Trigonometria

Enrico Gregorio

Edizione novembre 2013

INDICE

ELENCO DELLE FIGURE

ELENCO DELLE TABELLE

1 INTRODUZIONE

Cardini della geometria elementare sono i criteri di congruenza. Due triangoli sono congruenti se vale una delle condizioni seguenti:

- i due triangoli hanno congruenti due lati e l'angolo compreso;
- i due triangoli hanno congruenti un lato e due angoli;
- i due triangoli hanno congruenti i tre lati.

Va sempre tenuto presente che si deve dare un ordine preciso ai tre vertici dei triangoli, quando si applicano questi criteri.

Per i triangoli rettangoli ci si può limitare a due soli elementi, purché uno di essi sia un lato e l'altro non sia l'angolo retto. Infatti, se conosciamo due lati possiamo trovare il terzo con il teorema di Pitagora; se conosciamo un lato e un angolo non retto, conosciamo un lato e due angoli del triangolo.

Fin dall'antichità ci si è accorti di questo fatto e si è cercato di sfruttarlo per ottenere misure di lunghezze a partire da dati sperimentali: le prime 'tavole trigonometriche' sono opera di Tolomeo, vissuto nel secondo secolo, che se ne serviva per calcoli astronomici.

Tolomeo si rese conto che non possiamo usare direttamente la misura degli angoli per risolvere, per esempio, un triangolo noti due lati e l'angolo compreso: non esiste infatti una relazione facile tra la misura dell'angolo e quella del lato opposto. Se raddoppiamo l'angolo, è evidente che il lato opposto non raddoppia. Il caso più facile è quando i due lati hanno la stessa misura a: se l'angolo è metà di un angolo retto, i soliti calcoli mostrano che il lato opposto ha misura $a\sqrt{2-\sqrt{2}}$; se l'angolo è retto il lato opposto ha misura $a\sqrt{2}$. Se invece l'angolo è un sesto di angolo retto, il lato opposto ha misura $a\sqrt{2-\sqrt{3}}$; con un angolo di un terzo dell'angolo retto, il lato opposto ha misura a, perché il triangolo è equilatero.

Ne concludiamo che non può esserci una proporzionalità diretta; se poi i due lati noti sono diversi, la questione diventa molto più complicata. Ma non senza speranza, se ciò che ci interessa sono misure approssimate.

1.1 MISURA DEGLI ANGOLI

Prima di affrontare la trigonometria propriamente detta, occupiamoci della misura degli angoli. La pratica di dividere l'angolo giro in 360 parti deriva dal sistema di misura babilonese e, ovviamente, dal fatto che l'anno dura circa 360 giorni: è probabile che sia questo fatto che indusse i babilonesi a impiegare un sistema di numerazione a base 60, che resiste ancora oggi nella divisione di un grado (o di un'ora) in 60 parti, a loro volta divise in 60 parti.

Tuttavia la matematica moderna preferisce evitare questi numeri arbitrari per usare invece un sistema di misura *intrinseco*. Si parte dalla considerazione che la lunghezza di un arco di circonferenza dipende solo dall'angolo al centro, una volta noto il raggio: possiamo perciò misurare gli angoli tramite la lunghezza di un arco di circonferenza di raggio unitario. Più precisamente, se la misura dell'angolo al centro è α e il raggio della circonferenza è r, abbiamo la proporzione

$$l : \alpha = 2\pi r : G$$

dove indichiamo con G la misura dell'angolo giro. Quindi avremo

$$l = \frac{2\pi}{G} \alpha r$$

e la relazione più semplice si ha ponendo $G = 2\pi$. Questa misura degli angoli si chiama in unità *radianti*. La conversione alle misure tradizionali si ottiene molto facilmente con una proporzione: se indichiamo con α la misura in radianti di un angolo e con b la sua misura in gradi, si deve avere $\alpha : 2\pi = b : 360$ cioè

$$b = \frac{180\alpha}{\pi} \qquad \text{oppure} \qquad \alpha = \frac{b\pi}{180}.$$

In queste note useremo sempre la misura in radianti, tranne che in qualche esempio, per dare un'idea più chiara dell'ampiezza degli angoli trovati. Le conversioni più frequenti sono, indicando prima della freccia la misura in gradi e dopo quella in radianti,

$$30 \to \frac{\pi}{6}, \quad 36 \to \frac{\pi}{5}, \quad 45 \to \frac{\pi}{4}, \quad 60 \to \frac{\pi}{3}, \quad 90 \to \frac{\pi}{2}, \quad 180 \to \pi.$$

Una scappatoia può essere quella di considerare il simbolo $^\circ$ come il numero $\pi/180$ e quindi leggere 30° come $30 \cdot \pi/180 = \pi/6$, ma è solo un trucco. Meglio abituarsi subito e abbandonare i vetusti gradi.

1.2 LA TRIGONOMETRIA DI TOLOMEO

Tolomeo scelse una via che si rivelò poco maneggevole, decidendo di 'misurare' gli angoli tramite le corde: se l'angolo α è un angolo al centro in un cerchio di raggio 5000, si consideravano la *corda* $\operatorname{cd}\alpha$ e la *sagitta* $\operatorname{sg}\alpha$ del corrispondente settore circolare: se A e B sono gli estremi dell'arco e della corda, chiamiamo OC il raggio perpendicolare alla corda e H il punto di intersezione; allora la sagitta è la misura del segmento HC.

Con opportune formule per corda e sagitta della somma e differenza di due angoli, Tolomeo compilò una tavola che forniva i valori delle due funzioni per angoli da zero all'angolo retto con passo di mezzo grado. L'uso del raggio 5000 era per evitare frazioni ed equivale a usare quattro cifre decimali e raggio unitario.

Gli indiani scoprirono proprietà analoghe, ma usavano un sistema diverso che, passato agli arabi e migliorato, soppiantò anche in Europa la trigonometria di Tolomeo. Le formule di addizione e sottrazione sono molto più facili da ricordare e l'applicazione ai triangoli più diretta. Quando vedremo la definizione più ampia delle funzioni trigonometriche ci accorgeremo del perché sia 'quella giusta'.

1.3 NUOVI USI

Per secoli le funzioni trigonometriche sono state adoperate per risolvere problemi di geometria pratica: misurazione di distanze, di altezze di edifici o di montagne. Dalla fine del XVIII secolo, emerse la possibilità di sfruttare queste funzioni in un campo quasi totalmente inaspettato. La scoperta è dovuta a Joseph Fourier che stava studiando la diffusione del calore nei metalli. Può forse essere una sorpresa sapere che le *serie di Fourier* o le *trasformate di Fourier* sono uno strumento essenziale nella produzione di documenti sonori, per esempio nel ben noto formato MP3.

Le serie di Fourier 'spiegano' il motivo dell'armonia o dissonanza tra suoni, dando una svolta decisiva in un campo studiato da oltre duemila anni a partire da Pitagora. Ma non solo: le funzioni trigonometriche possono essere usate per descrivere matematicamente tutti i fenomeni ondulatori, fra cui suono e luce.

2 FUNZIONI TRIGONOMETRICHE E TRIANGOLI

Consideriamo due semirette di origine A che formino un angolo acuto α. Su una semiretta fissiamo un punto B e tiriamo la perpendicolare che incontra l'altra semiretta in C. Se prendiamo sulla prima semiretta un altro punto B' possiamo ripetere la costruzione e ottenere il punto C'.

I due triangoli rettangoli ABC e $AB'C'$ sono simili. Secondo la convenzione che preciseremo più avanti, indichiamo con a la misura di BC, b la misura di AC e c la misura di AB. Con a', b' e c' indichiamo le misure dei lati dell'altro triangolo con la stessa convenzione. Allora la similitudine si esprime con

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \qquad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}.$$

In realtà basta una delle due uguaglianze, per via del teorema di Pitagora. Ciò che ci importa vedere è che i rapporti a/b e c/b non dipendono dalla scelta del punto B e quindi dipendono solo dall'angolo. Si pone allora

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \cos\alpha = \frac{c}{b}.$$

Il primo valore si chiama *seno* di α, il secondo è il *coseno* di α. Per ricordare facilmente la definizione, il seno è *il rapporto tra cateto opposto e ipotenusa*, mentre il coseno è *il rapporto tra cateto adiacente e ipotenusa*. Se indichiamo con γ l'altro angolo acuto del triangolo rettangolo ABC, che è lo stesso in ognuno dei triangoli ottenuti con la stessa procedura perché è il complementare di α, abbiamo evidentemente le relazioni

$$\sin\gamma = \cos\alpha, \qquad \cos\gamma = \sin\alpha$$

che possiamo anche scrivere

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

e ciò spiega il nome "coseno": è il seno dell'angolo complementare.

C'è un'importante relazione tra seno e coseno dello stesso angolo: il teorema di Pitagora infatti ha come conseguenza che

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = 1$$

cioè che $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Per evitare parentesi, la tradizione è di scrivere $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$ e $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$.

RELAZIONE PITAGORICA. *Se α è un angolo acuto, allora*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Dunque conoscendo il seno di un angolo (acuto), conosciamo anche il suo coseno, e viceversa. Ci si potrebbe domandare perché usare due funzioni invece di una: è una questione di praticità, prima di tutto, ma non solo, e ce ne accorgeremo con la definizione generale.

Si usa anche una terza funzione: si pone infatti

$$\tan\alpha = \frac{a}{c}$$

e il rapporto si chiama *tangente* di α. È chiaro che si ha

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Nelle applicazioni della trigonometria si adoperavano varie altre funzioni: *cotangente*, *secante*, *cosecante*, *senoverso*, *cosenoverso*. Con l'avvento delle calcolatrici queste funzioni non servono quasi più e non ne parleremo; l'unica che in qualche situazione è conveniente usare è la cotangente, definita da

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

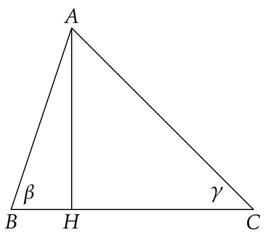
Teniamo presente che le definizioni di seno e coseno sono provvisorie: ne daremo una nuova più avanti per angoli di misura qualsiasi, che coinciderà con questa nel caso degli angoli acuti. Intanto proviamo a calcolare seno, coseno e tangente degli angoli più facili. Le prime sei uguaglianze si ottengono dal triangolo equilatero, le tre successive dal quadrato:

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, &&\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, &&\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},\\
&\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, &&\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, &&\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},\\
&\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, &&\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, &&\tan\frac{\pi}{4} = 1.
\end{aligned}$$

2.1 IL TEOREMA DELLE PROIEZIONI

Cominciamo fissando una convenzione. Parlando di un triangolo 'generico' ABC, indicheremo con α, β e γ le misure degli angoli in A, B e C rispettivamente; con a, b e c indicheremo le misure dei lati opposti ai vertici A, B e C, rispettivamente.

Supponiamo dunque che ABC sia un triangolo acutangolo e tiriamo da A l'altezza relativa al lato BC. Se indichiamo con H il piede della perpendicolare e con h la misura di AH, possiamo scrivere alcune relazioni:



$$h = b\sin\gamma, \quad h = c\sin\beta,$$
$$a_B = c\cos\beta, \quad a_C = b\cos\gamma,$$

dove con a_B indichiamo la misura di BH e con a_C la misura di CH. Da queste otteniamo $b\sin\gamma = c\sin\beta$ e $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$. Naturalmente possiamo ripetere la costruzione con ciascuna delle tre altezze ottenendo le relazioni

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

che rivedremo più avanti e anche

$$
\begin{aligned}
a &= b\cos\gamma + c\cos\beta,\\
b &= c\cos\alpha + a\cos\gamma,\\
c &= a\cos\beta + b\cos\alpha
\end{aligned}
$$

Le ultime relazioni si chiamano collettivamente *teorema delle proiezioni*. Non sono davvero così utili, ma mostrano come ricavare un lato conoscendo gli angoli adiacenti e gli altri due lati.

Se conosciamo a, β e γ, cioè un lato e gli angoli adiacenti, possiamo ricavare b e c da

$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Ovviamente $\alpha = \pi - \beta - \gamma$. Dunque abbiamo *risolto* il triangolo.

Supponiamo di conoscere a, b e l'angolo compreso γ: non è altrettanto facile risolvere il triangolo, ma le cinque relazioni che abbiamo a disposizione sono effettivamente sufficienti, anche se non troppo comode. Da $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ ricaviamo infatti $c\cos\beta$. Inoltre sappiamo che $b\sin\gamma = c\sin\beta$ e dunque conosciamo anche $c\sin\beta$ e, dalla relazione pitagorica ricaviamo

$$c^2 = b^2\sin^2\gamma + (a - b\cos\gamma)^2.$$

Conoscendo c ricaviamo β e $\alpha = 2\pi - \beta - \gamma$. Vale la pena però di svolgere il calcolo:

$$c^2 = b^2\sin^2\gamma + a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Questa relazione vale anche se sono dati a, b e c: dunque abbiamo il modo di risolvere il triangolo dati tre lati; infatti

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

relazione che ritroveremo fra poco. Una volta che conosciamo a, b e γ ci siamo ricondotti al caso precedente e possiamo determinare α e β.

Nel caso il triangolo sia rettangolo in A non potremmo usare le formule in cui compare $\cos\alpha$, perché non abbiamo una definizione di $\cos(\pi/2)$. Ma, per definizione di coseno, abbiamo

$$b = a\cos\gamma, \qquad c = a\cos\beta$$

e dunque, se definiamo $\cos(\pi/2) = 0$, le formule rimangono tali e quali.

Se il triangolo è ottusangolo in A, abbiamo ancora $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$, ma le altre due formule non sono applicabili. Tuttavia abbiamo evidentemente

$$b = a\cos\gamma - c\cos(\pi - \alpha)$$

che diventa la formula precedente se *definiamo*, per $\pi/2 < \alpha < \pi$ (cioè per α ottuso),

$$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha).$$

Analogamente avremo allora anche la terza formula, $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.

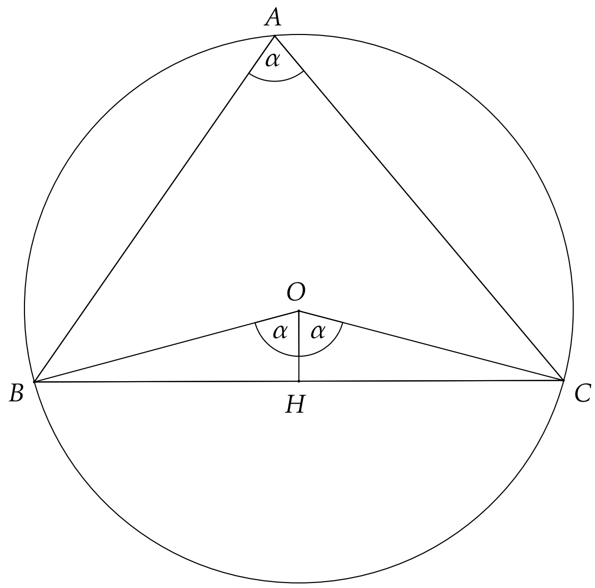


FIGURA 1: Il teorema del seno

2.2 IL TEOREMA DEL SENO

Ricordiamo altri due risultati di geometria elementare: (1) per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza; (2) ogni angolo alla circonferenza è metà del corrispondente angolo al centro.

Se ABC è un triangolo acutangolo, il centro O del cerchio circoscritto, cioè l'unica circonferenza che passa per i tre vertici, è interno al triangolo. Consideriamo dunque l'angolo BOC che ha misura 2α e tiriamo la perpendicolare OH alla corda BC. Questa divide il triangolo isoscele OBC in due triangoli rettangoli congruenti e l'angolo HOB ha misura α, come nella figura 1.

Se indichiamo con r il raggio del cerchio circoscritto abbiamo dunque

$$\frac{a}{2} = r \sin \alpha$$

applicando semplicemente la definizione di seno. Ovviamente possiamo ripetere la costruzione per gli altri due lati, ottenendo di nuovo

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

come già visto. Ma qui abbiamo una relazione in più, avendo legato quelle frazioni al raggio del cerchio circoscritto.

