Università degli Studi di Verona
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Appello di Analisi Matematica II (Mod. base) - a.a. 07/08, M. Squassina

[Corsi di Laurea in Mat. Applicata, Spec. Informatica, Info. Multimediale, Bioinfo]

Appello d'esame N.6, 10 Settembre 2008 - Sessione Autunnale

Nome, Cognome, Matricola, CdL: *MatApp? crocia il box* ☐

Indicazioni: Per sostenere l'esame è necessario essere iscritti on-line. Scrivere *nome, cognome, matricola* e *corso di laurea* in stampatello. I compiti anonimi *non* saranno corretti. Libri, appunti e calcolatrici grafiche *non* sono consentiti. Punteggio massimo: *+35 punti.*

GIUSTIFICARE ACCURATAMENTE TUTTE LE RISPOSTE FORNITE

Problema 1 [≤ 9pt]. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{2\alpha}|y|\arctan(xy)}{(4x^2+9y^2)^{\alpha/2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \text{ se } \alpha \geq 0, \text{ per } x \neq 0 \text{ se } \alpha < 0, \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \text{ se } \alpha \geq 0, \text{ per } x = 0 \text{ se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Discutere la continuità di f_α al variare di α. Vero o falso che f_{-2} è differenziabile in $(0,0)$?

Problema 2 [≤ 8pt]. Si determini l'insieme $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$, dove f è la funzione definita da $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2xy$.

Problema 3 [≤ 8pt]. Si calcoli l'integrale

$$\iint_C xye^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \qquad C = C_1 \cup C_2,$$

dove si è posto $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0\}$ e $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x,\ x \geq 0\}$.

Problema 4 [≤ 10pt]. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞

$$f_n(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{n^2}} + \alpha e^{-n^2(x^2+y^2)}, \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

1. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare il limite puntuale f di f_n e dire se f è continua oppure no;
2. Per $\alpha = 0$, dire se limite puntuale f è differenziabile o meno;
3. Per $\alpha = 0$, dire se la convergenza di f_n a f è uniforme sul disco $D_\varepsilon = \{x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2\}$, con $\varepsilon > 0$;
4. Per $\alpha = 0$, tenuto di 2), dire se le successioni $\frac{\partial f_n}{\partial x}$, $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ possono convergere uniformemente su D_ε. [∗]

[∗] Il punto 4) è facoltativo.

TEMPO: 2h:30m. Verona, 10 Settembre 2008