Diario del corso di Analisi Matematica 3

G. Orlandi

a.a. 2013-14

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione del 1/10/13 (1 ora). Introduzione al corso. Richiami sui numeri complessi: parte reale, parte immaginaria, somma, prodotto, coniugio, prodotto scalare, modulo, argomento, argomento principale, rappresentazione cartesiana $z \equiv a + ib$, $i^2 = -1$, matriciale $z \equiv aI + bJ$, $J^2 = -I$ mediante le trasformazioni lineari conformi del piano che preservano l'orientazione,

Lezione del 4/10/13 (2 ore) Rappresentazione polare $z = |z|e^{i\arg(z)}$. Radici e formula di De Moivre. Funzioni complesse $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: si adottano le notazioni rettangolare $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u, v : A \to \mathbb{R}$. In virtù della relazione $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, si pone anche $f(x + iy) = f(z, \bar{z}) = u(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z})$ (rappresentazione con le variabili coniugate). Limiti e continuità per funzioni complesse. Funzioni elementari: polinomi, funzioni razionali. Differenziabilità (in senso reale) per $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$, matrice Jacobiana, invertibilità locale. Esempio: la funzione lineare $f(z) = c \cdot z$. Derivabilità in senso complesso, funzioni olomorfe. Regole di derivazione, derivabilità delle funzioni elementari. Anello delle funzioni olomorfe.

Lezione dell' 8/10/13 (2 ore) Proposizione: $f = u + iv$ olomorfa su un aperto A se e solo se $u, v \in C^1(A)$ e verificano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Interpretazione geometrica delle equazioni di Cauchy-Riemann: se $f = u+iv$ allora C-R implica $|\nabla u| = |\nabla v|$ e $\nabla v \perp \nabla u$ (ossia gli insiemi di livello di u sono ortogonali a quelli di v), e la matrice jacobiana $Df = \frac{\partial u}{\partial x} I + \frac{\partial v}{\partial x} J$ è una trasformazione conforme (nella rappresentazione matriciale dei numeri complessi, si ha $Df \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'$, per cui detto $\theta = \arg f'$, Df risulta essere la composizione di una rotazione antioraria di angolo θ e di una dilatazione di ampiezza $|f'|$), che preserva l'orientazione su $\mathbb{R}^2$ (ossia $\det Df = |f'| \geq 0$). Inoltre, se $f' \neq 0$ il rango di Df è 2 (e in tal caso f è localmente invertibile per il teorema della funzione inversa), mentre se $f' = 0$ il rango di Df è nullo.

Esponenziale complesso $e^z = \sum_k \frac{1}{k!} z^k$. Per il criterio di convergenza totale si ha che e^z è una funzione ben definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ ed inoltre vale $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$, e valgono le equazioni di Cauchy-Riemann per $u(x, y) = e^x \cos y$ e

$v(x,y) = e^x \sin y$. Si ha inoltre $e^{z+2k\pi i} = e^z$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Funzioni trigonometriche complesse $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Il logaritmo complesso $\log z = \log|z| + i\arg(z)$. Logaritmo principale. La funzione potenza complessa $z^c = e^{c \log z}$.

Equazioni di Cauchy-Riemann rispetto alle variabili coniugate $z, \bar{z}$: si ha $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (dove si è posto $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}]$ e $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}]$ coerentemente con la regola della catena), ossia una funzione olomorfa si deve poter esprimere esplicitamente in funzione della sola z.

Lezione dell' 11/10/13 (2 ore). Osservazione: le funzioni tali che $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sono dette *antiolomorfe*, sono le coniugate di funzioni olomorfe, e soddisfano a proprietà analoghe a quelle delle funzioni olomorfe.

Funzioni olomorfe e funzioni armoniche: se $f = u + iv$ è olomorfa allora u e v sono funzioni armoniche, ossia vale $\mathrm{tr} D^2 u \equiv \Delta u = \Delta v = 0$, dove $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$ è l'operatore di Laplace o Laplaciano in due dimensioni. In particolare v è detta l'armonica coniugata di u. Determinazione dell'armonica coniugata di una funzione armonica data.

Equazione di Laplace: si tratta di un'equazione alle derivate parziali (EDP) del secondo ordine di tipo ellittico (quella delle onde è di tipo iperbolico, quella del calore è di tipo parabolico) che interviene nella descrizione di fenomeni in situazioni di equilibrio: distribuzioni stazionarie di temperatura, concentrazioni di sostanze chimiche, potenziale elettrostatico (rispettivamente gravitazionale) in una regione in cui non vi sono cariche (risp. masse), descrizione euleriana del campo di velocità di un fluido incompressibile irrotazionale. Vi è anche un'interpretazione probabilistica legata ad alcuni importanti processi stocastici (ad es. il moto browniano).

Richiami sulle serie di potenze complesse. Raggio e cerchio di convergenza, convergenza totale (e quindi uniforme) in ogni cerchio chiuso incluso nel cerchio di convergenza. Teorema di derivazione per le serie di potenze complesse e regolarità C^ω (analitica). Funzioni analitiche complesse. Le funzioni analitiche complesse sono olomorfe nel loro dominio di definizione. Enunciato del teorema fondamentale dell'analisi complessa: le funzioni olomorfe sono analitiche.

