ELEMENTI DI GEOMETRIA — Lezione I

Prof. M. Spera, a.a. 2007 - 2008

Prologo

- Gli assiomi della geometria euclidea nel piano

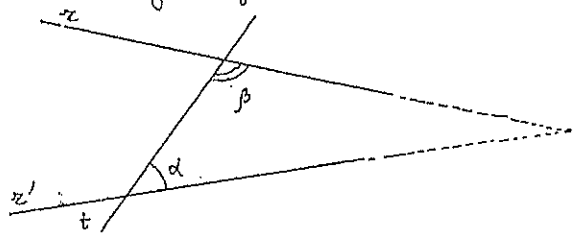
I. "Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad un altro punto."

II. "E che una retta terminata [segmento] si possa prolungare continuamente in linea retta."

III. "E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza [raggio]."

IV. "E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro."

V. "E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui gli angoli sono minori di due retti."



- Commenti

1. Agli assiomi dovrebbero aggiunti altri "nascosti", come quelli relativi all'ordine e alla continuità, che vengono utilizzati implicitamente.
   Un sistema di assiomi completo e più preciso è stato fornito da Hilbert (Grundlagen der Geometrie, 1899). Non è però necessario insistere ulteriormente da parte nostra in tale direzione, in vista di una ricostruzione completa su nuove basi.

2. È però chiaro che gli assiomi di Euclide abbiano una grande evidenza intuitiva (tranne l'ultimo, e sono noti gli sforzi protratisi per secoli volti a dedurlo dagli altri, il fallimento dei quali ha portato alla nascita delle cosiddette geometrie non euclidee) e idealizzino le operazioni del disegno.

3. In geometria euclidea, come apparirà chiaro dagli esempi seguenti, i teoremi sono espressi essenzialmente sotto forma di problemi di costruzione.
   L'effettiva costruzione di una figura, accompagnata dalla giustificazione razionale (a partire dagli assiomi, o da teoremi precedenti, che comunque a questi risalgono) è detta sintesi.
   L'analisi, per contro, è il procedimento, di enorme valore euristico, di assumere già costruita la figura e di dedurne da ciò delle proprietà che poi ne consentano l'effettiva costruzione. Nei classici trattati greci è quasi sempre assente, ma il suo ruolo insostituibile traspare comunque.
   Questa distinzione getta luce sull'origine dei termini geometria sintetica (riferito appunto alla geometria classica) e geometria analitica (ovvero, tramite l'uso delle "coordinate").
   In termini moderni, lo studio algebrico consente di ripristinare la sintesi classica. Ma su questo torneremo in seguito.

4. La matematica moderna ha carattere ipotetico-deduttivo. In una data teoria, gli assiomi descrivono implicitamente i suoi concetti primitivi (non necessariamente agganciati all'intuizione) e stabiliscono le "regole del gioco":

un teorema della teoria è una qualsiasi asserzione che possa essere dedotta logicamente dagli assiomi.

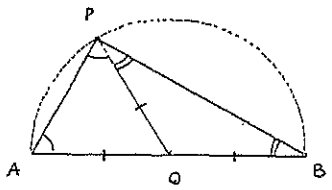
Non ha senso parlare di "verità" degli assiomi in senso assoluto, ma solo di consistenza di questi (raggiunta esibendo un modello in un'altra teoria, in cui gli assiomi divengano affermazioni vere.

5. L'intuizione gioca comunque un ruolo fondamentale nella creazione matematica: non è un caso che Hilbert abbia anche scritto il bellissimo "Anschauliche Geometrie" (geometria intuitiva), quasi a ricordarci che in ogni caso la matematica non si riduce ad un vuoto formalismo senza "contenuti".

4. Alcuni problemi di costruzione.

- Ogni angolo che insista su una semicirconferenza è retto

Con riferimento alla figura accanto, da $\overline{OA} = \overline{OP} = \overline{OB}$ segue subito



$\hat{A} = A\hat{P}O$, $\hat{B} = O\hat{P}B$. Ma, da $\hat{A} + \hat{P} + \hat{B} = 2$ retti (*)

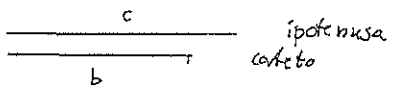
segue che $2\hat{P} = 2$ retti, cioè $\hat{P}$ è retto □

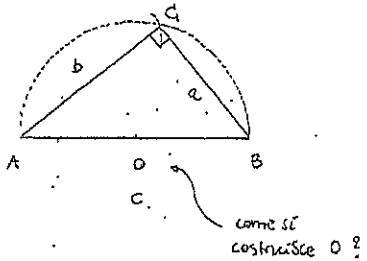
(*) Dimostrarlo..

Possiamo ora risolvere facilmente il seguente

Problema: costruire un triangolo rettangolo, dati l'ipotenusa e un cateto

Soluzione:





Quali assiomi sono stati utilizzati nel corso di questa dimostrazione?

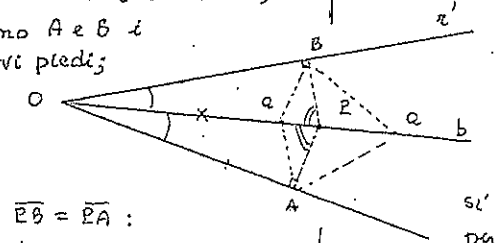
Sia $\overline{AB} = c$. Si consideri la circonferenza di diametro $\overline{AB}$, sia O il suo centro. Si costruisca la circonferenza di centro A e raggio b. Essa incontra la prima in due punti (in figura se ne mostra solo uno, C). ABC è un triangolo rettangolo, in base al teorema precedente.

- Costruzione della bisettrice di un angolo dato

Procediamo in due passi:

* Analisi Immaginiamola già costruita (si veda la figura)

Se da P su b tracciamo le perpendicolari a r e r' (*) e siano A e B i rispettivi piedi;



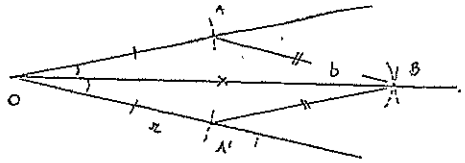
si ha $\overline{PB} = \overline{PA}$: infatti i triangoli OAP e OBP hanno in comune il lato OP e $P\hat{O}B = P\hat{O}A$ e $O\hat{B}P = O\hat{A}P$ è retto, e pertanto risultano congruenti in base al 2° criterio di uguaglianza dei triangoli, da cui appunto $\overline{PB} = \overline{PA}$ e anche $\overline{OB} = \overline{OA}$; si osservi pure che $\overline{QB} = \overline{QA}$ per qualsiasi $Q \in b$.

Pertanto b, se esiste (nel senso che è possibile costruirla), è il luogo dei punti equidistanti da r e r'

(*) Se ne fornisca una costruzione, per esercizio

ciò suggerisce un metodo di costruzione (sintesi)

* Sintesi

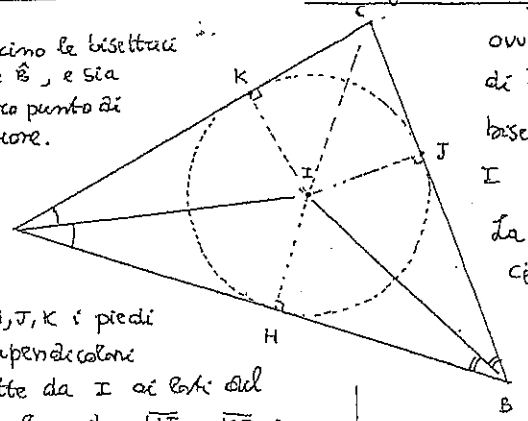


algoritmo: Con centro in O e raggio arbitrario (=: r) si tracci l'arco $\widehat{AA'}$. Si traccino due circonferenze di centri A e A' e raggio uguale opportuno (per esempio = r) che si intersechino in B. La retta b=OB è la bisettrice richiesta.

giustificazione: Infatti i triangoli OAB e OA'B hanno, per costruzione, uguali i tre lati e pertanto sono congruenti (3° criterio). In particolare si ha $A\hat{O}B = A'\hat{O}B$, ovvero b è la bisettrice cercata.

