Rotazioni

Debora Botturi

ALTAIR

http://metropolis.sci.univr.it

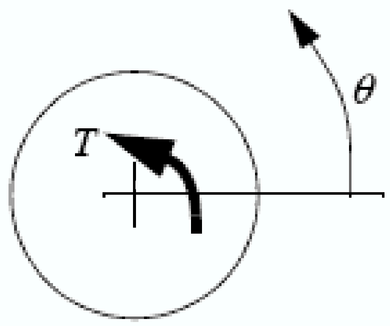
Introduzione

Argomenti

- Leggi base del moto
- Inerzia, molle, smorzatori, leve ed ingranaggi
- Casi studio

Obiettivo: Sviluppo e analisi di equazioni differenziali per sistemi rotazionali.

Propietá di base della rotazione



equations of motion

$$\omega = \left(\frac{d}{dt}\right)\theta \qquad (1)$$

$$\alpha = \left(\frac{d}{dt}\right)\omega = \left(\frac{d}{dt}\right)^2\theta \qquad (2)$$

OR

$$\theta(t) = \int \omega(t)dt = \iint \alpha(t)dtdt \qquad (3)$$

$$\omega(t) = \int \alpha(t)dt \qquad (4)$$

$$\alpha(t) = \frac{T(t)}{J_M} \qquad (5)$$

where,

θ, ω, α = *position, velocity and acceleration*

J_M = *second mass moment of inertia of the body*

T = *torque applied to body*

Modellare

Osservazioni

Le componenti di forza considerate in un sistema rotazionale sono:

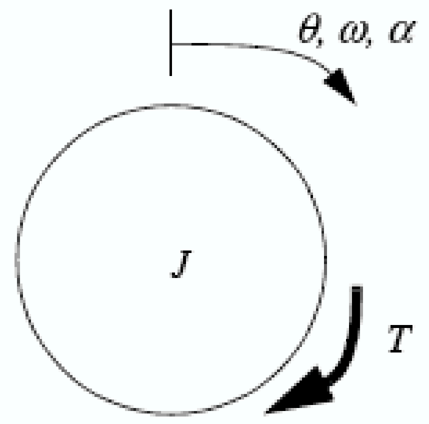
- inerzia - che si oppone ad accelerazione e decelerazione
- molle - resistono alla deflessione
- smorzatori - che si oppongono alla velocitá
- leve - ruotano di piccoli angoli
- ingranaggi e cinghie - cambiano la velocitá angolare e la coppia

Osservazioni

- Se le forze non passano attraverso il centro di un oggetto, e non sono bilanciate, l'oggetto ruota
- Il centro di rotazione di un corpo libero é il centroide.
- I momenti di inerzia sono tipicamente calcolati rispetto al centroide

Inerzia

Quando coppie non bilanciate sono applicate ad una massa questa inizia ad accelerare in rotazione. La somma delle coppie applicate é uguale alle forze di inerzia



$$\sum T = J_M \alpha$$

$$J_M = I_{xx} + I_{yy}$$

$$I_{xx} = \int y^2 \, dM$$

$$I_{yy} = \int x^2 \, dM$$

Teorema degli assi paralleli

Il centro di rotazione per un corpo é il centroide ed i momenti di inerzia sono calcolati rispetto al centroide. Se il corpo é vincolato a ruotare attorno ad un altro punto il valore del momento di inerzia deve essere ricalcolato. Il teorema degli assi paralleli fornisce un metodo per calcolare il nuovo centro di rotazione

- Per spostare il momento di inerzia della massa:

$$J_M = \bar{J}_M + Mr^2$$

where,

J_M = *mass moment about the new point*

$\bar{J}_M$ = *mass moment about the center of mass*

M = *mass of the object*

r = *distance from the centroid to the new point*

- Per spostare il momento di inerzia dell'area:

$$J_A = \bar{J}_A + Ar^2$$

where,

J_A = *area moment about the new point*

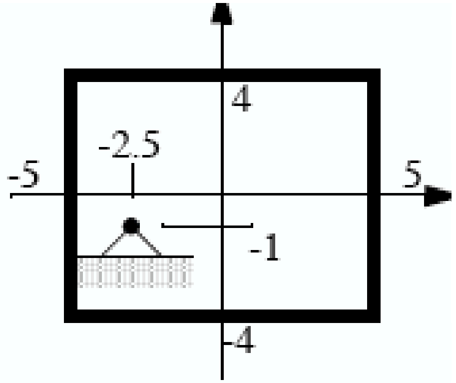
$\bar{J}_A$ = *area moment about the centroid*

A = *mass of the object*

r = *distance from the centroid to the new point*

Esempio

The rectangular shape to the right is constrained to rotate about point A. The total mass of the object is 10kg. The given dimensions are in meters. Find the mass moment of inertia.