Lezione del 15/10/13 (2 ore). Integrali di cammino per funzioni complesse. Data $f : A \subset \mathbb{C} \to C$ continua e $\Gamma \subset A$ una curva semplice di classe C^1 a tratti (o più in generale, una curva continua *rettificabile*, ovvero di lunghezza finita) parametrizzata da $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$, si definisce

$$\int_\Gamma f(z)dz := \lim_{|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=0}^{N} f(z_k) \cdot \Delta z_k \,,$$

dove $\cdot$ è il prodotto complesso, $z_0, ..., z_N$ individuano una partizione di Γ e $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Nelle ipotesi di cui sopra il limite delle somme di Riemann esiste e quindi l'integrale è ben definito. Vale inoltre $\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)dt$. Se $f = u + iv$ e $z = x + iy$ si ha $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma udy + vdx$. Definiamo il campo di vettori $\vec{E} = (u, -v)$. Detto τ il versore tangente a Γ e ν il versore normale (rotazione oraria di τ), si ha $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma < \vec{E}, \tau > d\ell \; - i \int_\Gamma < \vec{E}, \nu > d\ell$.

Proprietà degli integrali di cammino: indipendenza dalla parametrizzazione (a meno dell'orientazione), linearità rispetto ad f, additività rispetto alla curva. Teorema fondamentale del calcolo per integrali di cammino: se $f = g'$, allora $\int_\Gamma f(z)dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$. In particolare, $\oint_\Gamma g'(z)dz = 0$ per ogni curva Γ chiusa.

Definizione di lunghezza di una curva di classe C^0 (ossia solo continua) come estremo superiore delle lunghezze delle poligonali associate ad partizioni finite della curva. Le curve continue di lunghezza finita sono dette *rettificabili*.

Per gli integrali di cammino vale la maggiorazione

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq \int_\Gamma |f(z)|\,|dz| \leq \sup_A |f| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|dt = ||f||_{L^\infty(A)} |\Gamma|,$$

dove $|\Gamma|$ indica la lunghezza della curva $\Gamma \subset A$.

Le curve semplici, chiuse sono dette curve di Jordan. Teorema delle curve di Jordan: detta $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan continua, esistono $A, B \subset \mathbb{R}^2$ aperti, tali che $\Gamma = \partial A = \partial B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \cup \Gamma = \mathbb{R}^2$. Tali aperti sono detti l'esterno (quello dei due non limitato) e l'interno di Γ.

Teorema di Cauchy-Goursat: $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa $\Rightarrow$ per ogni curva di Jordan $\Gamma = \partial D$ di classe C^1 a tratti (o più in generale, rettificabile), con $D \subset A$, si ha $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$.

Dimostrazione nel caso f di classe C^1: per le formule di Gauss-Green nel piano si ha

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = \oint_{\partial D} udx - vdy \; + i \oint_{\partial D} udy + vdx = \int_D (-u_y - v_x) + i(u_x - v_y)\, dxdy = 0$$

in virtù delle equazioni di Cauchy-Riemann.

Lezione del 18/10/13 (2 ore). Richiami sulle forme differenziali in $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$: una 1-forma $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ a valori complessi (ossia $a(x,y), b(x,y) \in \mathbb{C}$ si dice *esatta* se $\omega = du$, per qualche funzione $u(x,y)$, dove $du = u_x dx + u_y dy$ ne indica il differenziale. Si introduce un prodotto anticommutativo $\wedge$ sulle 1-forme (associativo, lineare, distributivo rispetto alla somma) ed un operatore d (differenziale esterno) definito da $d\omega = da \wedge dx + db \wedge dy = (-a_y + b_x) dx \wedge dy$. Se $d\omega = 0$ (ossia $a_y = b_x$) la forma si dice *chiusa*. Ogni forma esatta è chiusa, il viceversa è sicuramente vero su domini semplicemente connessi. Forme esatte sono associate a campi vettoriali conservativi, forme chiuse a campi irrotazionali. In generale, le forme differenziali sono oggetti naturali rispetto all'integrazione orientata (su curve, superfici,...). Teorema di Stokes (Gauss-Green) per forme differenziali di classe C^1: $\oint_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$, dove le orientazioni di ∂D e D sono legate tra loro dalla regola della mano destra.

Proposizione: f olomorfa $\Rightarrow$ la forma differenziale complessa $f(z)dz = (u+iv)(dx+idy)$ è chiusa. Infatti, se f è olomorfa, che $f(z)dz = udx - vdy + i(udy + vdx)$ sia chiusa segue dalle equazioni di Cauchy-Riemann. Nelle variabili coniugate $z, \bar{z}$ si ha in particolare $d(f(z)dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0$.

Se poi $f \in C^1$ allora per Stokes segue immediatamente il Teorema di Cauchy $\oint_{\partial D} f(z)dz = \int_D d(f(z)dz) = 0$ poichè $f(z)dz$ è chiusa.

Lemma di Goursat in un triangolo interno al dominio di una funzione olomorfa, estensione al caso di una poligonale semplice chiusa ed infine al caso di curve di Jordan C^1 a tratti. Il teorema vale anche per curve di Jordan $\Gamma = \partial D$ di classe C^0 di lunghezza finita (ovvero rettificabili) e anche per f continua su $\Gamma = \partial D$ e olomorfa su D.

Lezione del 22/10/13 (2 ore). Una conseguenza del teorema di Cauchy: date due curve di Jordan Γ_1 e Γ_2 orientate per convenzione in senso antiorario, tali che Γ_1 sia interna a Γ_2, se f è olomorfa nella regione D compresa tra le due curve (ossia $\partial D = \Gamma_2 - \Gamma_1$) allora si ha $\oint_{\Gamma_2} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz$. Nel caso $f \in C^1$ lo si poteva immediatamente dedurre dalla formula di Stokes-Green: $\oint_{\Gamma_2} f(z)dz - \oint_{\Gamma_1} f(z)dz = \oint_{\partial D} f(z)dz = \int_D d(f(z)dz) = 0$ dato che $f(z)dz$ è chiusa.

