Diario delle lezioni di Geometria
A.A. 2012/2013

Nicola Sansonetto*

30 maggio 2013

Le dimostrazioni delle proposizioni o dei teoremi, se non espressamente indicato, sono parte del programma.

- **Lezione 1.** *Lunedì 4 marzo 2013.* Presentazione del corso. Discorso introduttivo sulla topologia: esigenza sugli spazi topologici. Definizione di spazio topologico, topologie metrizzabili, topologia banale e topologia discreta di un insieme X. La topologia superiore e la topologia inferiore della retta. La topologia di Sorgenfrey per la retta.

- **Lezione 2.** *Mercoledì 6 marzo 2013.* Strutture topologiche di base: chiusi, chiusura, interno, esterno, frontiera, punti di accumulazione e punti isolati. Esempi in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$. Topologia indotta con esempi. Topologia prodotto, esempio di $\mathbb{R}^2$. Base per la topologia, il caso di $\mathbb{R}$ con la topologia usuale. Sottoinsiemi densi. Spazi di Hausdorff: il caso di $\mathbb{R}$ e degli spazi metrici. Definizione di funzioni continua: discussione sul caso delle funzioni reali di variabile reale.

- **Lezione 3.** *Lunedì 18 marzo 2013.* Funzioni continue tra spazi metrizzabili, il seno del topologo. Continuità e pre–immagine (prei–immagini di aperti e chiusi, rispettivamente, sono aperte e chiuse); composizioni e restrizioni di funzioni continue. Le proiezioni canoniche da uno spazio prodotto sono continue e aperte. Omeomorfismi: esempio di funzione continua e invertibile che non è omeomorfismo. Spazi compatti: ricoprimenti e ricoprimenti aperti e ricoprimenti finiti. Proprietà degli spazi compatti, immagini continue di compatti sono compatti.

- **Lezione 4.** *Lunedì 25 marzo 2013.* Thm di Weierstrass, Thm di Tychonoff (senza dimostrazione) e Thm di Heine-Pincherle-Borel. Spazi connessi: idea generale, definizione di chiusaperto e di spazio connesso; semplici esempi e implicazioni coinvolgenti chiusura e frontiera. Definizione equivalente di connessione. I connessi di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli, immagini connesse di connessi sono connesse e spazi omeomorfi a spazi connessi sono connessi.

- **Lezione 5.** *Mercoledì 27 marzo 2013.* La chiusura di un connesso è connessa (senza dimostrazione) e unione di connessi la cui intersezione è non vuota è connessa. Componenti connesse. Connessione per archi, immagini continue di connessi per archi sono connessi per archi e spazi omeomorfi a connessi per archi sono connessi per archi. Il Thm del passaggio della dogana e come conseguenza il fatto che la connessione per archi implica la connessione. Il seno del topologo come esempio del fatto che la connessione è un concetto più generale della connessione per archi. Equivalenza della connessione per archi con la connessione negli spazi localmente euclidei. Topologia quoziente ed esempi significativi.

- **Lezione 6.** *Lunedì 8 aprile 2013.* Introduzione alla teoria delle curve in $\mathbb{R}^n$. Curve parametriche, significato cinematico del parametro. Sostegno di una curva e sua rappresentazione: equazioni parametriche ed equazione implicita. Esempi: la retta e il cerchio. Vettore tangente e curve regolari. Significato geometrico della regolarità. La regolarità implica la locale iniettività, ma non l'iniettività globale: il folium di Cartesio. La lunghezza di una curva (richiami)

*Dipartimento di Informatica Università degli Studi di Verona, Ca' Vignal 2, Strada le Grazie 14, 37134 Verona. e-mail: nicola.sansonetto@univr.it

e la lunghezza d'arco. Applicazione alla spirale logaritmica. Diffeomorfismi e riparamettrizzazione di una curva. Proprietà del parametro d'arco. La parametrizzazione canonica di una curva regolare.

- **Lezione 7.** *Mercoledì 10 aprile 2013.* Significato geometrico del parametro d'arco e versore tangente $\vec{t}$. Sostanziale unicità del parametro d'arco e curve con velocità unitaria. Parametrizzazione canonica della spirale logaritmica, dell'elica circolare e della spirale di Cornu: cenni agli integrali ellittici. Curvatura delle curve: aspetti intuitivi e fisici del concetto di curvatura, proprietà desiderate. Definizione geometrica di curvatura per curve parametrizzate con il parametro d'arco: $\kappa_p(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$. Curvatura e norma della derivata seconda della parametrizzazione canonica. Definizione generale di curvatura di una curva con parametrizzazione generica. Espressione della curvatura di una curva con parametrizzazione generica e particolarizzazione al caso di curve spaziali e piane.

- **Lezione 8.** *Lunedì 15 aprile 2013.* Curvatura delle curve piane. Indipendenza della curvatura dalla parametrizzazione nota la riparametrizzazione (diffeomorfismo) ϕ. Il versore normale $\vec{n}$ e la curvatura con segno. Formule di Frenet–Serret e sistema mobile intrinseco di Frenet–Serret. Interpretazione geometrica della curvatura con segno e turning angle (approccio geometrico e algebrico). Teorema fondamentale delle curve piane e relative conseguenze.

