Analisi II – Eserciziario

A cura di Grapulin Michele & Sabaini Alberto

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE OMOGENEE

Risoluzione generale di $y'+p(t)\cdot y=0$

Moltiplichiamo l'equazione per il fattore integrante $e^{P(t)}$ dove P(t) è una primitiva di p(t).

$$e^{P(t)}\cdot y'+p(t)\cdot y\cdot e^{P(t)}=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{P(t)}\cdot y(t))=0 \Leftrightarrow e^{P(t)}\cdot y=C \Leftrightarrow y(t)=C\cdot e^{-P(t)}$$

SOLUZIONE: $y(t)=C\cdot e^{-P(t)}$

Esercizi:

- $y'+\tan(t)\cdot y=0$

  $y(t)=C\cdot e^{-\int\tan(t)}=C\cdot e^{\log(|\cos(t)|)}=C\cdot\cos(t)$

- $y'+2t\cdot y=0$

  $y(t)=C\cdot e^{-\int 2t}=C\cdot e^{-t^2}$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE NON OMOGENEE

Risoluzione generale di $y'+p(t)\cdot y=q(t)$ (*)

> Rappresentazione delle soluzioni: $y(t)=y_P(t)+C\cdot e^{-P(t)}$ dove $y_P(t)$ è una particolare soluzione dell'equazione (*)

Per trovare una soluzione particolare usiamo il metodo di variazione della costante.
Cerchiamo una soluzione del tipo $y_P(t)=C(t)\cdot e^{-P(t)}$.

Imponiamo che $y_P'(t)+p(t)\cdot y=q(t)$

calcoliamo $y_P'(t)=C'(t)\cdot e^{-P(t)}-C(t)p(t)e^{-P(t)}$ e sostituendo

$$C'(t)\cdot e^{-P(t)}-C(t)p(t)e^{-P(t)}+C(t)p(t)e^{-P(t)}=q(t)\Leftrightarrow C'(t)\cdot e^{-P(t)}=q(t)$$

$$C^I(t)=q(t)e^{P(t)}$$

Integrando $C'(t)$ otteniamo $C(t)=\int q(t)e^{P(t)}\cdot dt$ che sostituita nella formula iniziale $y_P(t)=e^{-P(t)}\cdot\int q(t)e^{P(t)}\cdot dt$

Le soluzioni dell'equazione allora sono:

SOLUZIONE: $y(t)=e^{-P(t)}\cdot\int q(t)e^{P(t)}\cdot dt+C\cdot e^{-P(t)}$

Esercizi:

- $y'+\tan(t)\cdot y=\dfrac{1}{sint}$

  $$y_P(t)=e^{-\int\tan(t)}\cdot\int e^{\int\tan(t)}\frac{1}{sint}dt=e^{\log(|\cos(t)|)}\cdot\int e^{-\log(|\cos(t)|)}\frac{1}{sint}dt=|\cos(t)|\int\frac{1}{(cost\cdot sint)}\cdot dt\Rightarrow$$

  $$\Rightarrow 2|\cos(t)|\int\frac{1}{(sin2t)}\cdot dt=2|\cos(t)|\int\frac{sin2t}{(cos2t\cdot sin2t)}\cdot dt=2|\cos(t)|\int\frac{sin2t}{(1-\cos^2(2t))}\cdot dt\Rightarrow$$

  pongo $z=cos2t$

  $$\Rightarrow-|\cos(t)|\int\frac{dz}{(1-z^2)}\cdot dt=\frac{-|\cos(t)|}{2}\cdot\log((1-z)\cdot(1+z))=\frac{-|\cos(t)|}{2}\cdot\log(1-z^2)\Rightarrow$$

  $$\Rightarrow\frac{-|\cos(t)|}{2}\cdot\log(\sin^2(2t))=-|\cos(t)|\cdot\log(\sin(2t))$$

  quindi:

  $$y(t)=-|\cos(t)|\cdot\log(\sin(2t))+C\,e^{-\log(|\cos(t)|)}$$

- $y'+2t\cdot y=t\cdot e^{-t}$

  $$y_P(t)=e^{-\int 2t}\cdot\int t\,e^{-t}\cdot e^{\int 2t}dt=e^{-t^2}\cdot\int t\,e^{-t}\cdot e^{t^2}dt$$

  $$y(t)=e^{-t^2}\cdot\int t\,e^{-t}\cdot e^{t^2}dt+C\cdot e^{-t^2}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE OMOGENEE

Risoluzione generale di: $y''+a\cdot y'+b\cdot y=0$

Cerchiamo una soluzione del tipo $y(t)=e^{\lambda t}$ $y'(t)=\lambda\cdot e^{\lambda t}$ $y''(t)=\lambda^2\cdot e^{\lambda t}$
quindi sostituendo $\lambda^2\cdot e^{\lambda t}+a\cdot\lambda\cdot e^{\lambda t}+b\cdot e^{\lambda t}=0 \Leftrightarrow (\lambda^2+a\cdot\lambda+b)\cdot e^{\lambda t}=0 \Leftrightarrow$
$(\lambda^2+a\cdot\lambda+b)=0$