First find the density and calculate the moments of inertia about the centroid.

$$\rho = \frac{10Kg}{2(5m)2(4m)} = 0.125Kgm^{-2}$$

$$I_{xx} = \int_{-4}^{4} y^2 dM = \int_{-4}^{4} y^2 \rho 2(5m)dy = 1.25Kgm^{-1}\frac{y^3}{3}\Big|_{-4}^{4}$$

$$\therefore = 1.25Kgm^{-1}\left(\frac{(4m)^3}{3} - \frac{(-4m)^3}{3}\right) = 53.33Kgm^2$$

$$I_{yy} = \int_{-5}^{5} x^2 dM = \int_{-5}^{5} x^2 \rho 2(4m)dx = 1Kgm^{-1}\frac{x^3}{3}\Big|_{-5}^{5}$$

$$\therefore = 1Kgm^{-1}\left(\frac{(5m)^3}{3} - \frac{(-5m)^3}{3}\right) = 83.33Kgm^2$$

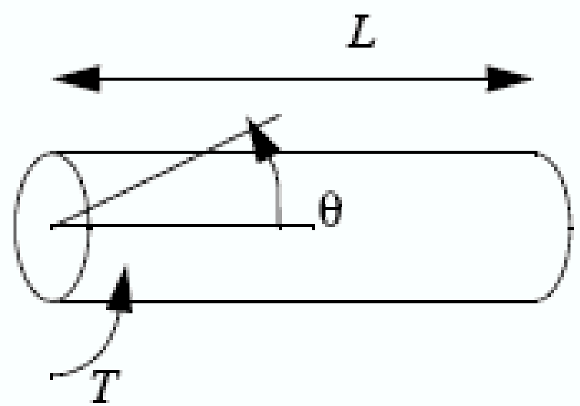
$$J_M = I_{xx} + I_{yy} = 53.33Kgm^2 + 83.33Kgm^2 = 136.67Kgm^2$$

The centroid can now be shifted to the center of rotation using the parallel axis theorem.

$$J_M = \bar{J}_M + Mr^2 = 136.67Kgm^2 + (10Kg)((-2.5m)^2 + (-1m)^2) = 209.2Kgm^2$$

Molle

- La sollecitazione di una molla rotazionale provoca coppie opposte
- Questa coppia aumenta quando la deformazione cresce
- I parametri costanti (momento di inerzia dell'area J_A, il modulo G, la lunghezza L) possono essere nascosti in un coefficiente K_s



$$T = \left(\frac{J_A G}{L}\right)\theta$$

$$T = K_S(\Delta\theta)$$

Osservazioni

- Si usa il momento di inerzia riferito all'area in situazioni in cui si usano delle propietá del materiale
- Il calcolo del momento per l'area é simile al calcolo del momento di inerzia
- Il momento relativo all'area puó essere convertito nel momento di inerzia moltiplicando semplicemente per la densitá

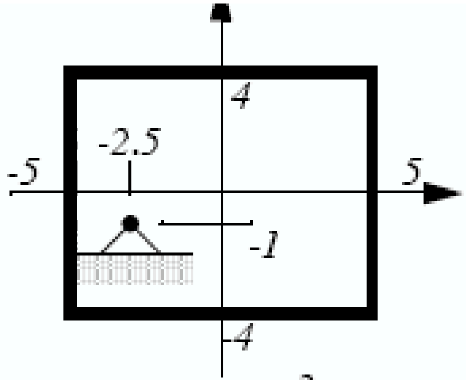
$$I_{xx} = \int y^2 dA$$

$$I_{yy} = \int x^2 dA$$

$$J_A = I_{xx} + I_{yy}$$

$$J_A = \bar{J}_A + Ar^2$$

Esempio



First, the area moment of inertia is calculated about the centroid by integration. All dimensions are in m.

