Esercizi – superfici

Esercizio 1. *Sia $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare piana semplice e chiusa con velocità unitaria. Siano $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa$ i dati di Frenet di γ. Sia $R > 0$ un numero reale fissato tale che $R < \frac{1}{\kappa(s)}$ per ogni $s \in [0,T]$. Sia $f : [0,T] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da*

$$f(s,\theta) = \gamma(s) + R(\cos\theta \mathbf{N}(s) + \sin\theta \mathbf{B}(s))$$

e sia S la superfice parametrizzata da f.

1. *Calcolare la prima forma fondamentale di S.*
2. *Trovare una mappa di Gauss $\mathbf{n}$ per S.*
3. *Calcolare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Calcolare la curvatura gaussiana K di S.*
5. *Calcolare le curvature principali di S.*
6. *Sia $S_+ \subset S$ il sottoinsieme di S dove la curvatura gaussiana $K > 0$. Calcolare $\iint_{S_+} K dS$.*

Esercizio 2. *Poniamo*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 < z < 1\},$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2, z > 0\},$$

e $h : (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$ un'applicazione differenziabile strettamente crescente. Sia $\Phi : S \to C$ l'applicazione definita da

$$\Phi(x,y,z) = h(z) \left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, 1 \right)$$

1. *Far vedere che Φ è un'applicazione differenziabile.*
2. *È possibile determinare la funzione h in modo che l'applicazione Φ trasformi i meridiani di S in curve di lunghezza finita su C?*
3. *È possibile determinare la funzione h in modo che Φ sia una isometria locale?*

Esercizio 3. *Sia $g : \mathbb{R}^2 \to R$ una funzione di classe C^∞. Sia $R \subset \mathbb{R}^2$ una regione compatta. Dimostrare che l'area del grafico di g determinata dalla regione R è data da*

$$\iint\limits_R \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dxdy$$

Esercizio 4. *Sia $S = \{(x,y,xy) | x,y \in \mathbb{R}\}$.*

1. *Dimostrare che S è una superficie regolare.*
2. *Calcolare la prima forma fondamentale di S.*
3. *Calcolare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Calcolare la curvatura gaussiana di S.*
5. *Trovare le curve su S che hanno la curvatura normale nulla in ciascun punto.*

Esercizio 5. *Sia α una curva regolare nel piano xz. Sia S la superficie di revoluzione generata ruotando α intorno all'asse z. Supponiamo che $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ sia una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco. (Quindi $\dot{x}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1$). La matrice che rappresenta rotazione attorno all'asse z per l'angolo θ è*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

percui S ha una parametrizzazione

$$\varphi(s,\theta) = R_\theta \alpha(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)x(s) \\ \sin(\theta)x(s) \\ z(s) \end{bmatrix}$$

Fissato θ, la curva $\{R_\theta\alpha(s) | s \in [a,b]\}$ che è l'immagine di α tramite la rotazione R_θ si dice un meridiano *di S. Fissato $s \in [a,b]$, la circonferenza $\{R_\theta\alpha(s) | \theta \in [0, 2\pi]\}$ si dice* un parallelo *di S.*

1. *Trovare la prima forma fondamentale di S.*
2. *Trovare una mappa di Gauss $\mathbf{n} : S \to S^2$.*
3. *Trovare la seconda forma fondamentale di S.*
4. *Mostrare che una direzione principale è tangente al parallelo passante per p, e l'altra direzione principale in p è tangente al meridiano passante per p.*
5. *Mostrare che la curvatura Gaussiana di S in $p = \varphi(s,\theta)$ è $K = \frac{\ddot{x}(s)}{x(s)}$.*

Esercizio 6. *Sia S il grafico di una funzione $f : U \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$. Mostrare che la curvatura Gaussiana di S in $p = (x, y, f(x,y))$ è*

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

dove $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ecc.

Il numeratore è il determinante della matrice $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ che si chiama la matrice Hessiana *di f.*

Esercizio 7. *Siano $S_1 = \{(u\cos v, u\sin v, \ln u) | u > 0, v \in \mathbb{R}\}$ e $S_2 = \{(u\cos v, u\sin v, v) | u > 0, v \in \mathbb{R}\}$ due superfici parametrizzate.*

1. *Mostrare che la mappa $\Phi : S_1 \to S_2$ data da $\Phi(u\cos v, u\sin v, \ln u) = (u\cos v, u\sin v, v)$ è un diffeomorfismo.*
2. *Mostrare che la curvatura Gaussiana di S_2 in $\varphi_2(u,v)$ è uguale alla curvatura Gaussiana di S_1 in $\varphi_1(u,v)$.*
3. *Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0, 2\pi] \to S_1$ data da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.*
4. *Calcolare la lunghezza della curva $\Phi \circ \gamma : [0, 2\pi] \to S_2$ data da $\Phi \circ \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.*
5. *Concludere che Φ non è un'isometria. Questo esempio mostra che la conversa al Teorema Egregium non vale.*

Esercizio 8. *Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da*

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

Per $t \in \mathbb{R}$, sia C_t il cerchio di centro $\gamma(u)$ e raggio 1 sul piano per $\gamma(u)$ parallelo al piano (y,z). Poniamo

$$S = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} C_t$$

1. *Trovare una parametrizzazione di S e discuterne la regolarità.*
2. *Trovare un polinomio $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $S = F^{-1}(0)$.*

3. *È vero o falso che S è una superfice liscia?*

4. *Calcolare la curvatura normale di C_0 considerata come curva su S.*

Esercizio 9. *Sia $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Si consideri la parametrizzazione $f : U \to \mathbb{R}^3$ definita da*

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u).$$

1. *Trovare una isometria di S (con la metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$) su una regione del piano euclideo.*

2. *Calcolare curvature e direzioni principali di f.*