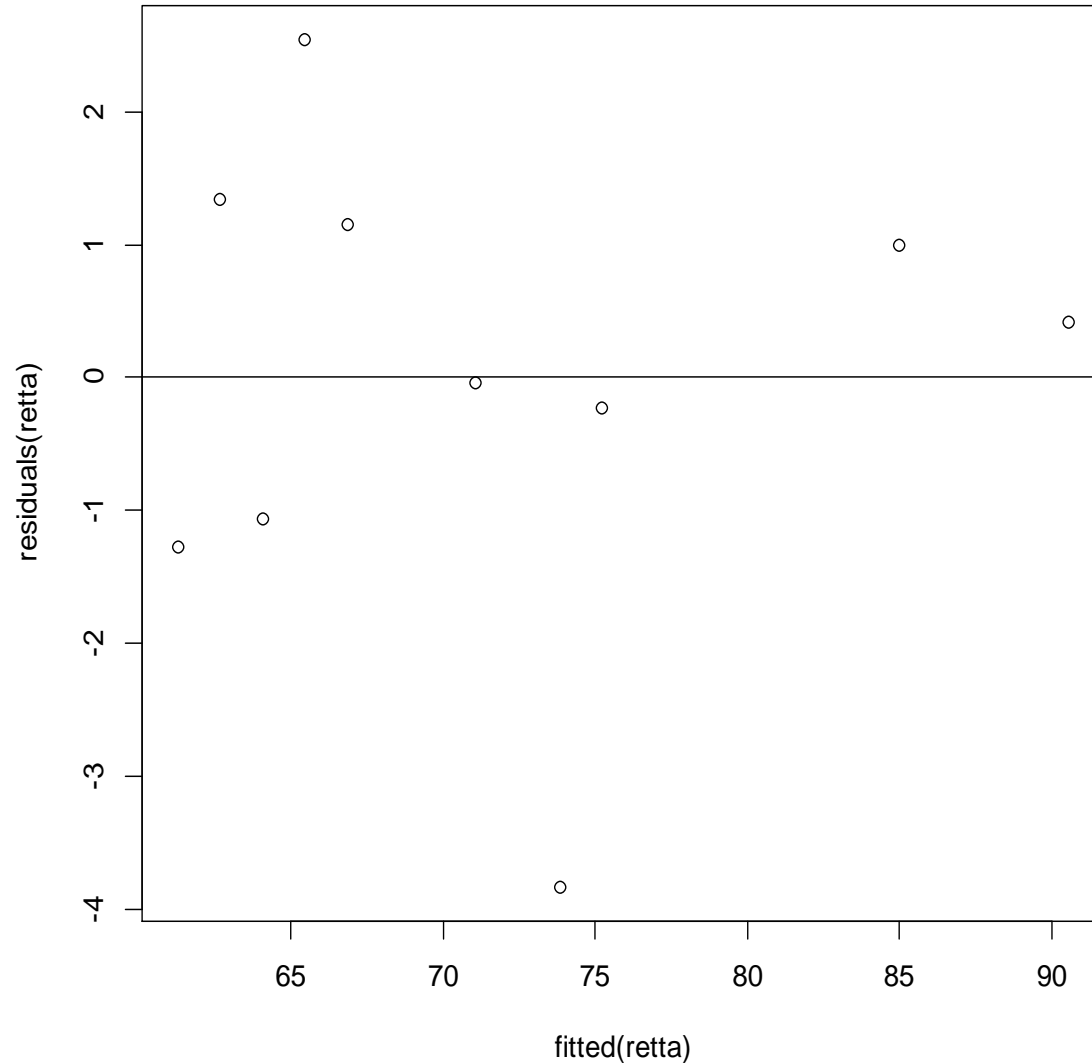
Altezza (X)	Peso (Y)	Y'	residui (Y-Y')
164	60	61,26916	-1,26916
165	64	62,66518	1,33482
166	63	64,0612	-1,0612
167	68	65,45722	2,54278
168	68	66,85324	1,14676
171	71	71,0413	-0,0413
173	70	73,83334	-3,83334
174	75	75,22936	-0,22936
181	86	85,0015	0,9985
185	91	90,58558	0,41442

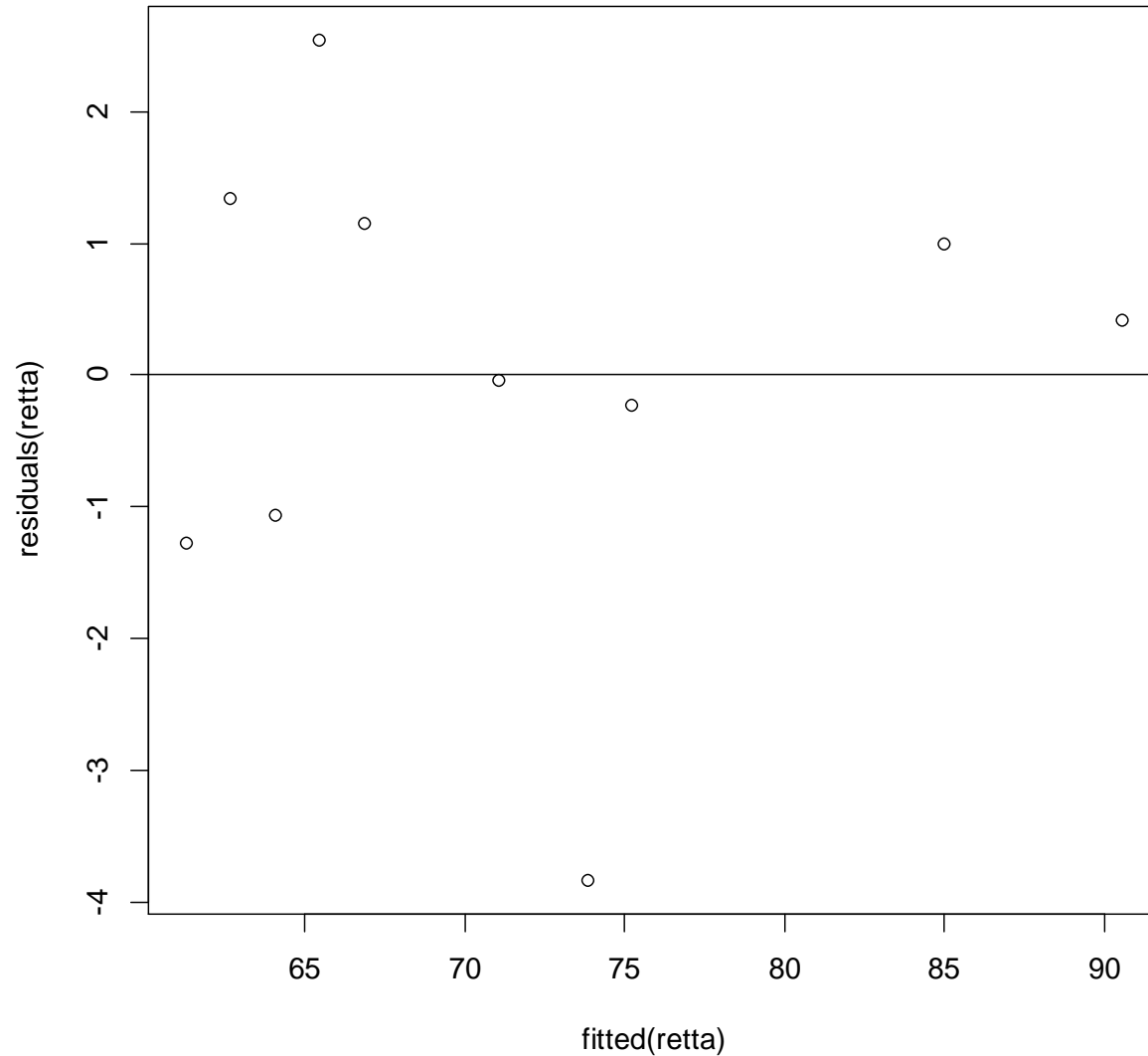
## # PER IL GRAFICO DEI RESIDUI

```
> plot(fitted(retta), residuals(retta))
```