$$I_{xx} = \int_{-4m}^{4m} y^2 dA = \int_{-4m}^{4m} y^2 2(5m)dy = 10m\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-4m}^{4m} = 10m\left(\frac{(4m)^3}{3} - \frac{(-4m)^3}{3}\right) = 426.7$$

$$I_{yy} = \int_{-5m}^{5m} x^2 dA = \int_{-5m}^{5m} x^2 2(4m)dx = 8m\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-5m}^{5m} = 8m\left(\frac{(5m)^3}{3} - \frac{(-5m)^3}{3}\right) = 666.7m$$

$$\bar{J}_A = I_{xx} + I_{yy} = (426.7 + 666.7)m^4 = 1093.4m^4$$

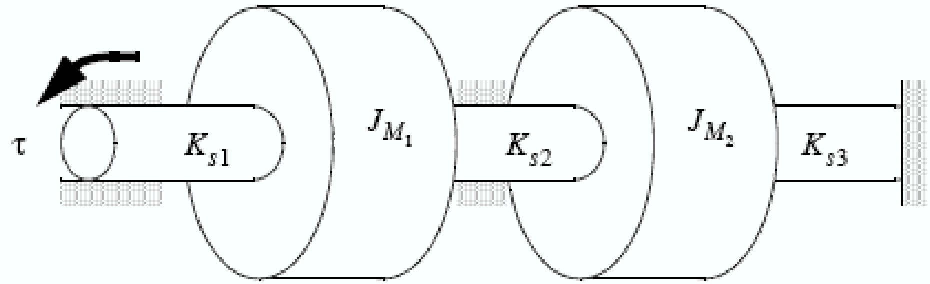
Next, shift the area moment of inertia from the centroid to the other point of rotation.

$$J_A = \bar{J}_A + Ar^2$$

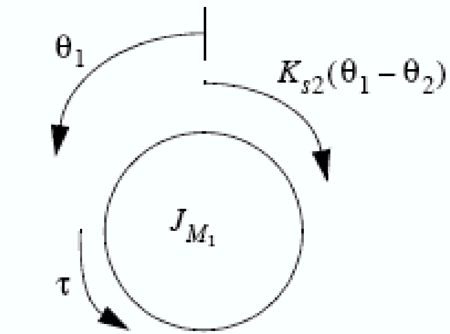
$$\therefore \quad = 1093.4m^4 + ((4m - (-4m))(5m - (-5m)))((-1m)^2 + (-2.5m)^2)$$

$$\therefore \quad = 1673m^4$$

Esempio



Model the system above assuming that the center shaft is a torsional spring, and that a torque is applied to the leftmost disk. Leave the results in state variable form.

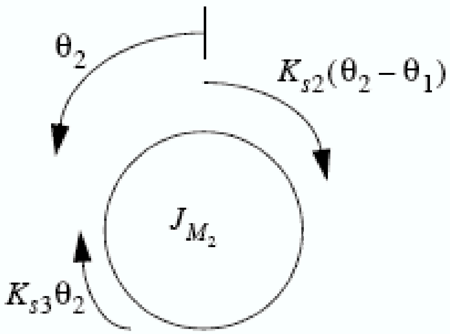


$$+\quad \sum M = \tau - K_{s2}(\theta_1 - \theta_2) = J_{M_1}\ddot{\theta}_1$$

$$J_{M_1}\ddot{\theta}_1 = -K_{s2}\theta_1 + K_{s2}\theta_2 + \tau$$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 \qquad (1)$$

$$\dot{\omega}_1 = \left(\frac{-K_{s2}}{J_{M_1}}\right)\theta_1 + \left(\frac{K_{s2}}{J_{M_1}}\right)\theta_2 + \tau \qquad (2)$$



$$+\quad \sum M = -K_{s2}(\theta_2 - \theta_1) - K_{s3}\theta_2 = J_{M_2}\ddot{\theta}_2$$

$$\ddot{\theta}_2 = \left(\frac{-K_{s3} - K_{s2}}{J_{M_2}}\right)\theta_2 + \left(\frac{K_{s2}}{J_{M_2}}\right)\theta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 \qquad (3)$$

$$\dot{\omega}_2 = \left(\frac{-K_{s3} - K_{s2}}{J_{M_2}}\right)\theta_2 + \left(\frac{K_{s2}}{J_{M_2}}\right)\theta_1 \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \omega_1\\ \theta_2\\ \omega_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{-K_{s2}}{J_{M_1}} & 0 & \frac{K_{s2}}{J_{M_1}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{K_{s2}}{J_{M_2}} & 0 & \frac{-K_{s3}-K_{s2}}{J_{M_2}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \omega_1\\ \theta_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \tau\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