Supponiamo ora che il triangolo ABC sia ottusangolo in A. Il centro O del cerchio circoscritto è ora *esterno* al triangolo e l'angolo BOC ha misura $2\pi - 2\alpha$. Possiamo ripetere la costruzione di prima, tirando la perpendicolare OH al lato BC, e ottenere con le stesse considerazioni

$$\frac{a}{2} = r \sin(\pi - \alpha).$$

Per gli altri due lati è facile verificare le relazioni

$$\frac{b}{2} = r \sin \beta, \qquad \frac{c}{2} = r \sin \gamma.$$

Se decidiamo di definire $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$, abbiamo dunque che la relazione $a = 2r \sin \alpha$ continua a valere. Perciò *definiamo* così il seno di un angolo ottuso:

$$\text{se } \pi/2 < \alpha < \pi \text{ poniamo } \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha).$$

Che succede se l'angolo α è retto? In questo caso il lato BC è un diametro del cerchio circoscritto e quindi vale $a = 2r$. Se vogliamo mantenere la relazione precedente possiamo dunque definire

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

che è in accordo, rispetto alla relazione pitagorica, con

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

già definito in precedenza. Notiamo che queste definizioni di seno e coseno per l'angolo retto e gli angoli ottusi sono in accordo con la relazione pitagorica, che quindi vale per tutti gli angoli α con $0 < \alpha < \pi$.

TEOREMA DEL SENO. *Se r è il raggio del cerchio circoscritto al triangolo ABC, allora*

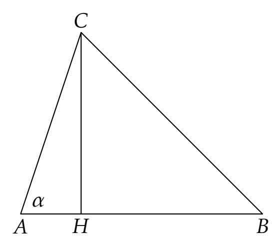
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r.$$

Questo teorema vale *per ogni triangolo*, con la definizione ampliata di seno data prima. Spesso il ragionamento adoperato per dimostrare il teorema si enuncia per le corde di un cerchio.

TEOREMA DELLA CORDA. *Se a è la misura di una corda in un cerchio di raggio r, corrispondente a un angolo al centro di ampiezza 2α o, che è lo stesso, a un angolo alla circonferenza di ampiezza α, si ha $a = 2r \sin \alpha$.*

2.3 IL TEOREMA DEL COSENO

Consideriamo di nuovo un triangolo acutangolo ABC e tiriamo l'altezza dal vertice C, chiamando H il piede e h la misura dell'altezza. Sia d la misura di AH, in modo che $c - d$ è la misura di BH. Possiamo applicare due volte il teorema di Pitagora per ottenere



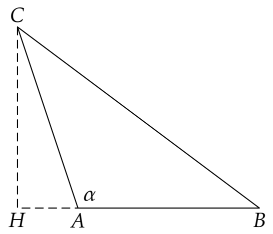
$$b^2 = d^2 + h^2, \qquad a^2 = (c - d)^2 + h^2$$

e, sottraendo membro a membro, abbiamo

$$b^2 - a^2 = d^2 - (c - d)^2$$

cioè, sviluppando,
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$$
relazione nota a Euclide. Ma noi possiamo andare avanti, perché la definizione di coseno ci dice che $d = b\cos\alpha$. Dunque
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$
Notiamo che con la definizione già data di $\cos(\pi/2) = 0$ la relazione continua a valere: in questo caso il triangolo è rettangolo in A e la relazione è il teorema di Pitagora. Se poi il triangolo è ottusangolo, possiamo comunque svolgere lo stesso ragionamento per i due lati opposti agli angoli acuti.

Rimane da esaminare dunque il caso in cui l'angolo α è ottuso. Tiriamo nuovamente l'altezza dal vertice C: questa volta il piede è esterno al segmento AB; chiamiamo di nuovo d la misura di AH e applichiamo il teorema di Pitagora due volte, osservando che la misura di BH è $c+d$:



$$b^2 = d^2 + h^2, \qquad a^2 = (c+d)^2 + h^2.$$
Sottraendo membro a membro abbiamo
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cd$$
e, questa volta, possiamo scrivere $d = b\cos(\pi - \alpha)$. Dunque, usando la definizione data prima
$$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha),$$
la relazione torna a scriversi
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

TEOREMA DEL COSENO. *Per il triangolo ABC valgono le relazioni*
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Molti testi italiani attribuiscono il teorema a Lazare Carnot (1753–1823), sebbene fosse noto a François Viète (1540–1603) e, prima ancora, a Ghiyāth al-Dīn Jamshīd ibn Mas'ūd al-Kāshī (غياث‌الدين جمشيد كاشانى), matematico persiano (1380–1429).

Con il teorema del coseno è ora facile risolvere un triangolo noti due lati e l'angolo compreso: si trova il terzo lato e si usa il teorema del seno per determinare gli altri due angoli. Non c'è incertezza sulla scelta dell'angolo, perché possiamo sapere se l'angolo α è acuto, retto o ottuso esaminando il valore di $a^2 - b^2 - c^2$: se è positivo α è ottuso, se è nullo α è retto, se è negativo α è acuto.

Possiamo usare il teorema del coseno anche per risolvere un triangolo noti i tre lati: calcoliamo $\cos\alpha$ con il teorema del coseno e ci riduciamo al caso precedente.

2.4 IL TEOREMA DI TOLOMEO

I calcoli di Tolomeo si basavano su un teorema geometrico che porta ancora il suo nome.

TEOREMA DI TOLOMEO. *In un quadrilatero inscritto in una circonferenza il rettangolo delle diagonali è equivalente alla somma dei rettangoli sui lati opposti.*

Non è difficile, con questo teorema, trovare il valore di $\sin(\alpha+\beta)$ noti i valori del seno e coseno di α e β. Tuttavia la formula vale solo quando $\alpha+\beta<\pi$: negli altri casi non avrebbe senso. La scriviamo senza pretesa di dimostrarla, lo faremo molto più in generale nel prossimo capitolo:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Se poniamo, formalmente, $\beta=0$, abbiamo

$$\sin\alpha=\sin\alpha\cos 0+\cos\alpha\sin 0$$

che vogliamo sia valida per ogni α. Se poniamo $\alpha=\pi/2$, abbiamo dunque

$$1=1\cos 0+0\sin 0$$

e quindi $\cos 0=1$; dalla relazione pitagorica, $\sin 0=0$. Estendendo la definizione con le regole precedenti, abbiamo anche

$$\sin\pi=0,\qquad\cos\pi=-1.$$

Possiamo spingerci oltre? Dopo tutto, gli angoli possono esprimere anche *rotazioni* e nulla prescrive che le rotazioni siano al massimo di un angolo piatto.

Nel prossimo capitolo daremo le definizioni generali di seno e coseno, che però sarebbero come cadute dall'alto senza aver capito perché queste funzioni sono state introdotte in matematica.

GONIOMETRIA

3

La differenza tra *goniometria* e *trigonometria* è intuibile già dal nome: non ci interessa più tanto trovare misure incognite di elementi di triangoli quanto misurare angoli tramite segmenti. La *riforma* delle funzioni goniometriche è opera principalmente di Leonhard Euler.

3.1 DEFINIZIONE GENERALE DI SENO E COSENO

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano Γ (ortogonale e monometrico, come sempre), con origine O. Supponiamo di avere una semiretta con origine O che formi con il semiasse positivo delle ascisse un angolo acuto α. In questo sistema di riferimento consideriamo la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, che ha equazione $x^2 + y^2 = 1$. Sia P il punto di intersezione della semiretta con la circonferenza: se ne vede un esempio nella figura 2. Dalle considerazioni del capitolo precedente abbiamo che le coordinate di P sono precisamente

$$P(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Possiamo notare che la relazione vale anche quando $\alpha = 0$, cioè la semiretta coincide con il semiasse positivo delle ascisse, e quando $\alpha = \pi/2$, cioè la semiretta coincide con il semiasse positivo delle ordinate, proprio in virtù delle definizioni date.

Questa è l'osservazione decisiva per definire il seno e il coseno di un numero qualsiasi. Decidiamo, arbitrariamente ma non troppo, di considerare positivo il verso di rotazione antiorario, cioè quello che permette di sovrapporre il semiasse positivo delle ascisse a quello positivo delle ordinate con la rotazione di ampiezza minima.

Dato un numero positivo α, consideriamo la semiretta che si ottiene ruotando il semiasse positivo delle ascisse di un angolo α nel verso positivo; se $\alpha > 2\pi$, dovremo fare più di un giro, ma comunque otteniamo una semiretta. Se $\alpha < 0$, consideriamo la semiretta che si ottiene ruotan-

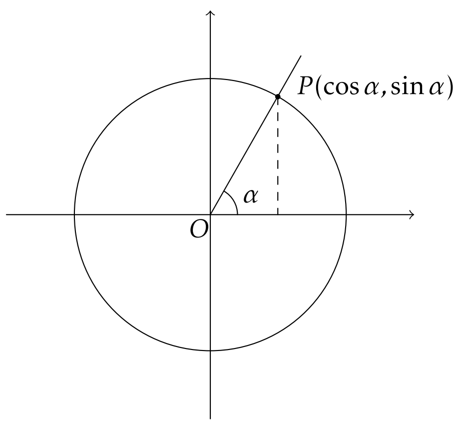


FIGURA 2: Il cerchio goniometrico

do il semiasse positivo delle ascisse di un angolo $-\alpha$ nel verso negativo. Se $\alpha = 0$ la semiretta da considerare è lo stesso semiasse positivo delle ascisse. In tutti i casi, chiamiamo $P(x_P, y_P)$ il punto di intersezione della semiretta con la circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine. Allora, *per definizione*, le coordinate di P sono il coseno e il seno di α:

$$\cos\alpha = x_P, \qquad \sin\alpha = y_P.$$

È dunque evidente dalla definizione che

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha, \qquad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$

perché la semiretta che si ottiene è la stessa. Le funzioni cos e sin sono dunque *periodiche*, quindi di specie completamente diversa dai polinomi, che si annullano solo in un numero finito di punti. Infatti i punti in cui si annulla il seno sono tutti e soli quelli della forma

$$k\pi \quad (k \text{ intero}).$$

Analogamente il coseno si annulla in tutti e soli i punti

$$\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \text{ intero}).$$

Si definisce poi la terza funzione importante, la tangente, con

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \text{ intero}\right).$$

Ovviamente la tangente non è definita dove il coseno si annulla.

RELAZIONE PITAGORICA. *Per ogni α si ha* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

► La relazione non è altro l'espressione che il punto P giace sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio 1. ◄

Dalla definizione segue anche che, per ogni α,

$$-1 \le \sin\alpha \le 1, \qquad -1 \le \cos\alpha \le 1$$

e che, per ogni α e β, da $\sin\alpha = \sin\beta$ e $\cos\alpha = \cos\beta$ possiamo dedurre

$$\alpha - \beta = 2k\pi$$

dove k è un opportuno intero.

Le importanti relazioni fra gli *angoli associati* derivano facilmente dalle simmetrie rispetto agli assi e sono riassunte nella tabella 1. Si noti che le relazioni nell'ultima riga sono identiche a quelle nella penultima, perché le funzioni sono periodiche. Non c'è bisogno di ricordarle a memoria: un disegno è sufficiente a ricavarle.

Per la tangente si possono dare formule analoghe che riassumiamo nella tabella 2; qui va tenuto presente che le formule valgono solo dove sono definiti ambo i membri. Osserviamo anche che la tangente ha periodo π: infatti

$$\tan(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha$$

TABELLA 1: Seno e coseno di angoli associati

$\sin(\alpha+\pi/2)=\sin\alpha$	$\cos(\alpha+\pi/2)=-\cos\alpha$
$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$	$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$
$\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha$	$\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$
$\sin(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

TABELLA 2: Tangente di angoli associati

$\tan(\alpha+\pi/2)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}$	$\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$
$\tan(\pi/2-\alpha)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	

purché, ovviamente, $\tan\alpha$ sia definita. Dal momento che la tangente è definita in $(\pi/2\,..\,3\pi/2)$ ma non agli estremi, deduciamo che non ci può essere un periodo minore di π.

Come si vede, la definizione *ad hoc* per estendere seno e coseno agli angoli ottusi diventa una relazione ovvia per via della simmetria assiale rispetto all'asse delle ordinate. È chiaro, però, che quella definizione coincide con l'attuale, quindi i teoremi enunciati nel capitolo precedente continuano a valere con la definizione *ufficiale* di seno e coseno.

Diamo anche la tabella dei segni di seno e coseno, utile per quando si deve identificare un angolo noti il suo seno e il suo coseno, si veda la tabella 3.

TABELLA 3: Segni di seno e coseno

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
$\sin\alpha>0$	$\sin\alpha>0$	$\sin\alpha<0$	$\sin\alpha<0$
$\cos\alpha>0$	$\cos\alpha<0$	$\cos\alpha<0$	$\cos\alpha>0$

3.2 LA FORMULA DI ADDIZIONE

La definizione data di seno e coseno può sembrare artificiosa ed è così finché non diamo qualche metodo per *calcolare* seno e coseno, almeno in modo approssimato. Lo strumento principale, fino alla scoperta degli sviluppi in serie, è stata la formula di addizione con le sue conseguenze.

Indichiamo con A il punto di intersezione del cerchio goniometrico con il semiasse positivo delle ascisse, cioè $A(1,0)$. Sia P il punto di intersezione della semiretta definita dalla rotazione β, come nella definizione di seno e coseno, quindi

$$P(\cos\beta, \sin\beta).$$

Se b è la misura del segmento AP, abbiamo

$$\begin{aligned} b^2 &= (1-\cos\beta)^2 + (0-\sin\beta)^2 \\ &= 1 - 2\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\beta \\ &= 2 - 2\cos\beta. \end{aligned}$$

Sia ora Q il punto determinato dalla semiretta definita dalla rotazione $\beta+\gamma$; indichiamo con c la misura di PQ.

Se ruotiamo di β il sistema di riferimento, il punto A va a finire in P e il punto Q coincide con quello definito dalla rotazione di γ. Dunque, per il calcolo di prima,

$$c^2 = 2 - 2\cos\gamma.$$

Tuttavia possiamo calcolare c in un altro modo, dal momento che

$$P(\cos\beta, \sin\beta), \quad Q(\cos(\beta+\gamma), \sin(\beta+\gamma)).$$

Per la formula della distanza tra due punti si ha infatti, tenendo conto della relazione pitagorica e ponendo $\beta+\gamma=\alpha$,

$$\begin{aligned} c^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta \\ &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

e dunque possiamo scrivere, dal momento che $\gamma = \alpha - \beta$,

$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

e, finalmente, l'importantissima formula

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

che vale per ogni α e β. Da questa ricaviamo tutte le altre.

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE. *Per ogni α e β valgono le seguenti relazioni:*

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

► Abbiamo già l'ultima. Per la seconda basta sostituire β con $-\beta$ e ricordare che $\cos(-\beta) = \cos\beta$ e $\sin(-\beta) = -\sin\beta$.

Se nell'ultima sostituiamo α con $\pi/2 - \alpha$ otteniamo a sinistra

$$\cos(\pi/2 - \alpha - \beta) = \sin(\alpha+\beta)$$

e a destra

$$\cos(\pi/2-\alpha)\cos\beta+\sin(\pi/2-\alpha)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

cioè la prima formula. Per avere la terza basta sostituire β con $-\beta$ nella prima formula. ◀

Nel caso particolare di $\alpha=\beta$ abbiamo, dalle formule di addizione, le cosiddette *formule di duplicazione*:

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

La formula di duplicazione del coseno si può scrivere in altri due modi, ricordando che la relazione pitagorica dà $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ e $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$:

$$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$$

Se sostituiamo α con $\alpha/2$ possiamo ricavare

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Queste possono anche essere scritte come

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$
$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

dove il modulo può essere tolto non appena si conosca effettivamente se $\sin(\alpha/2)$ e $\cos(\alpha/2)$ sono positivi o negativi, usando la tabella 3.

Ecco come fecero gli antichi a compilare tavole di seni e coseni: partendo dagli angoli noti applicarono ripetutamente le formule di bisezione per ottenere seno e coseno di angoli 'piccoli', adoperando poi le formule di addizione per ricavare valori approssimati del seno e coseno di angoli 'arbitrari'. Naturalmente per noi ciò è poco importante, visto che possiamo ricavare valori approssimati di seno e coseno dalla calcolatrice.

3.3 IDENTITÀ GONIOMETRICHE

La relazione pitagorica permette di ottenere varie identità che in certi casi permettono di ottenere semplificazioni. Vediamo qualche esempio.