## # PER DISEGNARE LA RETTA ORIZZONTALE DELLE ORDINATE ZERO

```
> abline(0, 0) # (INTERCETTA E COEFFICIENTE ANGOLARE)
```





**# IL GRAFICO CONFERMA L'IPOTESI DI DISTRIBUZIONE CASUALE DEI RESIDUI, PERCHÉ I VALORI SONO EQUIDISTRIBUITI INTORNO ALLA RETTA 0 E SONO PRESENTI SIA SOPRA CHE SOTTO DI ESSA.**

# IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE

- ▶ PER CALCOLARE IL TIPO DI RELAZIONE FRA I FENOMENI SI USA IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE:

$$R = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \rho$$

- ▶  $R =$  covarianza fra X e Y diviso s.q.m. di X per s.q.m. di Y
- ▶ SE  $R = -1 \rightarrow$  PERFETTA RELAZIONE LINEARE INVERSA
- ▶ SE  $R = 0 \rightarrow$  INDIPENDENZA LINEARE
- ▶ SE  $R = +1 \rightarrow$  PERFETTA RELAZIONE LINEARE DIRETTA

# IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE



$$R = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \rho$$

- ▶ IN Rstudio SI CALCOLA CON LA FUNZIONE DIRETTA:

$$R = \text{cor}(\text{peso}, \text{altezza})$$

- ▶ OPPURE SE PREFERIAMO SCRIVERE TUTTA LA FORMULA:

$$R = \text{var}(\text{peso}, \text{altezza}) / (\text{sd}(\text{peso}) * \text{sd}(\text{altezza}))$$

# IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE

► NEL NOSTRO ESEMPIO:

>  $R = \text{cor}(\text{peso}, \text{altezza})$

>  $R$

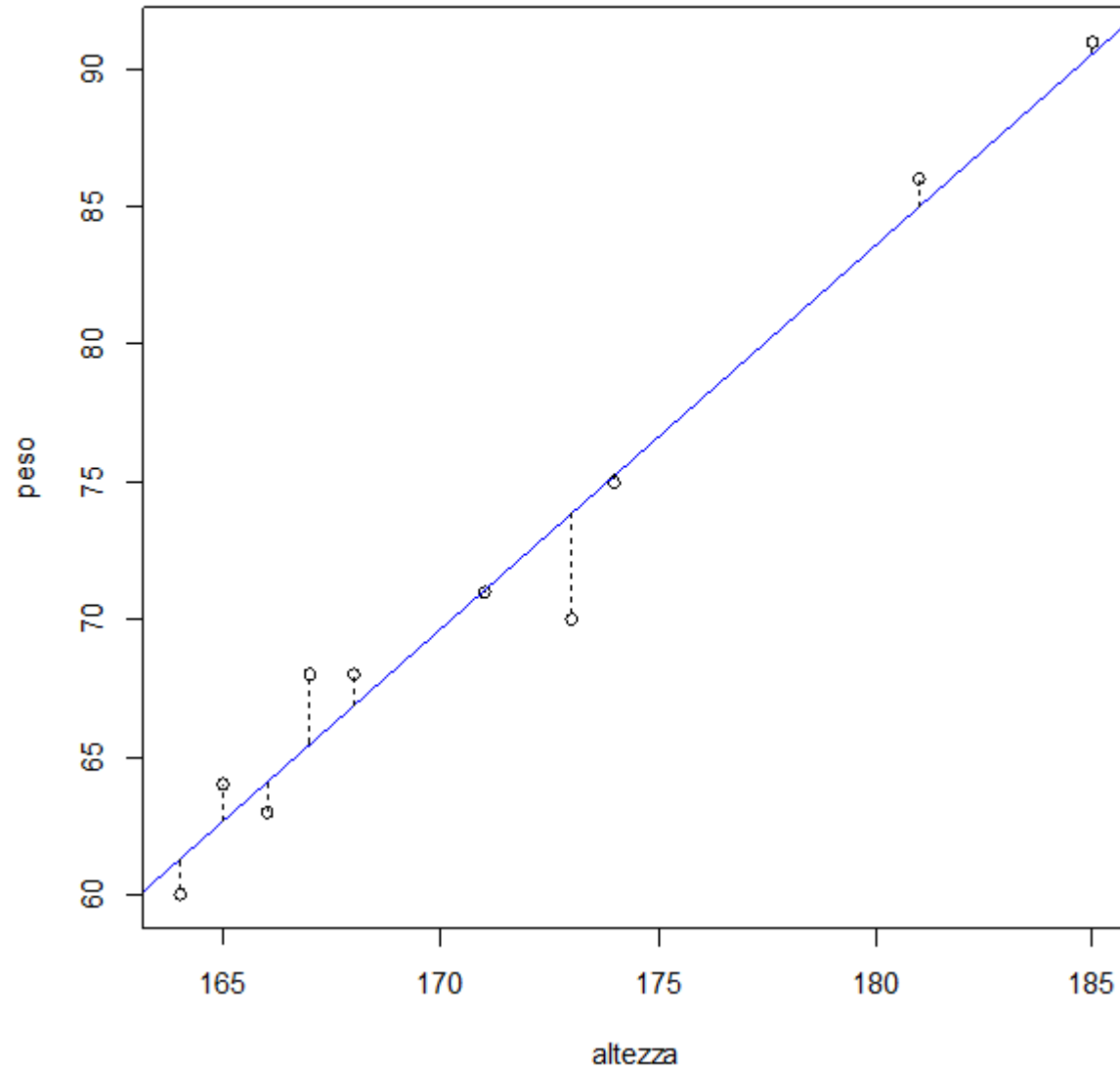
[1] 0.9840273

► DATO CHE IL VALORE DEL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE E' MOLTO VICINO A 1, ALLORA DICIAMO CHE C'E' UNA FORTE RELAZIONE LINEARE DIRETTA FRA I DUE FENOMENI.

► IN ALTRE PAROLE: AL CRESCERE DEL PESO, L'ALTEZZA CRESCE QUASI SEMPRE E LO FA IN MANIERA MOLTO SIMILE AL PESO.

# IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE

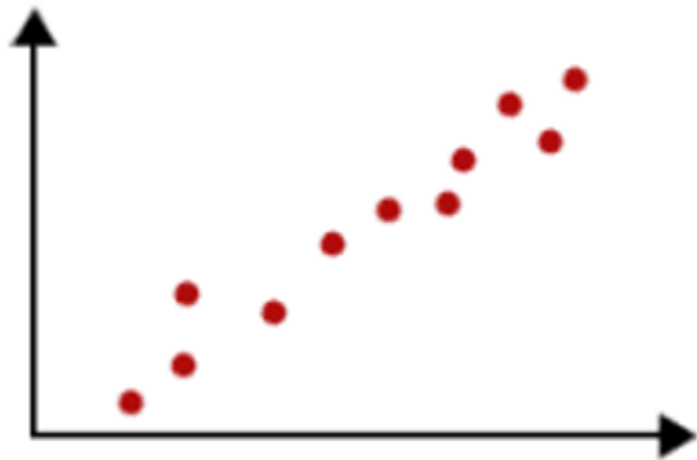
Regressione lineare fra peso e altezza



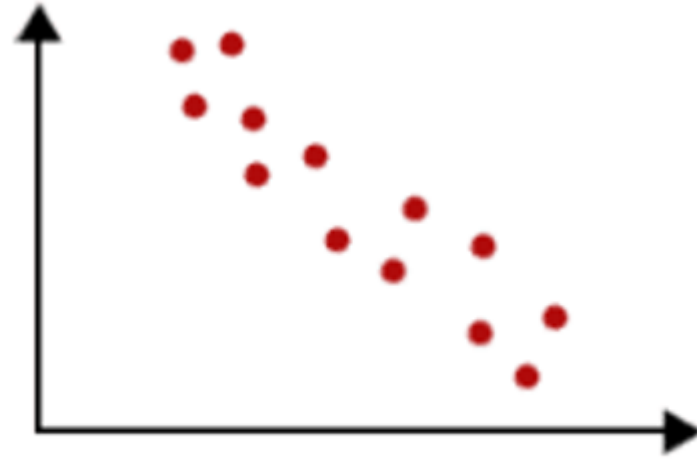
$$R = 0.9840273$$

FORTE RELAZIONE LINEARE  
DIRETTA

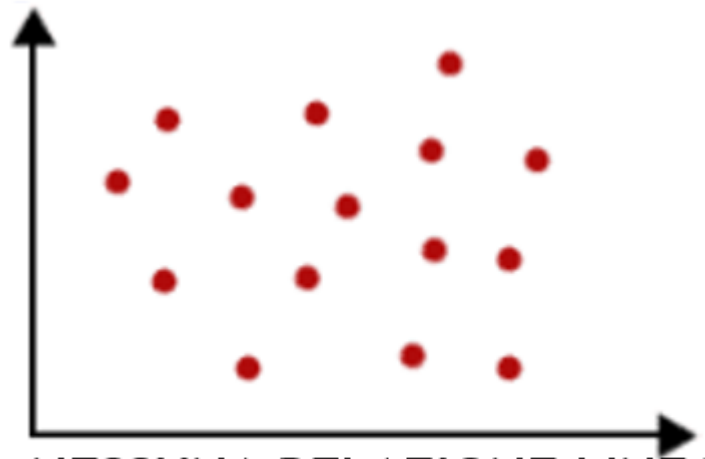
# ES. DI COEFFICIENTI DI CORRELAZIONE LINEARE



RELAZIONE LINEARE DIRETTA  
 $R \rightarrow 1$



RELAZIONE LINEARE INDIRETTA  
 $R \rightarrow -1$



NESSUNA RELAZIONE LINEARE  
 $R \rightarrow 0$



NESSUNA RELAZIONE LINEARE  
 $R \rightarrow 0$



# IL COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE: $R^2$

- ▶ AL FINE DI MISURARE QUANTO IL MODELLO TEORICO SIA BUONO (BONTA' DI ACCOSTAMENTO), SI USA IL COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE  $R^2$ :

$$R^2 = \frac{\sum(Y' - M(Y))^2}{\sum(Y - M(Y))^2} = \rho^2$$

ovvero

$$R^2 = \frac{\text{dev}(\text{Regressione})}{\text{dev}(\text{Totale})} = \rho^2$$

▶ QUESTO INDICATORE SI PUO' ANCHE CALCOLARE SEMPLICEMENTE FACENDO IL QUADRATO DEL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE "R" (CFR. ANCHE 3° PARTE OUTPUT)

# IL COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE : $R^2$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

- ▶ SE  $R^2 = 0$  IL MODELLO TEORICO  $Y'$  NON RIESCE A SPIEGARE NULLA DELLA VARIABILITA' DELLE OSSERVAZIONI  $Y$
- ▶ SE  $R^2 = 1$  IL MODELLO TEORICO  $Y'$  SPIEGA IN MANIERA PERFETTA LA VARIABILITA' DELLE OSSERVAZIONI  $Y$ 
  - IL MODELLO TEORICO ASSUME GLI STESSI VALORI DI  $Y$
  - $Y' = Y$

>  $R^2 = R^2$

[1] 0.9683098

# POICHE'  $R^2$  E' VICINO A 1, IL MODELLO TROVATO E' MOLTO BUONO E RIESCE A SPIEGARE QUASI COMPLETAMENTE LA VARIABILITA' DELLE  $Y$

## ES. STUDIO RELAZIONE ORE DI STUDIO - VOTO ESAME

Ore studio	Voto
30	10
50	18
40	16
85	30
60	20
80	28
70	26

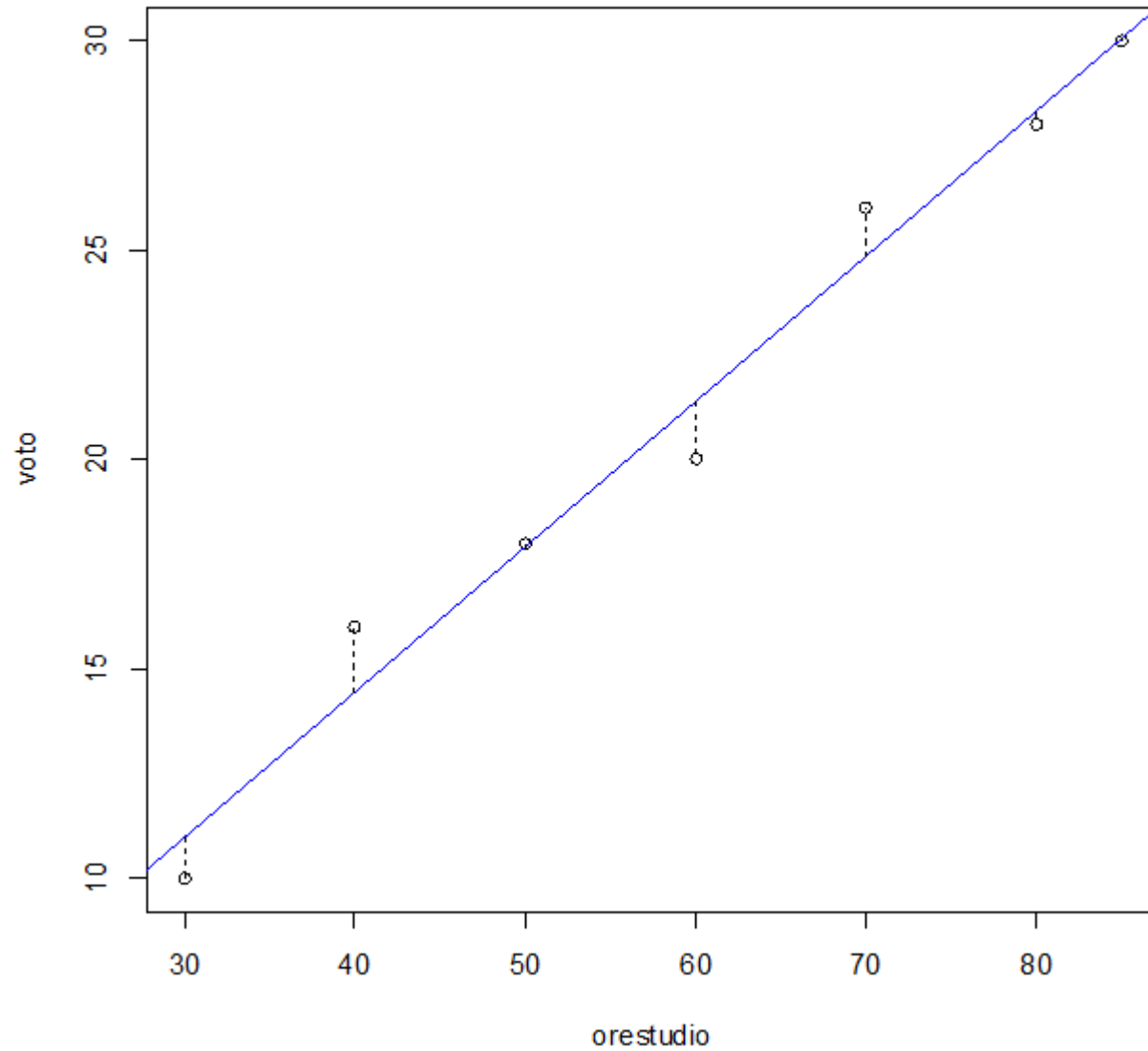
Studiare la relazione fra le Ore di studio e il Voto ottenuto all'esame di 7 studenti utilizzando la regressione lineare, disegnando il grafico, calcolando i parametri della retta interpolante, i residui con grafico, il coefficiente di correlazione lineare e giudicandone la bontà di accostamento.