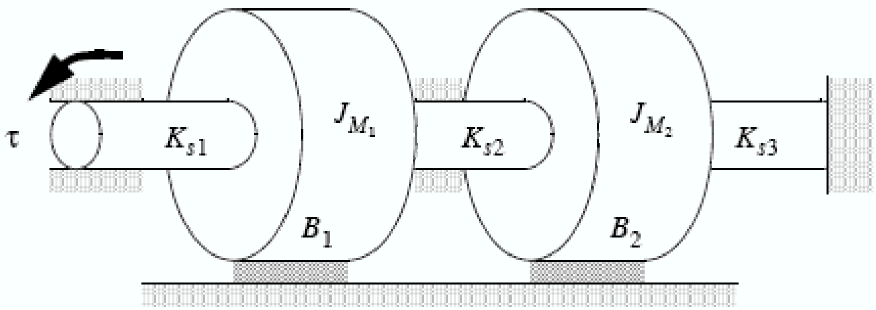
Smorzatori

- Smorzatori rotazionali sono solitamente causati da fluidi viscosi come l'olio usati per la lubrificazione
- Lo smorzatore oppone velocitá angolare (vedi equazione sotto dove la prima é usata per un sistema con una parte fissa ed una rotazionale la seconda quando lo smorzamento avviene tra due parti rotanti)

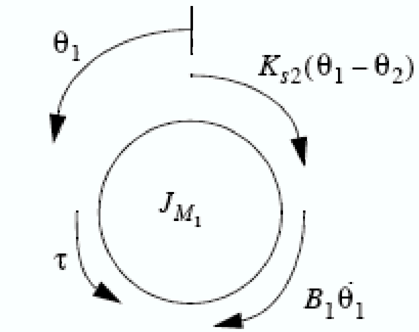
$$T = K_d \omega$$

$$T = K_d(\omega_1 - \omega_2)$$

Esempio



Model the system above assuming that the center shaft is a torsional spring, and that a torque is applied to the leftmost disk. Leave the results in state variable form.

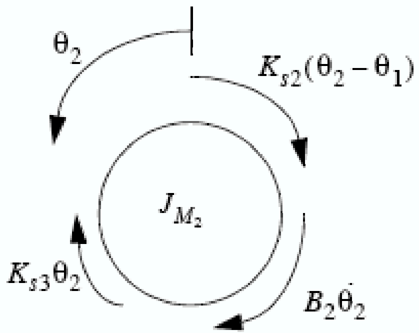


$$+\sum M = \tau - K_{s2}(\theta_1-\theta_2) - B_1\dot{\theta}_1 = J_{M_1}\ddot{\theta}_1$$

$$J_{M_1}\ddot{\theta}_1 = -B_1\dot{\theta}_1 - K_{s2}\theta_1 + K_{s2}\theta_2 + \tau$$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 \qquad (1)$$

$$\dot{\omega}_1 = \left(\frac{-B_1}{J_{M_1}}\right)\omega_1 + \left(\frac{-K_{s2}}{J_{M_1}}\right)\theta_1 + \left(\frac{K_{s2}}{J_{M_1}}\right)\theta_2 + \frac{\tau}{J_{M_1}} \qquad (2)$$



$$+\sum M = -K_{s2}(\theta_2-\theta_1) - B_2\dot{\theta}_2 - K_{s3}\theta_2 = J_{M_2}\ddot{\theta}_2$$

$$\ddot{\theta}_2 = \left(\frac{-B_2}{J_{M_2}}\right)\dot{\theta}_2 + \left(\frac{-K_{s3}-K_{s2}}{J_{M_2}}\right)\theta_2 + \left(\frac{K_{s2}}{J_{M_2}}\right)\theta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 \qquad (3)$$

$$\dot{\omega}_2 = \left(\frac{-B_2}{J_{M_2}}\right)\omega_2 + \left(\frac{-K_{s3}-K_{s2}}{J_{M_2}}\right)\theta_2 + \left(\frac{K_{s2}}{J_{M_2}}\right)\theta_1 \qquad (4)$$

