Analisi Numerica

Debora Botturi

ALTAIR

http://metropolis.sci.univr.it

Argomenti

Argomenti
Osservazioni

Metodologia Generale

Integrazione Numerica

- Rappresentazione di sistemi con variabili di stato;
- Tecniche di integrazione numerica

Obiettivo: risolvere sistemi di equazioni differenziali con metodi numerici.

Osservazioni

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale

Integrazione Numerica

- Spesso si verificano casi in cui non é pratico analizzare le equazioni differenziali attraverso la loro forma esplicita
- In tali casi si possono usare metodi numerici per trovare una soluzione per un'equazione differenziale
- La soluzione trovata é generalmente in forma di grafico od insieme di numeri
- Tali soluzioni possono quindi essere usate per analizzare casi di studio specifici
- La soluzione si ottiene velocemente usando tecniche iterative, che puntano all'azzeramento dell'errore)
- Ma senza una rappresentazione esplicita il sistema non puó essere capito e dunque manipolato

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale
- Rappresentazione a stati
- Rappresentazione a stati
- Esempio
- Esercizio
- Esempio
- Esercizio
- Esercizio
- Osservazioni
- Esempio
- Esempio

Integrazione Numerica

Metodologia Generale

Rappresentazione a stati

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale

- Rappresentazione a stati
- Rappresentazione a stati
- Esempio
- Esercizio
- Esempio
- Esercizio
- Esercizio
- Osservazioni
- Esempio
- Esempio

Integrazione Numerica

Il modello a stati per la rappresentazione di un sistema prevede l'assegnazione al sistema di una funzione di stato, modellata dall'evoluzione delle variabili di stato (variabili interne)

- Il processo generale per analizzare un sistema in questo paradigma prevede:
  - Mettere le equazioni in forma standard (variabili di stato)
  - Integrarle con un metodo numerico
- Ad ogni istante di tempo un sistema si trova in uno stato specifico
- Per identificare le variabili di stato si usano i seguenti fattori:
  - Le variabili dovrebbero descrivere gli elementi che immagazzinano energia
  - Le variabili devono essere indipendenti
  - Gli stati dovrebbero descrivere insiemi di condizioni in cui si trovano gli elementi del sistema

Rappresentazione a stati

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale
- Rappresentazione a stati
- Rappresentazione a stati
- Esempio
- Esercizio
- Esempio
- Esercizio
- Esercizio
- Osservazioni
- Esempio
- Esempio

Integrazione Numerica

- Gli stati del sistema vengono usati per manipolare l'equazione differenziale che descrive il sistema fino a portarla alla forma equivalente di sistema di equazioni lineari del primo ordine, che a sua volta puo' essere descritto nella forma matriciale seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = & Ax + Bu \quad \text{eq. di aggiornamento dello stato} \\ y = & Cx + Du \quad \text{eq. di output} \end{cases}$$

  - $x =$ vettore degli stati di dimensione n
  - $u =$ vettore di input
  - $A =$ matrice $n \times n$, con n ordine delle derivate su y, di transizione relativa agli stati
  - $B =$ matrice $n \times m$, con m ordine delle derivate su x che relaziona l'input all'output
  - $y =$ valore che puó essere trovato direttamente
  - $C =$ matrice $1 \times n$ di transizione relativa agli stati
  - $D =$ matrice $1 \times m$ che relaziona l'input all'output

- L'equazione di output non é sempre richiesta, ma puó essere usata per calcolare nuovi valori di output

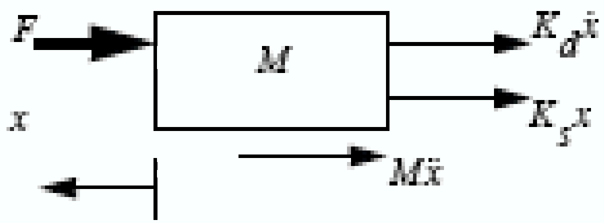
- Si puó raggiungere la forma di sistema di eq. lineari del primo ordine a partire da una qualunque eq. differenziale ordinaria lineare a coeff. costanti. Se l'eq. non é di questo tipo bisogna ricorrere a tecniche di linearizzazione o altra approssimazione.