La seguente identità permette di scrivere la tangente in termini del solo coseno o viceversa con l'incertezza del segno che va, come sempre, risolta con la tabella 3:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$$

Un altro esempio, utile in certe situazioni:

$$\begin{aligned}\sin^4\alpha+\cos^4\alpha&=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\&=1-\frac{1}{2}\sin^2(2\alpha).\end{aligned}$$

Un'identità molto interessante viene dalla formula di bisezione. Supponiamo che $0 < \alpha/2 < \pi/2$; allora

$$\begin{aligned}\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} \\ &= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\end{aligned}$$

e si può facilmente verificare che questa vale per ogni α per il quale $\tan(\alpha/2)$ sia definita, cioè per $\cos\alpha \neq -1$. Si può usare anche il trucco rovescio, ottenendo

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Se poniamo $t = \tan(\alpha/2)$, $x = \cos\alpha$ e $y = \sin\alpha$, possiamo scrivere le due identità come

$$t = \frac{y}{1+x}, \qquad t = \frac{1-x}{y}$$

che diventano

$$\begin{cases} tx - y = -t \\ x + ty = 1 \end{cases}$$

e possiamo risolvere rispetto a x e y. Otteniamo

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

che diventano

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}, \qquad \sin\alpha = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}$$

e risultano molto utili, pure se valgono solo per $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ (k intero).

Le formule appena viste hanno un'interessante applicazione. Supponiamo di avere la relazione $x^2 + y^2 = z^2$, dove x, y e z sono numeri interi positivi: una *terna pitagorica*. Ne deduciamo

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$

e quindi possiamo scrivere $x/z = \cos 2\alpha$, $y/z = \sin 2\alpha$ per un unico $\alpha \in (0\,.\,.\,\pi/4)$.

Possiamo anche supporre che il massimo comune divisore fra x e y sia 1, così le due frazioni sono ridotte ai minimi termini. Infatti, se, per esempio, un primo p dividesse x e z, dal fatto che $y^2 = z^2 - x^2$ seguirebbe che p divide anche y.

Uno fra x e y deve essere pari (e l'altro, quindi, dispari). Infatti, se $x = 2a+1$ e $y = 2b+1$, avremmo

$$x^2 + y^2 = 4(a^2 + a + b^2 + b) + 2$$

che non è un multiplo di 4; ma z dovrebbe essere pari e quindi z^2 sarebbe un multiplo di 4. Prendiamo dunque y pari e x dispari.

Dalle formule precedenti, ricaviamo che

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{yz}{x^2+z^2}$$

e dunque è un numero razionale. Lo scriviamo come

$$\tan\alpha = \frac{v}{u},$$

con u e v primi fra loro. Dalle altre formule otteniamo allora

$$\frac{x}{z} = \frac{1-(v^2/u^2)}{1+(v^2/u^2)} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}.$$

Analogamente,

$$\frac{y}{z} = \frac{2v/u}{1+(v^2/u^2)} = \frac{2uv}{u^2+v^2}.$$

Se dimostriamo che il massimo comune divisore fra $2uv$ e u^2+v^2 è 1, avremo che

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 + v^2.$$

Se un primo p divide $2uv$, allora $p = 2$, p divide u oppure p divide v. Se p divide u e divide anche u^2+v^2, allora divide v^2 e quindi v: impossibile. Analogamente p non può dividere v.

Rimane il caso in cui $p = 2$ non divide né u né v. Allora possiamo scrivere $u = 2a+1$ e $v = 2b+1$, ottenendo

$$\frac{y}{z} = \frac{2(2a+1)(2b+1)}{4(a^2+a+b^2+b)+2} = \frac{(2a+1)(2b+1)}{2(a^2+a+b^2+b)+1}$$

che è impossibile, in quanto y è pari. Dunque questo primo p non esiste e il massimo comune divisore è 1.

Abbiamo quindi caratterizzato tutte le terne pitagoriche: le si ottiene come le terne della forma

$$\bigl(k(u^2-v^2), 2kuv, k(u^2+v^2)\bigr)$$

dove k, u e v sono interi positivi, con u e v coprimi, uno pari e uno dispari ($u > v$).

Possiamo anche scrivere le formule di addizione e sottrazione per la tangente, con la solita precauzione che valgono solo dove entrambe le espressioni sono definite; nel secondo passaggio si dividono numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$$

La corrispondente formula di sottrazione si ottiene sostituendo β con $-\beta$:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.$$

Da queste abbiamo la formula di duplicazione:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

A volte sono utili le formule di triplicazione del seno o del coseno; non c'è bisogno di impararle a memoria, perché possono essere ricavate con la stessa tecnica mostrata qui:

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha+\alpha)\\ &= \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha\\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha\\ &= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

Analogamente si ottiene la formula di triplicazione del seno:

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha+\alpha)\\ &= \sin(2\alpha)\cos\alpha - \cos(2\alpha)\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha.\end{aligned}$$

Se nella prima sostituiamo $\sin^2\alpha$ con $1-\cos^2\alpha$ e nella seconda $\cos^2\alpha$ con $1-\sin^2\alpha$ otteniamo

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,\\ \sin(3\alpha) &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

Proviamo anche a calcolare $\cos(4\alpha)$ e $\sin(4\alpha)$:

$$\begin{aligned}\cos(4\alpha) &= \cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha)\\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\ &= \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(4\alpha) &= 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)\\ &= 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\\ &= 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

Sembra di scorgere i coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^4$ e, nel caso della triplicazione, quelli di $(a+b)^3$. Sarà un caso?

Una curiosa identità si ottiene cercando la formula per $\tan((\alpha+\beta)/2)$. Si parte dalla considerazione che

$$\begin{aligned}\sin(p+q) + \sin(p-q) &= 2\sin p\cos q,\\ \cos(p+q) + \cos(p-q) &= 2\cos p\cos q\end{aligned}$$

e quindi, per $\cos q \neq 0$,

$$\tan p = \frac{\sin(p+q) + \sin(p-q)}{\cos(p+q) + \cos(p-q)}.$$

Ponendo $p+q=\alpha$ e $p-q=\beta$ si ha

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$

che a sua volta, sostituendo β con $-\beta$, diventa

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}.$$

Notiamo che $q=(\alpha-\beta)/2$ e quindi la condizione $\cos q\neq 0$ è equivalente all'esistenza della tangente che vogliamo calcolare.

La tecnica appena usata serve a trasformare prodotti in somme: la formula

$$2\cos p\cos q=\cos(p+q)+\cos(p-q)$$

era uno dei modi usati prima dell'invenzione dei logaritmi per trasformare un prodotto in una somma, nei calcoli approssimati. Talvolta si usa anche al contrario, per trasformare una somma in prodotto; in tal caso la si scrive ponendo $p+q=\alpha$ e $p-q=\beta$, da cui $p=(\alpha+\beta)/2$ e $q=(\alpha-\beta)/2$:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Questa viene chiamata spesso *formula di prostaferesi*; ce ne sono altre per somma di due seni o di un seno e un coseno oppure per le differenze, ma siccome sappiamo trasformare un seno in coseno e cambiare di segno con gli angoli associati, non è necessario conoscere sei formule.

3.4 COMBINAZIONI LINEARI DI SENI E COSENI

Proviamo a far tracciare al computer il grafico della funzione

$$f(x)=a\sin(x+\alpha)+b\sin(x+\beta)$$

dando diversi valori ai parametri. Ci accorgeremo che il grafico ottenuto assomiglia sempre a quello ottenuto con $a=1$, $b=0$, $\alpha=\beta=0$, cioè al grafico della funzione seno. Ne vediamo l'esempio con $a=2$, $b=3$, $\alpha=1$ e $\beta=-2$ nella figura 3.

Ci domandiamo dunque come esaminare questa somiglianza. La prima cosa da osservare è che possiamo scrivere l'espressione come

$$f(x)=a\cos\alpha\sin x+a\sin\alpha\cos x+b\cos\beta\sin x+b\sin\beta\cos x$$

e dunque, raccogliendo, ci basta esaminare espressioni della forma

$$f(x)=A\sin x+B\cos x$$

(dove A e B non sono entrambi nulli). Se proviamo di nuovo a tracciare il grafico con valori diversi di A e B, vediamo che si ha un'oscillazione tra massimi e minimi opposti e che il grafico non passa necessariamente per l'origine, ma appare traslato. Possiamo provare a scrivere la nostra espressione come

$$f(x)=C\sin(x+\varphi)$$

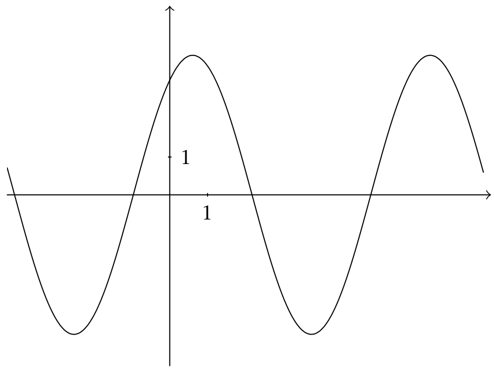


FIGURA 3: Grafico di $f(x) = 2\sin(x+3) + 3\cos(x-2)$

che terrebbe conto dell'oscillazione tra $-C$ e C oltre che della traslazione φ. Se le due espressioni devono indicare la stessa funzione, si deve avere

$$A\sin x + B\cos x = C\sin(x+\varphi)$$

per ogni x; dunque almeno per $x = 0$ e $x = \pi/2$, che danno le uguaglianze

$$\begin{cases} B = C\sin\varphi \\ A = C\cos\varphi \end{cases}$$

da cui, applicando la relazione pitagorica,

$$C^2 = A^2 + B^2.$$

Scegliamo $C > 0$, quindi dobbiamo avere $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ e

$$\begin{cases} \cos\varphi = A/C \\ \sin\varphi = B/C \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione con $0 \le \varphi < 2\pi$, perché $(A/C, B/C)$ sono le coordinate di un punto sul cerchio goniometrico. È facile adesso dimostrare che con questa scelta di C e φ, l'identità $C\sin(x+\varphi) = A\sin x + B\cos x$ vale per ogni x.

Per esempio supponiamo di avere $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$; allora

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

e quindi

$$f(x) = 5\sin(x+\varphi)$$

dove $\cos\varphi = 3/5$ e $\sin\varphi = 4/5$. Non è in generale possibile trovare un valore esplicito di φ; riparleremo del problema trattando le equazioni goniometriche.

Lo stesso non avviene se non in casi particolari quando la funzione è del tipo

$$f(x) = A\sin x + B\sin(kx)$$

con $k \neq 1$. Se $A = B$ si può fare qualcosa con la formula di prostaferesi

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(dimostrazione per esercizio) ottenendo

$$f(x) = 2\sin\frac{(1+k)x}{2}\cos\frac{(1-k)x}{2}$$

che dimostra come la funzione, nel caso in cui k sia intero, è ancora periodica.

APPLICAZIONI DELLA TRIGONOMETRIA

4

4.1 TEOREMI SUI TRIANGOLI

Le relazioni che abbiamo dimostrato nel capitolo precedente forniscono nuove relazioni tra gli elementi di un triangolo. Vediamo un esempio, useremo sempre la convenzione che il triangolo è ABC con misure dei lati a, b e c e misure degli angoli α, β e γ, secondo quanto già stabilito.

Dalle identità per la tangente di una semisomma e una semidifferenza

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$
$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$

otteniamo, ricordando che per il teorema del seno si ha $a = 2r\sin\alpha$ e $b = 2r\sin\beta$, il cosiddetto teorema della tangente.

TEOREMA DELLA TANGENTE. *In un triangolo ABC vale la seguente relazione:*

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}.$$

È chiaro che valgono anche le altre due analoghe relazioni che coinvolgono il lato c e l'angolo γ.

Anche il teorema del coseno fornisce un'interessante espressione. Ricordiamo che

$$\cos\alpha = \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$$

e perciò

$$\begin{aligned}1+\cos\alpha &= \frac{2bc+a^2-b^2-c^2}{2bc}\\ &= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\\ &= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.\end{aligned}$$

Useremo la solita convenzione di porre $2p = a+b+c$ (cioè di indicare con p il *semiperimetro del triangolo*), che ci dà

$$a+b-c = a+b+c-2c = 2p-2c,$$
$$a-b+c = a+b+c-2b = 2p-2b$$

e dunque

$$\frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Con calcoli del tutto analoghi (da svolgere per esercizio) avremo

$$\frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}.$$

Ricordando le formule di bisezione e tenendo conto che $0 < \alpha < \pi$, perché α è l'angolo di un triangolo, possiamo scrivere

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

e quindi anche

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Indicheremo con $\mathcal{A}(ABC)$ la misura dell'area del triangolo ABC. Dal momento che possiamo scrivere l'altezza relativa al lato AC come $c\sin\alpha$, è evidente che l'area del triangolo si può scrivere

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

(con le analoghe relazioni permutando le lettere). Se ricordiamo l'espressione precedente per $\sin\alpha$ abbiamo una ben nota formula.

FORMULA DI ERONE. *Per il triangolo ABC vale*

$$\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

È interessante studiare la formula in connessione con la condizione di costruibilità di un triangolo, cioè che ogni lato deve essere minore della somma degli altri due. Tenendo conto che $2p = a+b+c$ la condizione si può scrivere

$$p-a > 0, \quad p-b > 0, \quad p-c > 0$$

e quindi l'espressione sotto radice nella formula di Erone è certamente positiva. Tuttavia l'espressione sarebbe positiva anche quando due soli fattori siano negativi; supponiamo dunque

$$p-a < 0, \quad p-b < 0, \quad p-c > 0$$

e vediamo che succede: le prime due relazioni si possono scrivere

$$b+c-a < 0, \quad a+c-b < 0$$

ma, sommando membro a membro, avremmo $2c < 0$ che è assurdo. Altrettanto assurdo sarebbe, ovviamente, assumere che tutti i fattori siano negativi.

Cerchiamo di esprimere le misure delle bisettrici del triangolo; indicheremo con s_α, s_β e s_γ le misure delle bisettrici relative degli angoli in A, B e C rispettivamente. Calcoliamo s_α, usando la formula dell'area di un triangolo noti due lati e l'angolo compreso che abbiamo scritto prima. Se chiamiamo D il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo in A con il lato opposto BC, abbiamo

$$\mathcal{A}(ABD) = \frac{1}{2}cs_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \mathcal{A}(ADC) = \frac{1}{2}bs_\alpha \sin\frac{\alpha}{2},$$

e, sommando, abbiamo

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}s_\alpha(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ricordando che $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$, possiamo dunque scrivere

$$s_\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Analoghe relazioni si ottengono permutando le lettere. Notiamo che la relazione diventa $s_\alpha = b\cos(\alpha/2)$ nel caso in cui $b = c$, come deve essere: il triangolo è isoscele sulla base BC e la bisettrice coincide con l'altezza.

Supponiamo che per il triangolo ABC si abbia $s_\beta = s_\gamma$. Con la formula precedente, permutando le lettere, abbiamo dunque

$$\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Abbiamo già trovato espressioni per $\cos(\beta/2)$ e $\cos(\gamma/2)$:

$$\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{p(p-b)}{ac}, \qquad \cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{p(p-c)}{ab}$$

e quindi abbiamo

$$\frac{4a^2c^2}{(a+c)^2}\frac{p(p-b)}{ac} = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}\frac{p(p-c)}{ab}$$

da cui otteniamo

$$c(p-b)(a+b)^2 = b(p-c)(a+c)^2$$

che a sua volta diventa

$$c(a-b+c)(a+b)^2 = b(a+b-c)(a+c)^2.$$

La possiamo scrivere come

$$ac(a+b)^2 - ab(a+c)^2 + c(c-b)(a+b)^2 + b(c-b)(a+c)^2 = 0$$

cioè

$$a(c(a+b)^2 - b(a+c)^2) + (c-b)(c(a+b)^2 + b(a+c)^2) = 0.$$

L'espressione nella prima parentesi è

$$a^2c + 2abc + b^2c - a^2b - 2abc - bc^2 = a^2(c-b) + bc(b-c) = (b-c)(bc-a^2)$$

e dunque possiamo raccogliere $c-b$ ottenendo

$$(c-b)(a^3 - abc + a^2c + 2abc + b^2c + a^2b + 2abc + bc^2) = 0$$

che finalmente dà

$$(c-b)(a^3 + a^2(b+c) + 3abc + bc(b+c)) = 0.$$

Il secondo fattore è una quantità positiva e ne concludiamo che $b = c$, cioè che il triangolo è isoscele sulla base BC. Questo risultato è noto come *Teorema di Steiner-Lehmus*: il problema fu posto da Lehmus nel 1840 e risolto da Steiner. Sebbene la congettura "un triangolo con due bisettrici congruenti è isoscele" sia piuttosto ovvia, non se ne conosce una dimostrazione "facile".