- $\Delta>0$
  $y(t)=C_1\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2\cdot e^{\lambda_2 t}$

- $\Delta<0$
  $(\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta)$

  $y(t)=C_1\cdot e^{\alpha t}\cdot\cos(\beta t)+C_2\cdot e^{\alpha t}\cdot\sin(\beta t)$

- $\Delta=0$
  $y(t)=C1\cdot e^{\lambda_1 t}+C2\cdot t\cdot e^{\lambda_1 t}$

Esercizi:

- $y''+y'+7y=0 \quad \lambda_1=\frac{-1}{2}+3\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \lambda_2=\frac{-1}{2}-3\frac{\sqrt{3}}{2}i$

  $y(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\cdot(C_1\cdot\cos(3\frac{\sqrt{3}}{2}t)+C_2\cdot\sin(3\frac{\sqrt{3}}{2}t))$

- $y''+9y=0 \quad \lambda_1=3i \quad \lambda_2=-3i$

  $y(t)=C_1\cdot\cos(3t)+C_2\cdot\sin(3t)$

- $y''-7y'+12y=0 \quad \lambda_1=4 \quad \lambda_2=3$

  $y(t)=C_1\cdot e^{4t}+C_2\cdot e^{3t}$

SISTEMI LINEARI DEL PRIMO ORDINE OMOGENEI

Risoluzione generale: ci si riconduce ad un'equazione del secondo quadro omogenea.

Esercizi:

- $$\begin{cases} x'-3x-6y=0 \\ y'-x-2y=0 \end{cases}$$

$x''=3x'+6y'$ usando la seconda equazione $x''=3x'+6x+12y$ ed esplicitando dalla prima la y
si ottiene $x''=3x'+2x'$

$$\begin{cases} x''-5x'=0 \\ y=\frac{x'}{6}-\frac{x}{2} \end{cases}$$

risolviamo l'equazione differenziale di secondo grado in x omogenea:

$\lambda^2-5\lambda=0$

$\lambda_1=5 \quad \lambda_2=0$ per cui $x(t)=C_1\cdot e^{5t}+C_2$

deriviamola e poi andiamo a sostituire nella seconda equazione per trovare y(t)

$x'(t)=5C_1\cdot e^{5t}$

$y(t)=\frac{5}{6}C_1\cdot e^{5t}-\frac{1}{2}C_2\cdot e^{5t}-\frac{C_2}{2}$

$$\begin{cases} x(t)=C_1\cdot e^{5t}+C_2 \\ y(t)=\frac{5}{6}C_1\cdot e^{5t}-\frac{C_2}{2}\cdot e^{5t}-\frac{C_2}{2} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x''+x+4y=0 \\ y''+3x+2y=0 \end{cases}$$

$x''=-x'-4y'$ usando la seconda equazione $x''=-x'+12x+8y$ ed esplicitando dalla prima la y
si ottiene $x''=-3x'-10x$

$$\begin{cases} x''+3x'-10x=0 \\ y=-\frac{x'}{4}-\frac{x}{4} \end{cases}$$

risolviamo l'equazione differenziale di secondo grado in x omogenea:
$\lambda^2+3\lambda-10=0$

$\lambda_1=-5$ $\lambda_2=2$ per cui $x(t)=C_1\cdot e^{-5t}+C_2\cdot e^{2t}$

deriviamola e poi andiamo a sostituire nella seconda equazione per trovare y(t)

$x'(t)=-5C_1\cdot e^{-5t}+C_2\cdot e^{2t}$

$y(t)=C_1\cdot e^{-5t}-\frac{3}{4}C_2\cdot e^{2t}$

$$\begin{cases} x(t)=C_1\cdot e^{-5t}+C_2\cdot e^{2t} \\ y(t)=C_1\cdot e^{-5t}-\frac{3}{4}C_2\cdot e^{2t} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x'-6x-5y=0 \\ y'+2x-8y=0 \end{cases}$$

$x''=6x'+5y'$ usando la seconda equazione $x''-6x'+10x-40y=0$ ed esplicitando dalla prima la y si ottiene $x''-14x'+58x=0$

$$\begin{cases} x''-14x'+58x=0 \\ y=\frac{x'}{5}-\frac{6}{4}x \end{cases}$$

risolviamo l'equazione differenziale di secondo grado in x omogenea:
$\lambda^2-14\lambda+58=0$

$\lambda_1=7-3i$ $\lambda_2=7+3i$ per cui $x(t)=e^{7t}\cdot(C_1\cdot\cos(3t)+C_2\cdot\sin(3t))$

deriviamola e poi andiamo a sostituire nella seconda equazione per trovare y(t)

