Verona - 25 Maggio 2007

(Seminario integrativo del corso di MMB,
titolare M. Squassina, A.A. 2006/2007)

Memoria associativa e dinamica del riconoscimento: introduzione al modello di Hopfield

Antonio Ponno*

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

*E-mail: ponno@math.unipd.it

- Neuroni: struttura e funzionamento

- Un modello di rete neurale

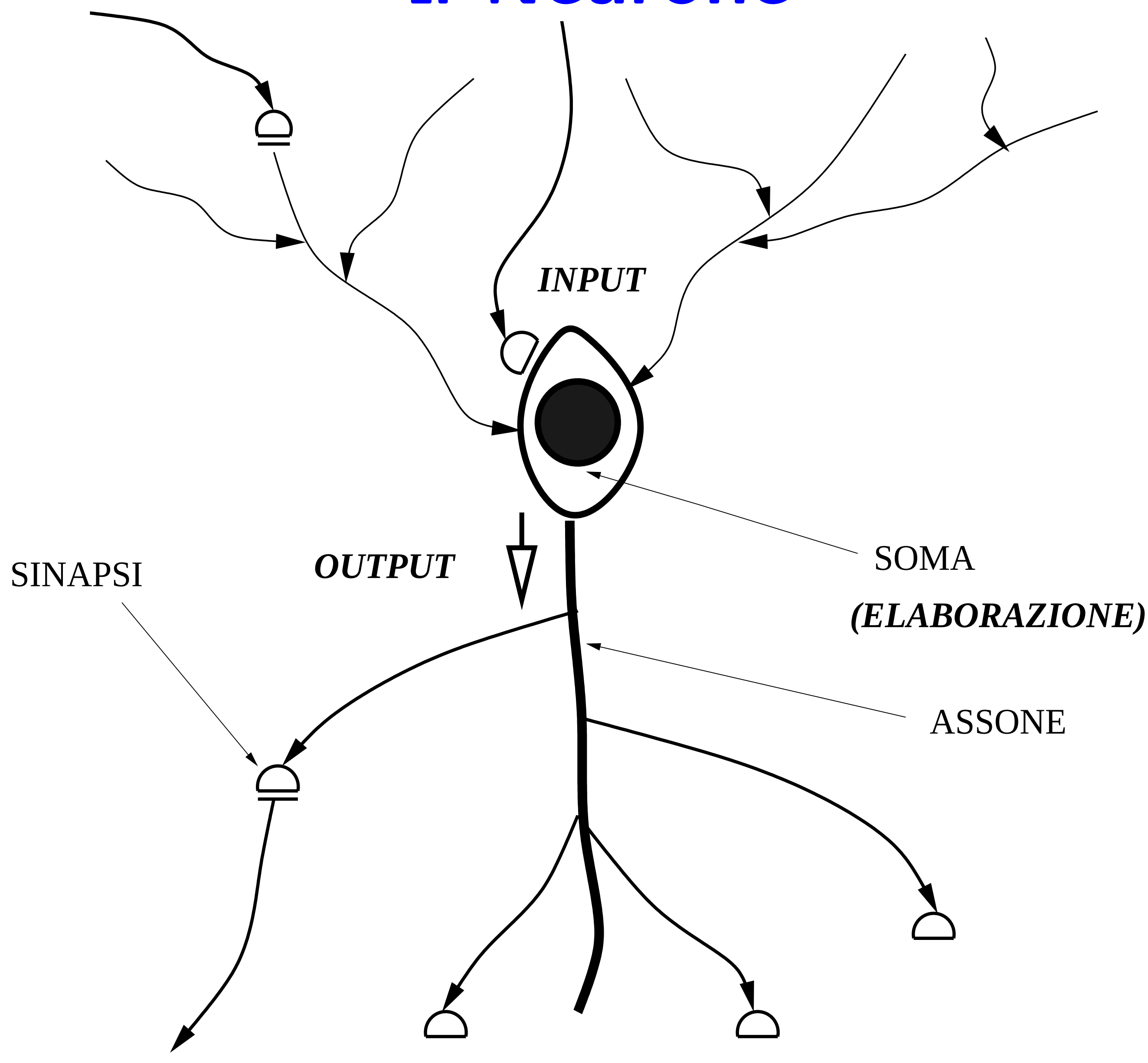
- Memoria associativa

  il problema degli attrattori

  Il modello di Hopfield

- Dinamica del riconoscimento

Il Neurone



Il potenziale di membrana di un neurone a riposo è $V_r \simeq -70mV$ (*pompa del sodio*: due ioni K^+ all'interno per tre Na^+ all'esterno). Quando è stimolato il neurone può depolarizzarsi e il potenziale di membrana raggiunge una intensità di picco $V_p \simeq +40mV$ (potenziale d'azione). Si genera cosí un'onda di depolarizzazione (impulso elettrico) che si propaga (1-100 m/s) lungo l'assone e si ramifica attraverso le sinapsi raggiungendo i dendriti o il soma di altri neuroni connessi. Il neurone si depolarizza se una opportuna somma pesata dei potenziali postsinaptici (circa 1 mV da ogni neurone presinaptico) che lo raggiungono supera una soglia specifica S, altrimenti non risponde allo stimolo.

