

**Qualche esercizio di Analisi funzionale**

**A.A. 2011/12, Marco Squassina - Foglio N.2 / Spazi normati e operatori**

**Problema 1.** Verificare che

$$(Tu)(t) := \frac{tu(t)}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

definisce un operatore lineare e continuo  $T: L^2(\mathbb{R}^+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+)$ . Si stimi la norma di  $T$ .

**Problema 2.**  $T$  nel problema 1 risulta iniettiva?

**Problema 3.**  $T$  nel problema 1 risulta suriettiva?

**Problema 4.** Sia  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua tale che  $f(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Provare che se  $f \in L^1(0, +\infty)$ , allora  $f \in L^p(0, +\infty)$ , per ogni  $p > 1$ .

**Problema 5.** Provare che l'insieme

$$C = \left\{ u \in L^2(0, 1) : \int_0^1 u(t) dt = 1 \right\}$$

risulta chiuso e convesso in  $L^2(0, 1)$ . Si verifichi che la proiezione  $w$  di 0 su  $C$  soddisfa

$$\forall m \geq 1: \quad \int_0^1 w^2(t) dt \leq (m+1) \int_0^1 t^m w(t) dt.$$

Verona, 15 novembre 2011