## ES. STUDIO RELAZIONE ORE DI STUDIO - VOTO ESAME

```
> orestudio=c(30, 50, 40, 85, 60, 80, 70)
> voto=c(10, 18, 16, 30, 20, 28, 26)
> rettastat=lm(voto~orestudio)
> plot(orestudio, voto)
> abline(rettastat, col="blue")
> segments(orestudio, fitted(rettastat), orestudio, voto, lty=2)
> title(main="Regressione lineare fra Ore di studio e Voto in statistica")
```

# ES. STUDIO RELAZIONE ORE DI STUDIO - VOTO ESAME

Regressione lineare fra Ore di studio e Voto in statistica



# ES. STUDIO RELAZIONE ORE DI STUDIO - VOTO ESAME

```
> summary (rettastat)
```

Call:

```
lm(formula = voto ~ orestudio)
```

Residuals:

```
      1      2      3      4      5      6      7  
-0.97167 0.08215 1.55524 -0.07365 -1.39093 -0.33711 1.13598
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>  t )
(Intercept)	0.55241	1.43653	0.385	0.716
orestudio	0.34731	0.02308	15.050	2.35e-05 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.159 on 5 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9784, Adjusted R-squared: 0.9741

F-statistic: 226.5 on 1 and 5 DF, p-value: 2.346e-05

# ES. STUDIO RELAZIONE ORE DI STUDIO - VOTO ESAME

# I PARAMETRI TROVATI SONO  $a=0,55241$  E  $b=0,37431$

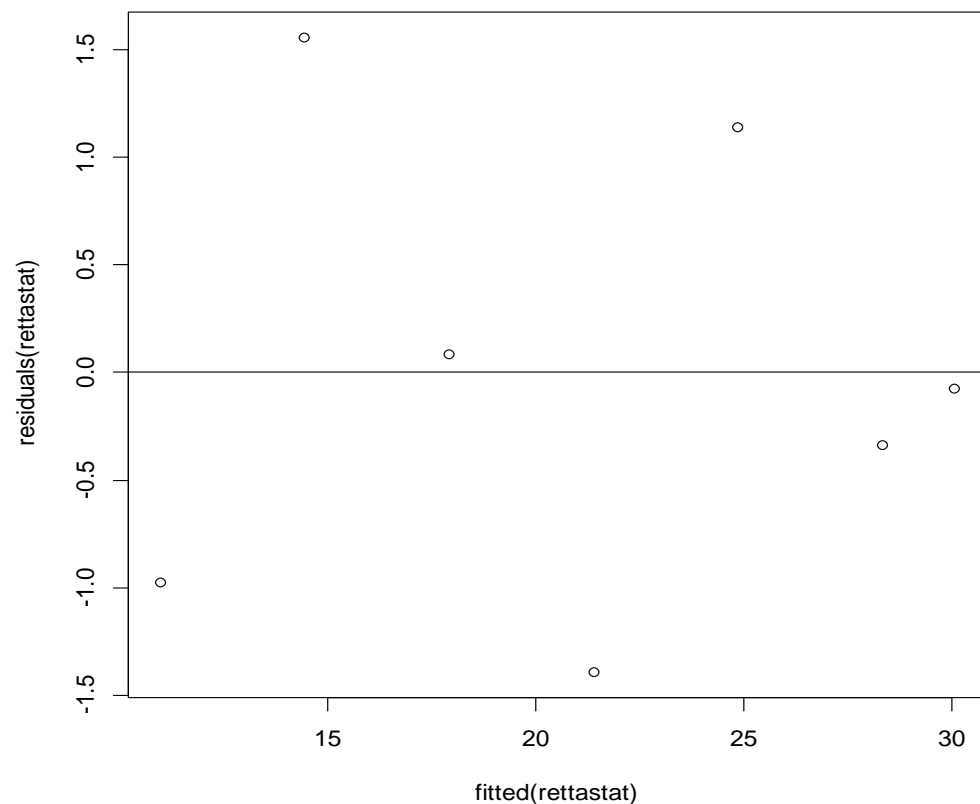
QUINDI IL MODELLO TEORICO SARA':

$$Y' = 0.55241 + 0.37431 * \text{orestudio}$$

# EFFETTIAMO L'ANALISI DEI RESIDUI

```
> plot(fitted(rettastat), residuals(rettastat))
```

```
> abline(0, 0)
```



L'analisi dei residui conferma che questi si distribuiscono in maniera uniforme e apparentemente casuale attorno all'asse zero, quindi si può confermare l'ipotesi di distribuzione casuale degli stessi, con media nulla e incorrelazione.

## ES. STUDIO RELAZIONE ORE DI STUDIO - VOTO ESAME

**# CALCOLIAMO IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE:**

```
> R=cor(orestudio, voto)
```

```
> R
```

```
[1] 0.9891421
```

**# POICHE' R E' MOLTO VICINO A 1 POSSIAMO AFFERMARE CHE C'E' UNA FORTE RELAZIONE LINEARE DIRETTA FRA LE DUE VARIABILI**

**# CALCOLIAMO IL COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE FACENDO IL QUADRATO DI R PER GIUDICARE LA BONTA' DI ACCOSTAMENTO:**

