Computer Science Department

University of Verona

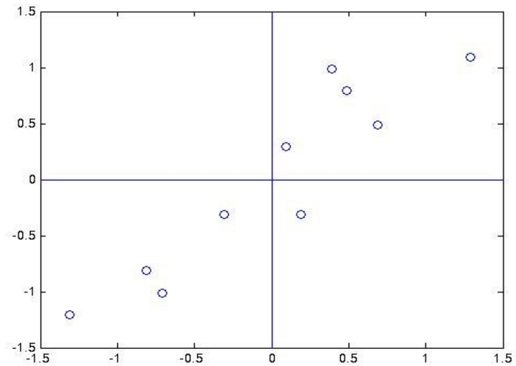
A.A. 2016-17

Pattern Recognition

Feature extraction: PCA, eigenfaces

Principal Component Analysis

- Il dato = un vettore N-dimensionale di valori di pixel
- Supponiamo N=2 → dati = punti 2D



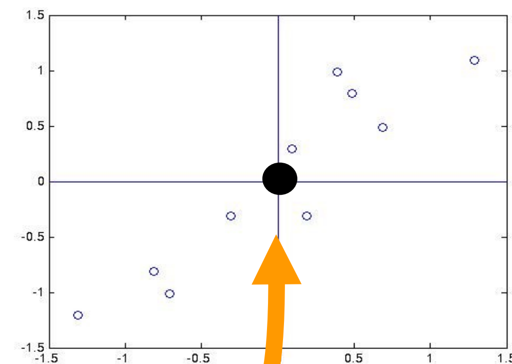
Come posso descrivere in modo compatto questi M punti?

- SOL 1: Con un punto (vettore) solo, che minimizzi la distanza media quadratica con tutti i pti

$$\underset{\mathbf{x}^{(0)}}{\operatorname{argmin}} \; J_0(\mathbf{x}^{(0)}) = \sum_{k=1}^{M} \left\| \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(k)} \right\|^2$$

- Soluzione: il vettore media

$$\mathbf{m} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{x}^{(k)}$$



Problema

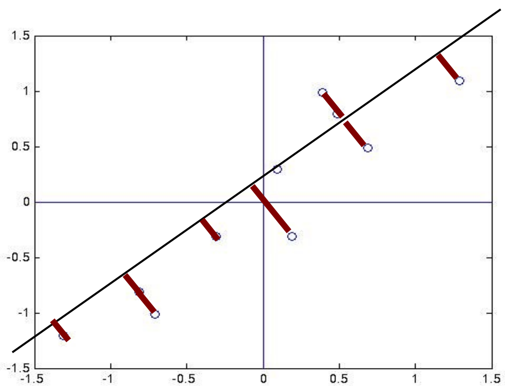
m poco espressivo!!!

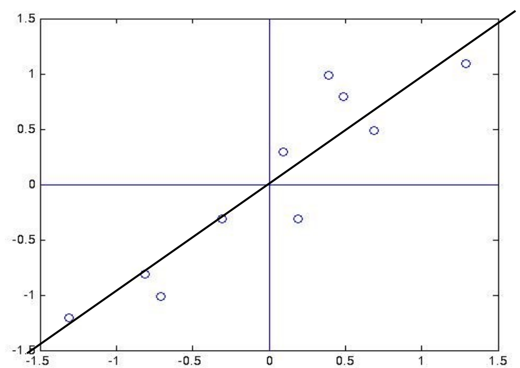
PCA

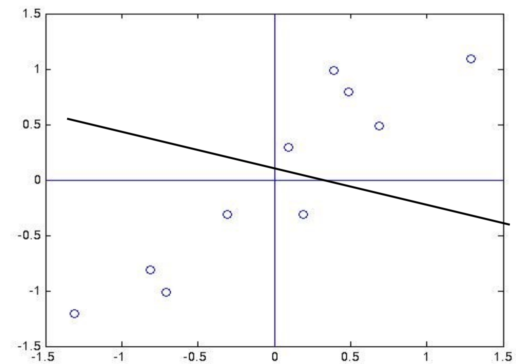
- SOL2: Con una retta di proiezione, che minimizzi la distanza media quadratica con tutti i pti

- Supp. una retta di proiezione nello spazio

Alcune vanno bene intuitivamente ... altre no.