• Problema: inscrivere una circonferenza in un triangolo dato.

Sol.
Si traccino le bisettrici di $\hat{A}$ e $\hat{B}$, e sia I il loro punto di intersezione.



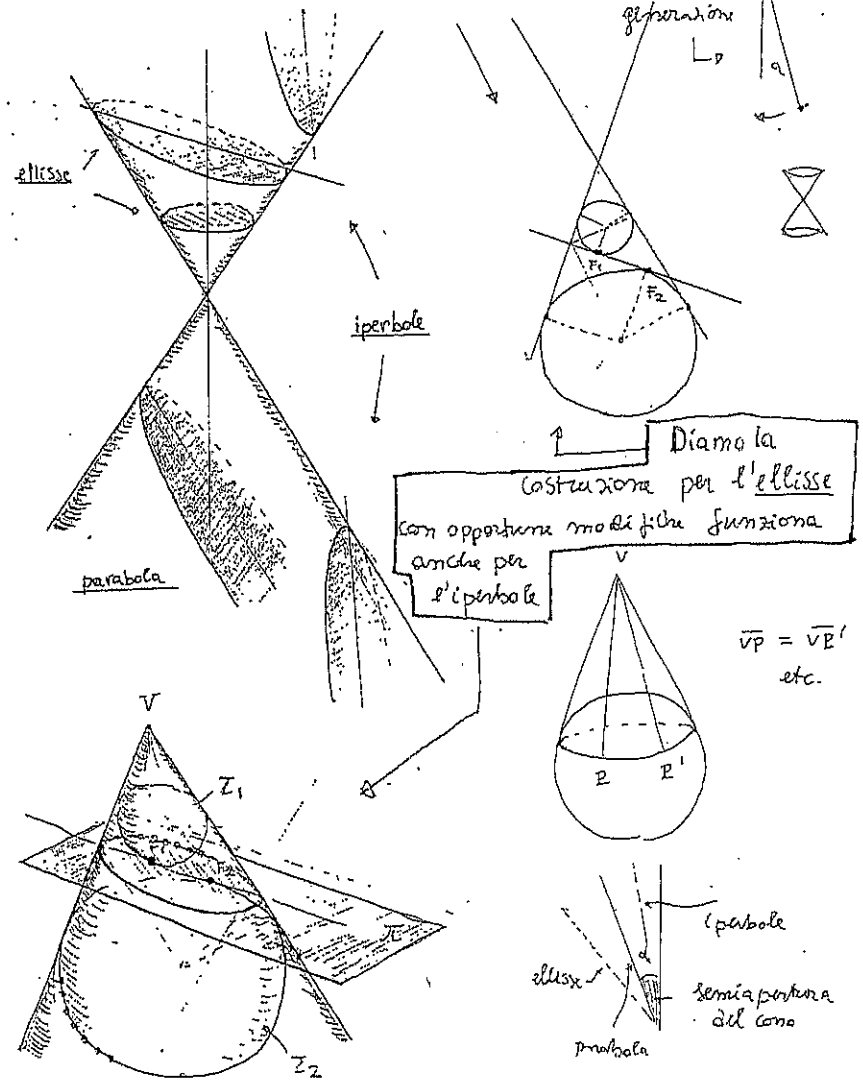
ovvero CI è la bisettrice di $\hat{C}$; pertanto le tre bisettrici si incontrano in I (incentro del triangolo).

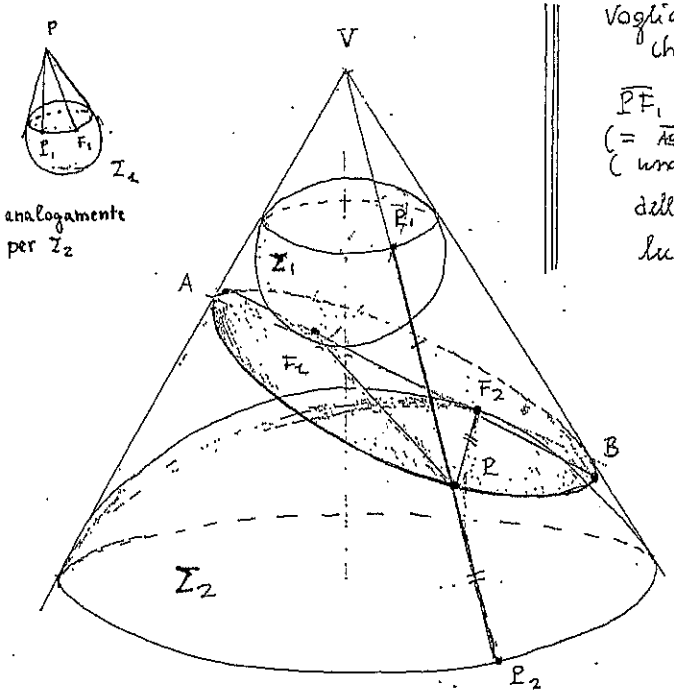
La circonferenza di centro I e raggio $r = \overline{KI} = \overline{KI} = \overline{JI}$ è quella richiesta.

Siano H, J, K i piedi delle perpendicolari condotte da I ai lati del triangolo; da $\overline{HI} = \overline{KI}$ e $\overline{HI} = \overline{IJ}$ segue $\overline{KI} = \overline{IJ}$,

Le (sezioni) coniche
(Apollonio, III° sec. a.C.)

* La costruzione di Dandelin

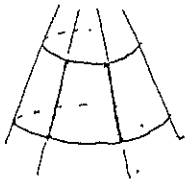




Vogliamo provare che

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} =$ costante $(= \overline{AB})$

(una delle definizioni dell'ellisse come luogo di punti)



Con riferimento alla figura, si consideri la generatrice PV (P arbitrario, sulla sezione); essa determina i punti P_1 e P_2 sulle sfere inscritte Σ_1 e Σ_2, rispettivamente (v. figura in alto a sinistra)

Da $\overline{PP_1} = \overline{F_1P}$, $\overline{PP_2} = \overline{F_2P}$ si ha subito

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PP_1} + \overline{PP_2} = \overline{P_1P_2}$, che non dipende da P, da cui l'asserto. È chiaro che tale somma è uguale ad $\overline{AB}$ * (lunghezza dell'asse maggiore)

(*) lo si dimostri: v. oltre

Verifichiamo in dettaglio che

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{AB}.$$

Da $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} =$ costante segue, ponendo successivamente $P = A$ e $P = B$ (v. figura)

$$\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BF_2}$$

$$\parallel$$

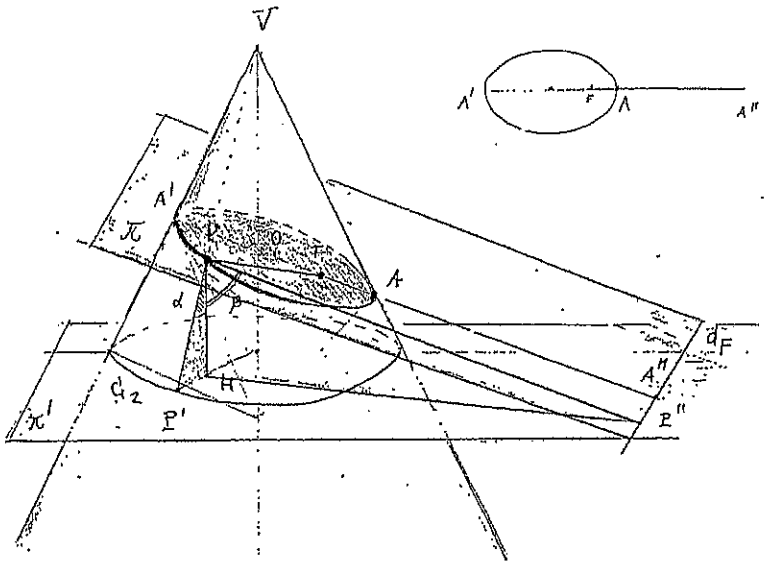
$$2\overline{AF_1} + \overline{F_1F_2} = 2\overline{BF_2} + \overline{F_1F_2}$$

$$\Downarrow$$

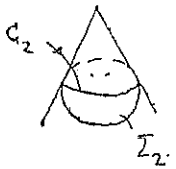
$$\overline{AF_1} = \overline{BF_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{AF_1} + \overline{F_1F_2} + \overline{BF_2} = \overline{AB} \quad \square$$



Altra definizione della conica: come luogo di punti (P; (di un piano) tali che il rapporto delle loro distanze da un punto fisso F e da una retta fissa d. (direttrice) sia costante (= e eccentricità). Con riferimento alla figura, verifichiamo, tramite la costruzione di Dandelin, che $d = d_F$, intersezione del piano secante π col piano π' della circonferenza C_2 contenuta nella sfera Σ_2 tangente al cono.