Con la trigonometria è abbastanza facile dimostrare il teorema sulle bisettrici: la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati. Se indichiamo con D il punto di incontro della bisettrice dell'angolo in A con BC, con b' la misura di CD e con c' la misura di BD, il teorema del seno dice

$$\frac{b'}{\sin(\alpha/2)} = \frac{s_\alpha}{\sin\gamma}$$
$$\frac{c'}{\sin(\alpha/2)} = \frac{s_\alpha}{\sin\beta}$$

e perciò

$$b'\sin\gamma = c'\sin\beta$$

da cui, ricordando che $b = 2r\sin\beta$ e $c = 2r\sin\gamma$, la tesi, cioè

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Alcune identità interessanti si ottengono da $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Prima una digressione:

$$\begin{aligned}
\cos^2(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 \\
&= \cos^2\alpha\cos^2\beta + (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) \\
&\qquad - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\
&= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta \\
&\qquad + 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\
&= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

Se $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, come per gli angoli di un triangolo, abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) \\
&= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) \\
&= 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Se α e β sono angoli arbitrari (ma non retti), possiamo scrivere

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

e dunque, se anche γ non è retto,

$$\begin{aligned}
\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \\
&= \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}
\end{aligned}$$

Il numeratore si può scrivere come

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$$

che, raccogliendo fra primo e terzo addendo, diventa

$$\cos\beta(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma) + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

e dunque

$$\cos\beta\sin(\alpha+\gamma)+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

cioè, ricordando che $\alpha+\gamma=\pi-\beta$ e $\beta=\pi-(\alpha+\gamma)$,

$$\sin\beta(\cos\alpha\cos\gamma-\cos(\alpha+\gamma))$$

che, sviluppando dentro la parentesi, diventa infine

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

In definitiva abbiamo dimostrato che

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

ma la relazione vale solo per triangoli *non* rettangoli.

La formula sui coseni vista prima può essere ricavata in un altro modo. Il teorema delle proiezioni è un sistema lineare omogeneo, se come incognite si prendono i tre lati; questo sistema ha infinite soluzioni, perché fissati gli angoli α, β e $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ esistono infiniti triangoli che hanno questi angoli. Dunque il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è zero:

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{bmatrix} 1 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ -\cos\gamma & 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & -\cos\alpha & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma. \end{aligned}$$

4.2 GEOMETRIA ANALITICA

Consideriamo la retta di equazione $y=mx$. Qual è il significato di m, ora che conosciamo la trigonometria? È facile determinarlo: se prendiamo il punto A di coordinate (x_1,y_1) su questa retta, diverso dall'origine, avremo $y_1=mx_1$. Possiamo supporre $x_1>0$ e considerare il punto B di coordinate $(x_1,0)$.

Esaminiamo prima il caso di $m>0$ e il triangolo OBA, rettangolo in B. Se γ è l'ampiezza dell'angolo in O, avremo allora

$$y_1=x_1\tan\gamma$$

che equivale a

$$m=\tan\gamma.$$

Se $m<0$, possiamo fare lo stesso conto: ora l'angolo γ formato dalla semiretta OA con il semiasse positivo delle ascisse è negativo ma la relazione continua a valere: $y_1=x_1\tan\gamma$, tenendo conto dei segni.

Evidentemente, nel caso di $m=0$, l'angolo formato dalla semiretta OA con il semiasse positivo delle ascisse è 0.

Ora consideriamo una retta (non verticale) qualunque, di equazione $y=mx+q$. Il discorso non cambia: se indichiamo con γ l'angolo formato da una semiretta con il semiasse positivo delle ascisse, avremo $m=\tan\gamma$. Se la retta è parallela all'asse delle ascisse, l'angolo si prende, per convenzione, nullo.

Come determiniamo l'angolo? Se la retta ha coefficiente angolare 0 non c'è molto da dire. Se invece $m \neq 0$, si considera la retta parallela a essa passante per l'origine; su questa l'origine determina due semirette e quindi due angoli con il semiasse positivo delle ascisse. Se un angolo è γ, l'altro è, evidentemente, $\pi + \gamma$, ma la tangente dei due angoli è la stessa.

Questo, in un certo senso, spiega perché le rette verticali non hanno un coefficiente angolare: l'angolo formato con l'asse delle ascisse è retto e la tangente dell'angolo retto non esiste.

L'idea ci dà modo di calcolare la tangente dell'angolo formato da due rette non parallele, diciamo di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$. Con una traslazione possiamo supporre che le due rette si incontrino nell'origine; su ciascuna consideriamo una delle semirette determinate dall'origine e chiamiamo α e β gli angoli formati con il semiasse positivo delle ascisse. Allora l'angolo che ci interessa è $\alpha - \beta$ oppure $\beta - \alpha$, che hanno tangenti opposte. Per le formule di sottrazione della tangente, si ha

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

e, naturalmente, la formula ha senso quando $1 + mm' \neq 0$, cioè le rette non sono perpendicolari. Possiamo eliminare l'indeterminazione prendendo l'angolo minore, la cui tangente è

$$\left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right|.$$

Per avere una formula che comprenda anche rette verticali (ma non ortogonali), basta ricordare che per la retta di equazione $ax+by+c = 0$ il coefficiente angolare è $m = -a/b$. Se sostituiamo $m = -a/b$ e $m' = -a'/b'$ e semplifichiamo (nell'ipotesi $b \neq 0$ e $b' \neq 0$), otteniamo che la tangente dell'angolo è

$$\left|\frac{ab' - a'b}{aa' + bb'}\right|$$

formula che vale anche quando $b = 0$ oppure $b' = 0$, purché $aa'+bb' \neq 0$, cioè le rette non siano perpendicolari. La formula ci ricorda anche le condizioni affinché le rette siano parallele, cioè $ab' - a'b = 0$, o perpendicolari, cioè $aa' + bb' = 0$.

Torniamo al caso di una retta unica. Se decidiamo di prendere come angolo con il semiasse positivo delle ascisse sempre quello compreso tra 0 e $\pi/2$ quando la retta ha coefficiente angolare positivo e quello compreso tra $-\pi/2$ e 0 se è negativo, possiamo scrivere in modo unico l'equazione della retta. Infatti da $y = x\tan\gamma + q$ otteniamo

$$x\sin\gamma - y\cos\gamma + k = 0$$

(dove $k = q\cos\gamma$) e questa formula va bene anche per $\gamma = 0$ oppure $\gamma = \pi/2$. Con la convenzione che $-\pi/2 < \gamma \leq \pi/2$, l'equazione è scritta in modo unico.

Consideriamo ora due punti distinti A e B, di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2); nessuno dei due punti sia l'origine. Le semirette OA e OB incontrano il cerchio goniometrico in due punti A' e B', determinando così due angoli che chiamiamo α e β. Per ora supponiamo che $\beta > \alpha$ e che $\beta - \alpha < \pi$, cosicché l'angolo $\beta - \alpha$ è un angolo interno del triangolo OAB.

Come abbiamo visto, se indichiamo con a la lunghezza di OB e con b la lunghezza di OA, l'area del triangolo OAB è

$$\frac{1}{2}ab\sin(\beta - \alpha).$$

In base alle convenzioni fatte, possiamo anche scrivere

$$\begin{cases} x_1 = b\cos\alpha, \\ y_1 = b\sin\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = a\cos\beta, \\ y_2 = a\sin\beta, \end{cases}$$

e quindi la doppia area del triangolo è

$$ab\sin\beta\cos\alpha - ab\cos\beta\sin\alpha = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Più in generale, ritroviamo la formula per l'area di un triangolo date le coordinate dei suoi punti, quando uno dei vertici è l'origine, ma ovviamente va considerato il modulo dell'espressione. Quali sono le condizioni che rendono positiva l'espressione?

C'è uno stretto legame fra trigonometria e coordinate. Consideriamo il punto A di coordinate (x_1, y_1), diverso dall'origine. La semiretta OA determina un unico punto sul cerchio goniometrico il quale, a sua volta, determina un angolo α. Se chiamiamo b la distanza di A dall'origine, possiamo scrivere allora

$$x_1 = b\cos\alpha, \qquad y_1 = b\sin\alpha.$$

Se siamo nella stessa situazione di prima e consideriamo l'espressione $ab\cos(\beta - \alpha)$, otteniamo

$$ab\cos(\beta - \alpha) = (a\cos\beta)(b\cos\alpha) + (a\sin\beta)(b\sin\alpha) = x_1y_1 + x_2y_2$$

formula che ha senso anche quando uno dei due punti è l'origine. Notiamo che, a differenza dell'altra espressione, questa non dipende dall'ordine con cui consideriamo i due punti, perché

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta).$$

Ci serviremo di questa formula più avanti.

4.3 COORDINATE POLARI

Ci sono altri modi per individuare un punto del piano tramite numeri che in certe situazioni possono essere più comodi delle tradizionali coordinate cartesiane. Per fare un esempio pratico, semplifichiamo la struttura del sistema solare supponendo che le orbite dei pianeti siano circolari e tutte sullo stesso piano; prendiamo poi una stella lontana che appartenga allo stesso piano e fissiamo come primo riferimento la semiretta che congiunge il Sole a quella stella.

Come potremmo descrivere la posizione di ciascun pianeta? Facile: di ogni pianeta conosciamo la velocità angolare (che corrisponde al periodo di rivoluzione); se conoscessimo anche l'angolo 'iniziale', cioè quello formato con la semiretta fissata a un certo istante convenzionale, potremmo stabilire in ogni momento la posizione di ciascun pianeta.

Che cosa ci darebbe "velocità angolare per tempo" sommato all'angolo iniziale? Esattamente l'angolo che il pianeta in esame forma all'istante considerato con la semiretta fissa. Rimarrebbe il problema di calcolare le distanze relative di due pianeti: troveremo il modo.

Le coordinate polari sono la stessa idea portata in astratto. Fissiamo un punto del piano che chiameremo *polo* e una semiretta con origine nel polo, l'*asse polare*. Fissiamo anche un verso di rotazione: la somiglianza con il modello semplificato del sistema solare dovrebbe essere chiara.

Ogni punto P del piano è così determinato da due numeri: la distanza dal polo O (che corrisponde al raggio dell'orbita di un pianeta) e l'angolo di cui occorre far ruotare l'asse polare perché si sovrapponga alla semiretta OP. Le coordinate polari sono dunque la *distanza dal polo* e l'angolo, che si chiama *anomalia*.

Ogni punto è in realtà scorretto: per il polo non ha senso parlare dell'angolo di rotazione, ogni angolo andrebbe bene. Non è un vero problema, si tratta di una sola eccezione che non produce alcuna difficoltà. Più seria è l'obiezione su quale angolo considerare: in genere si usa il minimo angolo positivo, cioè uno nell'intervallo $[0\,..\,2\pi)$, ma non è obbligatorio né è utile imporre questa restrizione; si possono usare anche angoli negativi.

C'è un altro caso reale in cui si usano angoli come coordinate: le coordinate geografiche di un punto sulla superficie della Terra si danno con latitudine e longitudine. Per la latitudine c'è una scelta 'naturale', l'equatore; per la longitudine, invece, si usa un cerchio massimo passante per i poli fissato arbitrariamente nel meridiano di Greenwich; per la longitudine si danno gli angoli nell'intervallo $(-\pi\,..\,\pi]$. Si usa, a dire il vero, 'est' e 'ovest', ma una volta che fissiamo un verso di rotazione, questo equivale a stabilire se l'angolo sia positivo o negativo. Anche nelle coordinate geografiche ci sono punti eccezionali: i due poli non hanno longitudine determinata. La somiglianza con il modello del sistema solare è notevole: fino all'avvento dei sistemi con radiofari e poi GPS, la longitudine della posizione di una nave si misurava proprio con l'orologio, calcolando lo scostamento dall'ora di Greenwich dell'ora locale; in tempi di spostamenti lenti era più che sufficiente osservare il momento della culminazione del Sole per avere il mezzogiorno locale e a quel punto bastava guardare l'orologio regolato su Greenwich per conoscere la longitudine.

Torniamo alle coordinate polari, cercandone una relazione con un sistema di coordinate cartesiane opportuno. La scelta è abbastanza ovvia: si prende l'asse polare come semiretta delle ascisse positive e come semiretta delle ordinate positive quella passante per un punto di *anomalia* uguale a $\pi/2$. L'unità di misura su entrambi gli assi è quella che si è stabilita per misurare le distanze dal polo.

La relazione fra distanza dal polo ρ_P e anomalia φ_P del punto P (diverso dal polo) e le coordinate (x_P, y_P) nel sistema cartesiano associato è dunque

$$\begin{cases} x_P = \rho_P \cos\varphi_P \\ y_P = \rho_P \sin\varphi_P \end{cases}$$

mentre la relazione inversa è un po' più difficile da ottenere. Si ha, evidentemente,

$$\rho_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2},$$

e inoltre

$$\tan\varphi_P = \frac{y_P}{x_P}$$

(purché il punto P non stia sull'asse delle ordinate). Una volta che si conosca il quadrante a cui appartiene il punto P, si può determinare l'anomalia. Viceversa, ogni sistema di riferimento cartesiano (ortogonale) definisce un sistema di coordinate polari, prendendo come asse polare la semiretta positiva delle ascisse; lo chiameremo *sistema polare associato*.

Proviamo allora a calcolare la distanza di due punti di cui si conoscano le coordinate polari $\langle\rho, \varphi\rangle$ e $\langle\sigma, \psi\rangle$. Se poniamo

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\varphi, \\ y_1 = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \sigma\cos\psi, \\ y_2 = \sigma\sin\psi, \end{cases}$$

il quadrato della distanza d è

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \sigma^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi) \\ &\qquad - 2\rho\sigma(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) \\ &= \rho^2 + \sigma^2 - 2\rho\sigma\cos(\varphi - \psi) \end{aligned}$$

che dovrebbe ricordarci qualcosa: è esattamente il teorema del coseno applicato al triangolo formato dal polo e dai due punti! L'angolo è infatti uno fra $|\varphi - \psi|$ oppure $|2\pi - (\varphi - \psi)|$.

L'utilità delle coordinate polari appare evidente quando cerchiamo le formule di trasformazione tra un sistema di riferimento cartesiano e un altro ruotato rispetto all'origine. Supponiamo infatti che la semiretta positiva delle ascisse del sistema ruotato formi un angolo α con la semiretta positiva delle ascisse del sistema di partenza. Siano (x, y) le coordinate del punto P nel sistema di partenza e (X, Y) quelle nel sistema ruotato. Nei due sistemi polari associati, le coordinate polari di P saranno rispettivamente $\langle\rho, \varphi\rangle$ e $\langle\rho, \varphi - \alpha\rangle$, per opportuni ρ e φ: la distanza dall'origine è la stessa. Ne deduciamo subito i valori delle coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \rho\cos(\varphi - \alpha), \\ Y = \rho\sin(\varphi - \alpha). \end{cases}$$

Dunque possiamo scrivere

$$\begin{aligned} X &= \rho(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ Y &= \rho(\sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}$$

Siccome la stessa cosa si può dire scambiando i simboli per le coordinate e mutando α in $-\alpha$, possiamo scrivere direttamente anche la relazione inversa. Le indichiamo insieme:

$$\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{cases}$$

La relazione inversa può essere interpretata dicendo che

$$(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

sono le coordinate del punto che si ottiene sottoponendo il punto di coordinate (x, y) a una rotazione attorno all'origine di angolo α.

Come applicazione di queste formule possiamo anche determinare le coordinate (x', y') del punto simmetrico di quello di coordinate (x, y) rispetto a una retta passante per l'origine, diciamo di coefficiente angolare $\tan\beta$.