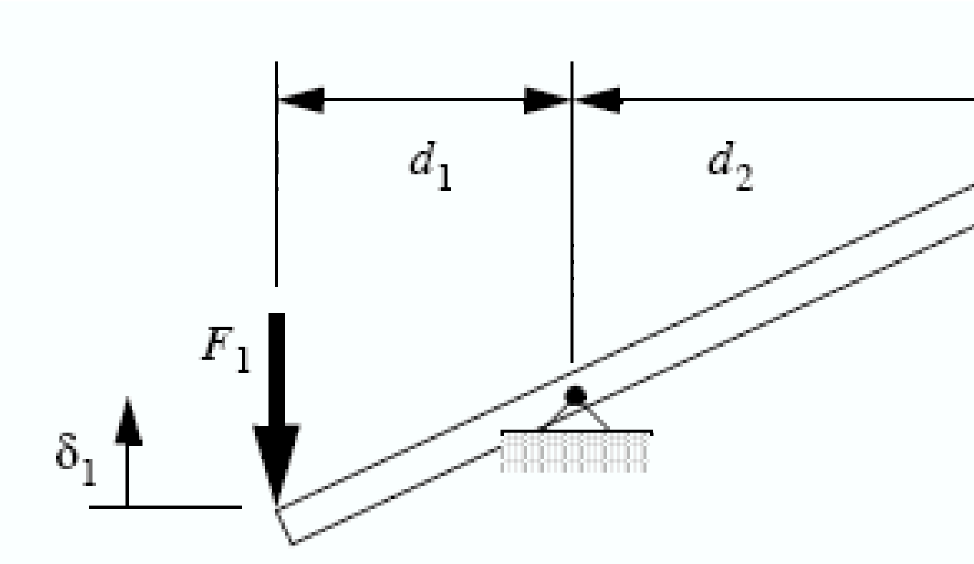
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \omega_1\\ \theta_2\\ \omega_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{s2}}{J_{M_1}} & \frac{-B_1}{J_{M_1}} & \frac{K_{s2}}{J_{M_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_{s2}}{J_{M_2}} & 0 & \frac{-K_{s3}-K_{s2}}{J_{M_2}} & \frac{-B_2}{J_{M_2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \omega_1\\ \theta_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tau}{J_{M_1}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Se una ruota con $J_M = 5kgm^2$ sta girando a $150rpm$ ed il coefficiente di smorzamento é di $1Nms/rad$, quale é la decelerazione?

Leve

- Una leva puó essere usata per amplificare le forze od il moto
- L'amplificazione é determinata dallla lunghezza del braccio della leva
- Tipicamente una leva ha un limitato intervallo di movimento e di angoli su cui é effettiva



$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

Esercizio 3

Data una leva per alzare una roccia di $1000kg$, se la leva é lunga $2m$ e la distanza dal fulcro alla roccia é $10cm$, quanta forza é richiesta per alzare la roccia?

Ingranaggi e cinghie

- Gli ingranaggi possono ruotare all'infinito amplificando le forze e i moti senza un limite
- Alcune forme classiche di ingranaggio sono:
  - Sperone - Ruota con denti paralleli all'asse di rotazione
  - Cremagliera - Ingranaggio lineare (usato con un pinione)
  - Elicoidali - I denti seguono una formazione elicoidale attorno all'asse di rotazione
  - Coniche - L'ingranaggio ha una forma conica
- Le forze sugli ingranaggi agiscono alla distanza tangenziale dal centro di rotazione
- Il rapporto del moto e delle forze attraverso un paio di ingranaggi é proporzionale al loro raggio
- Il numero di denti su un ingranaggio é proporzionale al diametro
- Il rapporto di un ingranaggio é usato per misurare la rotazione relativa dell'asta (ad esempio il rapporto $20 : 1$ significa che l'asta di input deve ruotare 20 volte perché l'asta di output ruoti una)

Relazioni di base

$$T_1 = F_c r_1 \qquad T_2 = -F_c r_2 \qquad \frac{n_1}{r_1} = \frac{n_2}{r_2} \qquad \frac{-T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

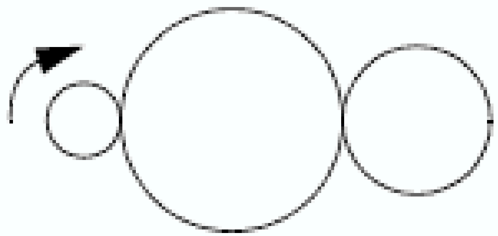
$$V_c = \omega_1 r_1 = -\omega_2 r_2 \qquad \frac{r_2}{r_1} = \frac{-\omega_1}{\omega_2} = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{-\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

where,

- n = *number of teeth on respective gears*
- r = *radii of respective gears*
- Fc = *force of contact between gear teeth*
- Vc = *tangential velocity of gear teeth*
- T = *torques on gears*

Esercizio 4

Un ingranaggio é formato da un treno di ruote la prima di input con 20 denti la centrale con 100 denti e qualla di output con 40 denti. Se l'asta di input routa di $5rad/sec$ quale é la velocitá di rotazione della ruota di output?