Si ha

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PP''}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{PP''}} = \frac{\overline{PH}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}}{\overline{PH}\cdot\frac{1}{\cos\beta}} = \frac{\cos\beta}{\underbrace{\cos\alpha}_{\neq 0}}$$

Ma α e β non dipendono da P, da cui l'asserto. Posto

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \quad \text{è} \quad e \geq 0$$

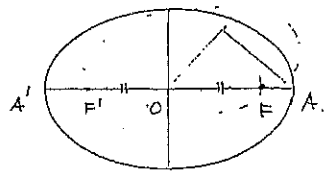
$e = 0$	circonferenza	$(\pi \parallel \pi')$
$0 \leq e < 1$	ellisse	
$e = 1$	parabola	
$e > 1$	iperbole	

Si osservi che (con riferimento alla figura precedente e a quella qui in basso)

$$e = \frac{\overline{AF}}{\overline{AA''}} = \frac{\overline{A'F}}{\overline{A'A''}} = \frac{\overline{A'F} - \overline{AF}}{\overline{A'A''} - \overline{AA''}} = \frac{2\,\overline{OF}}{2\,\overline{OA}} =$$

$$= \frac{\overline{OF}}{\overline{OA}}$$

(in accordo con la geometria analitica: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$)



Pag. Nel calcolo di e si è fatto uso delle proprietà delle proporzioni seguenti

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (b,\ d \neq 0)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}$$

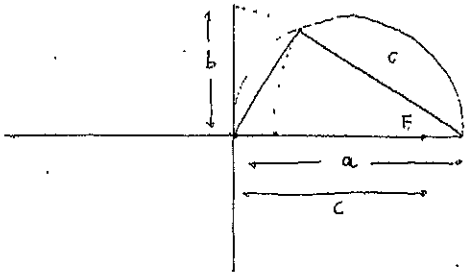
di verifica diretta

$$(a \pm c)\, b = ab \pm cb = ab \pm ad = a(b \pm d)$$

e note dalle scuole medie inferiori

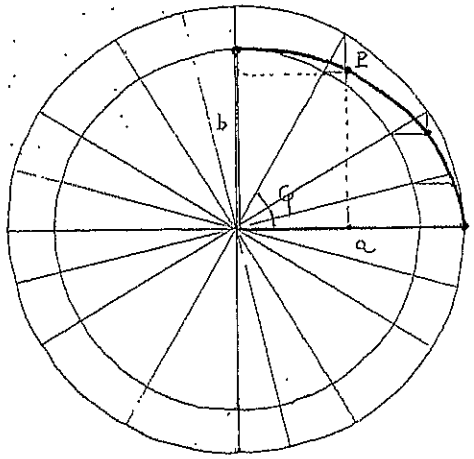
— · — · —

- Costruzione geometrica della semidistanza focale c di un'ellisse, dati i semiassi a e b ($a > b$)



- Una costruzione dell'ellisse

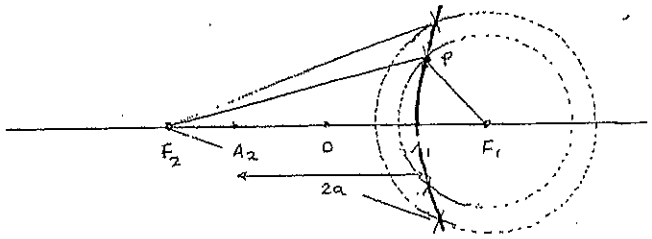
$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi) \right)$$

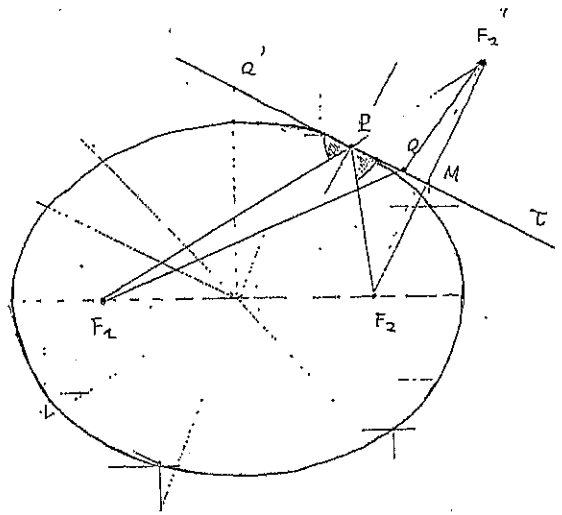


- Una costruzione dell'iperbole (un ramo)

$$\left(\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \text{costante} = 2a \right.$$

$$\overline{PF_2} = \overline{PF_1} + 2a$$





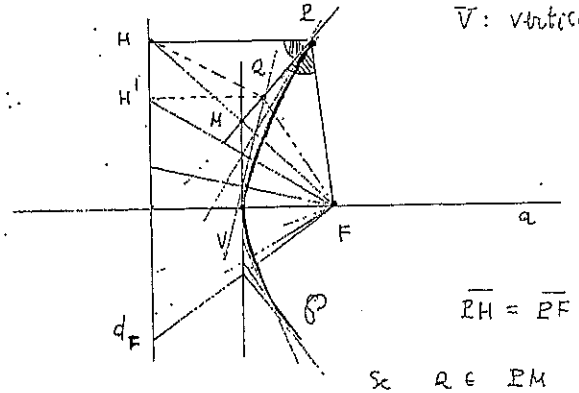
Teorema

◈ I raggi focali passanti per un punto di una conica sono bisecati dalla tangente e dalla normale in tale punto.

Dimostriamolo per l'ellisse. Sia preso F_2' sul prolungamento di F_1P tale che $\overline{PF_2'} = \overline{PF_2}$, sicché $\overline{F_1F_2'} = 2a$. Si consideri la bisettrice PM di $F_2\hat{P}F_2'$. Se $Q \in PM$ e $Q \neq P$, è $\overline{F_1Q} + \overline{QF_2'} > \overline{F_1F_2'} = 2a$ e pertanto non è sull'ellisse; dunque PM ha in comune con l'ellisse solamente P e pertanto è tangente ad essa in P.
Per l'iperbole il ragionamento è simile.

Riguardo alla parabola, uno dei raggi focali va inteso come la retta per P parallela all'asse ($\equiv$ la perpendicolare a d_F passante per F)

V: vertice di $\mathcal{P}$.

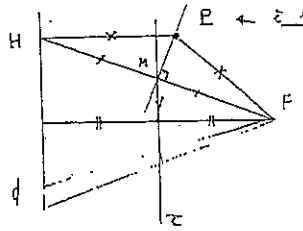


$\overline{PH} = \overline{PF}$

Se $Q \in PM$ (bisettrice di $H\hat{P}F$)

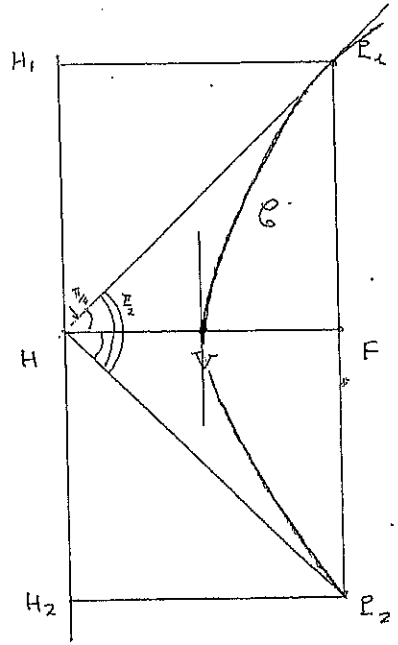
è subito $\overline{QF} = \overline{QH} > \overline{QH'} =$ distanza (Q, d_F) e pertanto Q non è sulla parabola, che ha in comune con PM, pertanto, solo P.