Se infatti consideriamo il sistema ruotato di un angolo β, le coordinate del nostro punto saranno, diciamo, (X, Y) e quelle del simmetrico saranno $(X, -Y)$. Allora, applicando le formule inverse, le coordinate (x', y') saranno

$$\begin{cases} x' = X\cos\beta - (-Y)\sin\beta, \\ y' = X\sin\beta + (-Y)\cos\beta. \end{cases}$$

e, rimettendo al posto di X e Y ciò che viene dalla formula diretta, avremo

$$\begin{aligned} x' &= (x\cos\beta + y\sin\beta)\cos\beta + (-x\sin\beta + y\cos\beta)\sin\beta \\ &= x(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2y\sin\beta\cos\beta \\ &= x\cos 2\beta + y\sin 2\beta, \\ y' &= (x\cos\beta + y\sin\beta)\sin\beta - (-x\sin\beta + y\cos\beta)\cos\beta \\ &= 2x\sin\beta\cos\beta - y(\cos^2\beta - \sin^2\beta) \\ &= x\sin 2\beta - y\cos 2\beta. \end{aligned}$$

La formula funziona anche quando $\beta = \pi/2$ (oppure $\beta = 3\pi/2$) e dà, ovviamente, $x' = -x$ e $y' = y$. Nel caso in cui sia dato esplicitamente il coefficiente angolare $m = \tan\beta$, possiamo ricordare che

$$\cos 2\beta = \frac{1-m^2}{1+m^2}, \qquad \sin 2\beta = \frac{2m}{1+m^2}$$

e quindi le formule diventano

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(1-m^2)x + 2my}{1+m^2}, \\[2ex] y' = \dfrac{2mx - (1-m^2)y}{1+m^2}. \end{cases}$$

Se mettiamo fianco a fianco le formule per la rotazione e la simmetria assiale notiamo sicuramente una curiosa somiglianza:

rotazione	*simmetria assiale*
$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x\cos 2\beta + y\sin 2\beta \\ y' = x\sin 2\beta - y\cos 2\beta \end{cases}$

Non è solo una curiosità: la simmetria assiale rispetto a una retta (passante per l'origine) che forma con l'asse delle ascisse un angolo di ampiezza β si ottiene prima applicando la simmetria rispetto all'asse delle ascisse, cioè $(x,y) \mapsto (x,-y)$, e poi ruotando attorno all'origine di un angolo 2β. Se ci si pensa un po', il motivo diventa chiaro: l'angolo formato dall'asse richiesto e dalla retta simmetrica rispetto all'asse delle ascisse è proprio 2β.

Ci proponiamo ora un problema più complicato. Qual è l'equazione di un'ellisse in coordinate polari? Per semplificare un po', assumeremo che un fuoco sia il polo e che l'altro fuoco sia sull'asse polare, a distanza $2c$ dal polo. Dobbiamo trovare dunque il luogo dei punti di coordinate polari $\langle\rho,\varphi\rangle$ per i quali la somma delle distanze dai due fuochi sia $2a$. Naturalmente ci basta trovare la distanza dal secondo fuoco, che possiamo calcolare con la formula già vista, con $\sigma = 2c$ e $\psi = 0$:

$$\sqrt{\rho^2 + 4c^2 - 4c\rho\cos\varphi}.$$

Con questa scelta apparentemente strana del polo ricaviamo un'equazione che richiede solo un elevamento al quadrato. Infatti la relazione da semplificare è

$$\rho + \sqrt{\rho^2 + 4c^2 - 4c\rho\cos\varphi} = 2a$$

che, razionalizzata, è

$$\rho^2 + 4c^2 - 4c\rho\cos\varphi = 4a^2 - 4a\rho + \rho^2.$$

Semplificando, otteniamo

$$(a - c\cos\varphi)\rho = a^2 - c^2$$

che, con le solite posizioni $b^2 = a^2 - c^2$ e $c = ae$, diventa

$$\rho = \frac{b^2}{a(1 - e\cos\varphi)}.$$

Prima di analizzarla dobbiamo assicurarci di non aver introdotto soluzioni estranee. Per ipotesi $0 < c < a$, quindi $0 < e < 1$ e perciò $1 - e\cos\varphi > 0$ (basta ricordare che $-1 \le \cos\varphi \le 1$). Dobbiamo però avere anche $\rho \le 2a$, perché abbiamo elevato al quadrato. La condizione, tenendo conto che $1 - e\cos\varphi > 0$, è equivalente a

$$2a(a - c\cos\varphi) \ge a^2 - c^2$$

cioè a

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi \ge 0$$

che possiamo scrivere

$$\cos\varphi \le \frac{a^2 + c^2}{2ac}$$

e questa è sicuramente soddisfatta: infatti

$$\frac{a^2+c^2}{2ac} = \frac{a^2+c^2}{2ac} - 1 + 1 = \frac{(a-c)^2}{2ac} + 1 > 1.$$

In realtà ci sarebbe bastato considerare che, per il teorema del coseno, $a^2+c^2-2ac\cos\varphi$ è il quadrato del terzo lato di un triangolo di lati a e c, visto che $\cos\varphi$ è il coseno di un unico angolo minore dell'angolo piatto.

Tanto per completezza, vediamo che cosa diventa l'equazione quando passiamo al sistema cartesiano associato. Abbiamo

$$a\rho - c\rho\cos\varphi = b^2$$

che possiamo scrivere

$$a\sqrt{x^2+y^2} = b^2 + cx$$

che, elevando al quadrato e semplificando, diventa

$$a^2(x^2+y^2) = b^4 + 2b^2cx + c^2x^2$$

o anche

$$b^2x^2 - 2b^2cx + a^2y^2 = b^4.$$

Completando il quadrato al primo membro sommando b^2c^2, ricaviamo, tenendo conto che $b^2+c^2=a^2$,

$$b^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e, per finire,

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che è proprio l'equazione di un'ellisse con il centro nel punto di coordinate $(c,0)$.

Facciamo un esercizio di fantasia. Scriviamo l'equazione nella forma

$$\rho = \frac{d}{1-e\cos\varphi}$$

ma supponiamo che sia $e>1$: il luogo che si ottiene è un'iperbole. Proviamolo. L'equazione diventa

$$\sqrt{x^2+y^2} = d + ex$$

che, elevando al quadrato, diventa

$$x^2+y^2 = d^2 + 2dex + e^2x^2$$

cioè

$$x^2(e^2-1) + 2dex - y^2 = -d^2.$$

Siccome $e^2-1>0$, cercheremo di trovare un termine k in modo che

$$x^2(e^2-1) + 2dex + k$$

sia un quadrato; dunque occorre $d^2e^2 - k(e^2-1) = 0$, cioè

$$k = \frac{d^2e^2}{e^2-1}.$$

Proviamo a vedere che succede sommando k ad ambo i membri:

$$x^2(e^2-1) + 2dex + \frac{d^2e^2}{e^2-1} - y^2 = -d^2 + \frac{d^2e^2}{e^2-1} = \frac{d^2}{e^2-1}.$$

Dividiamo ambo i membri per $e^2 - 1$, ottenendo

$$\left(x + \frac{de}{e^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{d^2}{(e^2-1)^2}.$$

Se poniamo

$$\begin{cases} a = \dfrac{d}{e^2-1} \\ b^2 = \dfrac{d^2}{e^2-1} \qquad (b > 0) \\ c = \dfrac{de}{e^2-1} \end{cases}$$

l'equazione prende la forma

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che è l'equazione di un'iperbole che ha uno dei fuochi nell'origine. Vediamo se le relazioni sono compatibili con quanto sappiamo già. Dalle prime due otteniamo $b^2/a = d$; dalla prima e dalla terza, $e = c/a$. Queste corrispondono a quelle trovate per l'ellisse. La relazione tra a, b e c può essere ricavata osservando che $b^2 = ad$ e che

$$d = \frac{c}{e}(e^2-1) = a(e^2-1),$$

da cui $ad = a^2(e^2-1) = a^2e^2 - a^2 = c^2 - a^2$ e quindi $b^2 = c^2 - a^2$ (nel caso dell'ellisse, lo ricordiamo, era $b^2 = a^2 - c^2$).

Per $e = 1$, dall'equazione $\rho(1 - \cos\varphi) = d$ si avrebbe la $\sqrt{x^2+y^2} - x = d$ che, elevando al quadrato, diventa

$$x^2 + y^2 = d^2 + 2dx + x^2$$

che si semplifica in

$$2dx = y^2 - d^2$$

cioè l'equazione di una parabola. Quando $e = 0$ abbiamo, evidentemente, $\rho = d$ che è l'equazione polare di una circonferenza con centro nel polo: il luogo dei punti che distano d dal polo stesso.

Dunque la stessa formula rappresenta tutte le possibili coniche con un fuoco nel polo e l'altro sull'asse polare o, nel caso della parabola, con direttrice perpendicolare all'asse polare. Infatti il fuoco della parabola di equazione

$$x = \frac{1}{2d}y^2 - \frac{d}{2}$$

ha ascissa nulla, come si verifica facilmente.

Possiamo dunque dire che

$$\boxed{\rho = \frac{d}{1 - e\cos\varphi}}$$

è l'equazione generica di una conica con un fuoco nel polo e asse focale coincidente con l'asse polare: la traiettoria di un corpo celeste soggetto alla forza di gravità di una stella ha un'equazione 'semplice'.

4.4 IL TEOREMA DI TOLOMEO

In un quadrilatero inscritto in una circonferenza il rettangolo delle diagonali è equivalente alla somma dei rettangoli sui lati opposti. Fissiamo qualche notazione: se A, B, C, D sono i vertici del quadrilatero, il teorema afferma che

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

Chiamiamo E il punto di incontro delle diagonali. Come si sa dalla geometria elementare, la condizione perché il quadrilatero sia inscrittibile in una circonferenza è che gli angoli opposti siano supplementari, cioè che

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \pi = \widehat{ABC} + \widehat{CDA}.$$

Da una delle due uguaglianze discende l'altra, perché la somma degli angoli interni è 2π.

Useremo le coordinate polari per dimostrare il teorema. Fissiamo il polo del sistema di riferimento nel centro della circonferenza e come unità di misura prendiamo il raggio. Le coordinate polari dei quattro vertici, diciamo in ordine antiorario, siano $A\langle 1, 2\alpha\rangle$, $B\langle 1, 2\beta\rangle$, $C\langle 1, 2\gamma\rangle$ e $D\langle 1, 2\delta\rangle$. In questo caso le distanze dei punti sono più facili da calcolare: infatti la distanza dei punti di coordinate polari $\langle 1, \varphi\rangle$ e $\langle 1, \psi\rangle$ si può scrivere come

$$\sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos(\varphi - \psi)} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos(\varphi - \psi)}{2}} = 2\left|\sin\frac{\varphi - \psi}{2}\right|$$

e questo spiega perché abbiamo introdotto i fattori 2 nelle coordinate dei quattro vertici. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
l_1 &= AB = 2\sin(\beta - \alpha) \\
l_2 &= BC = 2\sin(\gamma - \beta) \\
l_3 &= CD = 2\sin(\delta - \gamma) \\
l_4 &= DA = 2\sin(\delta - \alpha) \\
d_1 &= AC = 2\sin(\gamma - \alpha) \\
d_2 &= BD = 2\sin(\delta - \beta)
\end{aligned}$$

dove abbiamo potuto omettere il modulo perché tutti questi angoli sono metà di angoli di un quadrilatero e quindi minori di π; l'unico da trattare con cautela è l_4. La relazione che dobbiamo verificare è dunque

$$l_1 l_3 + l_2 l_4 = d_1 d_2$$

che diventa, eliminando il fattore comune 4,

$$\sin(\beta - \alpha)\sin(\delta - \gamma) + \sin(\gamma - \beta)\sin(\delta - \alpha) = \sin(\gamma - \alpha)\sin(\delta - \beta).$$

Ci serviremo del fatto che

$$\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi) = 2\sin\varphi\sin\psi$$

come risulta facilmente dalla formula di addizione. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\sin(\beta-\alpha)\sin(\delta-\gamma) &= \frac{1}{2}(\cos(\beta-\alpha-\delta+\gamma)-\cos(\beta-\alpha+\delta-\gamma)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)-\cos(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)) \\
\sin(\gamma-\beta)\sin(\delta-\alpha) &= \frac{1}{2}(\cos(\gamma-\beta-\delta+\alpha)-\cos(\gamma-\beta+\delta-\alpha)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta+\gamma-\delta)-\cos(-\alpha-\beta+\gamma+\delta))
\end{aligned}$$

e perciò il primo membro della nostra tesi diventa

$$\frac{1}{2}(\cos(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)-\cos(-\alpha-\beta+\gamma+\delta))$$

tenendo conto che $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$. Applicando la stessa tecnica al secondo membro si ottiene lo stesso risultato.

EQUAZIONI GONIOMETRICHE

5

I tipi più semplici di equazioni goniometriche sono

$$\begin{aligned}\cos x &= a,\\ \sin x &= b,\\ \tan x &= c\end{aligned}$$

e tutte le altre vanno ridotte, con opportuni trucchi, a queste. Non esistono metodi generali per trattare equazioni in cui l'incognita compaia come argomento di funzioni goniometriche; alcuni casi però sono comuni e trattabili.

5.1 EQUAZIONI ELEMENTARI CON IL COSENO

L'equazione $\cos x = a$ ammette soluzioni solo se $-1 \leq a \leq 1$, perché il coseno assume solo quei valori. Dunque $\cos x = 2$ non ha soluzioni e l'analisi finisce qui.

Più interessante è risolvere $\cos x = a$ con $-1 \leq a \leq 1$. L'idea è di trovare le semirette che incontrano il cerchio goniometrico in punti di ascissa a. Per evitare confusioni con l'incognita x, denoteremo con X e Y le coordinate dei punti del piano, avendo fissato un sistema cartesiano. Si traccia dunque la retta di equazione $X = a$ e si trovano in generale due punti; sarà uno solo nei casi estremi $a = 1$ oppure $a = -1$ quando la retta è tangente al cerchio goniometrico.

In tutti questi casi c'è un'indeterminazione: ogni semiretta corrisponde a infinite soluzioni che differiscono l'una dall'altra per multipli interi di 2π. Come già osservato, in generale non è possibile dare un'espressione esplicita della soluzione, se a non è uno dei pochi valori noti. Per esempio con $a = 1/2$ le semirette che si ottengono corrispondono ad angoli di $\pi/3$ e $-\pi/3$; quindi le soluzioni si scriveranno come

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k \text{ intero}).$$

La scrittura della condizione 'k intero' è di solito sottintesa. Ovviamente la seconda famiglia di soluzioni si può anche scrivere

$$\frac{5\pi}{3} + 2k\pi.$$

Naturalmente, se l'incognita rappresenta la misura dell'angolo di un triangolo, l'unica soluzione sarà $\pi/3$.

Si può arrivare a equazioni elementari con opportune identità; per esempio l'equazione

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

diventa, ricordando la formula di duplicazione,

$$\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

che si riduce a

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Dunque le soluzioni dell'equazione originale sono

$$\frac{\pi}{12} + k\pi, \quad -\frac{\pi}{12} + k\pi$$

e quelle appartenenti all'intervallo $[0\,..\,2\pi)$ sono

$$\frac{\pi}{12}, \quad \frac{13\pi}{12}, \quad \frac{11\pi}{12}, \quad \frac{23\pi}{12}.$$

La stessa equazione si potrebbe trattare in modo diverso, con la relazione pitagorica: sostituendo $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ si avrebbe l'equazione

$$\cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

che si riduce alle due equazioni

$$\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \cos x = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

che danno lo stesso risultato precedente.

Quando il termine a non corrisponde a un valore 'noto', si può fare ricorso alla funzione 'arcocoseno': se $-1 \le a \le 1$, con $\arccos a$ si denota l'unico numero α tale che

$$\begin{cases} \cos\alpha = a, \\ 0 \le \alpha \le \pi. \end{cases}$$

Quindi per l'equazione $\cos x = 3/5$ le soluzioni possono essere scritte come

$$\arccos\frac{3}{5} + 2k\pi, \qquad -\arccos\frac{3}{5} + 2k\pi.$$

Un valore approssimato di $\arccos(3/5)$ è 0,9273 che corrisponde a un angolo in gradi, minuti e secondi di ampiezza $57°7'48''$ (con l'approssimazione di un secondo di grado).

Un'equazione della forma $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$, o più in generale, data da un "polinomio in coseno" si tratta ponendo $t = \cos x$ e trovando le radici dell'equazione con i soliti metodi; quelle nell'intervallo $[-1\,..\,1]$ daranno soluzioni dell'equazione originale, le altre andranno scartate.

