EX. 1

Si definiscono i seguenti eventi

B = {il pezzo prodotto è buono}

LD = {il pezzo prodotto è leggermente difettoso}

D = {il pezzo prodotto è evidentemente difettoso}

$\Rightarrow P(B) = 0.9; \; P(LD) = 0.02; \; P(D) = 0.08$

$\Rightarrow$ l'esercizio chiede di calcolare la prob. che un pezzo sia buono, dato che ha superato il controllo della macchina:

$$P(B \mid \bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(B)}{1 - P(D)} = \frac{0.9}{1 - 0.08} \simeq 0.978 \quad \blacksquare$$

EX. 2

Risposta "ovvia": la prob. vale $\frac{1}{2}$. SBAGLIATO!

Siano M = {figlio maschio}, F = {figlio femmina} i due esiti considerati; in questo caso, poiché ci sono 2 bambini in famiglia, lo spazio campionario è

$$\Omega = \{MM, MF, FM, FF\}$$

Oltretutto, la traccia non ci dice se Francesco sia il primo o il secondo figlio dei nostri vicini.

Assumiamo che la nascita di un maschietto e quella di una femminuccia siano eventi equiprobabili.

Definiamo:

$A = \{$ i vicini hanno due maschietti $\} = \{MM\}$

$B = \{$ i vicini hanno almeno un maschietto $\} = \{MM, MF, FM\}$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{MM\} \cap \{MM, MF, FM\})}{P(\{MM, MF, FM\})}$$

$$= \frac{P(\{MM\})}{P\{MM, MF, FM\})} = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

EX. 3

Definiamo due eventi:

$D_1 = \{$ estraiamo una batteria scarica al primo tentativo $\}$

$D_2 = \{$ estraiamo una batteria scarica al secondo tentativo $\}$

$$\Rightarrow P(D_1 \cap D_2) \underset{\substack{\text{formula della} \\ \text{moltiplicazione}}}{=} P(D_1) \cdot P(D_2 | D_1)$$

Ora, $P(D_1) = \dfrac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \dfrac{2}{7}$

$P(D_2|D_1) = \dfrac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \dfrac{1}{6}$, perché non c'è reinserimento

$$\Rightarrow P(D_1 \cap D_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21} \quad \blacksquare$$

Ex. 4

$U_1 = 5B + 7R \ ; \quad U_2 = 3B + 12R$

$P(U_1) = P(\text{testa}) = \frac{1}{2} \ ; \quad P(U_2) = P(\text{croce}) = \frac{1}{2}$

$P(\text{croce} \mid B) = \ ?$

Si usa la formula di Bayes:

$$P(\text{croce} \mid B) = \frac{P(B \mid \text{croce}) \cdot P(\text{croce})}{P(B)} = \frac{P(B \mid U_2) \cdot P(U_2)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{3}{15} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{15} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{5} \right)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{25+12}{60}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{37}{60}} \simeq 0.324 . \ \blacksquare$$

Ex. 5

Siano $A = \{$una persona estratta a caso è allergica$\}$ e

$T = \{$una persona estratta a caso è positiva al test$\}$

Dai dati si ricava che

$P(A) = 0,5$

$P(\text{falso negativo}) = P(\overline{T} \mid A) = 0,02 \Rightarrow P(T \mid A) = 1 - P(\overline{T} \mid A) = 0.98$

$P(\text{falso positivo}) = P(T \mid \overline{A}) = 0.03$

(a) $P(T) = P(T \mid A) \cdot P(A) + P(T \mid \overline{A}) \cdot P(\overline{A})$

$= 0.98 \cdot 0.5 + 0.03 \cdot (1 - 0.5)$

(b) $P(A \mid T) = \dfrac{P(T \mid A) \cdot P(A)}{P(T)} = \dfrac{0.98 \cdot 0.5}{\ }$

EX. 6

Risolviamo il caso per $n=3$ porte, poi generalizziamo.

$\Rightarrow$ 1 AUTO, 2 capre

$A_i = \{$l'auto è dietro la porta $i\}$, $\forall i=1,2,3$, con $P(A_i) = \frac{1}{3}$, $i=1,2,3$

$O = \{$presentatore apre la porta 2$\}$

$\Rightarrow$ dobbiamo verificare se $P(A_1|O) = P(A_3|O)$.