Si noti come tale proprietà suggerisca una semplice costruzione grafica della parabola, dati F e d, come inviluppo delle sue tangenti



← è sulla parabola
e PM è tangente ad essa in P

Si noti, in particolare, la seguente configurazione



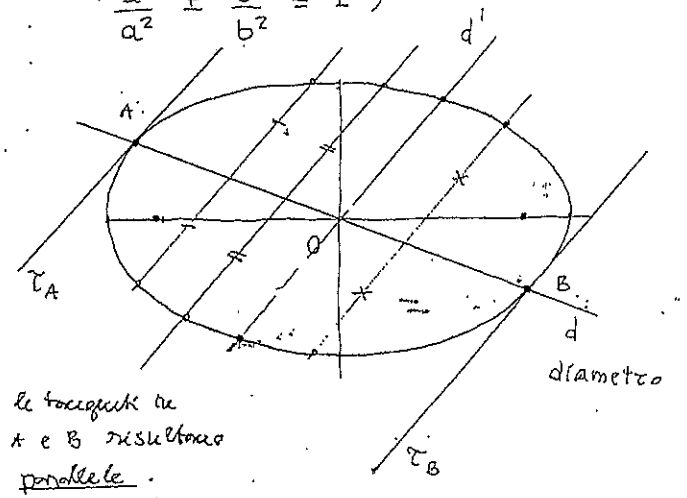
che agevola il tracciamento rapido della curva

Ulteriori proprietà delle coniche

(che verranno dimostrate in seguito)
(è possibile anche una dim. elementare)

coniche "a centro" (ellisse e iperbole)

(ci si riferisca alle loro equazioni canoniche $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$)



* le tangenti in A e B risultano parallele.
La retta d' per O avente la stessa direzione è detta diametro coniugato a d.

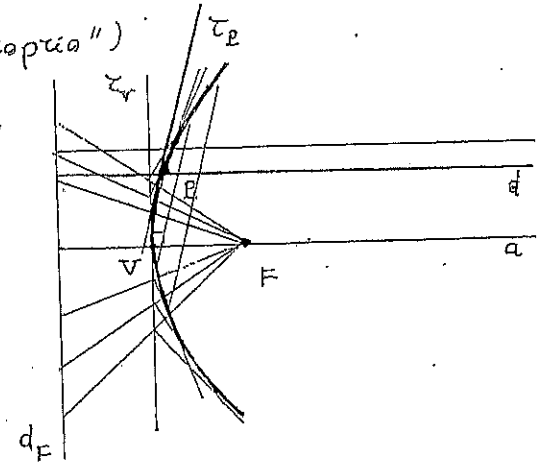
* d biseca le corde parallele a d'

Gli assi sono gli unici diametri coniugati perpendicolari tra loro.

(A, d, τ_A) è detto sistema di riferimento apolloniano

A: punto della conica; d: diametro; τ_A: tangente alla conica in A

In tale sistema di riferimento sussiste anche per la parabola (che non ha centro "proprio")



Qui i diametri sono tutti paralleli

La direzione "coniugata" a d è quella di τ_P ∴ l'asse della parabola a è l'unico diametro tale che la tangente τ_V in V (punto di incontro di a e della parabola) sia perpendicolare ad esso. τ_V risulta parallela alla direttrice d_F.

Anche qui le corde parallele a τ_P sono bisecate da d (diametro per P).

Inciso

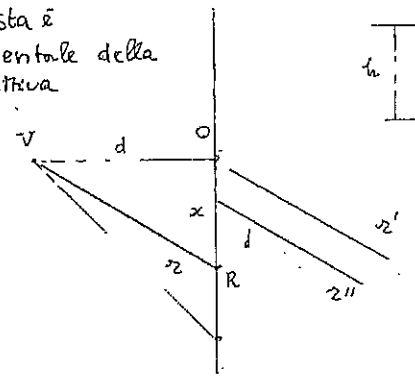
* Cenni sulla prospettiva

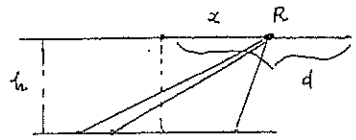
Nelle pagine successive sono illustrati vari esempi delle classiche costruzioni prospettiche (Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Guidobaldo del Monte, cf. anche l'"Ottica" di Euclide) atte a ricostruire razionalmente la nostra effettiva percezione dello spazio (prospettiva lineare, o conica).

Ciò che vediamo appare su un quadro su cui è tracciato, all'altezza dell'occhio dell'osservatore (visione monoculare), l'orizzonte.

I punti di quest'ultima retta sono in corrispondenza biunivoca con le direzioni delle rette del geometrale (terra) non parallele al quadro

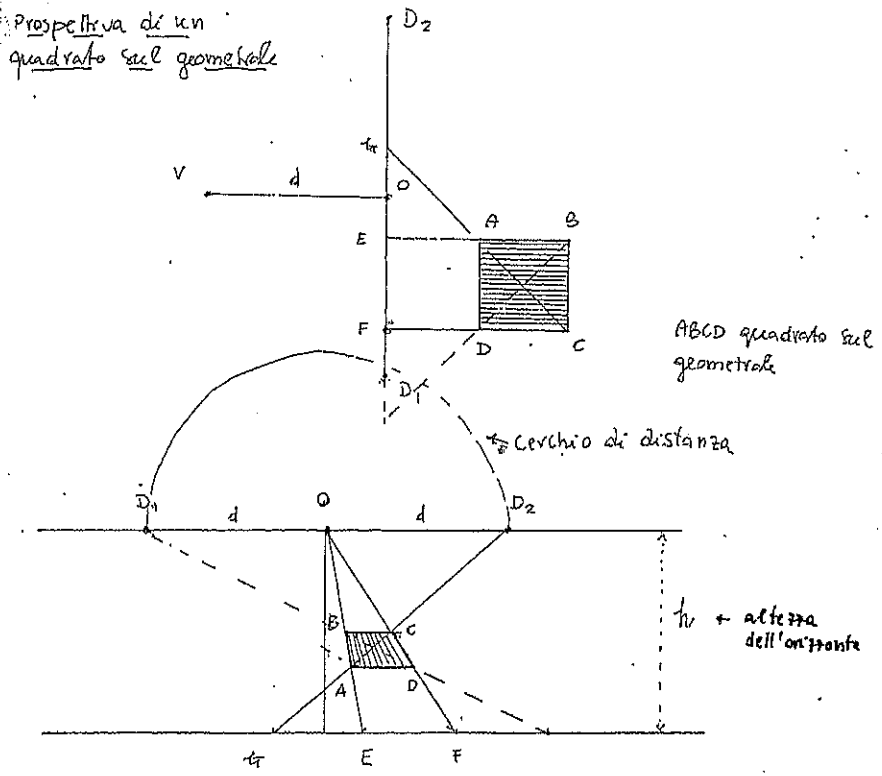
In luce, questa è l'idea fondamentale della geometria proiettiva (Desargues, Pascal, Poncelet ...)





R: pto di fuga relativo alla direzione di r

Prospettiva di un quadrato sul geometrale



prospettiva (con l'uso dei punti di distanza.. (*) ne basta uno..)