```
> R2=R^2
```

```
> R2
```

```
[1] 0.978402
```

**# DATO CHE R2 E' QUASI UGUALE A 1, DICIAMO CHE IL MODELLO TEORICO USATO SI ADATTA MOLTO BENE AI VALORI OSSERVATI A TITOLO DI VERIFICA, LO STESSO VALORE E' PRESENTE ANCHE NELLA TERZA PARTE DELL'OUTPUT DELLA summary**



# ES. LONGLEY - POPOLAZIONE E OCCUPATI

Utilizzando la serie storica di “longley”, presente nei dataset precaricati di RStudio (usare il comando “data()” per ottenerne una lista), analizzare la relazione fra le variabili:

- **Population** (per richiamare i dati: `pop=longley$Population`)
- **Employed** (per richiamare i dati: `occu=longley$Employed`)

Attraverso una regressione lineare determinare:

- Grafico del modello teorico  $Y' = a + bX$
- Coefficiente angolare e intersezione con l'asse delle ordinate della retta di regressione
- Analisi dei residui con relativo grafico
- Verificare il tipo di relazione con R
- Giudicare la bontà di accostamento

# ES. LONGLEY - POPOLAZIONE E OCCUPATI

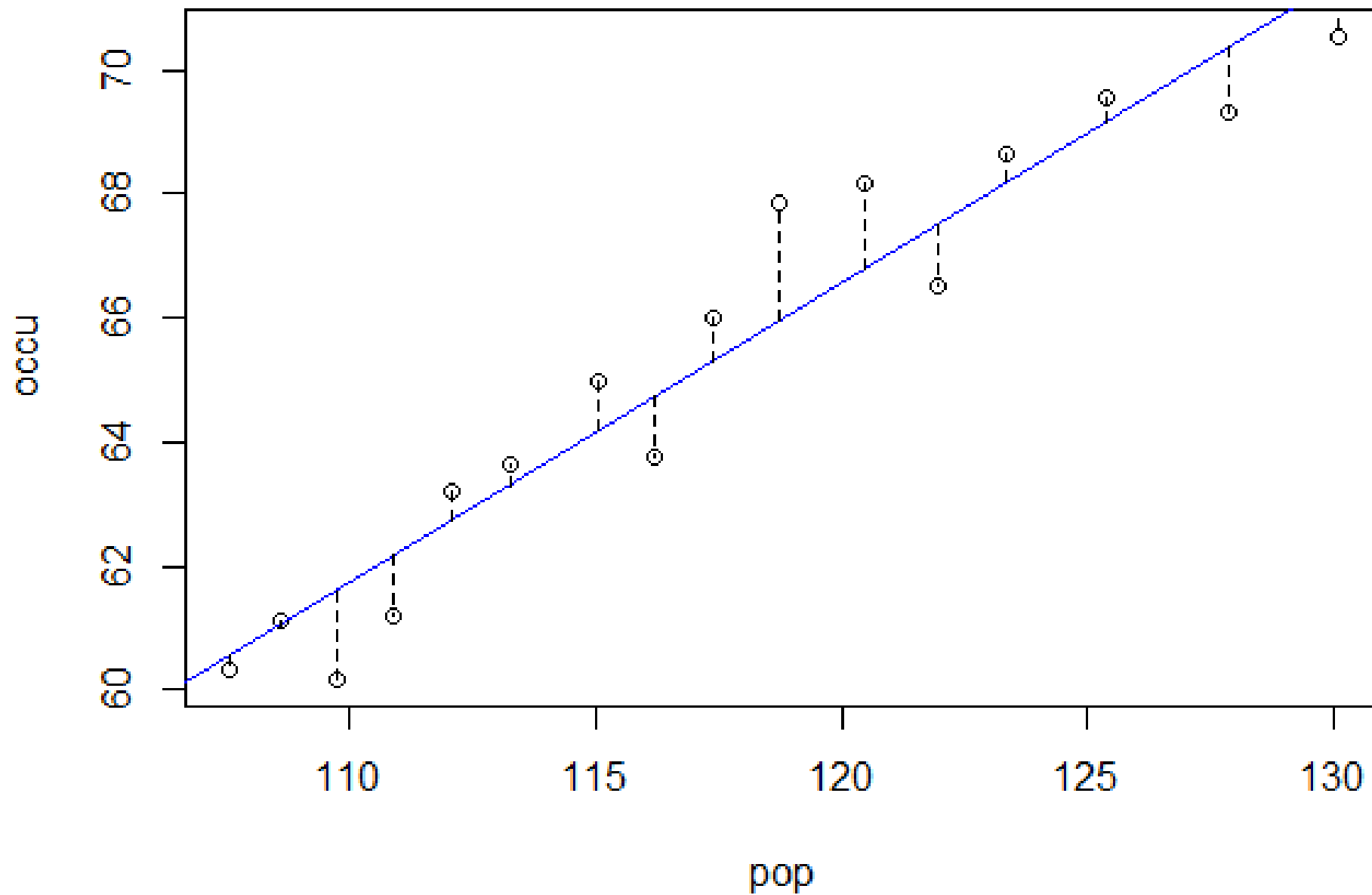
> longley

	GNP.deflator	GNP	Unemployed	Armed.Forces	Population	Year	Employed
1947	83.0	234.289	235.6	159.0	107.608	1947	60.323
1948	88.5	259.426	232.5	145.6	108.632	1948	61.122
1949	88.2	258.054	368.2	161.6	109.773	1949	60.171
1950	89.5	284.599	335.1	165.0	110.929	1950	61.187
1951	96.2	328.975	209.9	309.9	112.075	1951	63.221
1952	98.1	346.999	193.2	359.4	113.270	1952	63.639
1953	99.0	365.385	187.0	354.7	115.094	1953	64.989
1954	100.0	363.112	357.8	335.0	116.219	1954	63.761
1955	101.2	397.469	290.4	304.8	117.388	1955	66.019
1956	104.6	419.180	282.2	285.7	118.734	1956	67.857
1957	108.4	442.769	293.6	279.8	120.445	1957	68.169
1958	110.8	444.546	468.1	263.7	121.950	1958	66.513
1959	112.6	482.704	381.3	255.2	123.366	1959	68.655
1960	114.2	502.601	393.1	251.4	125.368	1960	69.564
1961	115.7	518.173	480.6	257.2	127.852	1961	69.331
1962	116.9	554.894	400.7	282.7	130.081	1962	70.551

## ES. LONGLEY - POPOLAZIONE E OCCUPATI

```
> pop=longley$Population
> occu=longley$Employed
> plot(pop, occu)
> rettalong=lm(occu ~ pop)
> abline (rettalong, col="blue")
> segments(pop, fitted(rettalong), pop, occu,
lty=2)
> title(main="Retta di regressione fra Popolazione e
Occupati - Longley")
```

## Retta di regressione fra Popolazione e Occupati - Longley



# ES. LONGLEY - POPOLAZIONE E OCCUPATI

```
> summary(rettalong)
```

Call:

```
lm(formula = occu ~ pop)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.4362	-0.9740	0.2021	0.5531	1.9048

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	8.3807	4.4224	1.895	0.0789 .
pop	0.4849	0.0376	12.896	3.69e-09 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.013 on 14 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9224, Adjusted R-squared: 0.9168