Esempio

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale
- Rappresentazione a stati
- Rappresentazione a stati
- Esempio
- Esercizio
- Esempio
- Esercizio
- Esercizio
- Osservazioni
- Esempio
- Esempio

Integrazione Numerica



$$\overset{+}{\leftarrow} \quad \sum F_x = -F - K_d\dot{x} - K_s x = M\ddot{x}$$

$$-F - K_d\dot{x} - K_s x = M\ddot{x}$$

The equation is second-order, so two state variables will be needed. One obvious choice for a state variable in this equation is 'x'. The other choice can be the velocity, 'v'. Equation (1) defines the velocity variable. The velocity variable can then be substituted into the differential equation for the system to reduce it to first-order.

$$\dot{x} = v \qquad (1)$$

$$M\ddot{x} = -F - K_d\dot{x} - K_s x$$

$$M\dot{v} = -F - K_d v - K_s x$$

$$\dot{v} = x\left(\frac{-K_s}{M}\right) + v\left(\frac{-K_d}{M}\right) + \left(\frac{-F}{M}\right) \qquad (2)$$

Equations (1) and (2) can also be put into a matrix form similar to that given in Figure 4.1.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-K_s}{M} & \frac{-K_d}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-F}{M} \end{bmatrix}$$

Nota: per avere un insieme risolvibile di equazioni differenziali dobbiamo avere lo stesso numero di equazioni e di variabili. Se abbiamo poche equazioni si deve sviluppare una equazione sfruttando relazioni non ancora usate. Se ci sono troppe equazioni la ridondanza deve essere eliminata.

Esercizio

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale
- Rappresentazione a stati
- Rappresentazione a stati
- Esempio
- Esercizio
- Esempio
- Esercizio
- Esercizio
- Osservazioni
- Esempio
- Esempio

Integrazione Numerica

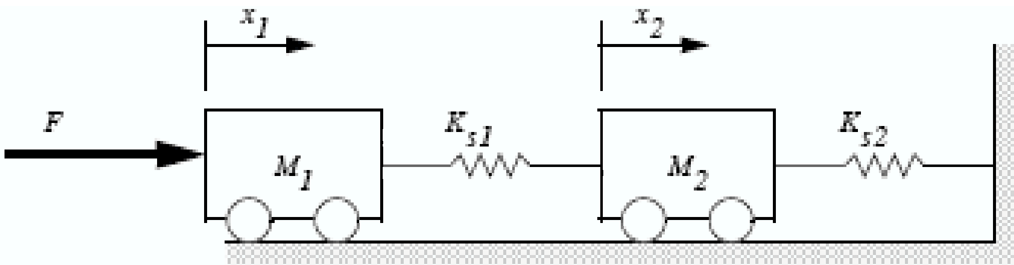
Mettere l'equazione nella forma a stati:

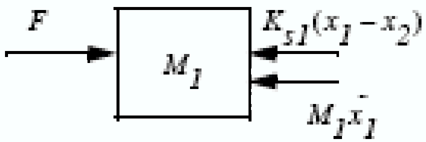
$$F = M\ddot{x}$$

soluzione:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{F}{M} \end{aligned}$$

Esempio





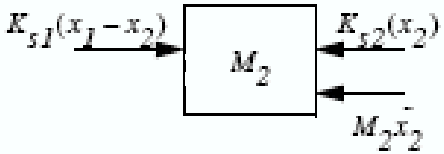
$$\xrightarrow{+}\sum F_x = F - K_{s1}(x_1 - x_2) = M_1\ddot{x}_1$$

$$M_1\ddot{x}_1 + K_{s1}x_1 - K_{s1}x_2 = F$$

$$\dot{x}_1 = v_1 \qquad (1)$$

$$M_1\dot{v}_1 + K_{s1}x_1 - K_{s1}x_2 = F$$

$$\dot{v}_1 = \frac{F}{M_1} - \frac{K_{s1}}{M_1}x_1 + \frac{K_{s1}}{M_1}x_2 \qquad (2)$$



$$\xrightarrow{+}\sum F_x = K_{s1}(x_1 - x_2) - K_{s2}(x_2) = M_2\ddot{x}_2$$

$$M_2\ddot{x}_2 + (K_{s1} + K_{s2})x_2 - K_{s1}x_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = v_2 \qquad (3)$$

$$M_2\dot{v}_2 + (K_{s1} + K_{s2})x_2 - K_{s1}x_1 = 0$$

$$\dot{v}_2 = \frac{K_{s1}}{M_2}x_1 - \left(\frac{K_{s1} + K_{s2}}{M_2}\right)x_2 \qquad (4)$$