Integrale di $(z-a)^{-1}$ lungo una circonferenza di centro $a \in \mathbb{C}$. Formula integrale di Cauchy e conseguenze: analiticità delle funzioni olomorfe, le funzioni olomorfe sono determinate dai valori al contorno del dominio di definizione, le derivate delle funzioni olomorfe sono olomorfe, il limite uniforme di funzioni olomorfe è olomorfo. Formula integrale e stime di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa. Proprietà della media per funzioni olomorfe: $\forall\, r,\ f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta$.

Lezione del 25/10/13 (2 ore). Teorema del massimo modulo: se $|f(z)| = \sup_B f$ con z interno a B aperto connesso, con $\bar{B}$ contenuto nel dominio di f, allora f è costante nella componente connessa del dominio contenente B: altrimenti detto, $\sup_B |f| = \sup_{\partial B} |f|$ per f olomorfa. Nel caso $f(z) \neq 0$ su un dominio D allora vale anche un teorema del minimo modulo relativamente a quel dominio. Proprietà della media e principio del massimo (rispettivamente principio del minimo) valgono anche per le funzioni armoniche. Teorema di Liouville: una funzione intera (ossia olomorfa su tutto $\mathbb{C}$) e limitata è costante. Teorema fondamentale dell'algebra. Teorema di Morera.

Lezione del 29/10/13 (2 ore). Teorema degli zeri delle funzioni olomorfe. Ordine di uno zero. Principio di continuazione analitica ed applicazioni. Classificazione delle singolarità isolate di una funzione olomorfa: singolarità eliminabili, singolarità essenziali, poli. Ordine di un polo. Esempi di funzioni con singolarità eliminabili, poli, singolarità essenziali.

Lezione del 5/11/13 (2 ore). Criteri per la determinazione della natura di una singolarità isolata di una funzione data: esistenza del limite finito, infinito, non esistenza del limite. Sviluppi in serie di Laurent, esempi, teorema di esistenza e unicità dello sviluppo in una corona fissata. Nozione di residuo. Teorema dei residui.

Lezione dell' 8/11/13 (2 ore). Calcolo dei residui nel caso di singolarità essenziali. Alcuni metodi di calcolo dei residui per singolarità di tipo polo e per funzioni meromorfe. Residuo all'infinito. Teorema globale dei residui.

Lezione del 12/11/13 (2 ore). Integrali di funzioni razionali di $\cos\theta$ e $\sin\theta$ su $[0, 2\pi]$. Lemma del (l'arco di) cerchio grande. Calcolo di integrali impropri su $\mathbb{R}$ per funzioni integrabili secondo Lebesgue e limitate $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Lezione del 15/11/13 (2 ore). Lemma di Jordan e applicazioni al calcolo di trasformate di Fourier. Nozione di integrale nel senso del valor principale per funzioni non necessariamente limitate nè integrabili secondo Lebesgue. Lemma del cerchio piccolo per funzioni con poli semplici reali. Lemma di Jordan per funzioni con poli semplici reali. Applicazione al calcolo di trasformate di Fourier di funzioni razionali.

Lezione del 19/11/13 (2 ore). Trasformata di Fourier della funzione seno cardinale $\frac{\sin x}{x}$. Dominio di definizione massimale per la funzione $\sqrt{z}$ (e, in generale, z^p con $0 < p < 1$), e per la funzione $\log z$: domini a più fogli, punti di ramificazione. Integrali del tipo $\int_0^{+\infty} x^{-p} f(x)\, dx$ con $0 < p < 1$ e del tipo $\int_0^{+\infty} f(x) \log x\, dx$ (ovvero con singolarità in un punto di ramificazione).

Lezione del 22/11/13 (2 ore). Funzioni con infinite singolarità isolate e applicazioni al calcolo della somma di serie numeriche. Indice di avvolgimento. Principio dell'argomento, significato geometrico. Applicazioni: teorema di Rouché, determinazione del numero di radici di un polinomio in una data regione. Teorema di Hurwitz.

lezione del 26/11/13 (2 ore). Esercizi sul principio dell'argomento. Formula integrale di Cauchy e teorema dei residui per circuitazioni lungo curve chiuse (non necessariamente di Jordan).

Lezione del 29/11/13 (2 ore). Teorema dell'applicazione aperta.

Dimostrazione: sia f olomorfa e non costante su un aperto connesso A, allora se $B \subset A$ è aperto e $z_0 \in B$, detto $w_0 = f(z_0)$ si ha, in un disco $B_r(z_0) \subset B$, la rappresentazione $f(z) = w_0 + (z - z_0)^k h(z)$ con $h(z_0) \neq 0$, per un certo $k \geq 1$. Dato che $|h(z_0)| \neq 0$, supponendo senza perdita di generalità che $\operatorname{Arg}(h(z_0)) \neq \pi$ (altrimenti basta considerare la funzione $-f(z)$), dove Arg indica l'argomento principale ($-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$) risulta ben definita in un intorno $B_{r'}(z_0)$ di z_0 con $r' \leq r$ l'applicazione

$$g(z) = |h(z)|^{\frac{1}{k}} \exp\left[\frac{i \operatorname{Arg}(h(z))}{k}\right],$$

per cui in $B_{r'}(z_0)$ si può scrivere

$$f(z) = w_0 + [m(z)]^k, \qquad \text{con } m(z) = (z - z_0) \cdot g(z).$$

Inoltre l'applicazione $m(z)$ risulta invertibile (e quindi aperta) in un intorno $B_{r''}(z_0)$ con $r'' \leq r'$ per il teorema della funzione inversa, dato che $m'(z_0) = g(z_0) \neq 0$. Dato che anche l'applicazione $\zeta \mapsto \zeta^k$ è aperta, si ha che l'immagine di $B_{r''}(z_0)$, contenuta in $f(B)$, è un aperto contenente w_0, ovvero w_0 è punto interno di $f(B)$. $\square$

Trasformazioni conformi nel piano. Relazione con le funzioni olomorfe. Proprietà: conservazione delle frontiere. Una funzione olomorfa iniettiva sul bordo di un dominio è iniettiva (e quindi conforme) anche all'interno del dominio. Il Teorema di Riemann di classificazione conforme degli aperti semplicemente connessi di $\mathbb{C}$ (o della sfera di Riemann).