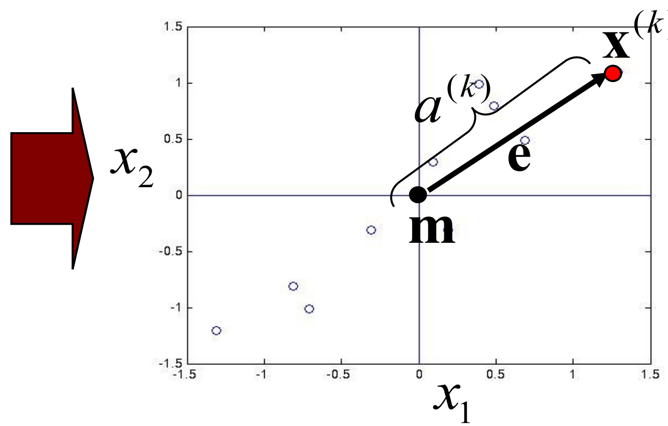


PCA

- Per convenienza, imponiamo passaggio dalla media, e specifichiamo quindi i punti della retta come

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{m} + a^{(k)}\mathbf{e}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$



- Troviamo quindi i coefficienti $\left\{a^{(k)}\right\}_{k=1\ldots M}$ ed i vettori e che minimizzano la distanza quadratica

$$\underset{\left\{a^{(k)}\right\}_{k=1\ldots M}}{\operatorname{argmin}} J_1\left(\left\{a^{(k)}\right\}_{k=1\ldots M}, \mathbf{e}\right) = \sum_{k=1}^{M} \left\| \left(\mathbf{m} + a^{(k)}\mathbf{e}\right) - \mathbf{x}^{(k)} \right\|^2$$

$$\ldots \rightarrow a^{(k)} = \mathbf{e}^T\left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{m}\right)$$

PCA

- Sostituendo $a^{(k)} = \mathbf{e}^T\left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{m}\right)$ in $J_1\left(\left\{a^{(k)}\right\}_{k=1\ldots M}, \mathbf{e}\right)$ otteniamo $J_1(\mathbf{e})$, ossia

$$J_1(\mathbf{e}) = -\mathbf{e}^T\mathbf{S}\,\mathbf{e} + \sum_{k=1}^{M}\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{m}\right\|^2$$

Scatter matrix ≈ mat. di covarianza

$$\boxed{\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{M}\left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{m}\right)\left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{m}\right)^T}$$

- Minimizzare $J_1(\mathbf{e})$ significa massimizzare $\mathbf{e}^T\mathbf{S}\,\mathbf{e}$ tenuto conto che $\|\mathbf{e}\| = 1$, via moltiplicatori di Lagrange; ossia $u = \mathbf{e}^T\mathbf{S}\mathbf{e} - \lambda\left(\mathbf{e}^T\mathbf{e} - 1\right)$

- Minimizzo;

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = 2\mathbf{S}\,\mathbf{e} - 2\lambda\mathbf{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}\,\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \quad \Rightarrow$$

A conti fatti:

1. **e** deve essere autovettore;
2. Poiché

$$\mathbf{e}^T\mathbf{S}\,\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}^T\mathbf{e} = \lambda$$

λ deve essere massimo

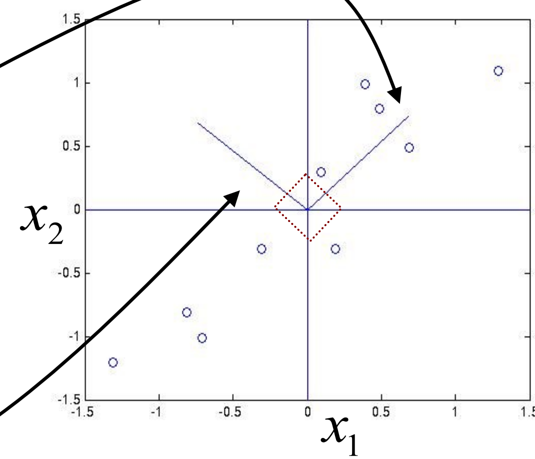
Esempio

- La matrice di covarianza è $S = \begin{bmatrix} 0.617 & 0.615 \\ 0.615 & 0.717 \end{bmatrix}$