The state equations can now be combined in a matrix form.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{s1}}{M_1} & 0 & \frac{K_{s1}}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_{s1}}{M_2} & 0 & \frac{-K_{s1} - K_{s2}}{M_2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

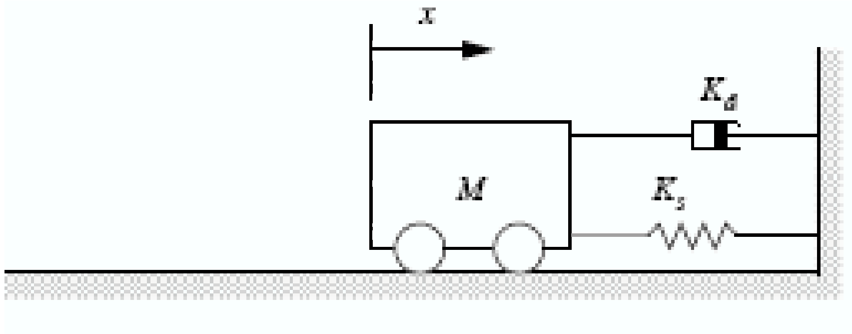
Esercizio

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale
- Rappresentazione a stati
- Rappresentazione a stati
- Esempio
- Esercizio
- Esempio
- Esercizio
- Esercizio
- Osservazioni
- Esempio
- Esempio

Integrazione Numerica

Sviluppare l'equazione a stati del seguente sistema



Soluzione:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -v\frac{K_d}{M} - x\frac{K_s}{M} \end{aligned}$$

Esercizio

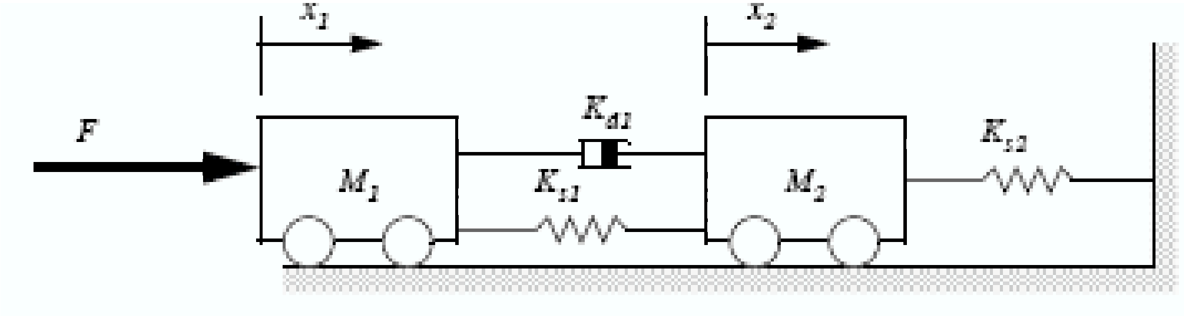
- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale

- Rappresentazione a stati
- Rappresentazione a stati
- Esempio
- Esercizio
- Esempio
- Esercizio
- Esercizio
- Osservazioni
- Esempio
- Esempio

Integrazione Numerica

Sviluppare l'equazione a stati del seguente sistema



Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= v_1 \\
\dot{x}_2 &= v_2 \\
\dot{v}_1 &= -x_1 \frac{K_{s1}}{M_1} + x_2 \frac{K_{s1}}{M_1} - v_1 \frac{K_{d1}}{M_1} + v_2 \frac{K_{d1}}{M_1} + \frac{F}{M_1} \\
\dot{v}_2 &= x_1 \frac{K_{s1}}{M_2} + x_2 \frac{-K_{s1} - K_{s2}}{M_2} + v_1 \frac{K_{d1}}{M_2} - v_2 \frac{K_{d1}}{M_2}
\end{aligned}
$$

Osservazioni

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale

- Rappresentazione a stati
- Rappresentazione a stati
- Esempio
- Esercizio
- Esempio
- Esercizio
- Esercizio
- Osservazioni
- Esempio
- Esempio

Integrazione Numerica

- In alcuni casi le equazioni differenziali hanno piú di un termine di ordine piú elevato e quindi non possono essere ridotte (ad esempio una equazione del secondo ordine con due variabili derivate seconde non puó essere trasformata nella forma a stati)
- Si usa in questi casi una variabile fittizia che sostituisce le due variabili di piú alto grado
- Questo ad esempio succede nei sistemi meccanici quando le masse non sono considerate