(*)

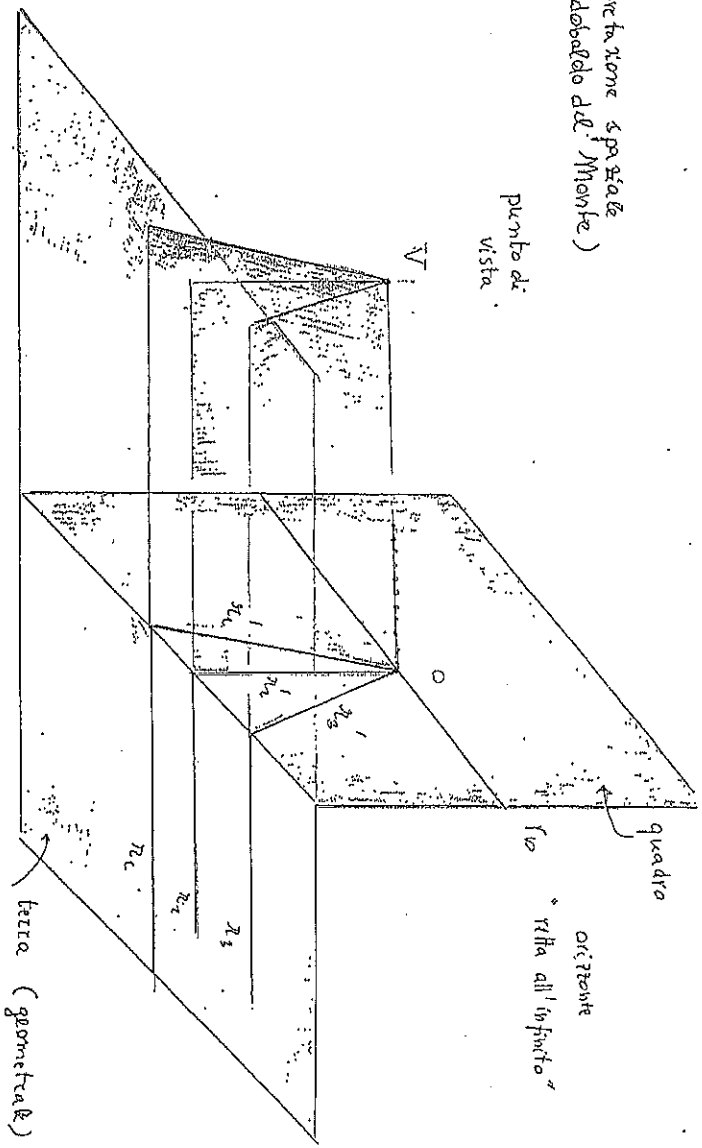
D_1, D_2 : punti di distanza e pti di fuga delle rette inclinate di $\frac{\pi}{4}$ rispetto al quadro.

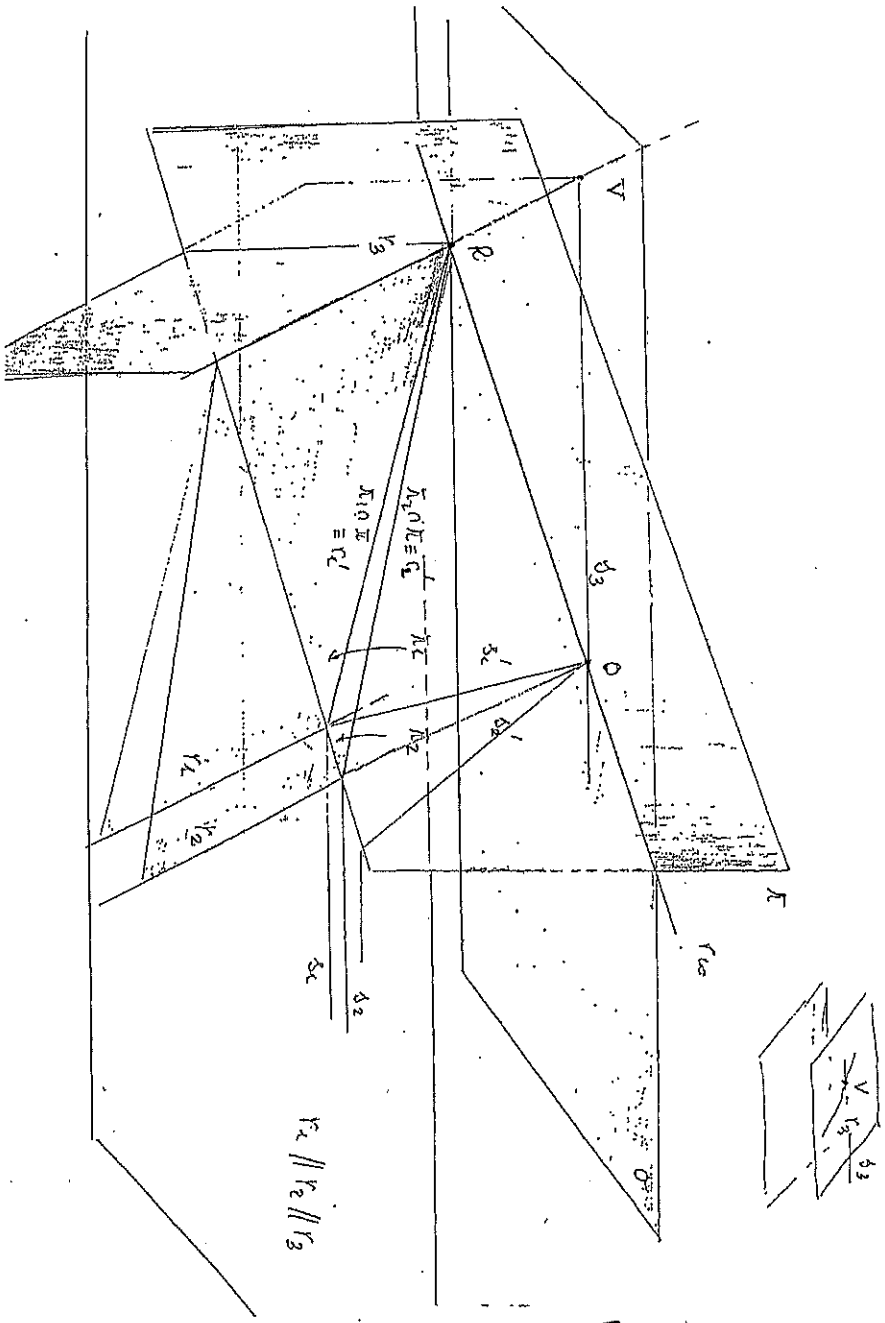
È $d = OD_1 = OD_2 = VO$

↓

distanza dell'osservatore dal quadro

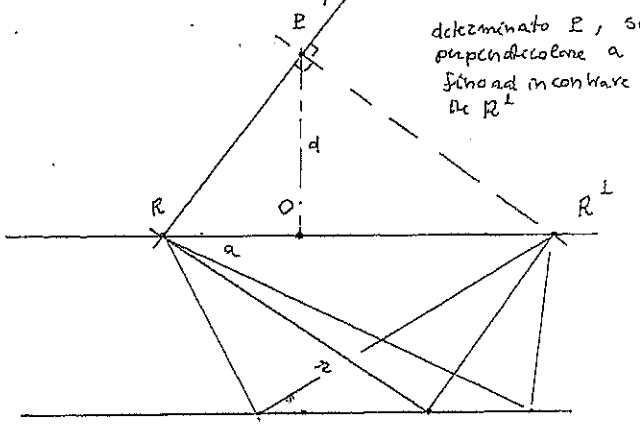
Interpretazione spaziale (figuridobaldo del Monte)



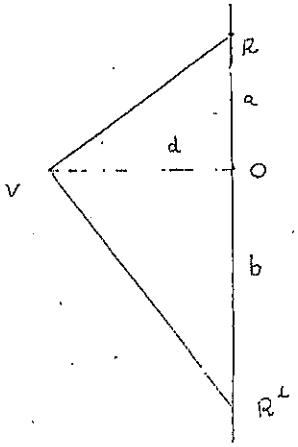


Risolviamo, a titolo di esercizio, il seguente problema:

" Dato il pto. di fuga R di una retta r sul geometrale (e dunque delle rette ad essa parallele), determinare il pto di fuga $R^{\perp}$ delle rette ad essa perpendicolari, fissata la distanza d dell'osservatore dal quadro