- Ottengo 2 autovettori (e autovalori): quale prendo?

$$\mathbf{e}_{(1)} = \begin{bmatrix} -0.735 \\ 0.678 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_{(2)} = \begin{bmatrix} -0.678 \\ 0.735 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{(1)} = 0.049 \qquad \lambda_{(2)} = 1.284$$



Esempio - osservazioni

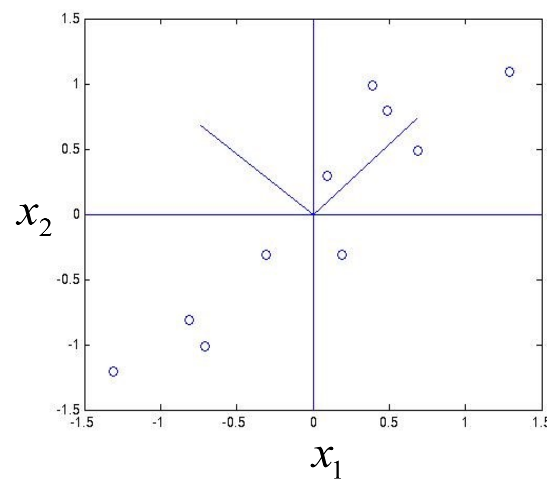
- La matrice di covarianza $S = \begin{bmatrix} 0.617 & 0.615 \\ 0.615 & 0.717 \end{bmatrix}$ è simmetrica, reale

  → gli autovettori {**e**} sono ortogonali, formanti una base per lo spazio N dimensionale

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -0.735 \\ 0.678 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -0.678 \\ 0.735 \end{bmatrix}$$

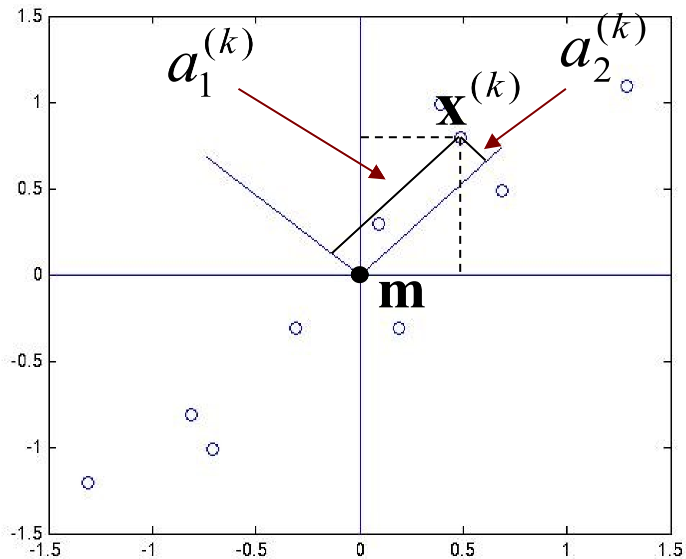
$$\lambda_1 = 0.049 \qquad \lambda_2 = 1.284$$

→ gli autovalori più grandi si hanno nelle direzioni di massima dispersione dei dati



Esempio - osservazioni

- I coefficienti $a_i^{(k)}$, per i =1,...,D, sono le componenti del punto $\mathbf{x}^{(k)}$ per la base trovata



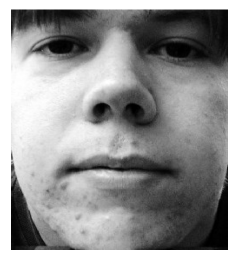
- Quindi un punto può essere scritto come $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{m} + \sum_{i=1}^{D} a_i^{(k)} \mathbf{e}_i$

