Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 4
28 ottobre 2014

1. Si usi l'anello $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ per dimostrare che un numero intero è un multiplo di 3 se e solo se lo è la somma delle sue cifre. *(4 punti)*

2. Sia p un numero primo. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}_p = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ p \text{ non divide } n\}$. Si verifichi che:

   (a) $\mathbb{Z}_p$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

   (b) $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}_p$ è invertibile se e solo se p non divide m.

   (c) L'insieme M degli elementi non invertibili è un ideale di $\mathbb{Z}_p$. È principale?

   (d) M è un ideale massimale di $\mathbb{Z}_p$.

   (6 punti)

3. Siano $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ e $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + i\,b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'insieme dei numeri *interi di Gauss*. Sia inoltre $\delta : R \to \mathbb{N}_0,\ x = a + i\,b \mapsto \mid x \mid^2 = a^2 + b^2$.

   (a) Si verifichi che R è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

   (b) Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si trovi $q \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $\mid z - q \mid^2 \leq \frac{1}{2}$.

   (c) Si dimostri che (R, δ) è un anello euclideo.

   (d) Si determini l'insieme degli elementi invertibili R^*.

   (*8 punti*)

4. Sia R un dominio. Un ideale P di R si dice *primo* se $ab \in P$ implica $a \in P$ oppure $b \in P$.

   (a) Si dimostri che un ideale P di R è primo se e solo se R/P è un dominio di integrità.

   (b) Si dimostri che ogni ideale massimale è un ideale primo

   (c) Si dimostri che ogni dominino finito è un campo (sugg. dato $a \neq 0$ si consideri l'applicazione $R \to R$, $x \mapsto ax$)

   (d) Se R è dominio finito ogni ideale primo è un ideale massimale

   (8 punti)

5. Si consideri il polinomio $f(x) = x^4 - 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.

   (a) Si determini il massimo comun divisore di f e $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

   (b) Si verifichi che $x^2 - 2 + (f)$ è invertibile in $\mathbb{Q}[x]/(f)$ e se ne trovi l'inverso

   (4 punti)

6. **Teorema Cinese dei Resti:**

   (a) Siano $n, m \in \mathbb{N}$ primi tra loro. Si dimostri che l'applicazione

   $$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ x \mapsto (x + n\mathbb{Z}, x + m\mathbb{Z})$$

   induce un isomorfismo

   $$\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

   (b) Siano $n, m \in \mathbb{N}$ primi tra loro. Dati $a, b \in \mathbb{Z}$, si trovi $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x + n\mathbb{Z} = a + n\mathbb{Z}$ e $x + m\mathbb{Z} = b + m\mathbb{Z}$ (si ricordi che la classe di resto $n + m\mathbb{Z}$ è invertibile in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e la classe di resto $m + n\mathbb{Z}$ è invertibile in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$!)

   (c) Si risolva il problema di Sun-Tsu (Cina, I secolo a.C.): si determini un numero naturale x con resto 2 se diviso per 3, resto 3 se diviso per 5, e resto 2 se diviso per 7.

(**)

Consegna: mercoledì 5 ottobre durante la lezione.