Corteccia cerebrale: circa 10^{11} neuroni suddivisi in circa 10^7 "microreti", ognuna contenente circa 10^4 neuroni ed avente dimensione lineare di 1mm. Ogni neurone della microrete riceve input da quasi tutti gli altri neuroni componenti. La connettività tra microreti è minore.

Tra lo sparo di un neurone e la ricezione del segnale da parte dei neuroni ad esso connessi in uscita passa un intervallo di tempo τ di qualche millisecondo, durante il quale il neurone non può operare di nuovo: è il periodo refrattario assoluto. Dunque le "raffiche" di impulsi hanno frequenza limitata (meno di 1000 Hz).

Connessioni

- K_{ij}: efficacia sinaptica; misura il "peso" della connessione proveniente da j ed afferente ad i ($i, j = 1, \ldots, N$); $K_{ii} = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, N$: nessuna autointerazione del singolo neurone.

- $C(i)$: componente afferente ad i; è l'insieme dei neuroni connessi in ingresso al neurone i-esimo; nel caso $C(i) = \{1, \ldots, N\} \setminus \{i\}$ si ha connettività piena.

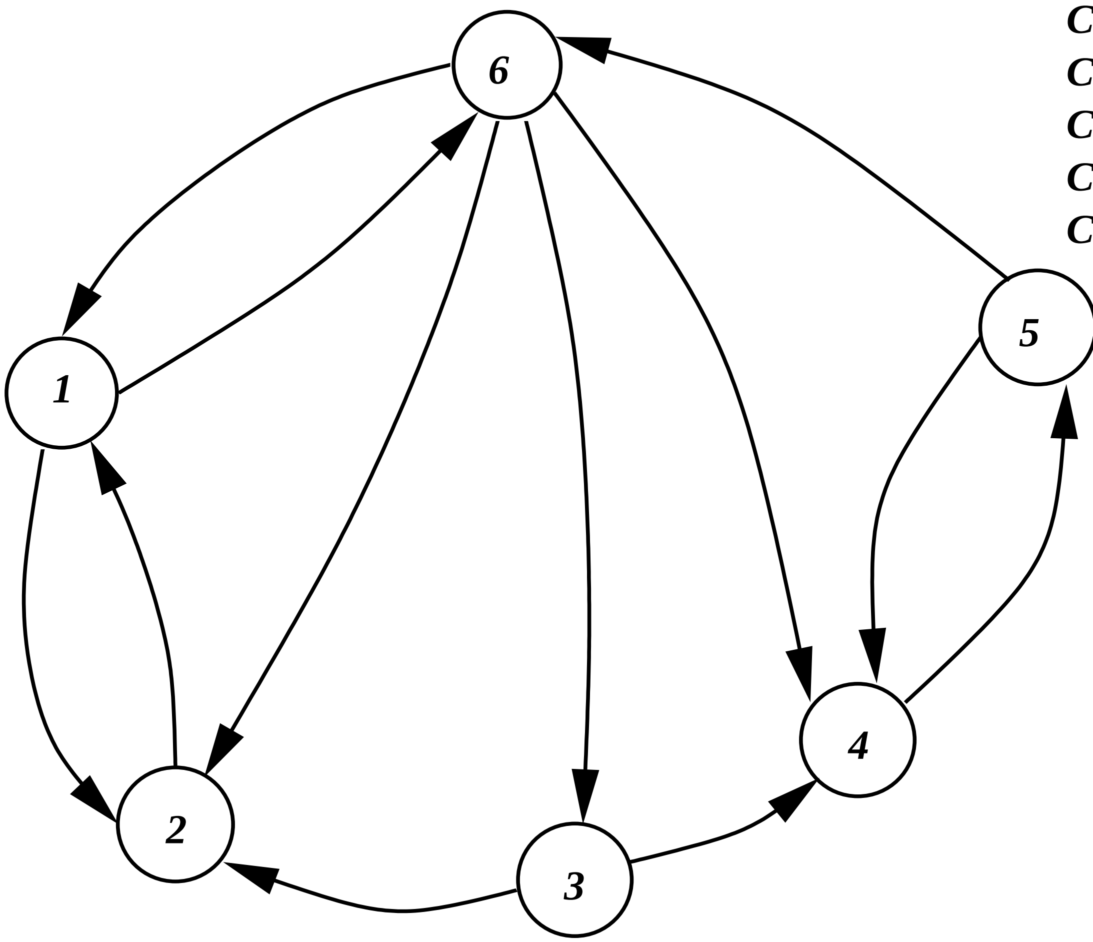
Attenzione: è bene tenere slegati matrice sinaptica e componente afferente