$x'(t)=e^{7t}\cdot(7C_1\cdot\cos(3t)-C_1\cdot\sin(3t)+7C_2\cdot\sin(3t)+C_2\cdot\cos(3t))$

$y(t)=e^{7t}\cdot[C_1\cdot(\cos(3t)-\sin(3t))+C_2\cdot(\sin(3t)+\cos(3t))]$

$$\begin{cases} x(t)=e^{7t}\cdot(C_1\cdot\cos(3t)+C_2\cdot\sin(3t)) \\ y(t)=e^{7t}\cdot[C_1\cdot(\cos(3t)-\sin(3t))+C_2\cdot(\sin(3t)+\cos(3t))] \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x'+3x-y=0 \\ y'+x+3y=0 \end{cases}$$

$x'+3x'-y'=0$ usando la seconda equazione $x''+3x'+x+3y=0$ ed esplicitando dalla prima la y si ottiene $x''+6x'+10x=0$

$$\begin{cases} x''+6x'+10x=0 \\ y=x'+3x \end{cases}$$

risolviamo l'equazione differenziale di secondo grado in x omogenea:

$\lambda^2+6\lambda+10=0$

$\lambda_1=-3+i$ $\lambda_2=-3-i$ per cui $x(t)=e^{-3t}\cdot(C_1\cdot\cos(t)+C_2\cdot\sin(t))$

deriviamola e poi andiamo a sostituire nella seconda equazione per trovare y(t)

$x^I(t)=e^{-3t}\cdot(-3C_1\cdot\cos(t)-C_1\cdot\sin(t)-3C_2\cdot\sin(3t)+C_2\cdot\cos(3t))$

$y(t)=e^{-3t}\cdot(-C_1\cdot\sin(t)+C_2\cos(t))$

$$\begin{cases} x(t)=e^{-3t}\cdot(C_1\cdot\cos(t)+C_2\cdot\sin(t)) \\ y(t)=e^{-3t}\cdot(-C_1\cdot\sin(t)+C_2\cos(t)) \end{cases}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE AL SECONDO OMOGENEE

Risoluzione generale: Come per le equazioni del 2°ordine passiamo all'equazione algebrica

$$\lambda^{(n)}+a\cdot\lambda^{(n-1)}+....+b=0$$

prestando attenzione alla molteplicità delle soluzioni:

- con n radici distinte possiamo scrivere la y(t) nella forma:
$$y(t)=C_1\cdot e^{\lambda_1 t}+....+C_n\cdot e^{\lambda_n t}$$
- con n radici coincidenti (molteplicità di λ uguale ad n), si può scrivere y(t) nella forma:
$$y(t)=C_1\cdot t^0\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2\cdot t^1\cdot e^{\lambda_1 t}+...+C_n\cdot t^{n-1}\cdot e^{\lambda_1 t}$$
- con k (k<n) radici coincidenti e n-k radici distinte, si può scrivere y(t) nella forma:
$$y(t)=C_1\cdot t^0\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2\cdot t^1\cdot e^{\lambda_1 t}+...+C_k\cdot t^{k-1}\cdot e^{\lambda_1 t}+C_{k+1}\cdot e^{\lambda_2 t}+...+C_{n-k}\cdot e^{\lambda_{n-k} t}$$
- negli altri casi si opera di conseguenza.

Esercizi:

- $y'''+y=0$

  $(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$

  $\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=1+i\sqrt{3} \quad \lambda_3=1-i\sqrt{3}$

  $y(t)=C_1\cdot e^{-t}+C_2 e^t\cdot\cos(\sqrt{3}t)\cdot e^t+C_3\cdot e^t\sin(\sqrt{3}t)$

- $y'''-y''+6y'=0 \quad \lambda_1=0 \quad \lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{(23)}}{2}i \quad \lambda_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{(23)}}{2}i$

  $y(t)=C_1+C_2\cdot e^{\frac{t}{2}}\cdot\cos(\frac{\sqrt{(23)}}{2}t)+C_3\cdot e^{\frac{t}{2}}\cdot\sin(\frac{\sqrt{(23)}}{2}t)$

- $y^{IV}+2y''+y=0 \quad \lambda_{1,2}=i \quad \lambda_{3,4}=-i$

  $y(t)=C_1\cdot\cos(t)+C_2\cdot\sin(t)+C_3\cdot t\cdot\cos(t)+C_4\cdot t\cdot\sin(t)$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE NON OMOGENEE

METODO DELLA VARIAZIONE DI COSTANTI

Risoluzione generale: $y''+a\cdot y'+b\cdot y=q(t)$
Cerchiamo una soluzione del tipo $y(t)=y_p(t)+y_{hom}(t)$
dove $y_p(t)$ è la soluzione particolare e $y_{hom}(t)$ è la soluzione dell'equazione omogenea associata.
Per il calcolo di $y_{hom}(t)$ si faccia riferimento alle equazioni di 2°ordine omogenee.
Per il calcolo di $y_p(t)$ utilizziamo il metodo di variazione delle costanti:
analizziamo solo il caso Δ>0 (per gli altri casi vedi la teoria)