Nel caso di $2\cos^2 x - 3\cos x - 2$ la formula risolutiva dà le radici 2 e $-1/2$; la prima non fornisce soluzioni, la seconda porta all'equazione elementare $\cos x = -1/2$ che ha come soluzioni

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \qquad -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \qquad (k \text{ intero}).$$

Simili sono le equazioni del tipo

$$\cos f(x) = \cos g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ rappresentano espressioni qualsiasi. Siccome sono due le semirette che danno lo stesso coseno (a parte il caso eccezionale in cui il coseno sia 1), le soluzioni si ottengono dalle equazioni finali

$$f(x) = g(x) + 2k\pi, \qquad f(x) = -g(x) + 2k\pi$$

e il caso eccezionale è compreso (perché corrisponde all'angolo nullo).

Se abbiamo dunque $\cos(3x-1) = \cos(2x+3)$, otterremo le equazioni

$$3x - 1 = 2x + 3 + 2k\pi, \qquad 3x - 1 = -2x - 3 + 2k\pi,$$

e quindi $x = 4 + 2k\pi$ oppure $x = -2/5 + 2k\pi$, sempre con k intero.

5.2 EQUAZIONI ELEMENTARI CON IL SENO

Tutto quanto detto per il coseno vale, con le dovute modifiche, per il seno. L'equazione elementare

$$\sin x = b$$

ha soluzione solo se $-1 \le b \le 1$. In tal caso si indica con $\arcsin b$ l'unico numero reale x nell'intervallo $[-\pi/2\,..\,\pi/2]$ tale che $\sin x = b$. Le soluzioni di $\sin x = b$ saranno dunque i numeri della forma

$$\arcsin b + 2k\pi, \qquad \pi - \arcsin b + 2k\pi$$

(con k intero). Per esempio, l'equazione $\sin x = 1/2$ ha come soluzioni

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

L'equazione $\sin x \cos x = \sqrt{3}$ può essere scritta, con la formula di duplicazione,

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e quindi avremo

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

e le soluzioni sono dunque

$$\frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad \frac{\pi}{3} + k\pi$$

(sempre con k intero qualsiasi).

Analogamente al caso del coseno, un'equazione della forma $\sin f(x) = \sin g(x)$ viene divisa in

$$f(x) = g(x) + 2k\pi, \qquad f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi.$$

In realtà non ci sarebbe bisogno di questo, perché $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ e ci potremmo ricondurre al caso precedente. Di sicuro questo va fatto nel caso di un'equazione come

$$\sin x = \cos 2x$$

che diventa

$$\cos(\pi/2 - x) = \cos 2x$$

cioè, secondo la regola generale

$$\frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi, \qquad \frac{\pi}{2} - x = -2x + 2k\pi$$

da qui troviamo le soluzioni come

$$\frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}, \qquad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Si controlli che scrivendo l'equazione nella forma $\sin x = \sin(\pi/2 - 2x)$ si trovano le stesse soluzioni.

Non ci sarebbe nulla di male se l'equazione $\sin x = \cos 2x$ fosse trasformata in $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, usando la formula di duplicazione. Le soluzioni di $2t^2 + t - 1 = 0$ sono -1 e $1/2$ che danno le equazioni elementari

$$\sin x = -1, \qquad \sin x = 1/2.$$

Ne otteniamo le soluzioni

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

apparentemente distinte da quelle trovate prima. Perché?

5.3 EQUAZIONI ELEMENTARI CON LA TANGENTE

Un'equazione del tipo $\tan x = c$ ha soluzione per ogni c. Lo si può vedere dando un'interpretazione geometrica della tangente. Se OP è la semiretta corrispondente all'angolo α con $0 < \alpha < \pi/2$ e P è il punto di intersezione con il cerchio goniometrico, possiamo considerare la perpendicolare r all'asse delle ascisse per $A(1,0)$ e altri due punti: B la proiezione di P sull'asse delle ascisse e Q il punto di intersezione della semiretta OP con a. I due triangoli OBP e OAQ sono simili e quindi, ricordando la definizione di seno e coseno, se t è la misura di AQ abbiamo

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{t}{1}$$

cioè $t = \tan\alpha$. Viceversa, se Q è un punto qualsiasi sulla retta r, nel semipiano delle ordinate positive, possiamo considerare la semiretta OQ e definire un angolo α tale che $\tan\alpha$ sia la misura di AQ. Siccome $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$, abbiamo la tesi.

Denoteremo con $\arctan c$ l'unico numero reale in $(-\pi/2 \,..\, \pi/2)$ la cui tangente sia c. Perciò le soluzioni di $\tan x = c$ si esprimono nella forma

$$\arctan c + k\pi \qquad (k \text{ intero}).$$

Ricordiamo infatti che tan ha periodo π.

<esempi>

5.4 EQUAZIONI LINEARI

Una vasta classe di problemi conduce a equazioni della forma

$$a\cos x + b\sin x + c = 0$$

che chiameremo *lineari*. Naturalmente non è restrittivo supporre che $a \neq 0$ e $b \neq 0$, perché altrimenti l'equazione è elementare con il seno o con il coseno.

Ci sono due modi di risolvere questo tipo di equazioni. Il primo è di ricordare che

$$a\cos x + b\sin x = C\sin(x + \varphi)$$

come abbiamo già visto; questo riduce l'equazione a un'equazione elementare con il seno.

Il secondo modo consiste nell'eseguire una sostituzione: si pone $X = \cos x$ e $Y = \sin x$. Non abbiamo solo un'equazione in due incognite, perché la relazione pitagorica ci dice $X^2 + Y^2 = 1$. Dunque abbiamo trasformato la nostra equazione nel sistema

$$\begin{cases} aX + bY + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

che è, geometricamente, trovare l'intersezione tra una retta e una circonferenza. La retta incontra la circonferenza quando la sua distanza dal centro (che è l'origine degli assi) è ≤ 1, cioè quando

$$\frac{|a0 + b0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$$

che diventa

$$c^2 \leq a^2 + b^2.$$

Se supponiamo $b \neq 0$ (se $b = 0$ il sistema si risolve facilmente) otteniamo

$$Y = -\frac{aX + c}{b}$$

e quindi l'equazione risolvente

$$b^2X^2 + a^2X^2 + 2acX + c^2 - b^2 = 0$$

che diventa

$$(a^2 + b^2)X^2 + 2acX - b^2 + c^2 = 0$$

il cui discriminante è

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= a^2c^2 + (a^2 + b^2)(b^2 - c^2) \\ &= a^2c^2 + a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 \\ &= b^2(a^2 + b^2 - c^2) \end{aligned}$$

in accordo con il conto precedente.

Esiste un terzo modo di affrontare il problema precedente e consiste nel porre $t = \tan(x/2)$, ricordando le formule che esprimono $\cos x$ e $\sin x$ in termini di $\tan(x/2)$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

L'equazione $a\cos x + b\sin x + c = 0$ diventa allora

$$a(1-t^2) + 2bt + c(1+t^2) = 0$$

che può essere riscritta in forma normale

$$(c-a)t^2 + 2bt + c + a = 0$$

che ha come discriminante $\Delta/4 = b^2 + a^2 - c^2$ (dando esattamente la stessa condizione di prima).

Il problema di questa strategia risolutiva è che la tangente non è definita ovunque; occorre perciò assicurarsi che π non sia soluzione dell'equazione per poter porre $\tan(x/2) = t$. Naturalmente π è soluzione se $-a + c = 0$, caso nel quale, infatti, l'equazione risolvente in t diventa di grado uno.

Questa tecnica, insomma, ha lo svantaggio di richiedere un controllo *ad hoc* che invece non è necessario con i due metodi precedenti.

Vediamo la stessa equazione con i due metodi. Consideriamo dunque

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}.$$

Per scriverla nella forma $C\sin(x+\varphi) = 1$ dobbiamo avere

$$C\sin\varphi = 1, \quad C\cos\varphi = \sqrt{3}$$

da cui $C^2 = 4$ e $C = 2$. Quindi $\sin\varphi = 1/2$, $\cos\varphi = \sqrt{3}/2$ che danno $\varphi = \pi/6$. Dunque l'equazione diventa

$$\sin(x + \pi/6) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

cioè

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

e dunque le soluzioni sono

$$\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \quad \frac{7\pi}{12} + 2k\pi.$$

Il secondo metodo richiede di considerare il sistema

$$\begin{cases} X + Y\sqrt{3} = \sqrt{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

che ha come equazione risolvente, ricavando $X = \sqrt{2} - Y\sqrt{3}$,

$$4Y^2 - 2Y\sqrt{6} + 1 = 0$$

che dà le due equazioni elementari

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

che corrispondono ai valori già trovati.

È chiaro che, nel caso di $c = 0$, l'equazione si può trattare in modo più semplice. Infatti, con l'ipotesi che $b \neq 0$, abbiamo che $\pi/2$ e $-\pi/2$ non sono soluzioni e quindi l'equazione si riduce a $\tan x = -a/b$ che è elementare.

5.5 EQUAZIONI NON LINEARI

In genere un'equazione in $\sin x$ e $\cos x$ viene classificata in base alla forma che ha quando si esegue la sostituzione $X = \cos x$, $Y = \sin x$. Così la generica equazione di secondo grado è equivalente al sistema

$$\begin{cases} aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

che è difficile da risolvere in generale, perché l'equazione risolvente è di quarto grado. Tuttavia, scrivendo $f = fX^2 + fY^2$, possiamo ridurre i termini simili e quindi il sistema diventa della forma

$$\begin{cases} aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

che esamineremo solo in casi particolari. Supporremo che non si possa raccogliere né X né Y nella prima equazione, perché in questo caso il sistema si spezza in uno con prima equazione lineare e l'altro con l'equazione $X = 0$ oppure $Y = 0$ che sono banali.

Il primo caso che tratteremo è quello con $d = e = 0$, quindi con $a \neq 0$ e $c \neq 0$; l'equazione è dunque

$$a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x = 0$$

a cui va ridotta anche ogni equazione della forma

$$a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + f = 0$$

con il trucco detto prima. Abbiamo supposto $c \neq 0$, quindi per nessuna soluzione può essere $\cos x = 0$; dunque, dividendo ambo i membri per $\cos^2 x$, otteniamo l'equazione equivalente

$$c\tan^2 x + b\tan x + a = 0$$

che si riduce facilmente a equazioni elementari con la tangente.

<esempio>

L'altro caso trattabile è quello *simmetrico*, in cui $a = c$ e $d = e$. Il sistema è allora della forma

$$\begin{cases} aX^2 + bXY + aY^2 + dX + dY = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

che diventa allora

$$\begin{cases} d(X + Y) + bXY + a = 0 \\ (X + Y)^2 - 2XY = 1 \end{cases}$$

in cui possiamo ricavare XY dalla prima equazione e sostituire nella seconda, trovando dunque un'equazione della forma

$$b(X + Y)^2 - 2d(X + Y) - 2a - b = 0$$

che possiamo risolvere. Ne deduciamo dunque due sistemi della forma

$$\begin{cases} X + Y = s \\ XY = p \end{cases}$$

la cui soluzione è nota.
<esempio>

5.6 RELAZIONI TRA LE FUNZIONI CIRCOLARI E LE LORO INVERSE

Le relazioni fondamentali sono, naturalmente,

$$\sin\arcsin x = x, \quad \cos\arccos x = x, \quad \tan\arctan x = x.$$

Scambiando di posto le funzioni non si ottiene lo stesso, per come sono state definite le funzioni inverse:

$$\begin{aligned} \arcsin\sin x &= x && \text{per } x \in [-\pi/2\,..\,\pi/2] \\ \arccos\cos x &= x && \text{per } x \in [0\,..\,\pi] \\ \arctan\tan x &= x && \text{per } x \in (-\pi/2\,..\,\pi/2) \end{aligned}$$

Le identità goniometriche danno altre relazioni. Per esempio, dal fatto che

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t},$$

possiamo dire che, per $t \in (-\pi/2\,..\,\pi/2)$,

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$$

e quindi

$$\cos\arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Analogamente, da

$$\sin^2 t = \frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t}$$

otteniamo, per $t \in (-\pi/2\,..\,\pi/2)$,

$$\sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$$

e quindi

$$\sin\arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Un po' più complicato è capire quanto valga $\sin\arccos x$. Il valore di $\arccos x$ è un numero compreso nell'intervallo $[0\,..\,\pi]$, il cui seno è non negativo. Dunque possiamo usare l'identità, valida per $t \in [0\,..\,\pi]$, $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$; dunque

$$\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2} = \cos\arcsin x.$$

La seconda uguaglianza si deriva in modo del tutto simile.

Proviamo a calcolare $z = \arctan x - \arctan y$; la formula di sottrazione ci viene in soccorso: se $\alpha = \arctan x$ e $\beta = \arctan y$, abbiamo

$$\tan z = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

e avremo

$$\tan z = \frac{x - y}{1 + xy},$$

cioè, quasi,

$$z = \arctan \frac{x - y}{1 + xy}.$$

Il quasi è perché non è detto che $z \in (-\pi/2 \,.\,.\, \pi/2)$. Si scriva la formula corretta.

IL LOGARITMO

6

6.1 CALCOLO DI UN'AREA

Consideriamo l'iperbole di equazione $xy = 1$. Possiamo domandarci quale sia l'area del 'triangolo' determinato dall'origine e dai punti di coordinate $(p, 1/p)$ e $(q, 1/q)$ dove però un lato sia l'arco di iperbole. Se però conoscessimo quest'area quando abbiamo $p = 1$, per differenza potremmo trovare l'area di ognuno di questi triangoli. Dunque ci mettiamo nel caso $p = 1$ e $q > 1$: se $0 < q < 1$ si ha l'area ugualmente per simmetria.

Proveremo con un metodo di esaustione dividendo l'intervallo $[1\,..\,q]$ in parti e approssimando l'area di ciascun 'triangolo' con quella dei veri triangoli; infittendo la suddivisione, troveremo un'approssimazione sempre migliore dell'area che ci interessa.

Ci domandiamo prima di tutto quale sia l'area di un triangolo con un vertice nell'origine, date le coordinate degli altri due vertici. Potremmo usare la formula di Erone, ma sarebbe troppo complicato. Supponiamo dunque che i due vertici A e B abbiano coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2), cominciando con il caso facile in cui i punti sono nel primo quadrante. Conosciamo la tangente dell'angolo γ tra la retta OA e la retta OB: se α è l'angolo fra l'asse delle ascisse e la retta OA e β quello relativo alla retta OB, avremo, supponendo $\beta > \alpha$,

$$\tan\gamma = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{y_2/x_2 - y_1/x_1}{1 + (y_1y_2)/(x_1x_2)} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1x_2 + y_1y_2}.$$

Se chiamiamo a la lunghezza di OA e b la lunghezza di OB, sappiamo che $ab\cos\gamma = x_1x_2 + y_1y_2$ e dunque la relazione diventa

$$ab\sin\gamma = x_1y_2 - x_2y_1$$

cioè l'area è proprio $|x_1y_2 - x_2y_1|/2$. Qui mettiamo il valore assoluto perché così non dobbiamo supporre $\alpha < \beta$ e ci accorgiamo che in effetti la relazione vale per qualsiasi coppia di vertici.

Torniamo allora al nostro problema e i punti di suddivisione dell'intervallo $[1\,..\,q]$ siano

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = q.$$

Ci interessa l'area del triangolo con i vertici nell'origine e nei punti di coordinate $(x_{j-1}, 1/x_{j-1})$ e $(x_j, 1/x_j)$. Per la formula precedente, la doppia area è

$$\left|x_{j-1}\frac{1}{x_j} - x_j\frac{1}{x_{j-1}}\right| = \frac{\left|x_{j-1}^2 - x_j^2\right|}{x_{j-1}x_j} = \frac{x_j^2 - x_{j-1}^2}{x_{j-1}x_j}.$$

Adesso facciamo il passo decisivo: supponiamo di prendere

$$x_0 = 1 = r^0, \quad x_1 = r = r^1, \quad x_2 = r^2, \quad \dots, \quad x_k = r^k = q$$

dove, appunto, $r = \sqrt[k]{q}$. Allora

$$\frac{x_j^2 - x_{j-1}^2}{x_{j-1}x_j} = \frac{r^{2j} - r^{2j-2}}{r^{j-1}r^j} = r - \frac{1}{r}.$$

Con questa scelta della suddivisione, tutti i triangoli hanno la stessa area. L'approssimazione dell'area del nostro 'triangolo' sarà dunque

$$\frac{k}{2}\left(\sqrt[k]{q} - \frac{1}{\sqrt[k]{q}}\right).$$

Proviamo per $q = 3$ e $k = 16$; allora

$$\sqrt[16]{3} \approx 1{,}0710754$$

e quindi la nostra formula produce

$$8\left(1{,}0710754 - \frac{1}{1{,}0710754}\right) \approx 1{,}09947$$

Se si schiaccia il tasto "ln" su una calcolatrice dopo aver inserito il numero 3 si ottiene 1,09861. Non è un caso.