F-statistic: 166.3 on 1 and 14 DF, p-value: 3.693e-09

# ES. LONGLEY - POPOLAZIONE E OCCUPATI

# I PARAMETRI TROVATI SONO  $a=8.3807$  E  $b=0.4849$

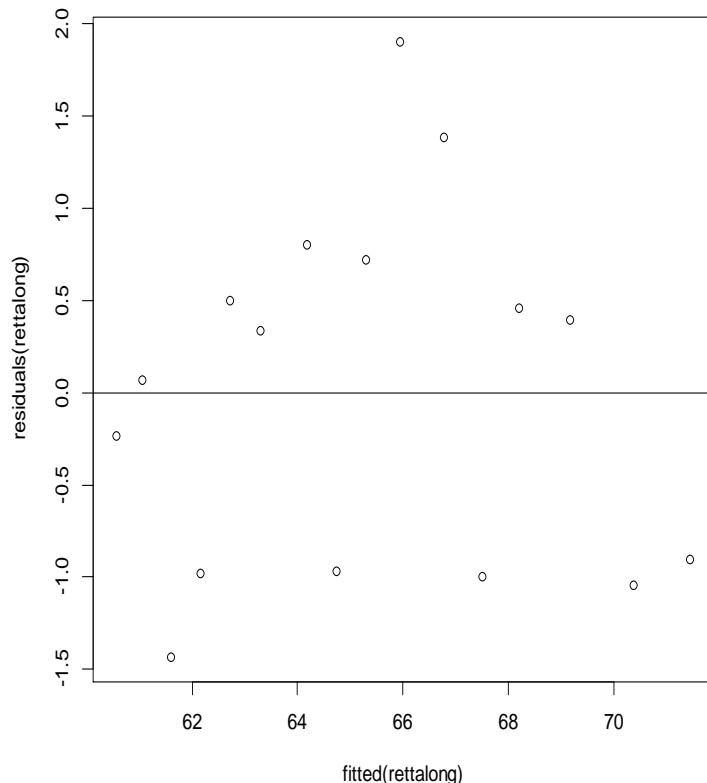
QUINDI IL MODELLO TEORICO SARA':

$$Y' = 8.3807 + 0.4849 * \text{pop}$$

# EFFETTIAMO L'ANALISI DEI RESIDUI

```
> plot(fitted(rettalong), residuals(rettalong))
```

```
> abline(0, 0)
```



L'analisi dei residui conferma che questi si distribuiscono in maniera uniforme e apparentemente casuale attorno all'asse zero, quindi si può confermare l'ipotesi di distribuzione casuale degli stessi, con media nulla e incorrelazione.

# ES. LONGLEY - POPOLAZIONE E OCCUPATI

**# CALCOLIAMO IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE:**

```
> R=cor(pop, occu)
```

```
> R
```

```
[1] 0.9603906
```

**# POICHE' R E' VICINISSIMO A 1, POSSIAMO AFFERMARE CHE C'E' UNA FORTE RELAZIONE LINEARE DIRETTA FRA LE DUE VARIABILI**

**# CALCOLIAMO IL COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE FACENDO IL QUADRATO DI R PER GIUDICARE LA BONTA' DI ACCOSTAMENTO:**

```
> R2=R^2
```

```
> R2
```

```
[1] 0.9223501
```

**# DATO CHE R2 E' MOLTO VICINO A 1, DICIAMO CHE IL MODELLO TEORICO USATO SI ADATTA MOLTO BENE AI VALORI OSSERVATI A TITOLO DI VERIFICA, LO STESSO VALORE E' PRESENTE ANCHE NELLA TERZA PARTE DELL'OUTPUT DELLA summary**

# ES. WOMEN - ALTEZZA E PESO AMERICANE

Utilizzando la serie storica di ‘women’, presente nei dataset precaricati di RStudio (usare il comando “`data()`” per ottenerne una lista), analizzare la relazione fra le variabili:

- **height**
- **weight**

Attraverso una regressione lineare determinare:

- Grafico del modello teorico  $Y' = a + bX$
- Coefficiente angolare e intersezione con l'asse delle ordinate della retta di regressione
- Analisi dei residui con relativo grafico
- Verificare il tipo di relazione con R
- Giudicare la bontà di accostamento



# ES. WOMEN - ALTEZZA E PESO AMERICANE

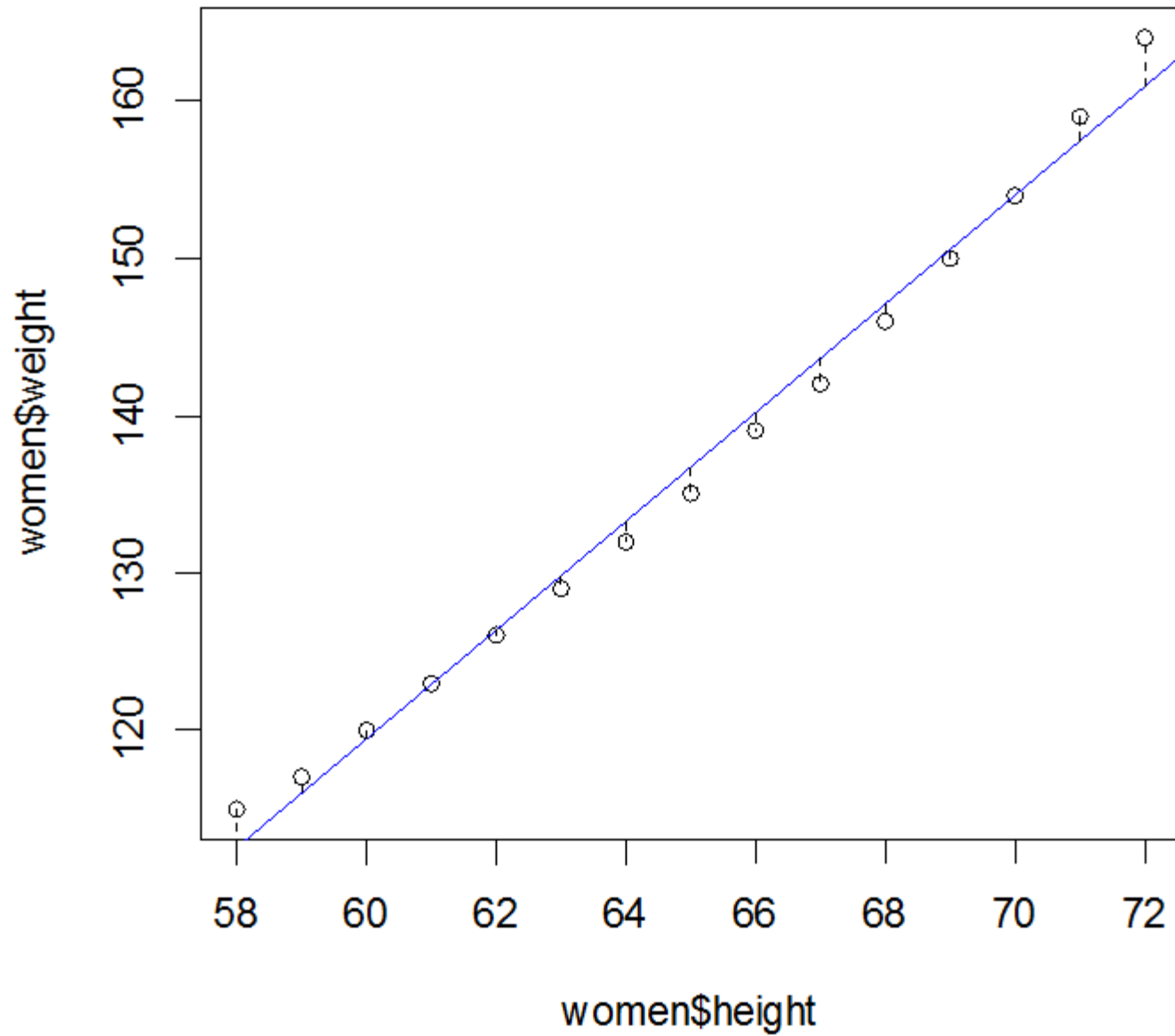
> women

	height	weight
1	58	115
2	59	117
3	60	120
4	61	123
5	62	126
6	63	129
7	64	132
8	65	135
9	66	139
10	67	142
11	68	146
12	69	150
13	70	154
14	71	159
15	72	164