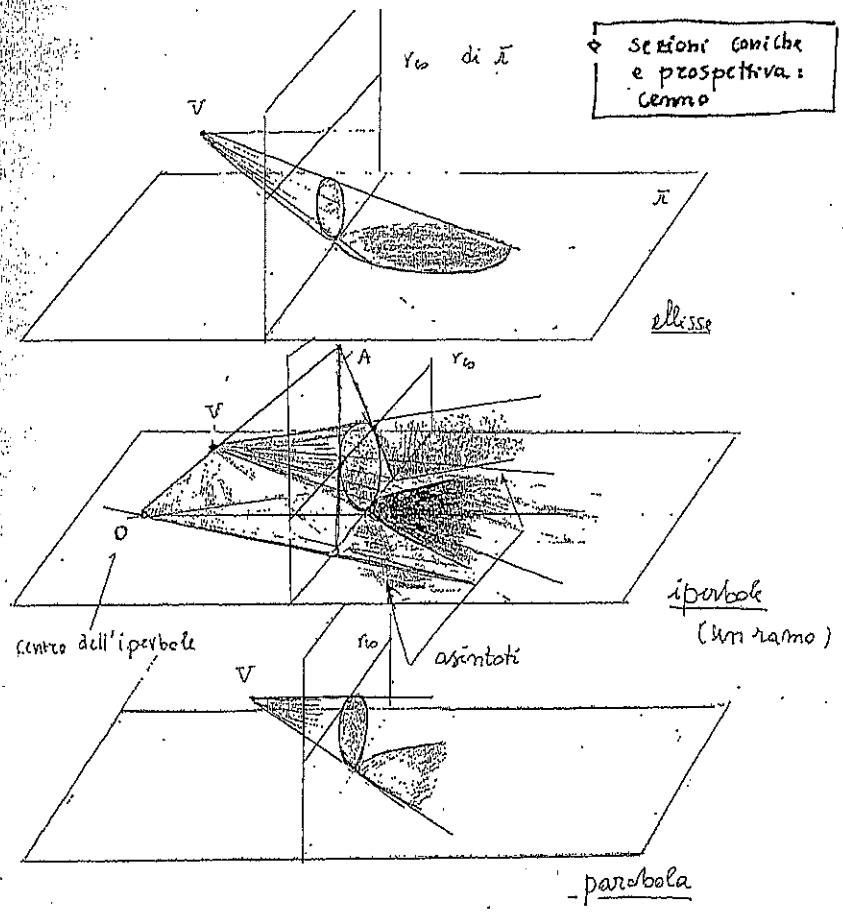
determinato P, si traccia la perpendicolare a RP in P, fino ad incontrare la retta d'orizzonte di $R^{\perp}$



$$ab = d^2$$

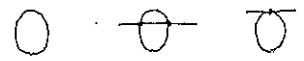
(2° teorema di Euclide)

$$\Rightarrow \quad b = \frac{d^2}{a}$$



Sezioni coniche e prospettiva: cenno

La natura della proiezione di una conica fissata dipende dal "punto di vista", ovvero dal tipo di intersezioni con l'"orizzonte" r_∞



Dal punto di vista "proiettivo" (ovvero.. prescindendo da V) c'è un solo tipo di conica.

Queste osservazioni saranno precisate in seguito.

Commento

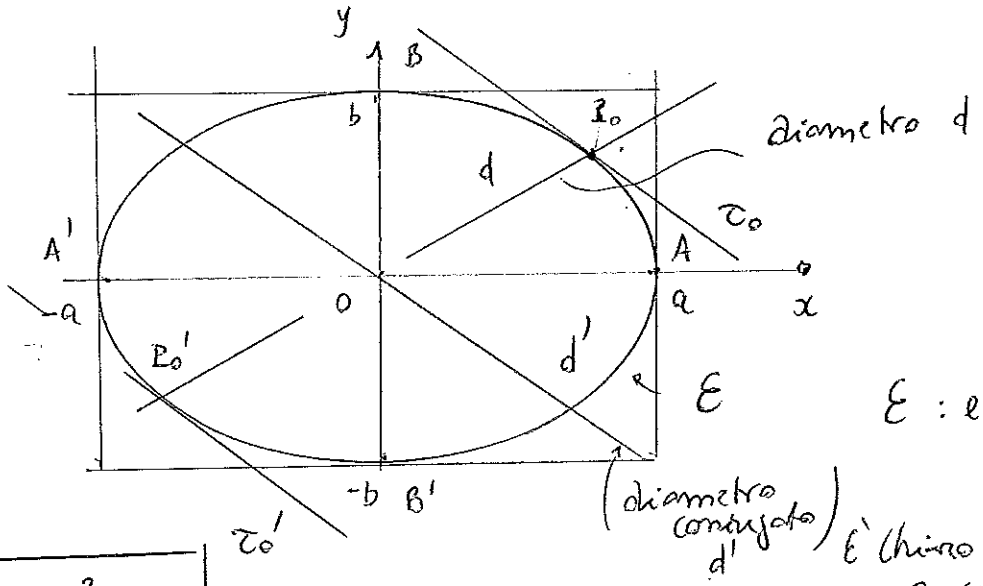
Nel caso dell'iperbole, i punti della circonferenza sul quadro al di sopra dell'orizzonte dànno i punti dell'altro ramo.

Se l'orizzonte divide tale circonferenza a metà (dunque lungo un diametro), il centro dell'iperbole è il piede della perpendicolare condotta dal punto di vista sul geometrale. Verificarlo.

Si posizioni V in modo da ottenere un'iperbole equilatera (ovvero, con asintoti perpendicolari tra loro)

☆ Coniche : approccio analitico elementare

Sia assegnato un riferimento cartesiano Oxy



$\mathcal{E}$: ellisse

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

forma canonica (metrica)

qui $a > b > 0$

[simmetrica rispetto agli assi e rispetto ad O]

È chiaro che se $P:(x,y) \in \mathcal{E}$, è $|x| \le a$, $|y| \le b$

$P_0 : (x_0, y_0)$ determiniamo la retta tangente in P_0;

in modo elementare (vi sono metodi più rapidi.) (v. poco oltre, per es.)

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

scegliamo P_0 con $y_0 > 0$ sicché

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{b}{a}\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= -\frac{b}{a} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} x$$

retta tangente in $P_0 : (x_0, y_0)$ $\quad (y_0 > 0)$

$$\left\{ y - y_0 = \underbrace{-\frac{b}{a} (a^2 - x_0^2)^{-\frac{1}{2}} x_0}_{m_0} \cdot (x - x_0) \right.$$

con: $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$

Si osservi che la retta tangente a $\mathcal{E}$ in $P_0' : (-x_0, -y_0)$, τ_0' ha lo stesso coefficiente angolare di τ_0

Il diametro d' (retta per O) parallelo a τ_0 e τ_0' si dice coniugato al diametro d (retta OP_0)

I diametri coniugati e perpendicolari tra loro si dicono assi di $\mathcal{E}$; nel nostro caso corrispondono agli assi coordinati x e y.