Esempio di rete

rete a 6 neuroni asimmetrica

2^6=64 configurazioni possibili

C(1)={2,6}
C(2)={1,3,6}
C(3)={6}
C(4)={3,5,6}
C(5)={4}
C(6)={1,5}



Modellizzazione

Sia $\Delta V_i = V_i - V_r$; $\Delta V_p = V_p - V_r \simeq 110mV$. Per $i = 1, \dots, N$ si ha

$$\Delta V_i(t + \tau) = \Delta V_p \ \theta(h_i(t))$$
$$h_i(t) \equiv \sum_{j \in C(i)} K_{ij} \Delta V_j(t) - S_i$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino: $\theta(x) = 1$ se $x > 0$ e $\theta(x) = 0$ se $x \leq 0$. Se $h_i(t) \leq 0$ $\Delta V_i(t + \tau) = 0$ e il neurone non risponde allo stimolo, mentre se $h_i(t) > 0$ allora $\Delta V_i(t + \tau) = \Delta V_p$ e il neurone "spara".

Conviene introdurre variabili dicotomiche simmetriche (o di "spin"), definite per ogni $i = 1, \dots, N$ da

$$\Delta V_i(t) \equiv \Delta V_p \frac{\sigma_i(t) + 1}{2} \ , \ \ \sigma_i(t) = 2\frac{\Delta V_i(t)}{\Delta V_p} - 1$$

Dunque: $\sigma_i(t) = +1$ se il neurone i risponde allo stimolo e spara, mentre $\sigma_i(t) = -1$ se lo stesso neurone non risponde allo stimolo (non è attivo).

In termini di variabili di spin $\sigma_i = \pm 1$ le equazioni del modello diventano

$$\sigma_i(t+\tau) = sign(h_i(t))$$
$$h_i(t) = \sum_{j \in C(i)} J_{ij}\sigma_j(t) - s_i$$

per $i = 1, \ldots, N$, dove $sign(x)$ è la funzione "segno di x" (nulla per $x = 0$) e

$$J_{ij} \equiv \frac{1}{2} K_{ij} \Delta V_p$$
$$s_i \equiv S_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in C(i)} K_{ij} \Delta V_p$$

ridefiniscono matrice sinaptica e soglia rispettivamente.

Una semplificazione ragionevole:

$$s_i = 0 \quad \text{cioè} \quad S_i = \frac{1}{2} \sum_{j \in C(i)} K_{ij} \Delta V_p$$

ovvero: la soglia S_i è metà di quello che il neurone i può ricevere se tutti gli afferenti sparano.

Il modello dinamico di rete è descritto da

$$\boxed{\sigma_i(t+\tau) = sign\left(\sum_{j\in C(i)} J_{ij}\sigma_j(t)\right)}$$

per $\underline{i = 1, \ldots, N}$. Se sono note la matrice sinaptica J_{ij} $(N \times N)$ e le componente afferente $C(i)$ di ogni neurone i, resta definita una mappa

$$\mathcal{S} : \{-1,+1\}^N \longrightarrow \{-1,+1\}^N : \boldsymbol{\sigma} \mapsto \mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma}]$$

Lo stato della rete al tempo $n\tau$ è dato dalla iterata n-esima di $\mathcal{S}$ calcolata nello stato iniziale $\boldsymbol{\sigma}(0)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(n\tau) = \mathcal{S}^n[\boldsymbol{\sigma}(0)] \equiv \overbrace{(\mathcal{S}\circ\cdots\circ\mathcal{S})}^{n\ volte}[\boldsymbol{\sigma}(0)]$$

Lo spazio degli stati $\{-1,+1\}^N$ può essere visualizzato come l'insieme dei vertici di un ipercubo N-dimensionale di spigolo lungo 2. Ad ogni iterata, ovvero ad ogni periodo di aggiornamento della rete si salta da un vertice ad un altro.

Per l'esempio di rete a 6 neuroni (v. figura):

$$\sigma_1(t+\tau) = sign[J_{12}\sigma_2(t) + J_{16}\sigma_6(t)]$$
$$\sigma_2(t+\tau) = sign[J_{21}\sigma_1(t) + J_{23}\sigma_3(t) +$$
$$+J_{26}\sigma_6(t)]$$
$$\sigma_3(t+\tau) = sign[J_{36}\sigma_6(t)]$$
$$\sigma_4(t+\tau) = sign[J_{43}\sigma_3(t) + J_{45}\sigma_5(t) +$$
$$+J_{46}\sigma_6(t)]$$
$$\sigma_5(t+\tau) = sign[J_{54}\sigma_4(t)]$$
$$\sigma_6(t+\tau) = sign[J_{61}\sigma_1(t) + J_{65}\sigma_5(t)]$$

Memoria ed attrattori

Problema Il modello deve includere una memoria contenente oggetti (parole, immagini, suoni...), ogni oggetto corrispondente ad un determinato stato di attività della rete:

un oggetto = stringa di N bit $= \xi_1, \ldots, \xi_N$

con $\xi_i = \pm 1$.