Lezione del 3/12/13 (2 ore). Trasformazioni di Möbius, omomorfismo con $GL_2(\mathbb{C})$. Proprietà: trasformazione di circonferenze in circonferenze, trasformazione di coppie di punti inversi rispetto ad una circonferenza in coppie di punti inversi rispetto alla circonferenza immagine. Esempio di trasformazione di Möbius che trasforma il disco unitario in un semipiano.

Lezione del 6/12/13 (1 ora). Il problema di Dirichlet nel cerchio: risoluzione mediante uno sviluppo in serie di potenze complesse. La serie risultante converge nell'interno del cerchio unitario ad una soluzione dell'equazione di Laplace sotto condizioni miti sul dato al bordo g (ad esempio, basta $\|g\|_{L^1([-\pi,\pi])} < +\infty$), che risulta di classe C^∞ (anzi, analitica) in virtù dell'effetto regolarizzante dell'operatore di Laplace, con stime sulle derivate analoghe alle stime di Cauchy per una funzione olomorfa. La soluzione all'interno del cerchio converge uniformemente al dato al bordo quando quest'ultimo è ad esempio una funzione continua con derivata a quadrato sommabile, altrimenti la convergenza è assicurata solo nei punti di continuità di g, e ad esempio nei punti di salto si ha che la soluzione ha punti limite compresi tra $\liminf g$ e $\limsup g$.

Lezione del 13/12/13 (2 ore). Propretà della media per funzioni armoniche. Principio del massimo (e del minimo). Stabilità della soluzione del problema di Dirichlet dai dati al contorno. Problemi ben posti: sono quelli per cui si ha esistenza, unicità e stabilità della soluzione rispetto ai dati del problema. Il problema di Dirichlet è ben posto.

Rappresentazione integrale della soluzione u del Pb. di Dirichlet nel cerchio $\{re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r < a\}$ con dato al bordo $g(ae^{i\phi}) \equiv g(\phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, via nucleo di Poisson per il cerchio: per $r < a$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)} g(\phi)\, d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_a(r, \theta, \phi) g(\phi)\, d\phi\,.$$

Alcune proprietà del nucleo di Poisson $P_a(r, \theta, \phi)$: si tratta di una funzione simmetrica rispetto a θ e ϕ, armonica rispetto alle coordinate (r, θ) (ovvero (r, ϕ)), che tende uniformemente a zero per $r \to a$ se $|\theta - \phi| > \delta$, mentre $P_a(r, \phi, \phi) \to +\infty$ per $r \to a$. Inoltre, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_a(r, \theta, \phi)\, d\phi = 1$ per ogni $r < a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ovvero $\frac{1}{2\pi} P_a(r, \theta, \cdot)$ è una distribuzione di probabilità, precisamente quella relativa a dove avviene l'uscita dal cerchio di una traiettoria casuale che parte da $re^{i\theta}$. In particolare, la soluzione $u(r, \theta)$ corrisponde ad una media pesata dei valori al contorno.

Sia $\mu_{r,\theta}$ la misura di probabilità associata al nucleo di Poisson $P_a(r, \theta, \cdot)$, ovvero $\mu_{r,\theta}(E) = \frac{1}{2\pi}\int_E P_a(r, \theta, \phi)\, d\phi$ per $E \subset [0, 2\pi]$ misurabile secondo Lebesgue. Per $r \to a$, $\theta \to \theta_0$ si ha $\mu_{r,\theta}(E) \to 1$ se $\theta_0 \in E$, mentre $\mu_{r,\theta}(E) \to 0$ altrimenti.

Delta di Dirac in $\mathbb{R}^n$: per $p \in \mathbb{R}^n$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$ si pone $\delta_p(E) = 1$ se $p \in E$, $\delta_p(E) = 0$ altrimenti. La funzione d'insieme δ_p è monotona e σ-additiva, ovvero è una misura, in particolare una misura di probabilità dato che ha "massa totale" $\delta_p(\mathbb{R}^n) = 1$.

Per quanto visto sopra, la misura $\mu_{r,\theta}$ associata al nucleo di Poisson tende alla misura δ_{θ_0} per $r \to a$, $\theta \to \theta_0$.

Da queste proprietà si ricava ad esempio che se $ae^{i\phi_0}$ è un punto di continuità di g, e $re^{i\theta} \to ae^{i\phi_0}$, allora $u(re^{i\theta}) \to g(\theta_0)$, ovvero la convergenza di u al dato al bordo nei punti di continuità di quest'ultimo (vedasi [4], p. 106).

Interpretazione fisica del nucleo di Poisson: fissato ϕ, $P_a(r, \theta, \phi)$ corrisponde al potenziale elettrostatico nel punto $re^{i\theta}$ originato da un dipolo posto nel punto $ae^{i\phi}$ sul bordo del cerchio.

La rappresentazione integrale della soluzione fornisce inoltre una naturale nozione di soluzione generalizzata, valida per dati al bordo non regolari.