Esempio

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale

- Rappresentazione a stati
- Rappresentazione a stati
- Esempio
- Esercizio
- Esempio
- Esercizio
- Esercizio
- Osservazioni
- Esempio
- Esempio

Integrazione Numerica

Dato un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, lineare con coeff. costanti:

$$3\dot{y} + 2y = 5\dot{u}$$

Passo 1: mettere entrambe le derivate del primo ordine al primo membro

$$3\dot{y} - 5\dot{u} = -2y$$

Passo 2: Sostituire il primo membro con una variabile fittizia

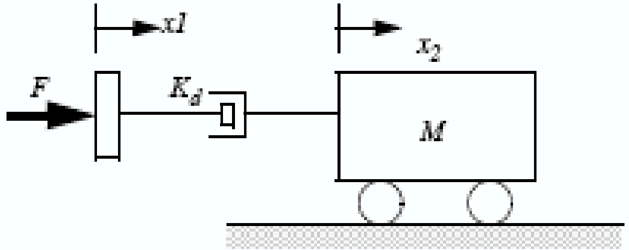
$$q = 3y - 5u \qquad \dot{q} = -2y$$

Passo 3: Risolvere l'equazione usando la variabile fittizia, quindi risolvere per y come fosse un'equazione di output

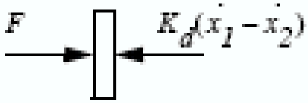
$$\dot{q} = -2y \qquad y = \frac{q + 5u}{3}$$

Esempio

In altri casi é possibile eliminare i termini ridondanti attraverso manipolazioni algebriche



The FBDs and equations are;



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = F - K_d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0$$

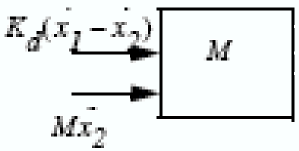
$$K_d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F \qquad (1)$$

$$q = x_1 - x_2$$

$$K_d(\dot{q}) = F$$

$$\dot{q} = \frac{F}{K_d} \qquad (2)$$

$$x_1 = x_2 + q \qquad (3)$$



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = K_d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = M\ddot{x}_2$$

$$F = M\ddot{x}_2$$

$$\dot{x}_2 = v_2 \qquad (4)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{F}{M} \qquad (5)$$

The state equations (2, 4, 5) can be put in matrix form. The output equation (2) can also be put in matrix form.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{F}{K_d} \\ 0 \\ \frac{F}{M} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale
- Rappresentazione a stati
- Rappresentazione a stati
- Esempio
- Esercizio
- Esempio
- Esercizio
- Esercizio
- Osservazioni
- Esempio
- Esempio

Integrazione Numerica

Argomenti
Osservazioni

Metodologia Generale

Integrazione Numerica
Osservazioni
Metodo di Eulero
Serie di Taylor
Integrazione di Runge-Kutta
Risposta del Sistema

Integrazione Numerica

Osservazioni

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale

Integrazione Numerica
- Osservazioni
- Metodo di Eulero
- Serie di Taylor
- Integrazione di Runge-Kutta
- Risposta del Sistema

- Calcoli iterati possono essere usati per trovare una soluzione approssimata di un sistema di equazioni differenziali
- Partendo da condizioni iniziali date, l'equazione é risolta procedendo per piccoli passi temporali (piccoli Δt).
- Piú piccoli si prendono gli intervalli di tempo maggiore sará l'accuratezza del risultato ottenuto
- Il processo di analisi segue i seguenti passi:
  - Generare l'equazione generale che modella il sistema
  - Selezionare la variabile di stato
  - Riarrangiare l'equazione nella forma a stati
  - Aggiungere equazioni se necessario per renderla risolvibile
  - Calcolare e risolvere il sistema di equazioni

  Per quest'ultimo passo di analisi diversi tool sono stati implementati per risolvere equazioni differenziali in forma di stato.