Altro metodo per il calcolo della retta tangente

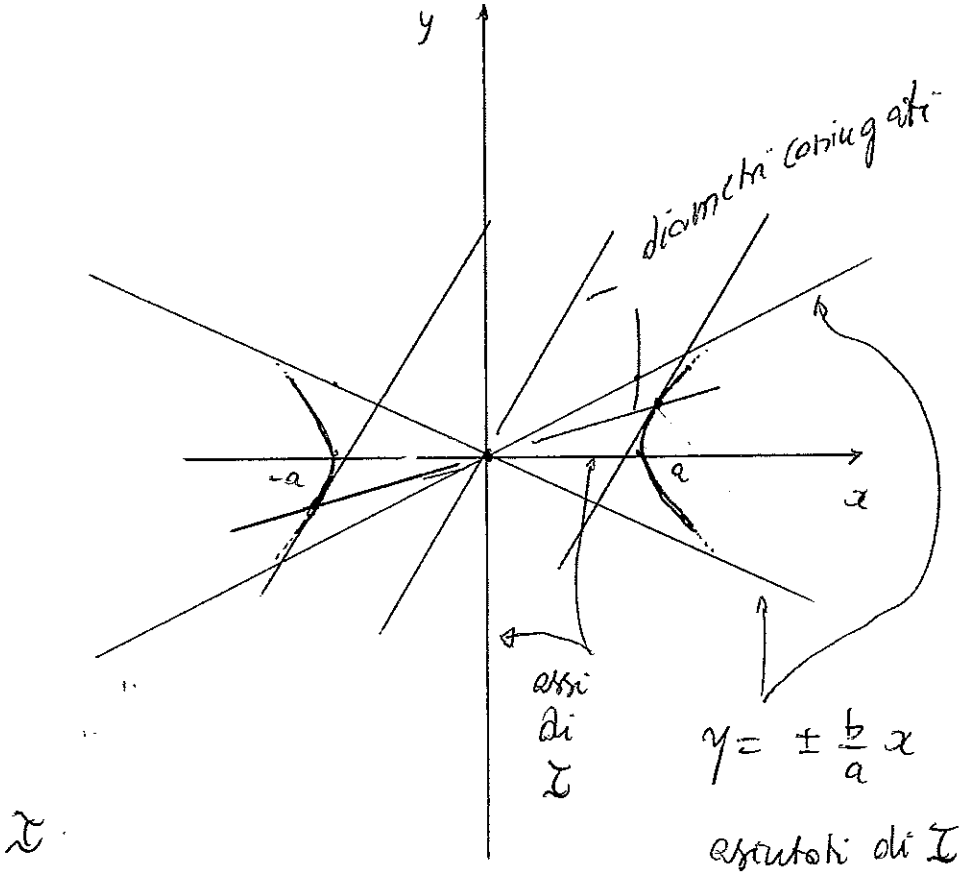
Da $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ si ha, ove si possa esplicitare $y = y(x)$,

$b^2x^2 + a^2y^2(x) - a^2b^2 \equiv 0 \Rightarrow$ derivando (rispetto a x) si ha $2b^2x + 2a^2 \cdot y \cdot y' = 0$

$\Rightarrow$ (in $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$) $\quad y'(x_0) = -\dfrac{b^2}{a^2} \dfrac{1}{y(x_0) \equiv y_0 \neq 0}$. Pertanto,

l'equazione cercata è

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{y_0} (x - x_0) \Rightarrow \boxed{b^2 x_0 \cdot (x - x_0) + a^2 y_0 (y - y_0) = 0}$$



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Iperbole

Si osservi che per un pto generico di $\mathcal{I}$,

è $|x| \geq a$

Il discorso sui diametri coniugati è perfettamente analogo a quello svolto per l'ellisse...

Mostriamo che le rette $y = \pm \frac{b}{a} x$ sono effettivamente asintoti nel senso dell'analisi

["tangente all'∞"]

Per fissare le idee prendiamo $y = \frac{b}{a}x$, e $x \to +\infty$

Ricordare la condizione $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + q) \right] = 0$

$\left(\Rightarrow m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \right)$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

consid. il segno + $\quad y = \underbrace{\frac{b}{a} (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}_{f(x)}$

allora

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{a} (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{a} x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a} \left((a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - x \right) \underset{(*)}{= \dots =} 0$$

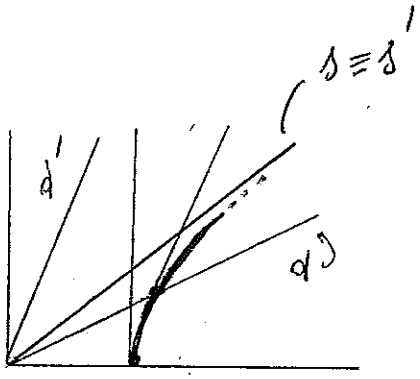
(*) $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - x = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - (x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^2 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + x} \to 0$

oppure (t. di Lagrange)

$$(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - (x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} (a^2 + x^2 - x^2) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} a^2 \to 0$$

con $x^2 < \xi < a^2 + x^2$ $\quad$ se x tende $\xi \to +\infty$

Da ciò segue subito, con un <u>passaggio al limite</u>, che un asintoto è un diametro <u>autoconiugato dell'iperbole</u>

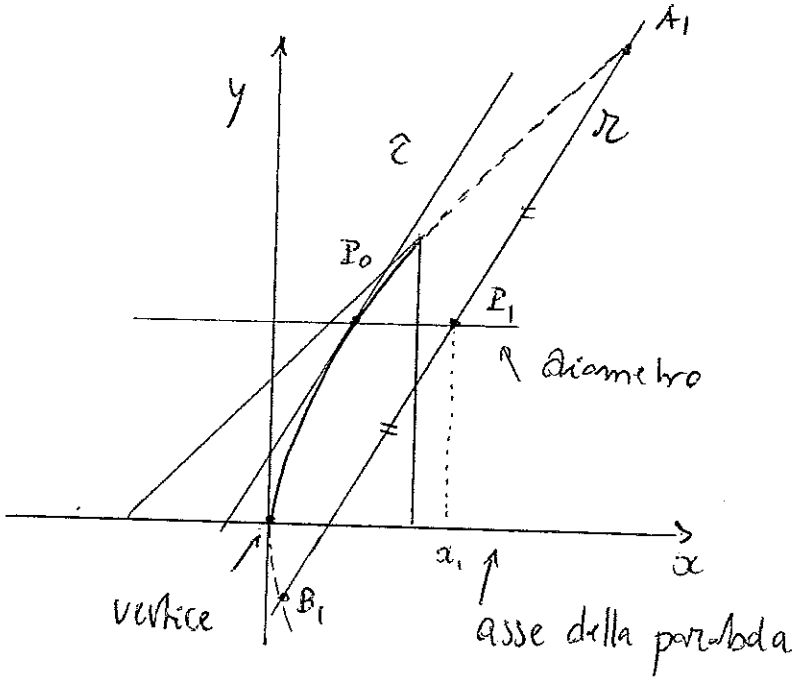


La geometria proiettiva consentirà una trattazione completa, precisa, ed elegante.

parabola

$$y^2 = 2px$$

$$p > 0$$



$$y = \sqrt{2px}$$

τ: retta tangente in P_0: $(x_0, \overset{y_0}{\sqrt{2px_0}})$

$$y - y_0 = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2px_0}} \cdot \cancel{2}p \, (x - x_0)$$

Consideriamo la retta r passante per P_1: (x_1, y_0) parallela a τ; si può mostrare che essa sega la parabola in due pti A_1, B_1 tali che $\overline{A_1P_1} = \overline{P_1B_1}$ (ciò giustifica il nome di diametro).

Otterremo questo risultato in seguito dalla teoria generale.

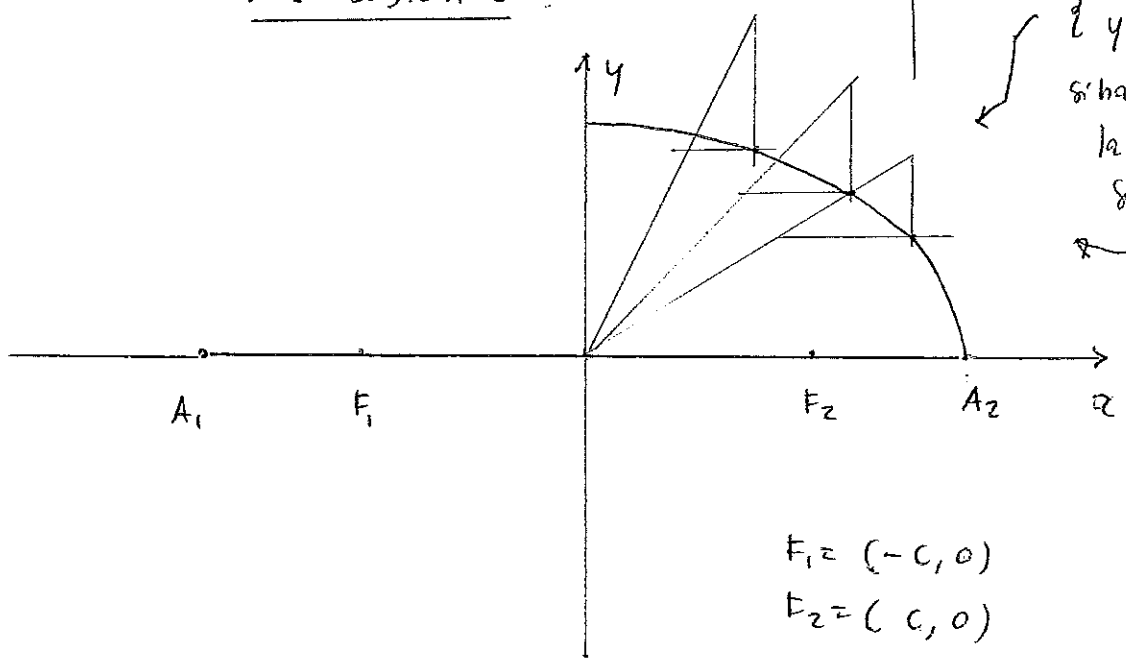
4 Le coniche come luoghi geometrici – approccio analitico