Da PCA ad eigenfaces

- Dato un gruppo di punti, ho trovato la base che descrive lo scattering dei punti
- Ogni punto puo' essere mappato tramite i componenti della base (numero componenti = numero dimensioni N)
- Usare meno componenti (le componenti principali) permette di proiettare i punti in un sottospazio altamente informativo → riduzione della dimensionalità dei punti
- Ora passiamo alle facce (...punti!)→dataset di M facce, N dimensioni

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_N^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_N^{(2)} \end{bmatrix} \quad \cdots$$



$$\mathbf{x}^{(M)} = \begin{bmatrix} x_1^{(M)} \\ x_2^{(M)} \\ \vdots \\ x_N^{(M)} \end{bmatrix}$$

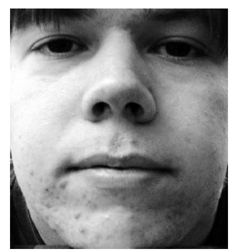
N.B.:
di solito,
M<<N

Da PCA ad eigenfaces (2)

- Preprocessing -
  - Le immagini devono contenere esclusivamente facce (no outliers)
  - Le immagini devono essere ragionevolmente prive di rumore
  - Le facce devono avere la stessa dimensione→ riscalamento
  - Stesse condizioni di illuminazione, o compensazione
  - Non ci deve essere sfondo→ritaglia le facce, catturale su sfondo neutro (alternativa: background subtraction)
  - In maniera automatica, utilizzo di un metodo di face detection
  - La posa dei volti deve essere il piu' possibile simile (no fronte e profilo assieme)

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_N^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_N^{(2)} \end{bmatrix} \quad \cdots$$



$$\mathbf{x}^{(M)} = \begin{bmatrix} x_1^{(M)} \\ x_2^{(M)} \\ \vdots \\ x_N^{(M)} \end{bmatrix}$$

Eigenfaces - proiezioni

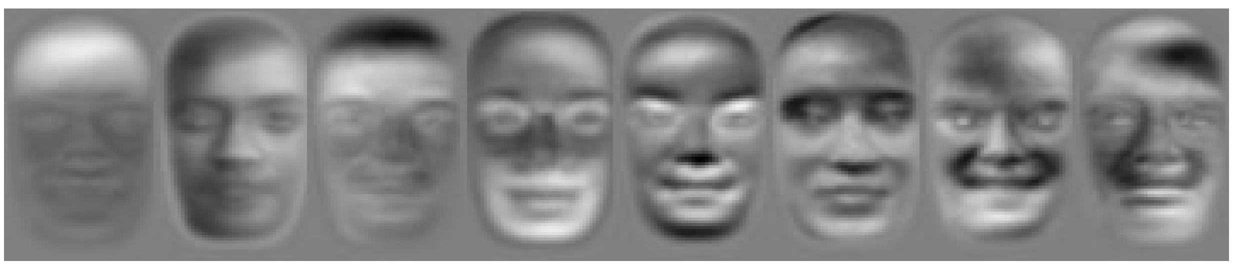
- Dopo aver ricavato gli autovettori {**e**} (eigenfaces) dalla matrice di covarianza S, calcolo le componenti {a} (o proiezione) per la faccia **x**

$$\langle \underbrace{\mathbf{e}'_1(\mathbf{x}-\mathbf{m})}_{a_1}, \underbrace{\mathbf{e}'_2(\mathbf{x}-\mathbf{m})}_{a_2}, \ldots, \underbrace{\mathbf{e}'_N(\mathbf{x}-\mathbf{m})}_{a_N} \rangle$$ ed ho $$\mathbf{x} = \mathbf{m} + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 +,\ldots,+ a_N\mathbf{e}_N$$

- Le ricostruzioni, **g**, possono avvenire anche nei sottospazi descritti dalle eigenfaces con eigenvalues più grandi – riduzione dimensionalità

x

→

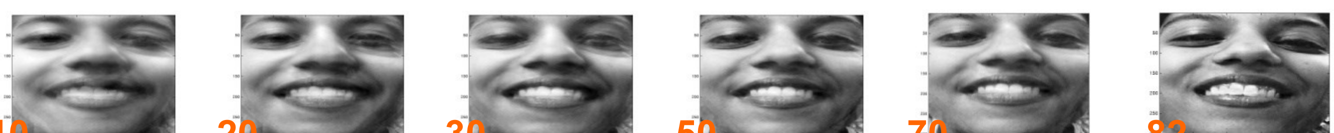


m + $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4 + a_5\mathbf{e}_5 + a_6\mathbf{e}_6 + a_7\mathbf{e}_7 + a_8\mathbf{e}_8$ $\ldots + a_N\mathbf{e}_N$