Lezione del 17/12/13 (2 ore). Equazione di Laplace in un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di classe C^1, funzioni armoniche, subarmoniche, superarmoniche. Problemi al contorno: pb. di Dirichlet, pb. di Neumann. Soluzione classica in $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Esempi in elettrostatica e fluidodinamica. Interpretazione probabilistica del problema di Dirichlet e dell'equazione del calore: rappresentazione della soluzione come limite di passeggiate casuali, relazione con processi di diffusione e moto browniano. Operatore di Laplace discreto (differenze finite) come operatore di media.

Identità di Green e metodi di energia per l'unicità del pb. di Dirichlet e del pb. di Neumann. Il principio del massimo per funzioni subarmoniche di classe C^2 in domini limitati e conseguenze: unicità e stabilità (dipendenza continua) della soluzione del pb. di Dirichlet rispetto ai dati: per ogni $u \in C^2(\Omega)$ si ha ad esempio la stima (non ottimale!)

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + C(\Omega)\|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)} \,,$$

dove $C(\Omega) > 0$ è una costante che dipende solo dal dominio limitato Ω. Nel caso di domini bidimensionali, il principio del massimo per funzioni armoniche è conseguenza della proprietà della media per funzioni armoniche, a sua volta conseguenza della proprietà della media per funzioni olomorfe. La proprietà della media si verifica anche per funzioni armoniche in domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Lezione del 20/12/13 (2 ore). Metodi di risoluzione del problema di Dirichlet / Neumann: in generale, via metodi variazionali (minimizzazione di energie / distanze in opportuni spazi di Hilbert) o via principi del confronto (metodo delle sottosoluzioni di Perron), o determinando le funzioni di Green del dominio dato. In casi particolari: via separazione di variabili (in domini rettangolari rispetto a opportuni sistemi di coordinate); nel piano, via Teorema della mappa di Riemann in domini semplicemente connessi, riconducendosi al problema di Dirichlet nel cerchio;

Risoluzione del problema di Dirichlet mediante funzioni di Green. Dato un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1 a tratti, la soluzione del problema di Dirichlet

$\Delta u = f$ in Ω relativo ad un dato al bordo $u = g$ su $\partial\Omega$, con $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$, si rappresenta come

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y)\nabla_y G(x,y) \cdot \nu \, d\sigma(y) \, + \int_{\Omega} f(y)G(x,y)\, dy \,,$$

dove $d\sigma$ è l'elemento di superficie, ν è la normale esterna a $\partial\Omega$, e la funzione $G(x,y)$, definita per $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, è detta funzione di Green per il pb. di Dirichlet relativa ad Ω.

Proprietà salienti della funzione di Green: per $x \in \Omega$ si ha $-\Delta_y G(x,y) = \delta_x$, $G(x,y) = 0$ per $y \in \partial\Omega$, dove δ_x è la Delta di Dirac concentrata in $x \in \Omega$. In $\mathbb{R}^3$ $G(x,y)$ corrisponde al potenziale elettrico generato da una carica unitaria puntiforme concentrata in $x \in \Omega$, con il bordo $\partial\Omega$ costituito da un materiale conduttore messo a "terra" (ovvero a potenziale nullo).

In particolare, si può scrivere $G(x,y) = \Gamma(x-y)+w(x,y)$ dove $\Gamma(z)$, per $0 \neq z \in \mathbb{R}^n$, è la *soluzione fondamentale del Laplaciano* in $\mathbb{R}^n$, ovvero vale $-\Delta\Gamma = \delta_0$. Per $n = 3$, Γ corrisponde al potenziale elettrico (risp. gravitazionale) generato da una carica (risp. massa) unitaria puntiforme posta nell'origine. Per $n = 2$ si ha $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\log|z|$, mentre per $n > 2$ si ha $\Gamma(z) = c_n^{-1}|z|^{2-n}$, con $\frac{c_n}{n-1} = |\partial B(0,1)|$ l'area $(n-1)$-dimensionale della superficie sferica $\{|z| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$).

La funzione $w(x,y)$ risolve il pb. di Dirichlet $\Delta_y w(x,y) = 0$ in Ω, $w(x,y) = -\Gamma(x-y)$ per $y \in \partial\Omega$.

Pertanto si ha $G(x,y) \to \infty$ per $y \to x$, con profilo asintotico uguale alla soluzione fondamentale traslata in x, inoltre $G(x,\cdot)$ è armonica in $\Omega \setminus \{x\}$ (in particolare è di classe C^∞) e si ha infine la proprietà di simmetria $G(x,y) = G(y,x)$.

La formula di rappresentazione per la soluzione u del problema di Dirichlet si ottiene a partire dall'identità di Green

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}$$

ponendovi formalmente $v(y) = G(x,y)$, e osservando che $\Delta u = f$ in Ω e $u = g$ su $\partial\Omega$. In realtà si pone $v = G_\epsilon(x,y) = \Gamma_\epsilon(x-y) + w(x,y)$ e si passa al limite per $\epsilon \to 0$, dove Γ_ϵ è tale che $\Delta\Gamma_\epsilon(z) = 0$ per $|z| > \epsilon$ e $\Delta\Gamma_\epsilon(z) = \omega_n^{-1}\epsilon^{-n}$ per $|z| \leq \epsilon$, con ω_n il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$ (in $\mathbb{R}^3$ si tratta del potenziale generato da una carica unitaria uniformemente distribuita sulla palla B_ϵ): si verifica facilmente che vale $\Gamma_\epsilon(x-y) = \Gamma(x-y)$ per $|x-y| \geq \epsilon$ (in particolare, per $y \in \partial\Omega$), e pertanto $G_\epsilon(x,y) = G(x,y)$ se $|x-y| \geq \epsilon$, da cui si ricava facilmente la convergenza al secondo membro della formula di rappresentazione integrale. Per quanto riguarda il primo membro, si ha inoltre

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(y)\Delta_y G_\epsilon(x,y) &= \int_\Omega u(y)\Delta_y\Gamma_\epsilon(x-y) = \int_{B(x,\epsilon)} u(y)\omega_n^{-1}\epsilon^{-n} \\ &= u(\xi) \quad \text{per un certo } \xi \in B(x,\epsilon)\,,\end{aligned}$$

per il teorema della media integrale. Passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ricava infine $\int_\Omega u(y)\Delta_y G_\epsilon(x,y)\,dy \ \to u(x)$ per $\epsilon \to 0$.