6.2 DEFINIZIONE DI LOGARITMO

Chiamiamo *logaritmo* di q, indicato con $\log q$, l'area del 'triangolo curvilineo' definito dai punti $(1,1)$ e $(q,1/q)$, per $q > 1$. Quando $0 < q < 1$, poniamo $\log q = -\log(1/q)$. Perché questa convenzione apparentemente strana? Se volessimo calcolare l'area del triangolo curvilineo definito dai punti $(p,1/p)$ e $(q,1/q)$, con $p < q$, quest'area sarà $\log q - \log p$, indipendentemente se sia $0 < p < 1$ o $p > 1$. Ovviamente porremo $\log 1 = 0$.

L'area del triangolo con un vertice nell'origine e gli altri due in $(1,1)$ e $(q,1/q)$ è, in base alla formula vista prima,

$$\frac{1}{2}\left(q - \frac{1}{q}\right).$$

Consideriamo, per $q > 1$, il trapezio con vertici (in senso antiorario) $(1,0)$, $(q,0)$, $(q,1/q)$ e $(1,1)$; calcolandone l'area si ottiene

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{q}\right)(q-1) = \frac{1}{2}\left(q - \frac{1}{q}\right)$$

esattamente come l'area del triangolo. Dunque possiamo vedere $\log q$ anche come l'area del 'trapezio' delimitato dai segmenti $(1,1)\,.\,.\,(1,0)$, $(1,0)\,.\,.\,(q,0)$ e $(q,0)\,.\,.\,(q,1/q)$ e dal ramo di iperbole fra i punti $(1,1)$ e $(q,1/q)$. Se $0 < q < 1$ quest'area si considera negativa, per i motivi detti prima.

Dimostriamo subito che, per $q > 1$, $\log(1/q) = -\log q$. Infatti l'approssimazione con la suddivisione in k parti dà per l'area relativa a $1/q$ il valore

$$\frac{k}{2}\left(\sqrt[k]{1/q} - \frac{1}{\sqrt[k]{1/q}}\right) = -\frac{k}{2}\left(\sqrt[k]{q} - \frac{1}{\sqrt[k]{q}}\right)$$

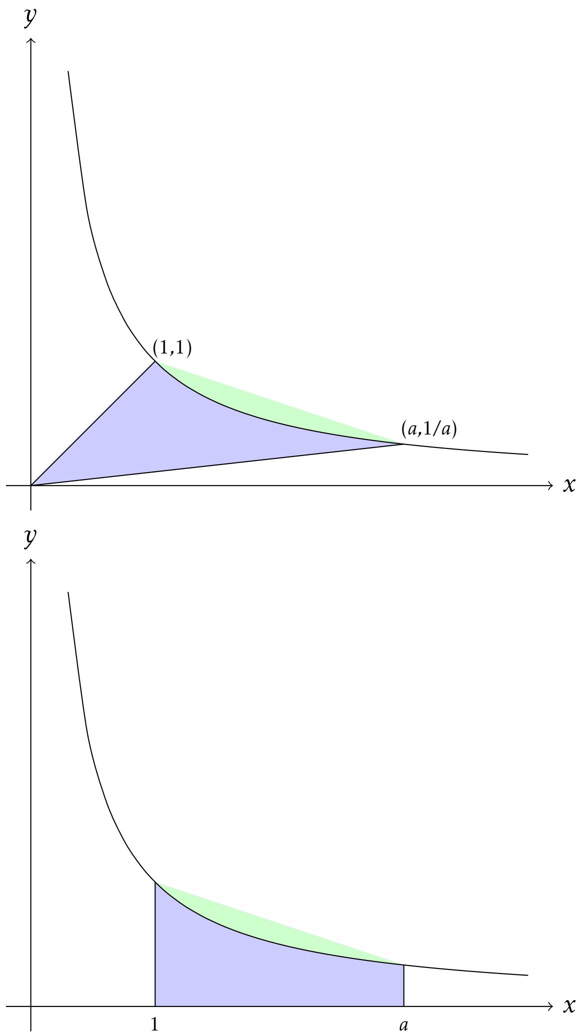


FIGURA 4: Definizioni di $\log a$ tramite la curva $xy = 1$; le due aree colorate in azzurro sono uguali e valgono $\log a$

che è esattamente quello che ci serviva.

Supponiamo ora $a > 1$ e $b > 1$; vogliamo calcolare il valore di $\log(ab)$ e per fare questo dividiamo l'intervallo $[1\,..\,ab]$ in due parti: $[1\,..\,a]$ e $[a\,..\,ab]$. L'area definita dal primo intervallo è $\log a$, quindi ci basta calcolare l'area definita dal secondo intervallo.

Consideriamo la trasformazione del piano definita da $x \mapsto x/a$ e $y \mapsto ay$; il corrispondente del punto di coordinate (u, v) sarà dunque il punto $(u/a, av)$. Consideriamo il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$, che ha area $1/2$. Il triangolo trasformato ha vertici in $(0, 0)$, $(1/a, 0)$ e $(1/a, a)$. La sua area è, evidentemente, ancora $1/2$. È facile vedere che l'area di *ogni* triangolo rimane invariata quando eseguiamo la trasformazione che, dunque, conserva le aree.

Vediamo dunque come si trasforma il 'trapezio' di vertici $(a, 1/a)$, $(a, 0)$, $(ab, 0)$ e $(ab, 1/(ab))$ (il 'lato obliquo' è, ovviamente, il ramo di iperbole).

I vertici diventano $(1,1)$, $(1,0)$, $(b,0)$ e $(b,1/b)$. Il 'lato obliquo' è formato dai punti trasformati di quelli di coordinate $(t,1/t)$, per $a \le t \le ab$. Essi sono dunque quelli di coordinate $(t/a, a/t)$ che giacciono ancora sull'iperbole di equazione $xy = 1$ e formano il ramo che congiunge i punti $(1,1)$ e $(b,1/b)$. Dunque il 'trapezio' trasformato è proprio quello che definisce $\log b$: abbiamo dimostrato la *relazione fondamentale del logaritmo*, cioè che

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

Questo almeno nel caso in cui $a > 1$ e $b > 1$. Se $0 < b < 1$, suddividiamo l'intervallo $[1\,..\,a]$ nei due intervalli $[1\,..\,ab]$ e $[ab\,..\,a]$. Con la trasformazione $x \mapsto x/(ab)$, $y \mapsto aby$, il 'trapezio' corrispondente al secondo intervallo diventa quello corrispondente all'intervallo $[1\,..\,1/b]$ e dunque

$$\log a = \log(ab) + \log(1/b) = \log(ab) - \log b$$

che diventa $\log(ab) = \log a + \log b$. È facile adesso trovare il trucco per dimostrare l'uguaglianza anche per $0 < a < 1$: qual è? Ora, siccome quando $a = 1$ oppure $b = 1$ l'uguaglianza è certamente valida, abbiamo provato che vale per a e b positivi qualsiasi.

Da questa ricaviamo anche $\log(a^n) = n \log a$, per n intero: basta applicare più volte la relazione fondamentale. Siccome $\log 2 > 0$ per definizione, possiamo dedurre che dato $x > 0$ esiste $q > 1$ tale che $\log q > x$. Infatti basta fare in modo che $n \log 2 > x$ e $q = 2^n$ sarà quello che ci serve.

Qual è la conseguenza di questo? Che se consideriamo tutti i numeri $q > 1$ tali che $\log q \ge x$, il minimo di questi sarà un numero q_0 tale che $\log q_0 = x$. Dunque la funzione log è invertibile, visto che lo stesso discorso si può fare quando $x < 0$. L'inversa della funzione log si chiama exp e ha la proprietà che le spetta come inversa di log, cioè

$$\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b.$$

Basta infatti calcolare log di ambo i membri:

$$\begin{aligned} &\log(\exp(a+b)) = a + b, \\ &\log(\exp(a)\exp(b)) = \log(\exp a) + \log(\exp b) = a + b. \end{aligned}$$

È molto importante il numero $e = \exp 1$, che si incontra spesso in matematica. Vogliamo vedere che $5/2 < e < 3$: per questo ci basta dimostrare che $\log(5/2) < 1 < \log 3$.

Calcoliamo l'approssimazione di $\log(5/2)$ per $k = 2$ che è per eccesso: il valore è

$$\frac{2}{2}\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \frac{5-2}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Siccome $9/10 < 1$, abbiamo

$$\log\frac{5}{2} < \frac{3}{\sqrt{10}} < 1.$$

Per l'altra disuguaglianza ci occorre una stima per difetto di $\log 3$. Più in generale, consideriamo $q > 1$ e suddividiamo l'intervallo $[1\,..\,q]$ in k parti in progressione geometrica

$$1 = r^0 < r < r^2 < \dots < r^k = q$$

dove $r = \sqrt[k]{q}$. Se consideriamo, per $1 \le j \le k$, il rettangolo di vertici $(r^{j-1}, 0)$, $(r^j, 0)$, $(r^j, 1/r^j)$ e $(r^{j-1}, 1/r^j)$, scopriamo che ha area

$$(r^j - r^{j-1})/r^j = 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{q}}$$

e dunque

$$\log q > k\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{q}}\right).$$

Se calcoliamo per $q = 3$ e $k = 8$, l'espressione è

$$s = 8\left(1 - \frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right)$$

che vogliamo confrontare con 1. Indicando con '?' uno dei simboli di maggiore o minore, confrontiamo

$$\begin{gathered}
8\left(1 - \frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right) \mathbin{?} 1 \\
1 - \frac{1}{\sqrt[8]{3}} \mathbin{?} \frac{1}{8} \\
\frac{7}{8} \mathbin{?} \frac{1}{\sqrt[8]{3}} \\
7\sqrt[8]{3} \mathbin{?} 8 \\
7^8 \cdot 3 \mathbin{?} 8^8 \\
5\,764\,801 \cdot 3 \mathbin{?} 16\,777\,216 \\
17\,294\,403 \mathbin{?} 16\,777\,216
\end{gathered}$$

e quindi ognuno dei simboli è '>', dimostrando che $\log 3 > s > 1$. Si può dimostrare che $2{,}7182818 < e < 2{,}7182819$.

Possiamo anche scrivere in modo del tutto analogo un'approssimazione per eccesso:

$$k\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{q}}\right) < \log q < k(\sqrt[k]{q} - 1).$$

Tuttavia quella precedente è migliore: infatti, ponendo $r = \sqrt[k]{q}$, si ha

$$\frac{k}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) - n(r-1) = \frac{k}{2r}(r^2 - 1 - 2r^2 + 2r) = -\frac{k}{2r}(r^2 - 2r + 1) \le 0.$$

Possiamo approssimare il logaritmo in modo piuttosto semplice, con una calcolatrice, purché non si voglia calcolarlo di un numero troppo vicino a 1. Basta schiacciare dieci volte il tasto 'radice quadrata', togliere 1 e moltiplicare il risultato per $2^{10} = 1024$. Con $q = 10$ si ottiene, con una calcolatrice a quindici cifre decimali, 2,305175851942912. Il logaritmo 'vero' è 2,302585092994046. Se schiacciamo la radice venti volte, togliamo 1 e moltiplichiamo per $2^{20} = 1024 \cdot 1024$, otteniamo 2,302587621605376 che ha cinque cifre decimali esatte.

Analogamente, possiamo calcolare $\exp t$: dall'equazione

$$t = k(\sqrt[k]{q} - 1)$$

otteniamo

$$q = \left(1 + \frac{t}{k}\right)^k.$$

Se partiamo da $t = 1$ e $k = 2^{10}$, dobbiamo calcolare $1 + 1/1024$ e schiacciare dieci volte il tasto per il quadrato, ottenendo

$$\exp 1 \approx 2{,}716955729466414.$$

Per la verità, non è molto buono: con $n = 2^{20}$ si ha l'approssimazione 2,718280532292703 mentre il valore 'vero' è 2,718281828459045, con il nostro metodo abbiamo ancora cinque cifre decimali esatte.

Proviamo ora a calcolare $2^{\sqrt{2}}$, un numero piuttosto famoso perché compariva nel settimo della lista di ventitré problemi posti da David Hilbert a un congresso internazionale nel 1900, a Parigi: la domanda era se questo numero può essere radice di un polinomio a coefficienti interi, questi numeri si chiamano *algebrici*. Dal momento che $\log(2^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}\log 2$, ci occorre un valore approssimato di $\log 2$ e prendiamo

$$\begin{aligned}\log 2 &\approx 1024 \cdot 1024\left(1 - \frac{1}{\sqrt[1024\cdot 1024]{2}}\right) \\ &\approx 0{,}693146951384333\end{aligned}$$

(si preme venti volte il tasto di radice quadrata). A questo punto moltiplichiamo per $\sqrt{2}$ ottenendo

$$\sqrt{2}\log 2 \approx 0{,}980257819365288$$

e possiamo calcolare il valore richiesto

$$\begin{aligned}2^{\sqrt{2}} &\approx \left(1 + \frac{0{,}980257819365288}{1024 \cdot 1024}\right)^{1024\cdot 1024} \\ &\approx 2{,}66514205778722.\end{aligned}$$

Un calcolatore più raffinato dà 2,66514414269022518861: abbiamo ottenuto cinque cifre decimali esatte con la sola radice quadrata. Nel ????, Gel'fond diede la risposta al quesito di Hilbert: se a e b sono numeri algebrici, $a \neq 0$, $a \neq 1$ e b è irrazionale, allora a^b non è algebrico. Fino a quel momento erano solo e e π gli unici numeri *noti* di cui si fosse dimostrata la non algebricità (si chiamano anche *numeri trascendenti*); se ne conoscevano altri, ma definiti con certe procedure artificiose e non ottenuti da problemi reali come appunto e e π. Se volessimo calcolare e^π potremmo usare l'approssimazione $\pi \approx 22/7$ data da Archimede:

$$e^\pi \approx \left(1 + \frac{22}{7 \cdot 2^{20}}\right)^{2^{20}} \approx 23{,}169863169262336.$$

Confrontando con il risultato dato da un calcolatore migliore, che è 23,14069263277926900520 si vede che siamo abbastanza vicini, ma l'approssimazione archimedea non è evidentemente abbastanza accurata per questo calcolo. Usando 3,14159265358979323844 come approssimazione di π si otterrebbe 23,140583727961122, un po' meglio, ma è chiaro che questi metodi sono troppo rudimentali, seppure sufficienti per darci un'idea dell'ordine di grandezza del risultato. Se proviamo con e^{100}, sempre con venti quadrati, otteniamo $2{,}675330523191423 \cdot 10^{43}$, mentre il valore 'vero' è $2{,}688117141816136 \cdot 10^{43}$, con una sola cifra decimale esatta.

È piuttosto facile programmare queste operazioni con un foglio di calcolo o in qualsiasi linguaggio che gestisca correttamente i numeri a virgola mobile. Un tempo, invece, questi calcoli andavano eseguiti a mano e riportati su tavole che servivano a semplificare il lavoro.

Con le sole addizione, sottrazione e moltiplicazione possiamo trovare la radice quadrata. Il metodo delle scuole medie, però, ha bisogno di una giustificazione.

La procedura fornisce non la radice quadrata di un intero M ma il massimo intero N tale che $N^2 \le M$. Il fatto che spesso si usino decimali non deve trarre in inganno, visto che basta moltiplicare per una potenza di 10 per trovare ancora numeri interi. Spesso si indica con $\lfloor x \rfloor$ il massimo numero intero y tale che $y \le x$; quindi vale la disuguaglianza $y \le x < y+1$; in particolare

$$\lfloor \sqrt{M} \rfloor \le \sqrt{M} < \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1.$$

Talvolta si parla di *radice quadrata intera*.