$\mathbf{g} \approx \mathbf{x}$

$\mathbf{x}$

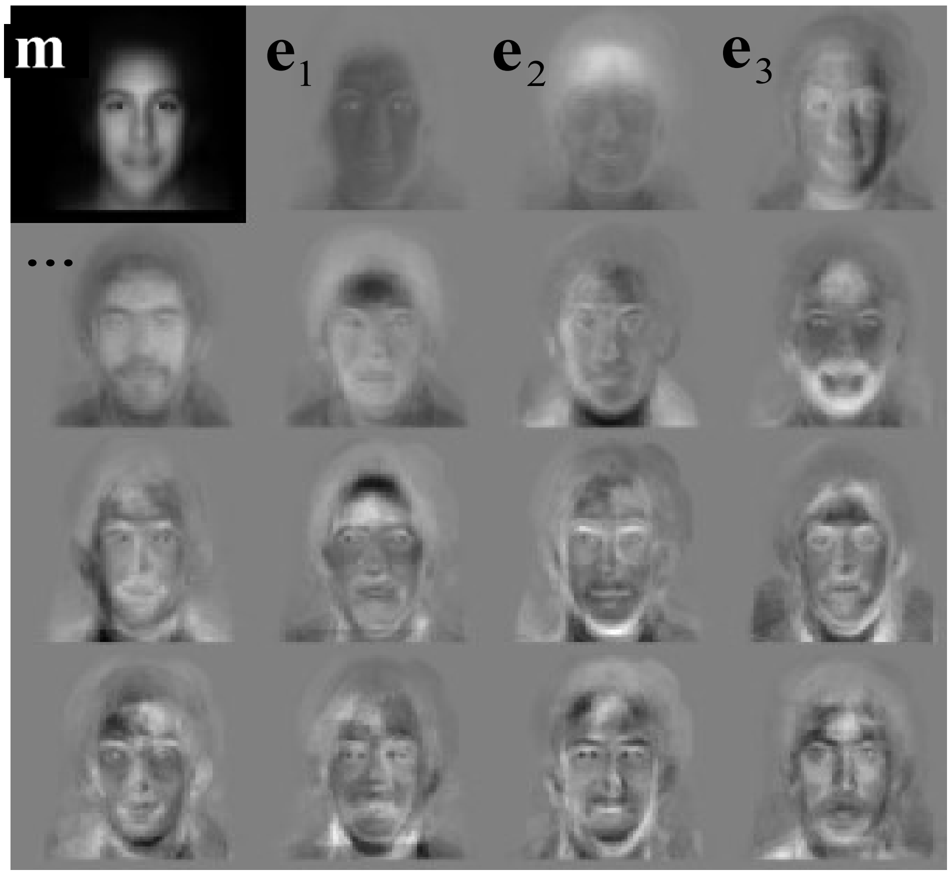
n. coeff.



10 20 30 50 70 82

Eigenfaces

- Autovettori {**e**} (eigenfaces): in pratica?



Eigenfaces - problema

- Sia $\underset{N \times M}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(M)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^{(1)} & x_N^{(2)} & \dots & x_N^{(M)} \end{bmatrix}$ pertanto $\underset{N \times N}{\mathbf{S}} = \mathbf{AA'}$

- Con un'img 256 x 256 ho $\underset{65536 \times 65536}{\mathbf{S}}$: problemi di overflow!