## ES. WOMEN - ALTEZZA E PESO AMERICANE

- > `plot(women$height, women$weight)`
- > `retta=lm(women$weight ~ women$height)`
- > `abline(retta, col="blue")`
- > `segments(women$height, fitted(retta), women$height, women$weight, lty=2)`
- > `title(main="Regressione fra altezza e peso donne americane")`

## Regressione fra altezza e peso donne americane



# ES. WOMEN - ALTEZZA E PESO AMERICANE

> summary(retta)

Call:

```
lm(formula = women$weight ~ women$height)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.7333	-1.1333	-0.3833	0.7417	3.1167

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-87.51667	5.93694	-14.74	1.71e-09 ***
women\$height	3.45000	0.09114	37.85	1.09e-14 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.525 on 13 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.991, Adjusted R-squared: 0.9903

F-statistic: 1433 on 1 and 13 DF, p-value: 1.091e-14

# ES. WOMEN - ALTEZZA E PESO AMERICANE

# I PARAMETRI TROVATI SONO  $a=-87.51667$  E  $b=3.45$

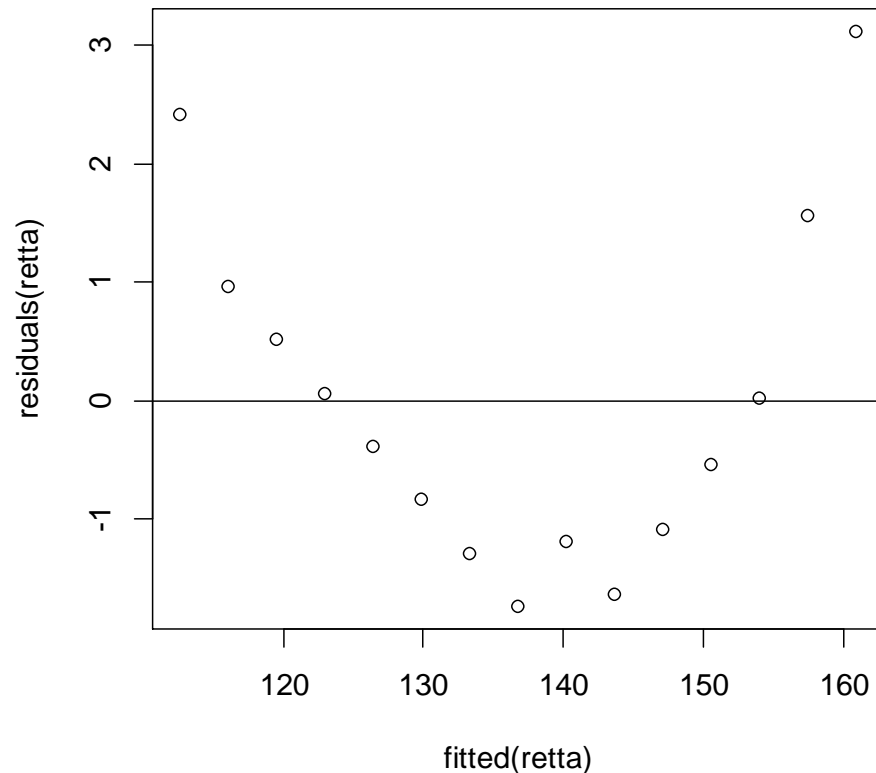
QUINDI IL MODELLO TEORICO SARA':

$$Y' = -87.51667 + 3.45 * \text{height}$$

# EFFETTIAMO L'ANALISI DEI RESIDUI

```
> plot(fitted(retta), residuals(retta))
```

```
> abline(0, 0)
```



Questa volta l'analisi dei residui evidenzia un andamento a parabola. Questo significa che **il**

**modello della retta di regressione non è il migliore**

per questo caso e che sarebbe opportuno riprovare a fare la regressione con una parabola del tipo:

$$Y' = a + bX + cX^2$$

# ES. WOMEN - ALTEZZA E PESO AMERICANE

**# CALCOLIAMO COMUNQUE LA CORRELAZIONE LINEARE:**

```
> R=cor(women$height, women$weight)
```

```
> R
```

```
[1] 0.9954948
```

**# POICHE' R E' VICINISSIMO A 1, POSSIAMO AFFERMARE CHE C'E' UNA FORTE RELAZIONE LINEARE DIRETTA FRA LE DUE VARIABILI**

**# CALCOLIAMO IL COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE FACENDO IL QUADRATO DI R PER GIUDICARE LA BONTA' DI ACCOSTAMENTO:**

```
> R2=R^2
```

```
> R2
```

```
[1] 0.9910098
```

**# DATO CHE R2 E' MOLTO VICINO A 1, DICIAMO CHE IL MODELLO TEORICO USATO SI ADATTA MOLTO BENE AI VALORI OSSERVATI A TITOLO DI VERIFICA, ANCHE SE COME ABBIAMO VISTO DALL'ANALISI DEI RESIDUI SI PUO' FARE DI MEGLIO**

# ES. WOMEN - REGRESSIONE CON MODELLO PARABOLA EXTRA - NON VERRA' CHIESTO ALL'ESAME!