$\Rightarrow$ usiamo la formula di Bayes.

$$P(A_i|O) = \frac{P(O|A_i)\cdot P(A_i)}{P(O)}, \quad \forall i=1,3.$$

Dunque:

$$P(O|A_i) = \begin{cases} 1/2, & \text{se l'auto è nella porta 1, il presentatore potrebbe aprire la porta 2 o la porta 3.} \\ 0, & \text{se l'auto è dietro alla porta 2} \\ 1, & \text{se l'auto è dietro alla porta 3, il presentatore è costretto ad aprire la porta 2.} \end{cases}$$

Inoltre: $O = (O\cap A_1)\cup(O\cap A_2)\cup(O\cap A_3)$ (eventi esaustivi ed esclusivi)

$$\Rightarrow P(O) = P(O|A_1)\cdot P(A_1) + P(O|A_2)\cdot P(A_2) + P(O|A_3)\cdot P(A_3)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A_1|O) = \frac{P(O|A_1)\cdot P(A_1)}{P(O)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_3|O) = \frac{P(O|A_3)\cdot P(A_3)}{P(O)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 2\cdot P(A_1|O)$$

$\Rightarrow$ Cambiando la scelta, le prob. di vittoria raddoppiano.

Se abbiamo $n=5$ porte ed il presentatore ne apre una, dopo la scelta del concorrente, le chances di vittoria del concorrente sono $\frac{1}{n} = \frac{1}{5}$ se non cambia e $\frac{n-1}{n} = \frac{4}{5}$ se decide di cambiare.

E.X. 7

Definiamo i seguenti eventi:

$A_1 = \{$voto A al primo turno$\}$ $\Rightarrow P(A_1) = 0.45$

$A_2 = \{$voto A al secondo turno$\}$

$B_1 = \{$voto B al primo turno$\}$ $\Rightarrow P(B_1) = 0.55$

$B_2 = \{$voto B al secondo turno$\}$

$E = \{$cambio voto al secondo turno$\}$

$$\Rightarrow P(E|A_1) = 0.1 \,, \quad P(E|B_1) = 0.2$$

Per sapere chi, secondo gli exit poll, ha vinto la seconda tornata elettorale, basterà calcolare la prob. di A_2 (o di B_2) e vedere se supera il 50%.

$$P(A_2) = P((A_1 \cap \bar{E}) \cup (B_1 \cap E)) = P(A_1 \cap \bar{E}) + P(B_1 \cap E)$$

$$= P(\bar{E}|A_1) \cdot P(A_1) + P(E|B_1) \cdot P(B_1)$$

$$\cancel{= P(A_1) P(} = P(A_1) \cdot [1 - P(E|A_1)] + P(B_1) \cdot P(E|B_1)$$

$$= 0.45 (1 - 0.1) + 0.55 \cdot 0.2 = 0{,}515 > 0{,}5$$

$\Rightarrow$ il vincitore del secondo turno secondo gli exit poll, è il polo A. $\boxtimes$

EX. 8

$M_A = \{ \text{estraggo a caso dal mazzo } A \}$, $|M_A| = 52$

$M_B = \{ \text{estraggo a caso dal mazzo } B \}$, $|M_B| = 52 - 12 = 40$

$E = \{ \text{estraggo un asso} \}$

Poiché si estrae a caso, $P(M_A) = P(M_B) = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow P(M_B|E) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(E|M_B) \cdot P(M_B)}{P(E)} = \frac{P(E|M_B) \cdot P(M_B)}{P(E|M_B) \cdot P(M_B) + P(E|M_A) \cdot P(M_A)},$$

dove

$$P(E|M_B) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \; ; \; P(E|M_A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\Rightarrow P(M_B|E) = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{10}}{\cancel{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{13} \right)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{13+10}{130}}$$

$$= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{23}{130}} = \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \frac{13\cancel{0}}{23} \simeq 0.5652 \quad \boxed{}$$

EX. 9

Siano

$A = \{$ prodotto fornito dalla ditta $A\}$; $P(A) = P(B)$

$B = \{$ prodotto fornito dalla ditta $B\}$,

$D = \{$ prodotto difettoso$\}$.