ellisse
iperbole

luogo dei pti del piano tali che la somma / differenza delle loro distanze da due pti fissi prefissati (fuochi) sia costante

$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$

si ha pertanto la costruzione seguente



$F_1 = (-c, 0)$
$F_2 = (c, 0)$ $\quad c > 0$

$A_1 = (-a, 0)$
$A_2 = (a, 0)$ $\quad$ in figura $a > c$

$P: (x, y)$

$d_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$d_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

ellisse
$\hookrightarrow d_1 + d_2 = 2a$

$\hookrightarrow |d_1 - d_2| = 2a$

iperbole

analizziamo il caso dell'ellisse

a : semiasse (maggiore)

c : semidistanza focale

$$d_1 + d_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{} + (x-c)^2+y^2$$

$$(x+c)^2 - (x-c)^2 = -4a\sqrt{} + 4a^2$$

$$(x+c-x+c)(x+\cancel{c}+x-\cancel{c}) = -4a\sqrt{} + 4a^2$$

$$\cancel{4}cx = -\cancel{4}a\sqrt{} + \cancel{4}a^2$$

$$a^2 - cx = a\sqrt{}$$

$$(a^2-cx)^2 = a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]$$

$$a^4 - 2ca^2x + c^2x^2 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2$$

$$\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}x^2 + a^2y^2 = a^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

qui
$a \geq b$

($a = b$: circonferenza)

nel caso dell'iperbole si trova

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con
$b^2 = c^2 - a^2$

Se $a = b$ si ha un' <u>iperbole</u> <u>equilatera</u>.

ellisse

parabola

iperbole

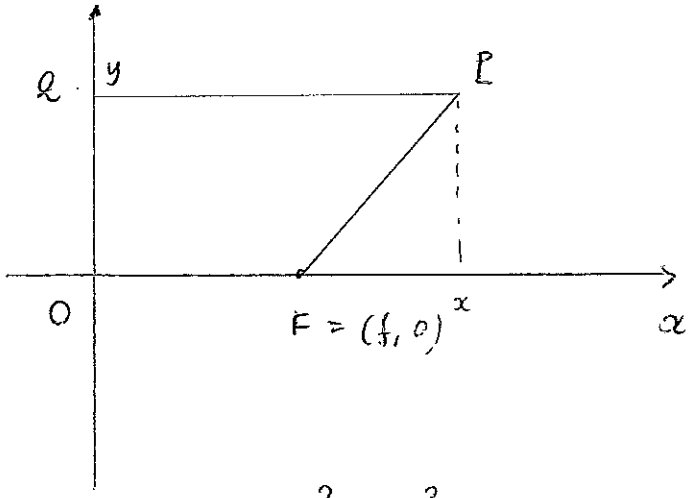
luogo dei punti del piano tali che il rapporto delle loro distanze da un pto fisso (fuoco) e da una retta fissa (direttrice) sia costante

$$e \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1$$

$0 \le e$ è detto eccentricità

Se $e = 0$ si ha una circonferenza

Verifichiamolo



Si ha:

$$\frac{(x-f)^2 + y^2}{x^2} = e^2$$

$$(\bigstar) \qquad \boxed{x^2(1-e^2) + y^2 - 2fx + f^2 = 0}$$

Sia $e \neq 1$. Intersechiamo con l'asse x $(y=0)$

$$(1-e^2)x^2 - 2fx + f^2 = 0$$

$$x = \frac{f \pm \sqrt{f^2 - f^2(1-e^2)}}{1-e^2}$$

$$x = \frac{f \pm fe}{1-e^2} = f\,\frac{1 \pm e}{1-e^2} = \frac{f}{1 \mp e}$$

Poniamo l'origine in $\frac{f}{1-e^2}$ (pto medio) è il

metodo del completamento dei quadrati

$$x = X + \frac{f}{1-e^2} \qquad y = Y$$

Si trova

$$(1-e^2)\left(X + \frac{f}{1-e^2}\right)^2 - 2f\,\frac{f}{1-e^2} - 2fX + Y^2 + f^2 = 0$$

$$(1-e^2)\left[X^2 + \frac{2fX}{1-e^2} + \frac{f^2}{(1-e^2)^2}\right] - \frac{2f^2}{1-e^2} - 2fX + Y^2 + f^2 = 0$$

$$(1-e^2)X^2 - \frac{f^2}{1-e^2} + f^2 + Y^2 = 0$$

$$(1-e^2)X^2 + Y^2 + f^2\underbrace{\left(1 - \frac{1}{1-e^2}\right)}_{\frac{\cancel{1}-e^2-\cancel{1}}{1-e^2}} = 0$$

$$(1-e^2)X^2 + Y^2 - \frac{f^2 e^2}{1-e^2} = 0$$

$e < 1$ ellisse

$e > 1$ iperbole

Poniamo $a^2 = \dfrac{f^2 e^2}{(1-e^2)^2}$

Risulta

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2(1-e^2)} = 1}$$

$0 \le e < 1$ ellisse

$e > 1$ iperbole

Se $e = 1$, le intersezioni della curva con l'asse x coincidono in $\left(\frac{f}{2}, 0\right)$.

posto $x = X + \frac{f}{2}$, $y = Y$ si ha in (*)

$$Y^2 - 2f\left(X + \frac{f}{2}\right) + f^2 = 0$$

$$Y^2 - 2f X = 0$$ parabola

$$p = f$$ origine: vertice della parabola

Variante più veloce:

$$x^2(1-e^2) + y^2 - 2fx + f^2 = 0$$

$$x^2 - 2\frac{f}{1-e^2}x + f^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = 0$$

$$\underbrace{\left(x - \frac{f}{1-e^2}\right)}_{X}^2 + \frac{y^2}{1-e^2} + \underbrace{f^2 - \frac{f^2}{1-e^2}}_{f^2\left(\frac{1-e^2-1}{1-e^2}\right) = -\frac{f^2e^2}{1-e^2}}$$

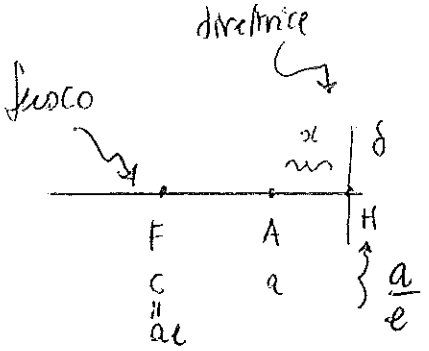
$\Rightarrow$ come prima si pone

$$a^2 = \frac{f^2e^2}{(1-e^2)^2}$$

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 = a^2e^2$$

$$a = ce$$



$$\frac{\overline{AF}}{\underbrace{\overline{AH}}_{x}} = e \qquad x = \frac{\overline{AF}}{e} = \frac{a-c}{e} =$$

$$a + a\left(\frac{1-e}{e}\right) = a\left[\frac{e+1-e}{e}\right] = \frac{a(1-e)}{e}$$

$$= \frac{a}{e}$$