```
> plot(women$height, women$weight)
```

```
# CREO UN MODELLO PARABOLICO DEL TIPO  $Y' = a + bX + cX^2$ 
```

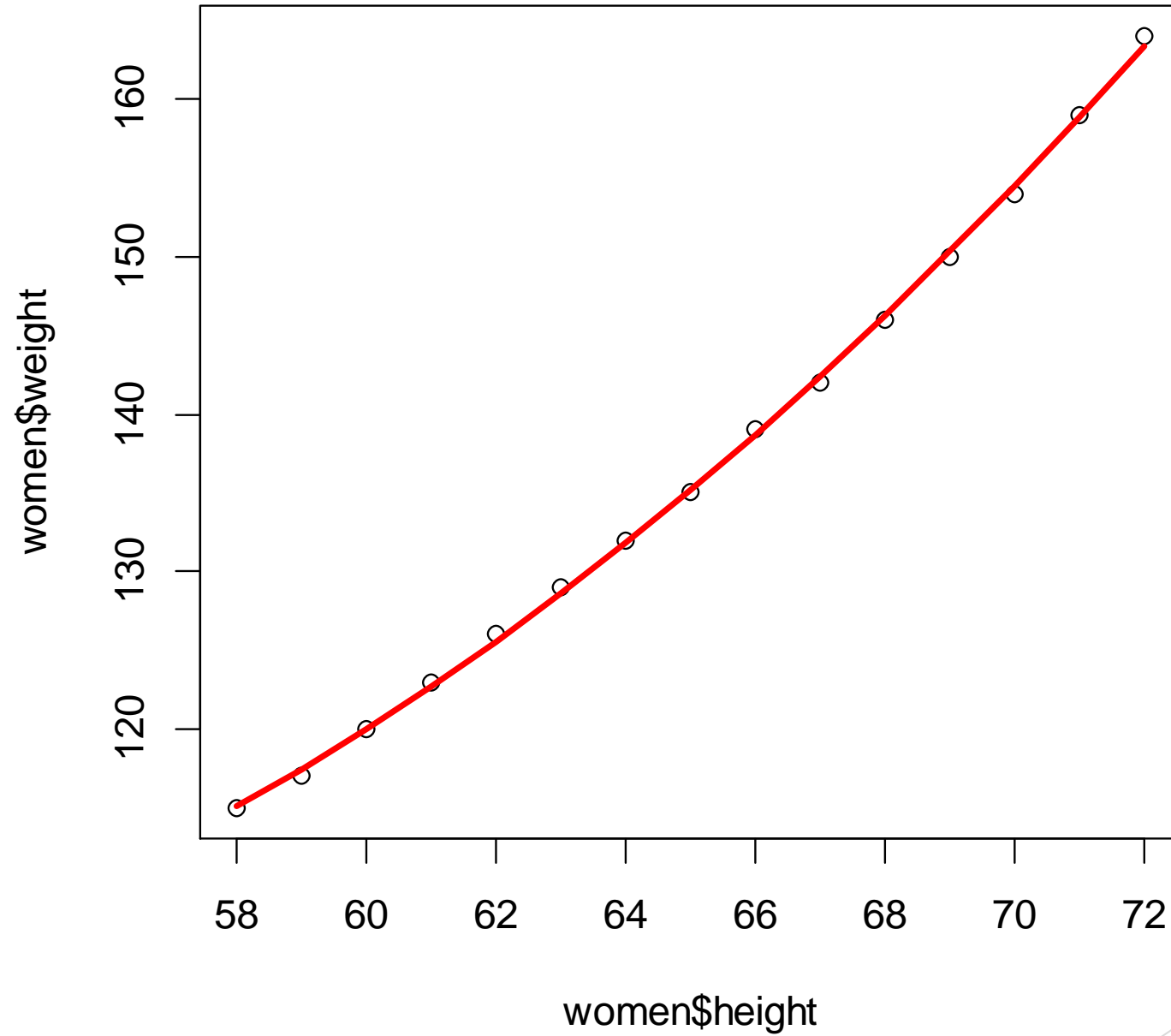
```
> height2 = women$height^2
```

```
> parabola = lm(women$weight ~ women$height + height2)
```

```
# DISEGNO LA PARABOLA
```

```
> lines(women$height, fitted(parabola), col = "red", lwd = 3)
```

## Regressione con parabola fra altezza e peso 'women'





# ES. WOMEN - REGRESSIONE CON MODELLO PARABOLA

```
> summary(parabola)
```

Call:

```
lm(formula = women$weight ~ women$height + height2)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.50941	-0.29611	-0.00941	0.28615	0.59706

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>  t )
(Intercept)	261.87818	25.19677	10.393	2.36e-07 ***
women\$height	-7.34832	0.77769	-9.449	6.58e-07 ***
height2	0.08306	0.00598	13.891	9.32e-09 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.3841 on 12 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9995, Adjusted R-squared: 0.9994

F-statistic: 1.139e+04 on 2 and 12 DF, p-value: < 2.2e-16

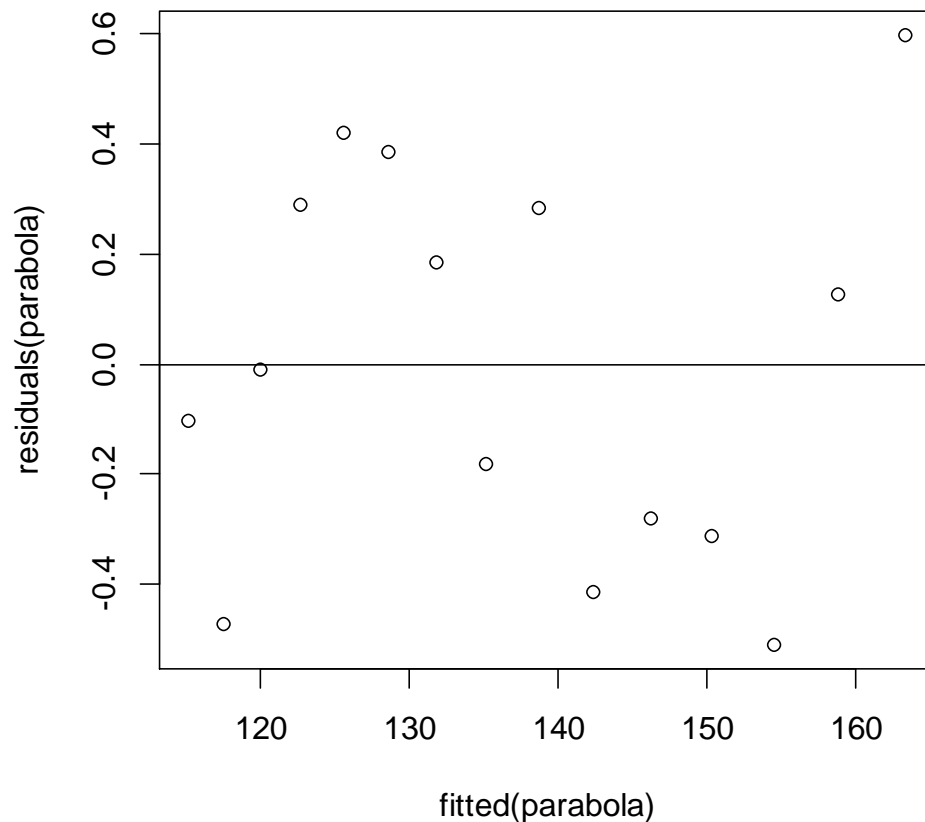
# ES. WOMEN - REGRESSIONE CON MODELLO PARABOLA

# IL MODELLO TEORICO SARA':

$$Y' = 261.87818 - 7.34832 * \text{height} + 0.08306 * \text{height}^2$$

# EFFETTIAMO L'ANALISI DEI RESIDUI

```
> plot(fitted(parabola), residuals(parabola))  
> abline(0, 0)
```



Ora l'analisi dei residui non ha più l'andamento parabolico di prima, ma rispetta la distribuzione casuale intorno alla retta 0 che ci si aspetta. Si può quindi confermare l'ipotesi di distribuzione casuale degli stessi, con media nulla e incorrelazione.

## ES. WOMEN - REGRESSIONE CON MODELLO PARABOLA

# DATO CHE PER QUESTO CASO NON ABBIAMO UNA RETTA COME MODELLO TEORICO, IL CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE NON HA MOLTO SENSO.

# TUTTAVIA POSSIAMO VERIFICARE COME L' $R^2$  SIA PIU' ALTO RISPETTO AL CASO PRECEDENTE DELLA RETTA (0.991), ARRIVANDO A 0.9995, COME EVIDENZIATO DALL'OUTPUT DELLA SUMMARY. QUESTO CONFERMA CHE IL MODELLO DELLA PARABOLA SI ADATTA MEGLIO AI DATI OSSERVATI RISPETTO AL MODELLO LINEARE, ARRIVANDO A ESSERE VICINISSIMO A 1 E QUINDI QUASI PERFETTAMENTE SOVRAPPOSTO ALLE OSSERVAZIONI Y.