- **Lezione 9.** *Mercoledì 17 aprile 2013.* Esercizi: le curve a curvatura costante sono i cerchi. Le curve con curvatura con segno lineare: la spirale di Cornu. La spirale logaritmica: calcolo della curvatura in vari metodi differenti. Tangente e normale in un punto ad una curva. Il cerchio osculatore: raggio e centro di curvatura. Cerchio osculatore e relativa interpretazione cinematica legata al moto circolare. Evoluta ed evolvente di una curva regolare. La tangente all'evoluta è normale alla sua evolvente. Significato geometrico dell'evolvente. Il caso dell'ellisse. Curve piane in coordinate polari, differenziale d'arco in coordinate polari. Parametrizzazione cartesiana di una curva e relativo differenziale d'arco.

- **Lezione 10.** *Lunedì 22 aprile 2013.* Curve in $\mathbb{R}^3$. Il versore binormale $\vec{b}$ e il triedro di Frenet–Serret per curve con velocità unitaria. Insufficienza della curvatura per identificare una curva: il caso dell'elica circolare. Curve piane e versore binormale: la torsione di una curva con velocità unitaria. Formule di Frenet–Serret. La torsione per l'elica circolare.

- **Lezione 11.** *Mercoledì 24 aprile 2013.* Piano osculatore, piano normale e piano rettificante. Formula della torsione per una curva con parametrizzazione generica. Teorema fondamentale delle curve nello spazio (senza dimostrazione). Applicazioni del teorema fondamentale. Esempi.

- **Lezione 12.** *Venerdì 26 aprile 2013.* Condizione di piattezza di una curva. Curve sferiche. Triedro di Frenet–Serret per curve con parametrizzazione generica. Esercizi.

- **Lezione 13.** *Lunedì 29 aprile 2013.* Esercizi in preparazione al compito.

- **Lezione 13.** *Lunedì 6 maggio 2013.* Fine dell'esercizio sull'applicazione del teorema f ondamentale delle curve nello on $\mathbb{R}^3$. Introduzione qualitativa al concetto di supercifie in $\mathbb{R}^3$. Definizione di superficie parametrica: condizione topologica e cenno al concetto di superficie topologica, condizione differenziale e condizione di regolarità sul differenziale della parametrizzazione. Discussione sulle condizioni: iniettività del differenziale, rango della matrice jacobiana e linee coordinate e piano tangente. Condizione di regolarità in $\mathbb{R}^3$. Definizione di atlante.

- **Lezione 14.** *Mercoledì 8 maggio 2013.* Esempi: il piano e la sfera $\mathbb{S}^2$: coordinate sferiche, la parametrizzazione cartesiana e la parametrizzazione stereografica e relativi atlanti; non globalità di ogni parametrizzazione della sfera.

- **Lezione 15.** *Lunedì 13 maggio 2013.* Il toro immerso in $\mathbb{R}^4$ e in $\mathbb{R}^3$ e relative parametrizzazioni. Grafici di funzioni e superfici: parametrizzazione standard di una superficie (senza dimostrazione). Modalità di identificazione delle supercifi. Superfici di livello, valori e punti regolari, condizione di regolarità. Esempi di superfici in cui si evidenzia l'indipendenza tra le condizioni che definiscono una superficie regolare. Funzioni e mappe differenziabili, interpretazioni geometriche e funzioni di transizione.

- **Lezione 16.** *Mercoledì 15 maggio 2013.* Funzioni e mappe differenziabili:indipendenza dalla parametrizzazione. Il caso della proiezione stereografica. Spazio tangente e differenziale. La prima forma fondamentale: una metrica riemanniana su una superficie. Lunghezza delle curve definite su una superficie.

- **Lezione 17.** *Lunedì 20 maggio 2013.* Ancora sulla lunghezza delle curve definite su una superficie, e la nozione di pull–back di una curva su S, lunghezza e prima forma fondamentale: metriche riemanniane. Indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione. Area di una porzione di superficie e sua indipendenza dalla parametrizzazione: significato geometrico dell'area e prima forma fondamentale. Esempi: il piano, il cilindro e la sfera. Superficie localmente isometriche e globalmente isometriche. Teorema di isometria: le superfici sviluppabili. Misura di angoli e prima forma fondamentale: mappe conformi e conservazione degli angoli.

- **Lezione 18.** *Mercoledì 22 maggio 2013.* Idea geometrica di Gauss per studiare la piegatura di una superficie. La mappa di Gauss e la seconda forma fondamentale, l'applicazione di Weingarten. La seconda forma fondamentale in coordinate curvilinee: matrice associata. Simmetria dell'applicazione di Weingarten e formule di Weingarten. Significato geometrico della seconda forma fondamentale: espansione di Taylor e deviazione dal piano tangente. Curvatura normale di una curva, sezione normale e Teorema di Meusnier.

- **Lezione 19.** *Giovedì 24 maggio 2013.* Applicazioni: superfici rigate, superfici di rotazione, il toro, i coni. Il teorema di Pitagora sulla sfera.

- **Lezione 20.** *Lunedì 27 maggio 2013.* Simmetria dell'applicazione di Weingarten e curvature principali, La formula di Euler. Il cilindro e l'iperboloide. Curvatura media H e curvatura di Gauss K. Curvatura media, curvatura di Gauss e prima forma fondamentale, curvature e tipi di punti.

- **Lezione 21.** *Mercoledì 29 maggio 2013.* Il Teorema Egregium: simboli di Christoffel, la derivata covariante e relative proprietà: linearità, assenza di torsione e compatibilità con la metrica. Dimostrazione del Teorema Egregium usando la derivata covariante.

- **Lezione 22.** *Lunedì 3 giugno 2013.*

- **Lezione 23.** *Mercoledì 5 giugno 2013.*

- **Lezione 24.** *Venerdì 7 giugno 2013.*