Evidentemente matrice sinaptica e memoria devono essere legate. Regola di Hebb:

$$\boxed{J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{p} \xi_i^{(\mu)} \xi_j^{(\mu)} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{p} \left[\boldsymbol{\xi}^{(\mu)} \left(\boldsymbol{\xi}^{(\mu)} \right)^T \right]_{ij}}$$

per $i \neq j$ e $C(i) = \{1, \ldots, N\} \setminus \{i\}$. Cioè p stringhe $\boldsymbol{\xi}^{(\mu)} = \xi_1^{(\mu)}, \ldots, \xi_N^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots, p)$ di N bit ciascuna determinano la matrice sinaptica e si ha connettività piena: **questo è il modello di Hopfield**.

Le stringhe $\boldsymbol{\xi}^{(\mu)}$ che determinano la matrice sinaptica sono attrattori per il sistema dinamico <u>se</u>

$$\boldsymbol{\sigma}(n\tau) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{\xi}^{(\nu)}$$

per qualche $\nu = 1, \ldots, p$ che dipende dallo stato iniziale $\boldsymbol{\sigma}(0)$ della rete. In questo caso parliamo di memoria associativa:

ad una classe di stati iniziali di attività viene associato (dalla dinamica) uno stesso stato di attività asintotico della rete, stato che quindi rappresenta la classe di dati di partenza.

Il modello matematicamente piú ''semplice'' da trattare è quello in cui $\xi_i^{(\mu)}$ e $\xi_j^{(\nu)}$ sono variabili aleatorie indipendenti (per $i \neq j$ e/o $\mu \neq \nu$) e suscettibili di assumere i valori ± 1 con la stessa probabilità a priori. In questo caso il riconoscimento ha ovvio carattere probabilistico.

Dinamica I

Un teorema di Lyapunov

Se $J_{ij} = J_{ji}$ *e* $C(i) = \{1, \ldots, N\} \setminus \{i\}$ *allora* $\boldsymbol{\sigma}(n\tau) = \mathcal{S}^n[\boldsymbol{\sigma}(0)]$ *tende, per* $n \to \infty$*, ad un punto fisso di* $\mathcal{S}$ *oppure ad un ''ciclo binario'' (orbita periodica di periodo* 2τ*).*

Dimostrazione Definiamo, per $t \geq \tau$,

$$E(t) \equiv -\sum_{i \neq j} J_{ij} \sigma_i(t) \sigma_j(t-\tau)$$

$E(t) \geq -N(N-1) \sup_{ij}\{|J_{ij}|\}$. Inoltre

$$E(t+\tau) - E(t) = -\sum_i [\sigma_i(t+\tau) - \sigma_i(t-\tau)] \times$$
$$\times \sum_{j(\neq i)} J_{ij} \sigma_j(t) \leq 0$$

e il segno di uguaglianza vale se e solo se $\sigma_i(t+\tau) = \sigma_i(t-\tau)$ per ogni i.

Dinamica II

Riconoscimento ad un passo per Hopfield random

Sia $\sigma_i(0) = \varepsilon_i \xi_i^{(\nu)}$, dove $\varepsilon_i = -1$ con probabilità $q < 0.5$ e $\varepsilon_i = 1$ con probabilità $1-q$ (meno del 50% dei bit di partenza sbagliati rispetto alla stringa ν). Indichiamo con $\mathcal{E}_N$ l'evento $\boldsymbol{\sigma}(\tau) = \boldsymbol{\xi}^{(\nu)}$ ad N fissato. Allora esiste una costante $g(q) > 0$ tale che se

$$\lim_{N\to\infty} N e^{-g(q)N/p} = 0$$

allora

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Pr}(\mathcal{E}_N) = 1$$

Inoltre, se

$$\sum_{N=0}^{\infty} N e^{-g(q)N/p} < \infty$$

allora

$$\exists\ N_0 > 0 \mid \mathrm{Pr}(\mathcal{E}_N) = 1 \ \ \forall\ N > N_0$$

- D. J. Amit, *Modellizzare le funzioni del cervello*, Cedam, Padova, 1995.

- B. Tirozzi, *Modelli matematici di reti neurali*, Cedam, Padova, 1995.

- J. J. Hopfield, Brain, neural networks, and computation, Review of Modern Physics **71** S431 (1999).