La determinazione della funzione di Green per domini dalla geometria semplice si può ottenere mediante il *metodo delle cariche immagini*: posta una carica nel punto $x \in \Omega$ se ne pongono altre in punti opportuni esterni a Ω in modo che il potenziale generato dalla distribuzione risultante abbia la frontiera $\partial\Omega$ come insieme di livello (ossia $\partial\Omega$ risulti una superficie equipotenziale): nel caso del semipiano (rispettivamente, del semispazio) viene posta una carica di segno opposto nel punto simmetrico rispetto al bordo: si ottiene cosìla rappresentazione integrale della soluzione mediante il nucleo di Poisson per il semipiano. Nel caso del cerchio (rispettivamente della palla), viene posta una carica di segno opposto (e intensità opportuna) nel punto inverso rispetto alla circonferenza (rispettivamente, alla sfera) che costituisce il bordo del dominio: si riottiene in questa maniera la rappresentazione via nucleo di Poisson per il cerchio.

Non svolto a lezione: Risoluzione del problema di Dirichlet in domini semplicemente connessi via Teorema della mappa di Riemann. Sia u la soluzione del problema di Dirichlet su D con dato al bordo g su ∂D. Fissato $z_0 \in D$ si consideri una trasformazione conforme $w = f(z, z_0) : D \to B \equiv \{|w| \le 1\}$ tale che $f(z_0, z_0) = 0$. Detta $U(w) = U(f(z, z_0)) = u(z)$, si ha che U risolve il problema di Dirichlet in B con dato al bordo $\tilde{g}(w) = \tilde{g}(f(z, z_0)) = g(z)$.

Consideriamo la funzione olomorfa $\log(f(z, z_0)) = \log w = \log |w| + i \arg w$, e sia $z \in \partial D$. Sia (τ, n) una base ortonormale di $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ con τ tangente a ∂D (e verso antiorario) e n la normale esterna a D in $z \in \partial D$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che per quel fissato $z \in \partial D$ si abbia $(n, \tau) \equiv (e_1, e_2)$, la base canonica di $\mathbb{R}^2$. In particolare, essendo $\log w = \log(f(z, z_0))$ olomorfa, valgono le relazioni di Cauchy-Riemann

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log w = \frac{\partial}{\partial n} \log w + i \frac{\partial}{\partial \tau} \log w$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial n} \log |w| = \frac{\partial}{\partial \tau} \arg w \,.$$

Si parametrizzi ora $w \in \partial B$ ponendo $w = e^{i\psi}$, $0 \le \psi \le 2\pi$ ($\equiv \psi = \arg w$). In particolare, $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial n} \log |w| = \frac{\partial}{\partial n} \log |f(z, z_0)|$. Per la proprietà della media, vale

$$\begin{aligned} u(z_0) = U(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(e^{i\psi}) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} g(z) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} g(z) \frac{\partial}{\partial n} \log |f(z, z_0)| d\tau \,. \end{aligned}$$

La funzione $G(z, z_0) = \log |f(z, z_0)|$ =Re $[\log(f(z, z_0))]$ si dice funzione di Green per il Laplaciano relativamente al dominio D. Nel caso D sia il semipiano $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$, si ha ad esempio $f(z,z_0)=\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}$, da cui $\log f(z,z_0)=\log(z-z_0)-\log(z-\bar z_0)$ e dato che su $\partial D=\mathrm{Im}\, z=0$ si ha $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial y}=-i\frac{\partial}{\partial x}$, si ottiene, ponendo $z=x+iy$ e $z_0=x_0+iy_0$,

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x,0,x_0,y_0)=-i\left[\frac{1}{x-z_0}-\frac{1}{x-\bar z_0}\right]=\frac{1}{i}\frac{z_0-\bar z_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}=\frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,.$$

si deduce la formula di rappresentazione integrale della soluzione u con dato al bordo $u(x,0)=g(x)$ attraverso il nucleo di Poisson per il semipiano $y>0$:

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}g(x)dx\,.$$

Nel caso in cui $D=B(0,a)$, si considera $f(z,z_0)=a\frac{z-z_0}{z\bar z_0-a^2}$. Posto $z_0=re^{i\theta}$, $z=ae^{i\phi}$, su $\partial B(0,a)$ si ha $\frac{\partial}{\partial n}=-i\frac{\partial}{\partial \tau}=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}$ e $d\tau=ad\phi$ (per cui in particolare $\frac{\partial\zeta}{\partial\tau}d\tau=\frac{\partial\zeta}{\partial\phi}d\phi$ per ogni funzione ζ). Essendo $\log f(z,z_0)=\log a+\log(z-z_0)-\log(z\bar z_0-a^2)$, si ricava

$$\begin{aligned}-i\frac{\partial}{\partial\phi}\log f(z,z_0)&=-i\left[\frac{iae^{i\phi}}{ae^{i\phi}-z_0}-\frac{ie^{i\phi}\bar z_0}{e^{i\phi}\bar z_0-a}\right]\\&=\frac{(z_0\bar z_0-a^2)e^{i\phi}}{(-a^2-z_0\bar z_0)e^{i\phi}+az_0+a\bar z_0e^{i2\phi}}\\&=\frac{a^2-r^2}{r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\phi)}\,.\end{aligned}$$

Si riottiene così la formula di rappresentazione integrale per la soluzione attraverso il nucleo di Poisson per il cerchio.