- Trick: calcolo gli autovettori di $\underset{M \times M}{\mathbf{A'A}}$, ossia $\{\tilde{\mathbf{e}}\}$, tenuto conto che di solito si usano 20-30 eigenfaces e che

$$\mathbf{A'A}\tilde{\mathbf{e}} = \lambda \tilde{\mathbf{e}} \rightarrow \mathbf{AA'A}\tilde{\mathbf{e}} = \lambda \mathbf{A}\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\rightarrow \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{e}} = \lambda \mathbf{A}\tilde{\mathbf{e}}$$ quindi $$\mathbf{e} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{e}}$$

Eigenfaces - note

- Gli M autovalori di **A'A** corrispondono agli M autovalori più grandi di **S** (così come i corrispondenti autovettori)

Eigenfaces - algoritmo

1. Sottraggo ad ogni immagine $\mathbf{x}^{(k)}$,k=1...M, la media $\mathbf{m} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\mathbf{x}^{(k)}$ ottenendo i vettori $\left\{\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}\right\}$ da cui costruisco la matrice $\underset{N \times M}{\mathbf{A}}$
2. Calcolo M autovettori $\left\{\tilde{\mathbf{e}}_i\right\}_{i=1,\ldots,M}$ di $\underset{M \times M}{\mathbf{A}'\mathbf{A}}$ formando la matrice $\underset{M \times M}{\mathbf{V}}$
3. Ricavo gli M autovettori più grandi di **S** = **AA'**, ossia $\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{e}}_i$

   o in forma matriciale $\underset{N\times M}{\mathbf{U}} = \underset{N\times M}{\mathbf{A}}\ \underset{M\times M}{\mathbf{V}}$
4. Ricavo i corrispondenti componenti (o coeff. di proiezione)

$$a_i^{(k)} = \mathbf{e}'_i\left(\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}\right)$$

   o in forma matriciale

$$\underset{M\times 1}{\boldsymbol{\omega}}^{(k)} = \underset{M\times N}{\mathbf{U}}'\left(\underset{N\times 1}{\tilde{\mathbf{x}}}^{(k)}\right)$$

Proprietà chiave della rappresentazione ad eigenfaces

Date

- 2 immagini $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ usate per costruire l'eigenspace
- $\boldsymbol{\omega}_1$ è la proiezione nell'eigenspace dell'img $\mathbf{x}_1$
- $\boldsymbol{\omega}_2$ è la proiezione nell'eigenspace dell'img $\mathbf{x}_2$

allora,

$$\boxed{\| \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 \| \approx \| \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \|}$$

ossia, la distanza nell'eigenspace è approssimativamente uguale alla distanza tra due immagini.

Riconoscimento con le eigenfaces

TRAINING

1. Analizza il database d'immagini etichettato (<volti,identità>)

   a) Esegui PCA — calcola le eigenfaces, formo **U**
   b) Calcola i K coefficienti per ogni immagine $\mathbf{x}^{(k)}$ k=1,...,M
   c) Calcola le M proiezioni nello spazio delle eigenfaces $\omega^{(k)}$ k=1,...,M
   d) Calcolo la soglia

$$\theta = \max\left\{ \left\| \boldsymbol{\omega}^{(j)} - \boldsymbol{\omega}^{(k)} \right\| \right\} \text{per } j,k = 1,\ldots,M$$

RICONOSCIMENTO

2. Data una nuova img (da riconoscere) **x**,
   a) Ne sottraggo la media del dataset di training **m**, ottengo $\tilde{\mathbf{x}}$
   b) Proietto, ossia calcolo le K componenti

$$\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \left[a_1, a_2, \ldots, a_K\right]' \qquad \text{ossia} \qquad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{U}'\,\tilde{\mathbf{x}}$$

   c) Calcolo il set di distanze

$$\left(\varepsilon^{(k)}\right)^2 = \left\| \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^{(k)} \right\|^2 \text{ per } k = 1,\ldots,M$$

RICONOSCIMENTO

Riconoscimento con le eigenfaces

3. Ricostruisco la faccia usando eigenfaces e componenti

$$\tilde{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{K} a_i \mathbf{e}_i \quad \text{oppure} \quad \tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{U}\boldsymbol{\omega}$$

