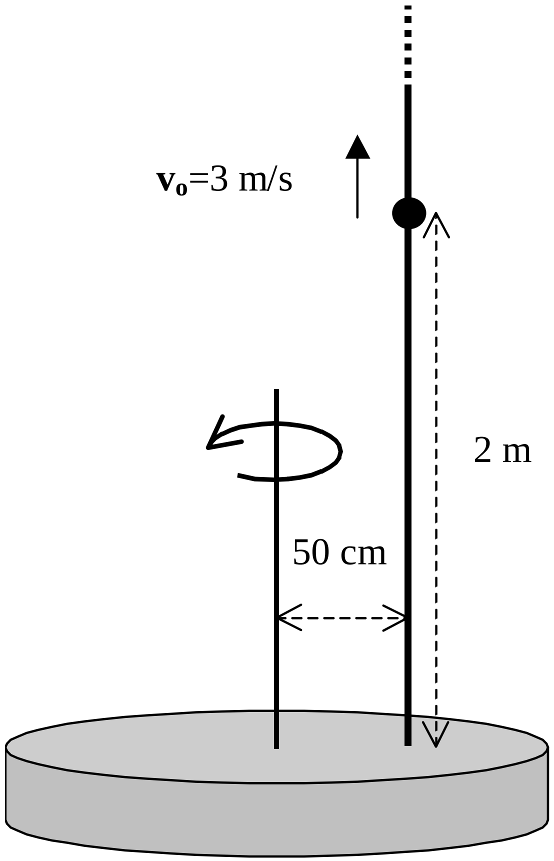
Esercizio

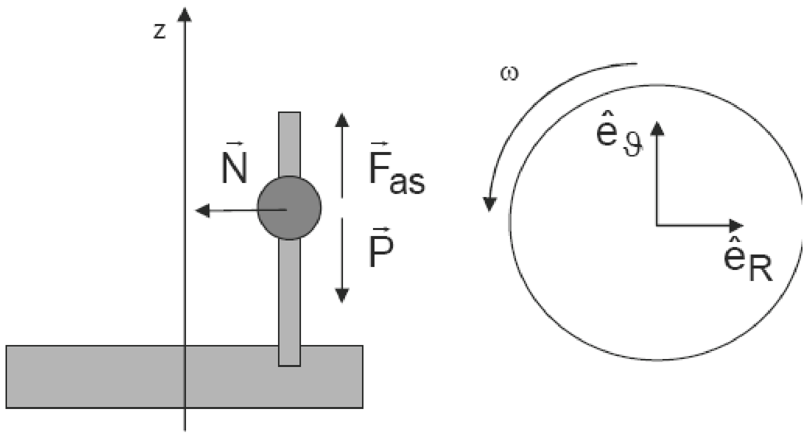
Una particella materiale di massa $m = 0.1\ kg$ è vincolata a scorrere su di un'asta verticale. Fra la particella e l'asta v'è un attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.5$ e da un coefficiente di attrito cinematico radente $\mu_d = 0.2$. L'asta è solidale ad una piattaforma orizzontale girevole ed è posta a distanza R = 50 cm dall'asse di rotazione di questa. La piattaforma ruota con velocità angolare ω costante mentre il laboratorio si considera invece inerziale.



1. Quali sono le forze reali cui è soggetta la particella se essa è ferma rispetto all'asta?
2. E quando essa è invece in moto lungo l'asta?
3. Quali sono le forze che agiscono sulla particella nel sistema di riferimento in cui l'asta e la piattaforma appaiono in quiete.
4. Qual è il valore minimo di ω per il quale la particella, se posta in quiete rispetto all'asta, vi rimane indefinitamente.
5. Quando ω ha il valore di cui al punto 4., quali sono le componenti della reazione vincolare.
6. Nel sistema di riferimento in cui l'asta e la piattaforma appaiono in quiete, si calcoli la legge oraria della particella (vale a dire le sue coordinate in funzione del tempo) se: ω = 8 rad/s; la particella al tempo t = 0 si trova a 2 m di altezza dal fondo dell'asta; essa possiede una velocità che, nel sistema di riferimento solidale all'asta, è diretta verso l'alto e vale 3 m/s.
7. Si esprima la soluzione della domanda di cui al punto 6. nel sistema di riferimento del laboratorio.