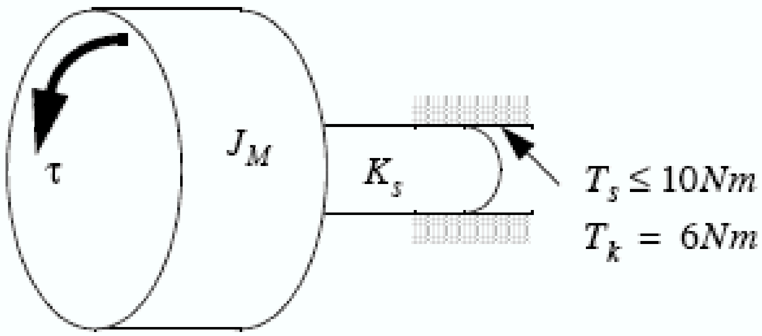


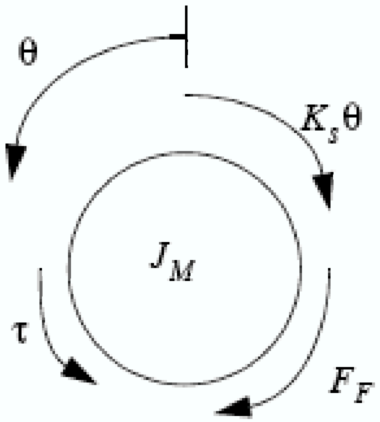
Frizione

- La frizione tra componenti rotanti é la maggiore fonte di inefficienza nelle macchine
- É il risultato dei materiali di contatto e delle geometrie
- Normalmente la frizione rotazionale é data come coppia di frizione statica e cinetica

Esempio

Model the system and consider the static and kinetic friction forces on the shaft on the right hand side.





$$+ \quad \sum M = \tau - K_s\theta - T_F = J_M\ddot{\theta}$$

$$J_M\ddot{\theta} = \tau - K_s\theta - T_F \qquad (1)$$

$$\dot{\theta} = \omega \qquad (2)$$

$$\dot{\omega} = \left(\frac{\tau - T_F}{J_M}\right) + \left(\frac{K_s}{J_M}\right)\theta \qquad (3)$$

Next, the torque force must be calculated, and then used to determine the new torque force.

$$J_M\dot{\omega} = \tau - K_s\theta - T_{test}$$

$$T_{test} = \tau - K_s\theta - J_M\dot{\omega} \qquad (4)$$

cases:

Not slipping previously

$T_{test} \leq 10Nm \qquad T_F = T_{test}$

$T_{test} > 10Nm \qquad T_F = 6Nm$

Slipping previously

$T_{test} < 6Nm \qquad T_F = T_{test}$

$T_{test} \geq 6Nm \qquad T_F = 6Nm$

Esempio - C code


```
int main(){
	double		h = 0.1, /* time step */
			theta, w, /* the state variables */
			acceleration, /* the acceleration */
			TF, /* friction force */
			Ttest, /* the friction test force */
			J = 10, /* the moment of inertia (I picked the value) */
			tau = 5, /* the applied torque (I picked the value) */
			Ks = 10; /* the spring constant (I picked the value) */
	int		slip = 0; /* the system starts with no slip */
	FILE		*fp;

	theta = 0; w = 0;/* the initial conditions - starting at rest here */
	TF = 0.0; /* set the initial friction to 0.0; */
	acceleration = 0.0;/* set the initial acceleration to zero also */
	if( ( fp = fopen("out.txt", "w")) != NULL){/* open a file to write the results */
		for( t = 0.0; t < 10.0; t += h ){/* loop */
			Ttest = tau - Ks*theta - J*acceleration;
			if(slip == 0){ /* not slipping */
				if(Ttest >= 10){
					TF = 6; slip = 1;
				} else {
					TF = Ttest;
				}
			} else { /* slipping */
				if(Ttest < 6){ TF = Ttest; slip = 0;
				} else {TF = 6;}
			}
			acceleration = (tau - TF + Ks*theta) / J;
			w = w + h * acceleration;
			theta = theta + h * w;
			fprintf(fp, "%f, %f, %f\n", t, theta, w);
		}
	}
	fclose(fp);
```

Soluzioni

- Esercizio 2: $\ddot{\theta} = -3.141 rad/s^2$
- Esercizio 3: $F = 516.3N$
- Esercizio 4: $\omega_3 = 2.5 rad/sec$