$y_p(t)=C_1(t)\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2(t)\cdot e^{\lambda_2 t} \qquad y_p'(t)=C_1'(t)\cdot e^{\lambda_1 t}+C_1(t)\cdot\lambda_1 e^{\lambda_1 t}+C_2'(t)\cdot e^{\lambda_2 t}+C_2(t)\cdot\lambda_2 e^{\lambda_1 t}$

imponiamo $C_1'(t)\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2'(t)\cdot e^{\lambda_2 t}=0$ (*) quindi $y_p'(t)=C_1(t)\cdot\lambda_1 e^{\lambda_1 t}+C_2(t)\cdot\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$

$y_p''(t)=C_1'(t)\cdot\lambda_1\cdot e^{\lambda_1 t}+C_1(t)\cdot\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}+C_2'(t)\cdot\lambda_2\cdot e^{\lambda_2 t}+C_2(t)\cdot\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}$

sostituiamo in $y''+a\cdot y'+b\cdot y=q(t)$ le derivate trovate, ottenendo un'equazione nelle due incognite $C_1'\ e\ C_2'$. Mettendo a sistema con la posizione (*), troviamo i valori $C_1'\ e\ C_2'$ che verranno poi integrati, trovando la soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

$$\begin{cases} C_1'(t)\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2'(t)\cdot e^{\lambda_2 t}=0 \\ C_1'\lambda_1\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2'\lambda_2\cdot e^{\lambda_2 t}=q(t) \end{cases}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione (C_1', C_2') , da cui si ricava $C_1(t)=\int C_1'$
$C_2(t)=\int C_2'$ e quindi $y(t)=C_1(t)\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2(t)\cdot e^{\lambda_2 t}+C_3\cdot e^{\lambda_1 t}+C_4\cdot e^{\lambda_2 t}$

Esercizi:

- $$\begin{cases} x'-3x-6y=3t \\ y'-x-2y=0 \end{cases}$$

$y''-x'-2y'=0$ usando la prima equazione $y''-3x-6y-3t-2y'=0$ ed esplicitando dalla seconda la x
si ottiene $y''-5x'=3t$

$$\begin{cases} y''-5y'=3t \\ x=y'-2y \end{cases}$$

risolviamo l'equazione differenziale di secondo grado in y, omogenea:
$\lambda^2-5\lambda=0$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=5$ per cui $y_{hom}(t)=C_1+C_2 e^{5t}$

variamo le costanti e deriviamo. Otteniamo un sistema in C_1' e C_2'

$$\begin{cases} C_1'(t)+C_2'(t)e^{5t}=0 \\ 5e^{5t}\cdot C_2'(t)=3t \end{cases}$$

$$C_1'=-\frac{3}{5}t \qquad C_2'=-\frac{3}{5}t$$

integrando $C_1=-\frac{3}{10}t^2$ e $C_2=e^{-5t}\cdot(-\frac{3}{25}t-\frac{3}{125})$

$$y(t)=C_1+C_2\cdot e^{5t}-\frac{3}{10}t^2-\frac{1}{5}\cdot(\frac{3}{5}t+\frac{3}{25})$$

andando a sostituire troviamo anche $x(t)$

$$\begin{cases} x(t)=3C_2 e^{5t}-2C_1+\frac{3}{5}t^2-\frac{3}{5}t-\frac{9}{125} \\ y(t)=C_1+C_2\cdot e^{5t}-\frac{3}{10}t^2-\frac{3}{25}t-\frac{3}{125} \end{cases}$$

METODO DEGLI ANNICHILITORI

Risoluzione generale di $y''+a\cdot y'+b\cdot y=q(t)$ con $q(t)$ soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti.

Cerchiamo l'equazione differenziale omogenea che ha come soluzione q(t) (ignorando eventuali costanti moltiplicative). Troviamo le radici del polinomio caratteristico associato (siano ad esempio $\lambda_1 e \lambda_2$). Consideriamo le radici del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea $y''+a\cdot y'+b\cdot y=0$ (siano ad esempio $\lambda_3 e \lambda_4$).

Distinguiamo due casi:

<u>Caso non risonante:</u> $\lambda_1 e \lambda_2$ sono diverse da $\lambda_3 e \lambda_4$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y_p(t)=a\cdot e^{\lambda_3 t}+b\cdot e^{\lambda_4 t}$ se $\lambda_3\neq\lambda_4$, oppure se $\lambda_3=\lambda_4$ (molteplicità 2) una soluzione del tipo $y_p(t)=a\cdot e^{\lambda_3 t}+b\cdot t\cdot e^{\lambda_3 t}$.