NOTA: per ogni sistema di riferimento utilizzato, specificare chiaramente l'orientazione degli assi e l'origine. Nelle domande 1, 2 e 3 si elenchino le forze richieste specificandone le componenti in funzione di: m, $\boldsymbol{\omega}$, R, μ_s, μ_d e $\mathbf{g}$.

Soluzione



Quando la particella è ferma rispetto all'asta le forze agenti sono:
- la forza peso: $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \hat{z}$, diretta in senso contrario all'asse z.
- la reazione vincolare dell'asta. Se ci si pone in un sistema di riferimento inerziale l'accelerazione ha solamente lla componente radiale (l'accelerazione centripeta, diretta sempre verso il centro della piattaforma), quindi la reazione vincolare sarà normale alla guida e varrà: $N_R = -m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \hat{e}_R$
- la forza di attrito statico: $F_{as} = -mg\, \hat{e}_z$

che bilancia la forza peso.

Nel caso in cui la particella si muove rispetto all'asta, la forza peso e la reazione normale dell'asta rimangono invariate, mentre la forza d'attrito che va ora considerata è quella dinamica, data da:

$$\vec{F}_{ad} = -\frac{v}{|v|} \cdot \mu_d \cdot |N| \cdot \hat{z} = -\frac{v}{|v|} \cdot \mu_d \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \hat{z}$$

Il sistema di riferimento in cui asta e piattaforma appaiono in quiete è un sistema che ruota con velocità pari a ω, ed in cui le forza agenti sono le forze reali più una serie di forze apparenti dovute alla non inerzialità del sistema di riferimento:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reali} - m \cdot \left(\vec{A} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right) - 2 \cdot m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Nell'equazione precedente i termini con l'apice sono relativi al sistema di riferimento in movimento, non inerziale (NI). $\vec{A}$ è l'accelerazione di O' rispetto al sistema inerziale, dω/dt è la variazione della velocità di rotazione del sistema di riferimento NI.

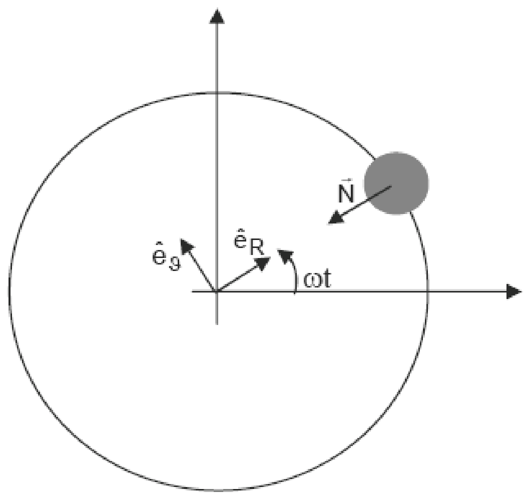
In questo caso poiché $O \equiv O'$, si ha:

$$\vec{A} = 0$$
$$\vec{r}' = \vec{r}$$

Anche la foza di Coriolis $(-2 \cdot m \cdot \vec{\omega} \times \vec{r})$ è nulla poiché v' è diretta lungo z come ω (sono parallele).

Se si considera la particella ferma rispetto all'asta, le forze REALI che agiscono sono:
Lungo l'asse z:
- la forza di attrito statico: $\vec{F}_{as} = m \cdot g \cdot \hat{z}$
- la forza peso: $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \hat{z}$

Lungo la direzione radiale della piattaforma:
- la reazione della guida: $N\hat{r} = -m\omega^2 R\hat{r}$, ricavata tenendo conto del fatto che $a'_r = 0$
Le forze APPARENTI agenti sono limitate alla forza centrifuga: $m\omega^2 R\,\hat{r}$



Se si considera la particella in moto la forze centrifuga rimane invariata, mentre per le forze reali:

Lungo l'asse z:
- forza di attrito dinamico: $\vec{F}_{ad} = -\frac{v}{|\vec{v}|}\mu_d \cdot |\vec{N}| \cdot \hat{z}$
- forza peso: $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \hat{z}$