Dai dati si ricava che:

$$P(A|D) = 0.25 \; ; \; P(D|A) = 0.05$$

$$\Rightarrow P(D|B) = ?$$

Per la formula di Bayes, si ha:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B)}$$

$$\Rightarrow 0.25 = \frac{0.05 \cdot \frac{1}{2}}{0.05 \cdot \frac{1}{2} + P(D|B) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{0.05 \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\left(0.05 + P(D|B)\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{0.05 + P(D|B)}{0.05} = \frac{1}{0.25} \Rightarrow P(D|B) = \frac{0.05}{0.25} - 0.05$$

$$\Rightarrow P(D|B) = 0.15 \quad \boxed{\equiv}$$

EX. 10

Abbiamo:

$P(X_1) = 0.75$, $P(Y_1) = 0.70$, $P(Y_0|X_1) = 0.08$

(a) $P(Y_1|X_0) = ?$

Sappiamo che $P(Y_1) = P((Y_1 \cap X_1) \cup (Y_1 \cap X_0))$

$= P(Y_1 \cap X_1) + P(Y_1 \cap X_0) = P(Y_1|X_1) \cdot P(X_1) + P(Y_1|X_0) \cdot P(X_0)$

$\Rightarrow P(Y_1) = [1 - P(Y_0|X_1)] \cdot P(X_1) + P(Y_1|X_0) \cdot \cancel{P(X_0)} [1 - P(X_1)]$

$\Rightarrow 0.7 = (1 - 0.08) \cdot 0.75 + P(Y_1|X_0) \cdot (1 - 0.75)$

$\Rightarrow 0.7 = 0.92 \cdot 0.75 + P(Y_1|X_0) \cdot 0.25$

$$\Rightarrow P(Y_1|X_0) = \frac{0.7 - (0.92 \cdot 0.75)}{0.25} = 0.04.$$

(b) $E = \{\text{ricevuto errore}\} = \{(X_0 \cap Y_1) \cup (X_1 \cap Y_0)\}$

$\Rightarrow P(E) = P(X_0 \cap Y_1) + P(X_1 \cap Y_0) = P(Y_1|X_0) \cdot P(X_0) + P(Y_0|X_1) \cdot P(X_1)$

$= 0.04 \cdot 0.25 + 0.08 \cdot 0.75 = 0.07$ ▪

EX. 11

I dati sono i seguenti:

$$P \in \{1,2\}; \quad D \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}; \quad A \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

$$SQUADRA = 1P + 5D + 5A$$

a.) Determiniamo in quanti modi possiamo scegliere gli undici giocatori:

$$|P| = C_{2,1} = \binom{2}{1} = 2$$

$$|D| = C_{8,5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 56$$

$$|A| = C_{12,5} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\,7!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \cancel{7!}} = 792$$

$$\Rightarrow |SQUADRA| = |P| \cdot |D| \cdot |A| = 2 \cdot 56 \cdot 792 = 88'704$$

b) Fissiamo due attaccanti, dunque:

$$|P| = C_{2,1} = 2$$

$$|D| = C_{8,5} = 56$$

$$|A| = C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{7!}} = 120$$

$$\Rightarrow |SQUADRA| = |P| \cdot |D| \cdot |A| = 2 \cdot 56 \cdot 120 = 13'440$$

c) Fissiamo un difensore ed un attaccante, dunque:

$$|P| = C_{2,1} = 2; \quad |D| = C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\,3 \cdot 2} = 35$$

$$|A| = C_{11,4} = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\,7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cancel{7!}} = 330$$

$$\Rightarrow |SQUADRA| = |P| \cdot |D| \cdot |A| = 2 \cdot 35 \cdot 330 = 23'100 \quad \blacksquare$$

EX. 12 (11)

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Estraiamo 3 biglie (senza reinserimento).

a) $\left|\overset{\{a,b,c\}}{\text{TERNE}}\right| = D_{6,3} = \frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$

b) $|\{a, 2, c\}| = D_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$

c) $\left|\{a,b,c\} \text{ che contengono } 2\right| = 3 \cdot D_{5,2} = 3 \cdot 20 = 60$ [a = 2 e b, c assumono altri valori oppure b = 2 e a, c assumono altri valori oppure c = 2 e a, b assumono altri valori]

d) $|\{a,b,c\}|_{\text{con reinserimento}} = D'_{6,3} = 6^3 = 216$

$|\{a, 2, c\}| = D'_{6,2} = 6^2 = 120$

$\left|\{a,b,c\} \text{ che contengono } 2\right| = \left(\begin{array}{c}\#\text{ Terne} \\ \text{ordinate}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\#\text{ Terne che} \\ \text{non contengono } 2\end{array}\right)$

$= D'_{6,3} - D'_{5,3} = 216 - 5^3 = 216 - 125 = 91.$

e) $\left|\{a,b,c\}_{\text{ordinate}}\right| = C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,\cancel{3\cdot 2}} = 20$

$\left|\{a,b,c\} \text{ ordinate che contengono il } 2\right| = C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\,\cancel{3\cdot 2}} = 10.$ $\boxed{\equiv}$