Lezione del 9/1/14 (2 ore). Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$: per $u(t)\in L^1(\mathbb{R})$, si pone $\mathcal{F}(u)(\xi)\equiv\hat u(\xi)=\int_{\mathbb{R}}u(t)e^{-2\pi i\xi t}dt$. Definizione per funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Motivazioni: analisi in frequenza di segnali non periodici (o distribuzioni statistiche o densità di probabilità), risoluzione di equazioni alle derivate parziali definite su tutto lo spazio. Confronto formale con le serie di Fourier e formula di inversione (sintesi o ricostruzione del segnale). Proprietà della trasformata di Fourier: $\mathcal{F}:L^1(\mathbb{R})\to C^0\cap L^\infty(\mathbb{R})\equiv C^0_b(\mathbb{R})$ è un operatore lineare e continuo: se $u\in L^1(\mathbb{R})$ allora $||\hat u||_{L^\infty}\le||u||_{L^1}$ e la a continuità di $\hat u$ discende immediatamente per convergenza dominata. In particolare, se $u_n\to u$ in $L^1(\mathbb{R})$ implica $\hat u_n\to\hat u$ uniformemente su $\mathbb{R}$. Inoltre $\hat u(\xi)\to 0$ per $|\xi|\to+\infty$ (si dice che $\hat u\in C^0_0(\mathbb{R})$, cfr. lemma di Riemann-Lebesgue): questo fatto si dimostra approssimando u in L^1 mediante opportune funzioni u_n le cui trasformate tendono esplicitamente a zero all'infinito, e sfruttando infine la convergenza uniforme delle trasformate.

Ad esempio: sia u_n una successione di funzioni semplici (combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli) convergenti in media ad $u\in L^1(\mathbb{R})$, allora $||\hat u_n-\hat u||_{L^\infty}\le||u_n-u||_{L^1}\to 0$, e vale $\hat u_n\in C^0_0(\mathbb{R})$, come si dimostra facilmente calcolando la trasformata della funzione caratteristica di un intervallo: posto $g(t)=1$ per $|t|\le a$ e $g(t)=0$ per $|t|>a$, si ha $\hat g(\xi)=\frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$, ovvero $\hat g\in C^0_0(\mathbb{R})$.

Comportamento della trasformata di Fourier rispetto a traslazioni e dilatazioni (formula del ritardo, modulazione, effetto Doppler), simmetrie (parità, disparità). Trasformata della derivata. Relazione tra regolarità di u e decadimento all'infinito di $\hat{u}$ (e reciprocamente): $u, u', ..., u^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ implica $\hat{u}, |\xi|\hat{u}, ..., |\xi|^k\hat{u} \in C_0^0(\mathbb{R})$, e $u, tu, ..., t^k u \in L^1(\mathbb{R})$ implica $\hat{u}, (\hat{u})', ..., (\hat{u})^{(k)} \in C_0^0(\mathbb{R})$.

Lezione del 13/1/14 (2 ore). Formula di Parseval $\int \hat{u}v = \int u\hat{v}$ per $u, v \in L^1$ (conseguenza del teorema di Fubini). Formula di inversione della trasfomata di Fourier per $u \in L^1 \cap C_0^0(\mathbb{R})$ con $\hat{u} \in L^1$: si ha $\hat{\hat{u}}(t) = u(-t)$.

Dimostrazione: posto $v(x) = e^{-\pi x^2}$ e dette rispettivamente $v_\lambda(x) = v(\lambda x) = e^{-\pi^2\lambda^2 x^2}$, e $g_\lambda = \widehat{v_\lambda}$ (i.e. $g_\lambda(t) = |\lambda|^{-1}e^{-\pi\frac{x^2}{\lambda^2}}$), si ha, per convergenza dominata e usando la formula di Parseval,

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{u}}(t) &= \lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)e^{-2\pi i\xi t}\cdot v_\lambda(\xi)\,d\xi = \lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\tau_t u}(\xi)\cdot v_\lambda(\xi)\,d\xi \\
&= \lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \tau_t u(y)\cdot g_\lambda(y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} u(\lambda z - t)e^{-\pi z^2}\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(-t)e^{-\pi z^2}\,dz = u(-t)\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Prodotto di convoluzione per funzioni $u, v \in L^1(\mathbb{R})$. Si definisce

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)\,dy\,.$$

Si ha $u * v = v * u$ e $(u * v) * w = u * (v * w)$ per ogni $u, v, w \in L^1(\Omega)$. Stima di continuità in $L^1(\mathbb{R})$: $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ allora $f * g \in C^0 \cap L^\infty$ e $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$. Regola di derivazione di un prodotto di convoluzione: se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^k(\mathbb{R})$ si ha $f * g \in C^k(\mathbb{R})$ e $[f * g]^{(k)} = f * [g^{(k)}]$.

Trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione: $\widehat{u * v} = \hat{u}\cdot\hat{v}$. Si ha inoltre $\hat{u} * \hat{v} = \widehat{u \cdot v}$.

Esempio: la convoluzione (i.e. filtro) di un segnale con la funzione sinc corrisponde alla moltiplicazione della trasformata con una funzione rettangolare (filtro passa-basso). Filtri gaussiani.

