

## Esercizi per il Corso di ALGEBRA

### Foglio 3

20 ottobre 2015

1. **(3 punti)** Sia  $G$  un gruppo e  $H$  un sottogruppo di  $G$ . Si dimostri che se l'indice di  $H$  in  $G$  è 2, allora  $H$  è un sottogruppo normale di  $G$ .
2. Sia  $D_n$  ( $n \geq 3$ ) il gruppo formato dalle isometrie del piano che lasciano immutati i poligoni regolari a  $n$  lati.
  - (a) **(4 punti)** Si dimostri che  $D_n$  ha  $2n$  elementi e che  $D_n$  è generato da una riflessione e una rotazione di angolo  $2\pi/n$ .
  - (b) Si consideri il sottogruppo  $H$  di  $S_4$  generato dagli elementi  $(1234)$  e  $(12)(34)$ .
    - i. **(3 punti)** Si calcolino tutti gli elementi di  $H$ .
    - ii. **(4 punti)** Si dimostri che  $H$  è isomorfo a  $D_4$ .
3. Si dimostri che i seguenti gruppi sono risolubili:
  - (a) **(4 punti)** il gruppo simmetrico su 4 oggetti  $S_4$ ;
  - (b) **(4 punti)** il gruppo  $G \times H$ , se  $G$  e  $H$  sono gruppi risolubili;
  - (c) **(4 punti)** il gruppo  $T_n(\mathbb{C})$  delle matrici triangolari superiori  $n \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{C}$ ;
  - (d) **(4 punti)** il gruppo diedrale  $D_n$ , per ogni  $n \geq 3$ . (**Suggerimento:** Si consideri il sottogruppo generato dalla rotazione di angolo  $2\pi/n$ .)

**Consegna: martedì 27 ottobre, 15:30, all'inizio delle esercitazioni.**