<u>Caso risonante:</u> $\lambda_1=\lambda_3$ e diverse da $\lambda_2 e\lambda_4$
le soluzioni sono combinazione lineare di $e^{\lambda_1 t}$ $e^{\lambda_2 t}$ $t\cdot e^{\lambda_1 t}$ $e^{\lambda_4 t}$. Le prime due sono "annichilite" dall'equazione omogenea associata.
Quindi la soluzione particolare è del tipo $y_p(t)=a\cdot t\cdot e^{\lambda_1 t}+b\cdot e^{\lambda_4 t}$

Esercizi:

- $$\begin{cases} x'-2y=2e^t \\ y'+x+3y=0 \end{cases}$$

$y''+x'+3y'=0$ usando la prima equazione $y'+2y+2e^{-t}+3y'=0$

$$\begin{cases} y''+3y'+2y=-2e^{-t} \\ x=-y'-3y \end{cases}$$
risolviamo l'equazione differenziale di secondo grado in y omogenea:
$\lambda^2+3\lambda+2=0$

$\lambda_1=-1$ $\lambda_2=-2$ per cui $y_{hom}(t)=C_1 e^{-t}+C_2 e^{-2t}$
Analizziamo l'equazione non omogenea associata:

$$y''+3y'+2y=-2e^{-t}$$
cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y_p(t)=ate^{-t}$ trovando facilmente $a=-2$
quindi $y(t)=C_1 e^{-t}+C_2 e^{-2t}-2te^{-t}$, calcoliamo la derivata
$y^I(t)=-C_1 e^{-t}-2C_2 e^{-2t}-2e^{-t}+2te^{-t}$
Sostituendo nella seconda equazione troviamo x(t)

$x(t)=-2C_1 e^{-t}-C_2 e^{-2t}+4te^{-t}+2e^{-t}$
quindi:

$$\begin{cases} x(t)=-2C_1 e^{-t}-C_2 e^{-2t}+4te^{-t}+2e^{-t} \\ y(t)=C_1 e^{-t}+C_2 e^{-2t}-2te^{-t} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x'+x+4y=e^t \\ y'+3x+2y=1 \end{cases}$$

$y''+3x'+2y'=0$ usando la prima equazione $y''-3x-12y+3e^t+2y'=0$ ed esplicitando dalla seconda la x si ottiene $y''+3y'-10y=1-3e^t$

$$\begin{cases} y''+3y'-10y=1-3e^t \\ x=-\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3} \end{cases}$$

risolviamo l'equazione differenziale di secondo grado in y omogenea:

$\lambda^2+3\lambda-10=0$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=2$ per cui $y_{hom}(t)=C_1 e^{-5t}+C_2 e^{2t}$

Analizziamo le due equazioni non omogenee associate:

$$y''+3y'-10y=1$$

cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y_p(t)=a$ e troviamo facilmente $a=-\frac{1}{10}$

$$y''+3y'-10y=-3e^t$$

cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y_p(t)=b e^t$ e troviamo facilmente $b=\frac{1}{2}$

$$y(t)=C_1 e^{-5t}+C_2 e^{2t}+\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{10}$$

Sostituendo nella seconda equazione troviamo x(t)

$$x(t)=C_1 e^{-5t}-\frac{4}{3}C_2 e^{2t}-\frac{1}{2}e^t+\frac{6}{15}$$

quindi:

$$\begin{cases} x(t)=C_1 e^{-5t}-\frac{4}{3}C_2 e^{2t}-\frac{1}{2}e^t+\frac{6}{15} \\ y(t)=C_1 e^{-5t}+C_2 e^{2t}+\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{10} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x'-6x-5y=e^{2t} \\ y'+2x-8y=2 \end{cases}$$

$y''+2x'-8y'=0$ usando la prima equazione $y''+12x+10y+2e^{2t}-8y'=0$ ed esplicitando dalla seconda la x si ottiene $y''-14y'+58y=-12-2e^{2t}$

$$\begin{cases} y''-14y'+58y=-12-2e^{2t} \\ x=-\frac{1}{2}y'+4y+1 \end{cases}$$

risolviamo l'equazione differenziale di secondo grado in y omogenea:

$\lambda^2-14\lambda+58=0$

$\lambda_1=7+3i \quad \lambda_2=7-3i$ per cui $y_{hom}(t)=e^{7t}\cdot(C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t))$

Analizziamo le due equazioni non omogenee associate:

$$y''-14y'+58y=-12 \quad (1)$$

cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y_p(t)=a$ e troviamo facilmente $a=-\frac{6}{29}$

$$y''-14y'+58y=-2e^{2t} \quad (2)$$

cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y_p(t)=b e^{2t}$ e troviamo $b=-\frac{1}{17}$.