4. Calcolo la distanza tra la faccia di partenza incognita e la ricostruzione

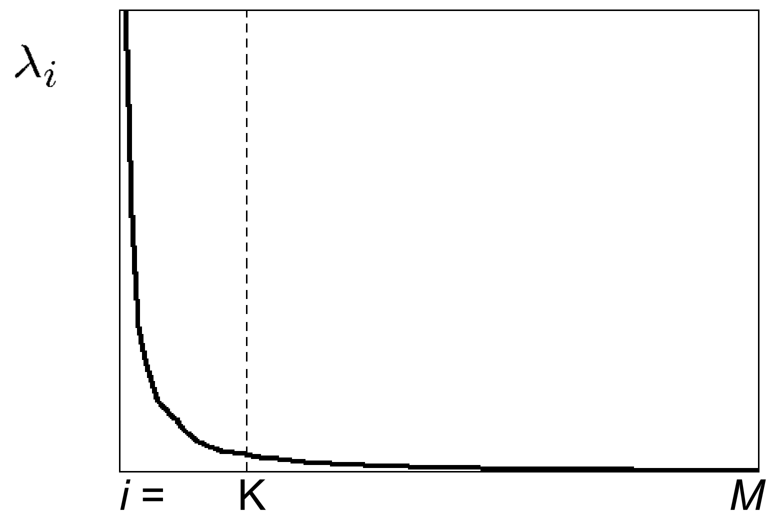
$$\xi^2 = \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{x}} \right\|^2$$

5. Se
   - $\xi \geq \theta$ non è una faccia
   - $\xi < \theta \text{ e } \varepsilon^{(\mathrm{k})} \geq \theta, (\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{M})$ è una nuova faccia
   - $\xi < \theta \text{ e } \min \left\{ \varepsilon^{(k)} \right\} < \theta$ è una faccia conosciuta, la k_{best}-esima, dove

$$k_{\mathrm{best}} = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \varepsilon^{(k)} \right\}$$

Dettagli pratici

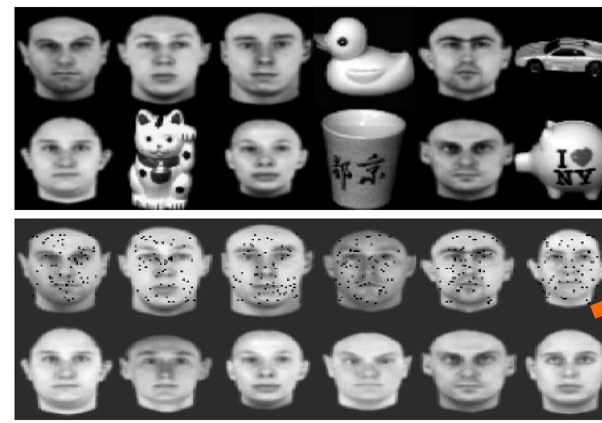
- Quanti eigenvector usare?
- Controlla il decadimento degli eigenvalues $\{\lambda_i\}$
- Dati "buoni" ossia trattabili hanno poche dimensioni ad alta varianza
- Nel caso in cui tutti gli N autovalori sono stati calcolati per un dataset N-dimensionale vale

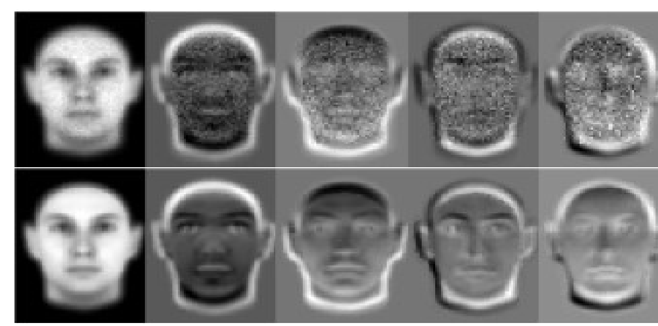


$$\sigma_{\text{covered}} = \frac{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i}{\sum_{j=1}^{N} \lambda_j}$$