Lungo la direzione radiale:
- reazione della guida: $N\hat{r} = -m\omega^2 R\hat{r}$

Il valore di ω_{min} per cui la particella rimane indefinitamente in quiete rispetto all'asta si ricava imponendo nulla l'accelerazione lungo l'asse z. In altre parole la forza di attrito statico massa deve essere in grado di bilanciare esattamente la forza peso.

$$\vec{F}_{as} \geq \vec{P} \Leftrightarrow |\mu_s \cdot \vec{N}| \geq |m \cdot \vec{g}| \Leftrightarrow \mu_s m\omega^2 R \geq m \cdot g$$

Da cui si ricava:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_S R}} = \sqrt{\frac{9.81}{0.5 \cdot 0.5}} = 6.26\frac{rad}{s}$$

I valori numerici delle reazioni vincolari quando ω=6.26rad/s, valgono:
- reazione normale dell'asta: $N = m \cdot \omega^2 \cdot R = 0.1 \cdot (6.26)^2 \cdot 0.5 = 1.96N$
- Se la massa è ferma -> forza di attrito statico: $\vec{F}_{as} = \mu_S \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R = 0.5 \cdot 0.1 \cdot 6.26^2 \cdot 0.5 = 0.98N$
-Se la massa si muove -> forza di attrito dinamico: $\vec{F}_{ad} = \mu_d \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R = 0.2 \cdot 0.1 \cdot 6.26^2 \cdot 0.5 = 0.39N$

La legge oraria della particella nel sistema di riferimento rotante si calcola partendo dalle condizioni iniziali su posizione e velocità:

$$\dot{z}(0) = \dot{z}'(0) = 3\frac{m}{s}$$

$$z(0) = z'(0) = 2m$$

Nel sistema rotante, il moto della particella si svolge solamente lungo z e la relativa equazione del moto sarà:

$$m\ddot{z} = -m \cdot g - \frac{v}{|\vec{v}|}\mu_d \cdot |\vec{N}|$$

Da cui si ricava la decelerazione della particella durante la fase di salita:

$$\ddot{z} = -g - \mu_d \omega^2 R$$

Il moto lungo z è uniformemente accelerato, per cui la legge oraria si ricava come:

$$\dot{z}(t) = \dot{z}(0) - \left(g + \mu_d \omega^2 R\right)t$$

E quindi:

$$z'(t) = z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{1}{2}\left(g + \mu_d \omega^2 R\right)t^2$$

Imponendo nulla $\dot{z}(t)$, si ricava il tempo, t*, a cui la particella si ferma, ovvero quando ha raggiunto la posizione di massima altezza:

$$t^* = \frac{\dot{z}(0)}{\left(g + \mu_d \omega^2 R\right)} = \frac{3}{(9.81 + 0.2 \cdot 8^2 \cdot 0.5)} = 0.19\text{s}$$

Ricapitolando, durante la FASE DI SALITA ($0 \le t \le 0.19$s):

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{1}{2}\left(g + \mu_d \omega^2 R\right)t^2 \\ x'(t) = R & \text{Lungo il versore radiale} \\ y'(t) = 0 & \text{Lungo il versore tangenziale alla traiettoria circolare} \end{cases}$$

Per t > t*, la particella tenderebbe a scendere ma poiché la guida non è liscia è necessario tener conto dell'attrito. In questo caso è già stato calcolato come per velocità di rotazione minori di quella imposta, l'attrito statico sia sufficiente a fermare la particella. Quindi:

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{1}{2}\left(g + \mu_d \omega^2 R\right)t^2 = 2 + 3 \cdot 0.19 - \frac{1}{2} \cdot (9.81 + 0.2 \cdot 8^2 \cdot 0.5) \cdot (0.19)^2 = 2.28\text{m} \\ x'(t) = R = 0.5\text{m} \\ y'(t) = 0\text{m} \end{cases}$$

Nel sistema di riferimento (inerziale) del laboratorio, le leggi del moto si descrivono con:

$$\begin{cases} z(t) = z'(t) \\ x(t) = R \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) = R \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$