Quindi $y(t)=e^{7t}\cdot(C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t))-\frac{1}{17}e^{2t}-\frac{6}{29}$

Sostituendo nella seconda equazione troviamo x(t)

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{7t}C_1\cdot[\cos(3t)+3\sin(3t)]+\frac{1}{2}e^{7t}C_2\cdot[\sin(3t)-3\cos(3t)]-\frac{3}{17}e^{2t}+\frac{5}{29}$$

quindi:

$$\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}e^{7t}C_1\cdot[\cos(3t)+3\sin(3t)]+\frac{1}{2}e^{7t}C_2\cdot[\sin(3t)-3\cos(3t)]-\frac{3}{17}e^{2t}+\frac{5}{29} \\ y(t)=e^{7t}\cdot(C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t))-\frac{1}{17}e^{2t}-\frac{6}{29} \end{cases}$$

- $y'''-y''-8y'-12y=2e^{3t}$

$\lambda^3+\lambda^2-8\lambda-12=0$ che si scompone in $(\lambda-3)(\lambda+2)^2=0$

$\lambda_1=3$ e $\lambda_{2,3}=-2$

La radice del polinomio associato q(t) è $\lambda=3$ quindi c'è risonanza.
Le soluzioni sono la combinazione lineare di e^{3t} e^{-2t} $t\cdot e^{-2t}$ $t\cdot e^{3t}$. Le prime tre sono "annichilite" dall'equazione omogenea associata.
Quindi la soluzione particolare è del tipo $y_p(t)=a\cdot t\cdot e^{3t}$

Derivando e sostituendo nell'equazione generale troviamo $a=\frac{2}{25}$

$$y(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-2t}+C_3te^{-2t}+\frac{2}{25}t\cdot e^{3t}$$

- $y'''-y=-e^t$ (1)

risolviamo l'equazione associata $\lambda^3-1=0$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{(3)}}{2}$ $\lambda_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{(3)}}{2}$

mentre abbiamo $\lambda_4=1$ (lo zero dell'equazione che risolve q(t))
quindi abbiamo molteplicità 2 per $\lambda=1$, e le soluzioni sono:

$$e^t \quad e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \quad e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \quad te^t$$

le prime 3 vengono "annichilite" dall'equazione omogenea associata, quindi cerchiamo

$y_p(t)=ate^t$

$y_p'(t)=ae^t+ate^t$ $\quad y_p''(t)=2ae^t+ate^t$ $\quad y_p'''(t)=3ae^t+ate^t$

sostituendo nella (1) $3ae^t+ate^t-ate^t=-e^t$. Risolvendo l'eq di 2° grado troviamo $a=-\frac{1}{3}$

quindi $y_p(t)=-\frac{1}{3}t^3 e^t \rightarrow y(t)=C_1 e^t+C_2 e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+C_3 e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)-\frac{1}{3}te^t$

EQUAZIONI NON OMOGENEE DEL TIPO $y''+a\cdot y'+b\cdot y=p(t)+q(t)$

(vale per qualsiasi ordine)

Risoluzione generale:

La soluzione sarà del tipo $y(t)=y_p(t)+y_{hom}(t)$

dove $y_p(t)$ è data dalla somma delle soluzioni particolari $y_{p1}(t)$ (soluzione particolare dell'equazione $y''+a\cdot y'+b\cdot y=p(t)$) e $y_{p2}(t)$ (soluzione particolare dell'equazione $y''+a\cdot y'+b\cdot y=q(t)$) .

Esercizi:

- $y''-5\cdot y'+6\cdot y=e^{5t}+3e^{7t}$

$y''-5\cdot y'+6\cdot y=e^{5t}$

le radici del polinomio associato sono:

$\lambda_1=2$ $\lambda_2=3$ allora $y_{hom}(t)=C_1 e^{2t}+C2\, e^{3t}$

$p(t)=e^{5t}$ quindi $\lambda=5$ e cerchiamo una soluzione del tipo $y_{p1}(t)=a\cdot e^{5t}$

Derivando $y_{p1}(t)$ e andando a sostituire nell'equazione generale troviamo $a=\frac{1}{6}$

$y_{p1}(t)=\frac{1}{6}\cdot e^{5t}$

$q(t)=3\cdot e^{7t}$ quindi $\lambda=7$ e cerchiamo una soluzione del tipo $y_{p2}(t)=b\cdot e^{7t}$

Derivando $y_{p1}(t)$ e andando a sostituire nell'equazione generale troviamo $b=\frac{3}{20}$

$y_{p2}(t)=\frac{3}{20}\cdot e^{7t}$

$y(t)=C_1 e^{2t}+C2\, e^{3t}+\frac{1}{6}\cdot e^{5t}+\frac{3}{20}\cdot e^{7t}$

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI (ANALISI PUNTI CRITICI E STABILITA')