Problemi eigenfaces

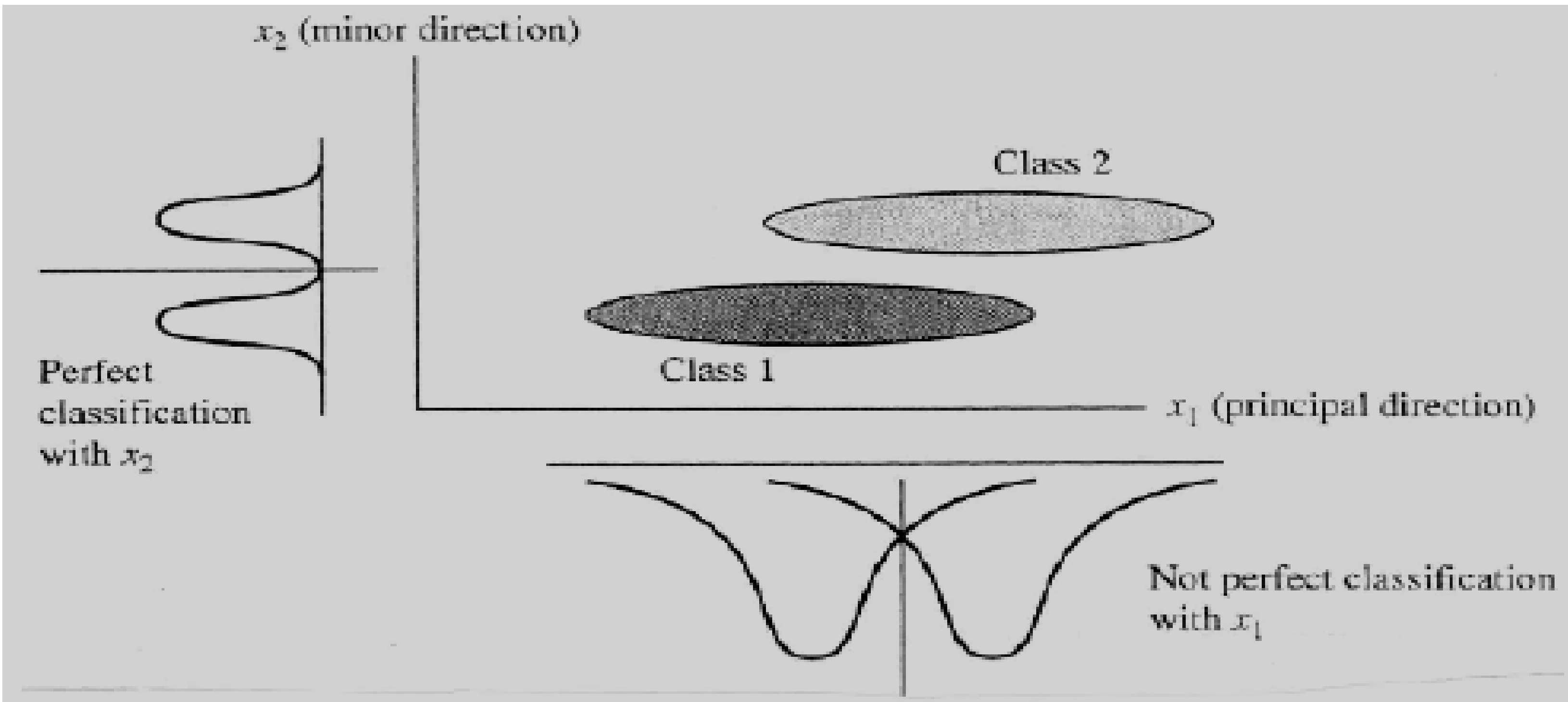
- Illuminazione: stessi soggetti con differente illuminazione risultano lontani nello spazio delle eigenfaces
- Pose differenti :le componenti di un volto frontale non servono per un riconoscimento con profili
- Allineamento differente
- Espressione facciale differente
- Outlier
  - Sample outliers = non facce
  - Intra-sample outliers = facce affette da rumore





Problemi eigenfaces (2)

- Funzionale solo per la rappresentazione di dati appartenenti ad un'unica classe
- Non separano classi differenti



Riferimenti su libro

- PCA capitolo Duda 3.8.1
- Materiale di approfondimento (paper eigenfaces VS fisherfaces)
- Per linear discriminant analysis, 3.8.2, 3.8.3