La Delta di Dirac δ_0 (alias impulso ideale alias massa/carica puntiforme unitaria in 0) come elemento neutro della convoluzione. Identità approssimate g_λ, per $\lambda \to 0^+$: data una funzione $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\int_{\mathbb{R}} g(x) = 1$ (alcuni esempi: $g(x) = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$, $g(x) = e^{-\pi x^2}$, $g(x) = \alpha\frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \beta(1-x^2)^n\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$), si pone $g_\lambda(x) = |\lambda|^{-1}g(\lambda^{-1}x)$. Regolarizzazione e approssimazione di funzioni integrabili mediante convoluzione con identità approssimate regolari g_λ: per $u \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $u_\lambda \equiv u * g_\lambda \to u$ in L^1 per $\lambda \to 0$, se $u \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ si ha $u_\lambda \to u$ uniformemente su $\mathbb{R}$. Si dice che $g_\lambda \to \delta_0$ nel senso delle distribuzioni (o nel senso delle misure o in legge).

Lezione del 17/1/14 (2 ore). Trasformata di Fourier rispetto alla media quadratica $L^2(\mathbb{R})$, teorema di Plancherel (per $u \in L^1 \cap C_0^0 \cap L^2(\mathbb{R})$): $\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$. Estensione della trasf. di Fourier ad una isometria suriettiva di $L^2(\mathbb{R})$: per $u \in L^2(\mathbb{R})$ si pone $\hat{u} := \lim \hat{u}_n$ dove il limite è inteso in $L^2(\mathbb{R})$ e $u_n \in L^1 \cap C_0^0 \cap L^2(\mathbb{R})$ è una successione tale che $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R})$ (per cui, per Plancherel, $\hat{u}_n$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$, che è completo, e dunque è convergente). Rappresentazione della trasformata di funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ come integrale nel senso del valor principale convergente per q.o. frequenza. Esempio: la trasformata della funzione $u(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Risoluzione dell'equazione del calore omogenea $u_t = u_x x$ su $(0, \infty)_t \times \mathbb{R}_x$ con dato iniziale $u^0 \in L^1(\mathbb{R})$. Detta $u^t(x) = u(t, x)$ si definisce $v(t, \xi) = \hat{u^t}(\xi)$ (trasformata di F. rispetto alla variabile spaziale). Si ha $v(0, \xi) = \hat{u^0}(\xi)$ e $v_t(t, \xi) = -4\pi^2|\xi|^2 v(t, \xi)$, da cui $v(t, \xi) = \hat{u_0}(\xi) \cdot \exp(-4\pi^2\xi^2 t)$. Antitrasformando, si ottiene $u(t, x) = u^t(x) = u_0 * G^t(x)$, con $G^t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ il nucleo del calore, o soluzione fondamentale dell'equazione del calore (G^t risolve l'equazione del calore omogenea con dato iniziale $G^0 = \delta_0$). Dalle proprietà del nucleo del calore ($\int_{\mathbb{R}} G^t(x)\, dx = 1$ per ogni t, per $t \to 0^+$ $G^t \to \delta_0$, ossia G^t è identità approssimata), si deducono le proprietà regolarizzanti dell'equazione del calore, ossia $u \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times (0, +\infty)_t)$ proprietà di convergenza della soluzione al dato iniziale (puntuale nei punti di continuità, uniforme su intervalli compatti se il dato iniziale è continuo, in norma L^1 se il dato iniziale è in L^1), proprietà di propagazione dei segnali a velocità infinita. Stime di stabilità per la soluzione rispetto al dato iniziale: si ha ad esempio $\|u(t, \cdot)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \|G_t\|_1 = \|u_0\|_\infty$ (principio del massimo per l'eq. del calore), oppure la stima di decadimento $\|u(t, \cdot)\|_\infty \leq \|u_0\|_1 \|G_t\|_\infty \leq C\|u_0\|_1 \cdot t^{-1/2}$, e stime analoghe per le derivate di u. Cenno sull'equazione del calore e nucleo del calore in $\mathbb{R}^2$.

Lezione del 21/1/14 (2 ore). Segnali causali. Funzione di Heaviside. Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili. Trasformata di Laplace. Ascissa di convergenza. La trasformata di Laplace è una funzione olomorfa nel semipiano di convergenza (via Teorema di derivazione sotto il segno di integrale o via Teorema di Morera). Trasformata della funzone di Heaviside. Formula del ritardo e della modulazione. Trasformata di Laplace di polinomi, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali. Relazione tra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier. Formula di inversione di Riemann-Fourier. Formula di Heaviside per l'inversione di funzioni razionali. Trasformata di Laplace e convoluzione, integrazione, derivazione.

Lezione del 24/1/14 (2 ore). Trasformata di Laplace della Delta di Dirac. Delta di Dirac come derivata (nel senso delle misure) della funzione di Heaviside. Applicazione alla risoluzione di problemi ai valori iniziali anche in presenza di termini impulsivi: struttura della soluzione come somma del prodotto di convoluzione del termine forzante con la soluzione fondamentale (anti-trasformata della funzione di trasferimento alias reciproco del polinomio caratteristico) e dell'anti-trasformata di una funzione razionale formata con il polinomio caratteristico ed i valori iniziali.

Risoluzione di equazioni integrali di tipo Volterra nel caso in cui il nucleo sia invariante per traslazioni (ovvero rappresenti un nucleo di convoluzione). Teorema del valore iniziale e finale.

Bibliografia.

[1] Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill (1987).
[2] Matthews, Howell, *Complex analysis for mathematics and Engineering*, Jones & Bartlett (2006).
[3] Spiegel, *Laplace Transforms*, collana Schaum, Mc Graw-Hill (1994).
[4] Weinberger, *A first course in Partial Differential Equations*, Dover (1995).
[5] De Marco, *Analisi Matematica 2.*
[6] Henrici, *Applied and computational Complex Analysis*, Wiley (1974).