Studiamo l'andamento qualitativo delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$$

derivando la prima equazione e usando la seconda, si ha

$$x''=ax'+bcy+bdy \quad (*)$$

dalla prima equazione si ricava

$$by=x'-ax$$

e sostituendo in (*) si ottiene

$$x''=(a+d)x'+(bc-ad)x$$

pertanto x(t) è soluzione dell'equazione lineare (per semplificare z=x)

$$z''-(a+d)z'+(ad-bc)z=0 \quad (**)$$

analogamente anche y(t) è soluzione di (**).
Abbiamo così dimostrato che se x(t), y(t) è una soluzione del sistema lineare, allora le funzioni x(t) e y(t) risolvono l'equazione (**).
L'equazione caratteristica di (**) è $p(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$ e coincide con il polinomio caratteristico della matrice dei coefficienti del sistema assegnato

$$p(\lambda)=det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$$

Dunque le radici $\lambda_1,\lambda_2=\frac{1}{2}\cdot[(a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4\mathrm{bc}}]$ sono gli autovalori della matrice A

Quindi il comportamento delle soluzioni del sistema dipendono dalla natura degli autovalori.

Semplifichiamo la descrizione del comportamento delle orbite, effettuando un'opportuna trasformazione lineare del tipo: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=B\cdot\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}'=B^{-1}AB\cdot\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$

quindi $\begin{cases} \xi'=\lambda_1\xi \\ \eta'=\lambda_2\eta \end{cases}$. Da qui il sistema disaccoppiato $\begin{cases} \xi(t)=C_1\cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \eta(t)=C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{cases}$

Distinguiamo i vari casi:

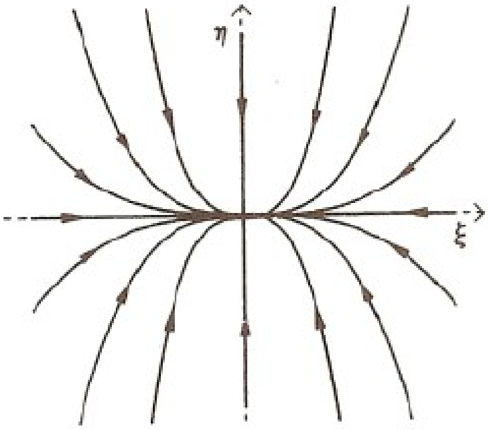
Nodo stabile	$\lambda_1,\lambda_2<0$
Nodo instabile	$\lambda_1,\lambda_2>0$
Sella (instabile)	$\lambda_1>0,\lambda_2<0 \;\; v \;\; \lambda_1<0,\lambda_2>0$
Centro (stabile)	$\lambda_1,\lambda_2=\pm\beta i$
Fuoco stabile	$\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm\beta i \;\;,\;\; \alpha<0$
Fuoco instabile	$\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm\beta i \;\;,\;\; \alpha>0$

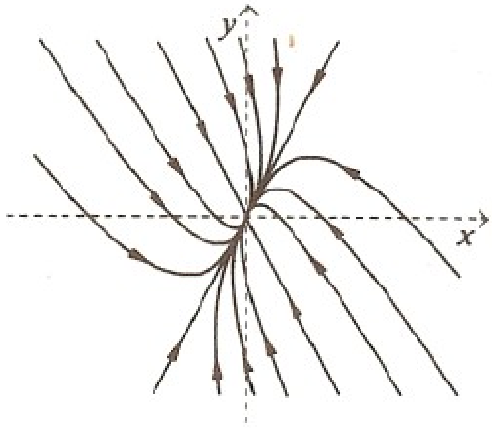
Esercizi:

- $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}'=A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

  Calcolando la traccia e il determinante della matrice, si ricavano informazioni riguardo il segno di $\lambda_1 e\, \lambda_2$
  tr(A)=-4
  det(A)=3

  quindi $\lambda_1 e\, \lambda_2$ sono entrambi negativi, quindi siamo in presenza di un nodo stabile.
  L'equazione degli assi ξ e η si trova nel seguente modo:
  $$A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
  risolvendo il sistema per entrambi gli autovalori, si trovano le equazioni dei due assi rispetto al sistema di riferimento x, y.
  $(\eta)\Rightarrow y=2\mathrm{x} \quad e \quad (\xi)\Rightarrow y=-2\mathrm{x}$





Nodo Stabile.

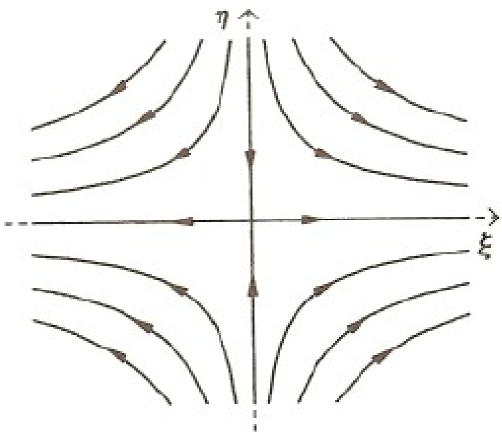
- $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