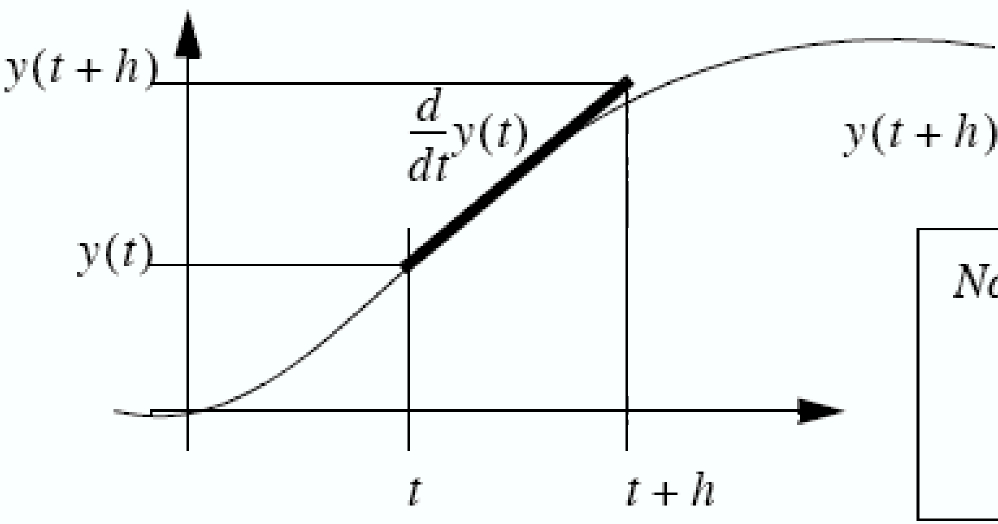
Metodo di Eulero

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale

Integrazione Numerica
- Osservazioni
- Metodo di Eulero
- Serie di Taylor
- Integrazione di Runge-Kutta
- Risposta del Sistema

- La forma piú semplice di integrazione numerica é il metodo di Eulero del primo ordine.
- Dato il valore corrente della funzione e la derivata prima, possiamo stimare il valore della funzione dopo poco tempo
- Conoscendo la posizione e la derivata prima possiamo calcolare un valore approssimativo dopo un breve tempo, $h = \Delta t$
- L'approssimazione del primo ordine deriva dall'espansione in serie di Taylor al primo ordine



$$y(t+h) \approx y(t) + h\frac{d}{dt}y(t)$$

Note: here the h value is the time step between integrations points. A smaller time step will increase the accuracy.

Serie di Taylor

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale

Integrazione Numerica
- Osservazioni
- Metodo di Eulero
- Serie di Taylor
- Integrazione di Runge-Kutta
- Risposta del Sistema

- L'integrazione numerica funziona bene con funzioni smorzate
- Quando incontriamo funzioni con andamento ondulatorio possiamo usare metodi di integrazione di ordine piú elevato come l'espansione in serie di Taylor
- I primi due termini dell'espansione in serie di Taylor sono usati nel metodo di Eulero; i termini di grado piú elevato aumentano l'accuratezza rispetto al metodo di Eulero
- L'equazione alle variabili di stato di un sistema non é adatta allo sviluppo in serie di Taylor proprio perché lo sviluppo in serie introduce termini di ordine superiore al primo.

$$x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{d}{dt}\right)x(t) + \frac{1}{2!}h^2\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x(t) + \frac{1}{3!}h^3\left(\frac{d}{dt}\right)^3 x(t) + \frac{1}{4!}h^4\left(\frac{d}{dt}\right)^4 x(t) + \dots$$

Integrazione di Runge-Kutta

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale

Integrazione Numerica
- Osservazioni
- Metodo di Eulero
- Serie di Taylor
- Integrazione di Runge-Kutta
- Risposta del Sistema

- L'integrazione del primo ordine dá una ragionevole soluzione all'equazione differenziale
- L'accuratezza puó migliorare usando derivate di ordine piú elevato, che compensano per la curvatura della funzione
- La tecnica di Runge-Kutta usa equazioni del primo ordine (e quindi si puó usare con la rappresentazione di stato) per stimare le derivate di ordine superiore.
- La tecnica permette un'elevata precisione senza richiedere eq. differenziali di ordine superiore al primo

Risposta del Sistema

- Argomenti
- Osservazioni

Metodologia Generale

Integrazione Numerica
- Osservazioni
- Metodo di Eulero
- Serie di Taylor
- Integrazione di Runge-Kutta
- Risposta del Sistema

- In molti casi il risultato di un'analisi numerica é un grafico od una tabella
- Costanti di tempo e frequenze di smorzamento possono essere ottenute con metodi di analisi sperimentale
- Per determinare la risposta a regime del sistema si pone $\dot{\vec{x}}$ a zero nell'eq. di stato e si risolve per i valori che caratterizzano la risposta a regime