La prima operazione che si esegue è di separare M in gruppi di due cifre; questo equivale a scrivere M in base 100. Dato un intero positivo N indicheremo con $d_b(N)$ il numero delle sue cifre in base b; dire che $d_b(N) = k$ equivale a dire che $b^{k-1} \le N < b^k$. Considerare M in base 100 si fonda sul fatto che

$$d_{100}(M) = d_{10}(\lfloor \sqrt{M} \rfloor).$$

Infatti da $100^{k-1} \le M < 100^k$ otteniamo $10^{k-1} \le \sqrt{M} < 10^k$; ora $10^{k-1} \le \lfloor \sqrt{M} \rfloor$ e $\sqrt{M} < \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1 \le 10^k$.

L'altro fatto importante che ci serve è: se $X = \lfloor \sqrt{A} \rfloor$ e $0 \le B < 100$, allora $\lfloor \sqrt{100A+B} \rfloor = 10X + Y$, dove $0 \le Y < 10$. Ci basta verificare che

$$10Y \le \sqrt{100A+B} < 10Y + 10,$$

cioè che

$$100Y^2 \le 100A + B < 100(Y+1)^2.$$

La prima disuguaglianza è ovvia. Per la seconda vediamo subito che $100A+B < 100(A+1)$; Siccome $A < (Y+1)^2$ avremo $A+1 \le (Y+1)^2$: allora

$$100(Y+1)^2 \ge 100(A+1) > 100A + B$$

come volevamo. Che significa questo? Che quando ho trovato la migliore approssimazione intera X (per difetto) della radice quadrata di un numero intero A, posso determinare la migliore approssimazione intera per difetto della radice quadrata di $100A + B$ semplicemente aggiungendo un'opportuna cifra a X. Questa opportuna cifra Y sarà tale che

$$10X + Y \le \sqrt{100A+B} < 10X + Y + 1.$$

Dalla prima disuguaglianza abbiamo

$$100X^2 + 20XY + Y^2 \le 100A + B$$

cioè

$$100(A - X^2) + B \geq (20X + Y)Y;$$

dalla seconda abbiamo, analogamente,

$$100(A - X^2) + B < (20X + (Y + 1))(Y + 1)$$

e si riconosce immediatamente la regola della scuola media. Supponiamo infatti di voler calcolare la migliore approssimazione intera per difetto della radice quadrata di 345. Il numero che cerchiamo avrà due cifre, nelle nostre notazioni è $A = 3$, $B = 45$. Il valore di X è dunque 1 e dobbiamo calcolare il massimo intero Y tale che

$$(20X + Y)Y \leq 100(A - X^2) + B,$$

cioè $(20 + Y)Y \leq 245$. L'operazione $20X + Y$ corrisponde proprio alla regola di raddoppiare il numero ottenuto fino a quel momento e mettere in coda l'intero con cui si prova. Siccome $28 \cdot 8 = 224$ e $29 \cdot 9 = 261$, abbiamo $Y = 8$. Infatti $18^2 = 324$ e $19^2 = 361$.

Il bello di questa procedura è che possiamo continuare, nel caso non avessimo esaurito le cifre, esattamente allo stesso modo. Se infatti il nostro numero fosse $10000A + 100B + C$, calcoliamo come detto la prima cifra X, cioè $X = \lfloor\sqrt{A}\rfloor$; ora calcoliamo la seconda cifra Y in modo che

$$(20X + Y)Y \leq 100(A - X^2) + B < (20X + Y + 1)(Y + 1).$$

Nel passo successivo a A dobbiamo sostituire $100A + B$ e a X sostituire $10X + Y$; il numero da cercare è Z tale che

$$(20(10X + Y) + Z)Z \leq 100(100A + B - (10X + Y)^2).$$

Ma

$$\begin{aligned} 100A + B - (10X + Y)^2 &= 100A + B - 100X^2 - 20XY - Y^2 \\ &= 100(A - X^2) + B - (20X + Y)Y \end{aligned}$$

cioè basta abbassare due cifre e sottrarre da quello che si ottiene il risultato di $(20X + Y)Y$. Il fattore 100, che non abbiamo indicato, è per via del fatto che abbiamo ancora una cifra da calcolare.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{13\,18\,24} & 363 \\ \hline 9 & 66 \cdot 6 = 396 \\ \hline 4\,18 & 723 \cdot 3 = 2169 \\ \hline 3\,96 & \\ 22\,24 & \\ 21\,69 & \\ 55 & \end{array}$$

6.3 POTENZE ED ESPONENZIALI

La funzione exp si chiama così perché è abbreviazione di 'esponenziale'. La proprietà $\log(pq) = \log p + \log q$ si legge, come abbiamo visto, anche $\exp(a + b) = (\exp a)(\exp b)$. Dunque, se n è un intero positivo, avremo $\exp n = (\exp 1)^n$ e questo vale anche per qualsiasi intero (lo si verifichi). Se poniamo $\exp 1 = e$, abbiamo dunque $\exp n = e^n$.

Possiamo calcolare con questa nuova funzione anche 2^n? Certamente: poniamo $t = 2^n$; allora $\log t = \log(2^n) = n \log 2$ e quindi

$$2^n = \exp(n \log 2).$$

Questo sembra sciocco: possiamo calcolare 2^9 senza affatto ricorrere a esponenziale e logaritmo. Ma se ci pensiamo un momento, scopriamo che questo ci permette di *definire* l'operazione 2^n anche per esponenti non interi e non solo: anche la base può essere quella che vogliamo (o quasi). Poniamo infatti, per qualsiasi $a > 0$ e qualsiasi x,

$$a^x = \exp(x \log a).$$

Se x è intero, lo stesso ragionamento fatto per $t = 2^n$, cioè $a = 2$ e $x = n$, ci porta a dire che a^x coincide con l'usuale potenza. Lo stesso quando x è razionale; facciamo finta di non avere idea di che cosa significhi $a^{m/n}$ e cominciamo con $x = 1/n$. Abbiamo

$$a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log a\right);$$

se adesso ricordiamo che $\exp(nb) = (\exp b)^n$, abbiamo che

$$(a^{1/n})^n = \exp\left(\frac{1}{n}\log a\right)^n = \exp\left(n\frac{1}{n}\log a\right) = \exp(\log a) = a.$$

Dunque $a^{1/n}$ è quel numero che elevato alla n dà a: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. È analogo verificare che

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

cioè la notazione che abbiamo introdotto ora coincide con quella usata per semplificare i radicali.

In realtà abbiamo fatto molto di più! Con due sole funzioni possiamo calcolare tutte le radici: infatti

$$\sqrt[n]{a} = \exp\left(\frac{1}{n}\log a\right).$$

Si può obiettare che abbiamo usato le radici per calcolare i valori approssimati del logaritmo e dell'esponenziale. Ma se il numero di parti in cui dividiamo l'intervallo è sempre una potenza di 2, possiamo ridurci alla sola radice quadrata: *con le sole radici quadrate* possiamo calcolare valori approssimati della radice n-esima di qualsiasi numero positivo, qualunque sia n (intero positivo).

Abbiamo, per esempio, $\log 10 \approx 2{,}30258$; vogliamo calcolare $\sqrt[5]{10}$. Usiamo $t = 2{,}30258/5 = 0{,}460516$ e consideriamo

$$\left(1 + \frac{t}{8}\right)^8.$$

Con tre quadrati partendo da $1 + t/8 = 1{,}0575645$ otteniamo 1,56478 e la calcolatrice dà per $\sqrt[5]{10} \approx 1{,}58489$. Non male, considerando le poche operazioni eseguite. Se invece di $k = 8$ si usasse $k = 16$ si otterrebbe 1,57462; con $k = 64$ si avrebbe 1,58228 che ha due cifre decimali esatte.

Usando la notazione esponenziale in generale, possiamo allora scrivere $\exp x = e^x$, dove $e = \exp 1$. Dall'identità $\log \exp x = x$ deduciamo la definizione tradizionale di logaritmo: il logaritmo di $y > 0$ è l'esponente x da dare a e in modo che sia $y = e^x$.

Analogamente, per $b > 0$ e $y > 0$, possiamo definire $\log_b y$ (logaritmo in base b di y) quel numero x tale che $b^x = y$. Non c'è bisogno di fare molti calcoli: applichiamo la definizione di b^x e otteniamo $\exp(x \log b) = y$, cioè $x \log b = \log y$ da cui

$$\log_b x = \frac{\log y}{\log b}.$$

È chiaro che $\log_b$ è definito solo quando $b > 0$, perché $\log b$ esiste solo in questo caso, ma deve essere anche $b \neq 1$, perché $\log 1 = 0$.

La funzione $\log_b$, che si chiama *logaritmo in base b* ha la stessa proprietà del logaritmo *naturale*: $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ (per $x, y > 0$). Ma ora che abbiamo definito le potenze con esponente qualsiasi, abbiamo anche un'altra formula:

$$\log(a^x) = x \log a$$

che segue proprio dalla definizione:

$$\log(a^x) = \log(\exp(x \log a)) = x \log a.$$

La proprietà si estende naturalmente anche al logaritmo in base b:

$$\log_b(a^x) = \frac{\log(a^x)}{\log b} = \frac{x \log a}{\log b} = x \log_b a.$$

Se dovessimo cambiare base la formula è molto facile: dall'uguaglianza

$$x = b^{\log_b x}$$

segue

$$\log_c x = \log_c(b^{\log_b x}) = (\log_b x)(\log_c b)$$

che si può anche leggere

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}.$$

Sir John Napier definì nell'opera *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, pubblicata nel 1614 dopo riflessioni e calcoli durati vent'anni, il logaritmo di un numero N come l'esponente da dare a $\nu = (1 - 10^{-7})$ per ottenere il numero stesso: se

$$\left(1 + \frac{-1}{10^7}\right)^c = N$$

abbiamo, per quanto visto prima, $c \log \nu = \log N$ e quindi

$$\frac{c}{10^7} = \frac{\log N}{\log(\nu^{10^7})}.$$

Si può dimostrare che

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \approx \frac{1}{e}$$

e anche dare una descrizione rigorosa di come vada interpretata questa 'approssimazione' (ma appartiene alla teoria dei limiti e la lasciamo da parte). Dunque $c \approx -10^7 \log N$; a parte il segno, i logaritmi di Napier erano essenzialmente gli attuali logaritmi naturali. Fu Henry Briggs ad avere l'ottima idea di usare 10 come base invece di $1 - 10^{-7}$, rendendo ancora più maneggevoli i logaritmi. Al giorno d'oggi il logaritmo decimale di Briggs non ha quasi più alcuna utilità. Va notato che Jobst Bürgi pubblicò un sistema equivalente a quello di Napier, ma solo nel 1620, sebbene pare che avesse avuto l'idea alcuni anni prima dello scozzese. La teoria come la conosciamo oggi è dovuta principalmente a Euler.

7 I NUMERI COMPLESSI

Proviamo a giocare con l'algebra, come facevano i matematici fino al diciottesimo secolo (e anche oltre). Trattiamo i simboli $\Re$ e $\Im$ come lettere, senza preoccuparci di quale valore assegneremo e 'moltiplichiamo' due espressioni del tipo $\Re\cos\alpha + \Im\sin\alpha$:

$$\begin{aligned}(\Re\cos\alpha + \Im\sin\alpha)(\Re\cos\beta + \Im\sin\beta) = {} & \Re^2\cos\alpha\cos\beta \\ & + \Re\Im(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\ & + \Im^2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Il coefficiente di $\Re\Im$ è $\sin(\alpha+\beta)$; in quell'espressione avremmo anche $\cos(\alpha+\beta)$, purché si scriva $\Im^2 = -\Re^2$; l'espressione allora ridiventa dello stesso tipo delle originali se imponiamo anche $\Re^2 = \Re$ e $\Re\Im = \Im$, che portano alla conclusione $\Re = 1$ e, quindi, $\Im^2 = -1$.

Ci si domanderà se sia lecito procedere in questo modo; ma intanto possiamo dire che questa 'identità' è piuttosto interessante:

$$(\cos\alpha + \Im\sin\alpha)(\cos\beta + \Im\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \Im\sin(\alpha+\beta),$$

dove $\Im^2 = -1$. Se non altro, è un'identità che ci permette di ricordare le formule di addizione attraverso un calcolo formale. Tuttavia, uno dei criteri guida dei matematici è: se qualcosa funziona stiracchiando le regole note, allora quelle regole possono essere ampliate per comprendere questi nuovi casi.

L'*entità* misteriosa che abbiamo finora chiamato $\Im$ si chiama, solitamente, i e lo faremo anche noi da ora in poi. Non sarà così misteriosa, alla fine; per adesso basta ricordarsi di trattarla come una lettera qualsiasi, ma con l'avvertenza che $i^2 = -1$.

Dovremo considerare tutte le espressioni del tipo $a + bi$, dove a e b sono numeri 'soliti'; per la somma non ci sono problemi:

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i.$$

Per la moltiplicazione agiamo come siamo abituati; dunque avremo

$$(a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

ricordando solo che $i^2 = -1$. Nel sedicesimo secolo ci si accorse che per trattare le equazioni di terzo grado era necessario considerare, come passaggi intermedi, radici quadrate di numeri negativi e queste espressioni furono chiamate da Rafael Bombelli *numeri silvestri*. Fu Réné Descartes che chiamò *immaginarie* le radici quadrate dei numeri negativi, rendendo così un cattivo servizio alla matematica. Solo all'inizio del diciannovesimo secolo fu trovato un modo per rappresentare geometricamente i 'numeri' che stiamo trattando: Gauss li chiamò *numeri complessi* e osservò che dato $a + bi$ possiamo considerare il punto di coordinate (a, b) in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e, viceversa, le coordinate di un punto qualsiasi definiscono un numero complesso. A che cosa corrisponde la somma?

La somma di un numero complesso $a+bi$ con l'origine (cioè il numero complesso $0+0i$) è $a+bi$. Supponiamo ora che $a+bi$ e $c+di$ non siano allineati con l'origine; i due punti, insieme all'origine stessa, definiscono allora un parallelogramma. Quali sono le coordinate del quarto vertice? Se sono (x,y), sappiamo che il punto medio del segmento $(0,0)\,..\,(x,y)$ coincide con quello del segmento $(a,b)\,..\,(c,d)$, cioè

$$\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)=\left(\frac{0+x}{2},\frac{0+y}{2}\right)$$

che si riduce a

$$x=a+c,\qquad y=b+d.$$

La somma di numeri complessi è semplicemente la nota regola del parallelogramma della fisica. Si esamini che cosa diventa la somma nel caso in cui i due punti siano allineati con l'origine.

A questo punto non ci resta che dare un'interpretazione geometrica della moltiplicazione. Cominciamo dal facile: che succede moltiplicando, secondo la definizione, $(a+bi)(0+1i)$? Vediamo:

$$(a+bi)i=ai+bi^2=-b+ai.$$

Consideriamo i segmenti che congiungono l'origine ai due punti ottenuti, cioè quelli di coordinate (a,b) e $(-b,a)$: sembrano ortogonali. E lo sono: la retta passante per l'origine e il primo punto ha coefficiente angolare b/a, l'altra $-a/b$ e il prodotto è -1 (lo stesso funziona facilmente anche quando una delle due rette non ha coefficiente angolare).

Vediamone un'altra: $(a+bi)(1+i)=(a-b)+(a+b)i$. Questa sembra più complicata, ma possiamo prima provare con un caso semplice: con $a=1$ e $b=0$ otteniamo il punto $1+i$ e la retta passante per l'origine e il punto $(1,1)$ è la bisettrice del primo quadrante. Se partiamo da $i=0+1i$ otteniamo

$$i(1+i)=-1+i$$

e la retta passante per l'origine e il punto $(-1,1)$ è la bisettrice del secondo quadrante.

Potremmo fare la congettura che sia coinvolta una rotazione e abbiamo certamente gli strumenti per verificarla. Abbiamo i punti di coordinate (a,b) e $(a-b,a+b)$. Se $\langle\rho,\varphi\rangle$ sono le coordinate polari del primo, abbiamo

$$a=\rho\cos\varphi,\qquad b=\rho\sin\varphi$$

e quindi

$$\begin{aligned}a-b&=\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)=\sqrt{2}\rho\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right),\\ a+b&=\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)=\sqrt{2}\rho\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Dunque il punto che otteniamo si ottiene effettivamente ruotando di $\pi/4$ la semiretta definita dall'origine e dal punto di partenza. Perché $\pi/4$? La risposta è semplice: in coordinate polari il punto $(1,1)$ è $\langle\sqrt{2},\pi/4\rangle$ e questo mostra anche il fattore $\sqrt{2}$ in evidenza.