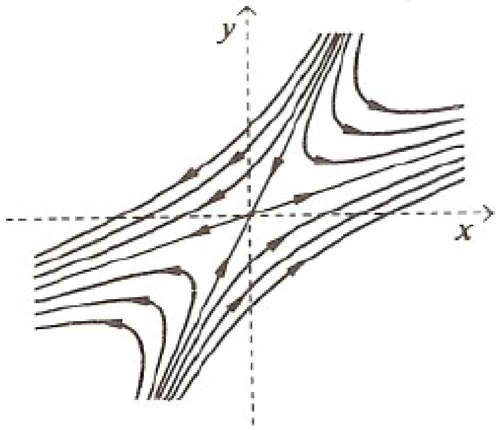
tr(A)= $\frac{1}{2}$

det(A)= $-\frac{3}{2}$

quindi $\lambda_1 e \lambda_2$ hanno segni discordi, quindi siamo in presenza di una sella.

$(\eta) \Rightarrow y = 2\text{x} \quad e \quad (\xi) \Rightarrow y = \frac{1}{3} x$





Punto di sella.

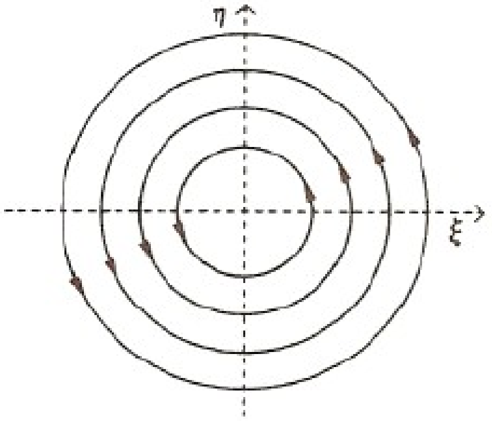
- $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

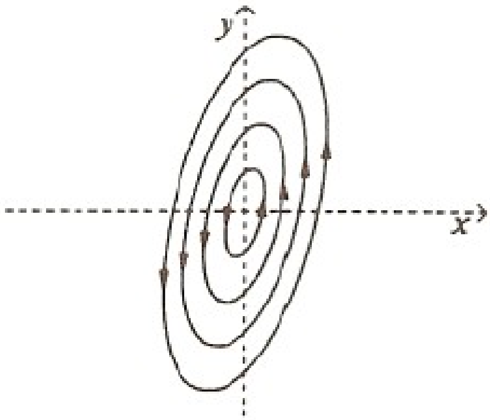
tr(A)= 0
det(A)= 4

$\lambda_1, \lambda_2 \in C$ quindi, non contano solo i segni, ma dobbiamo prestare attenzione ai valori della parte reale (α) e della parte immaginaria degli autovalori (β).

α=0 e β=2
quindi essendo la parte reale zero, abbiamo un centro.(il segno di β determina il verso di percorrenza delle orbite)

$$(\eta)\Rightarrow y=x(1+\frac{2}{i}) \quad e \quad (\xi)\Rightarrow y=x(1-\frac{2}{i})$$





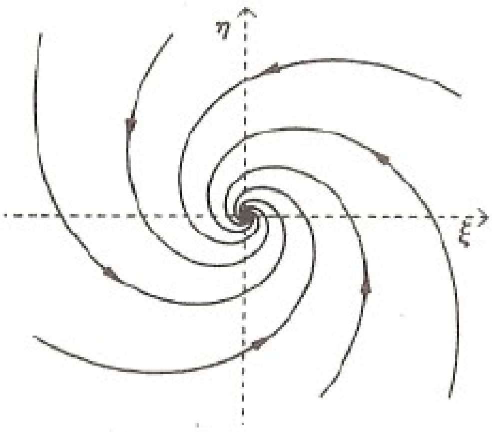
Centro.

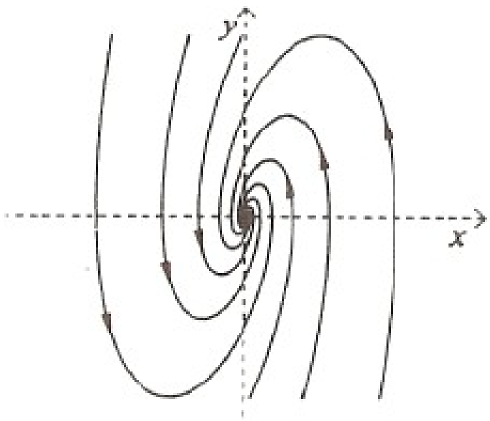
- $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

tr(A)= -2
det(A)= 5

$\lambda_1, \lambda_2 \in C$ quindi α determina la stabilità del sistema
α=-1 e β=2
quindi con α<0 abbiamo un fuoco stabile.

$$(\eta)\Rightarrow y=x(\frac{(7-4i)}{3}) \quad e \quad (\xi)\Rightarrow y=x(\frac{(7+4i)}{3})$$





Fuoco stabile.