UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI VERONA

LABORATORIO DI PROBABILITA' E STATISTICA

Docente: Bruno Gobbi

Corso di laurea in Informatica e Bioinformatica

10 – ESERCIZI DI RIPASSO FINALE (2 di 2)

1 - STATISTICA DESCRITTIVA – LAUREATI

ESERCIZIO 1: La seguente tabella riporta il numero di laureati per facoltà presso l'Università di Verona nel 2008.

Creare una tabella in R che riporti il numero di laureati e in percentuale. Creare un grafico a istogramma per il numero di laureati e uno a torta per le percentuali.

FACOLTA'	LAUREATI
Medicina	755
Economia	754
Lettere	584
Formazione	503
Scienze	263
Altri	842

1 - STATISTICA DESCRITTIVA – LAUREATI

```
> facolta=c("Medicina", "Economia", "Lettere", "Formazione", "Scienze", "Altri")
> nlaureati=c(755, 754, 584, 503, 263, 842)
> laureati=data.frame(facolta, nlaureati)
> laureati
   facolta      nlaureati
1   Medicina        755
2   Economia        754
3    Lettere        584
4 Formazione        503
5    Scienze        263
6      Altri        842
```

1 - STATISTICA DESCRITTIVA – LAUREATI

 # CREIAMO LA COLONNA DELLE PERCENTUALI

```
> tot_laureati=sum(nlaureati)
> tot_laureati
[1] 3701
> perc=nlaureati/tot_laureati
> perc
[1] 0.20399892 0.20372872 0.15779519 0.13590921 0.07106188
0.22750608
```

1 - STATISTICA DESCRITTIVA – LAUREATI

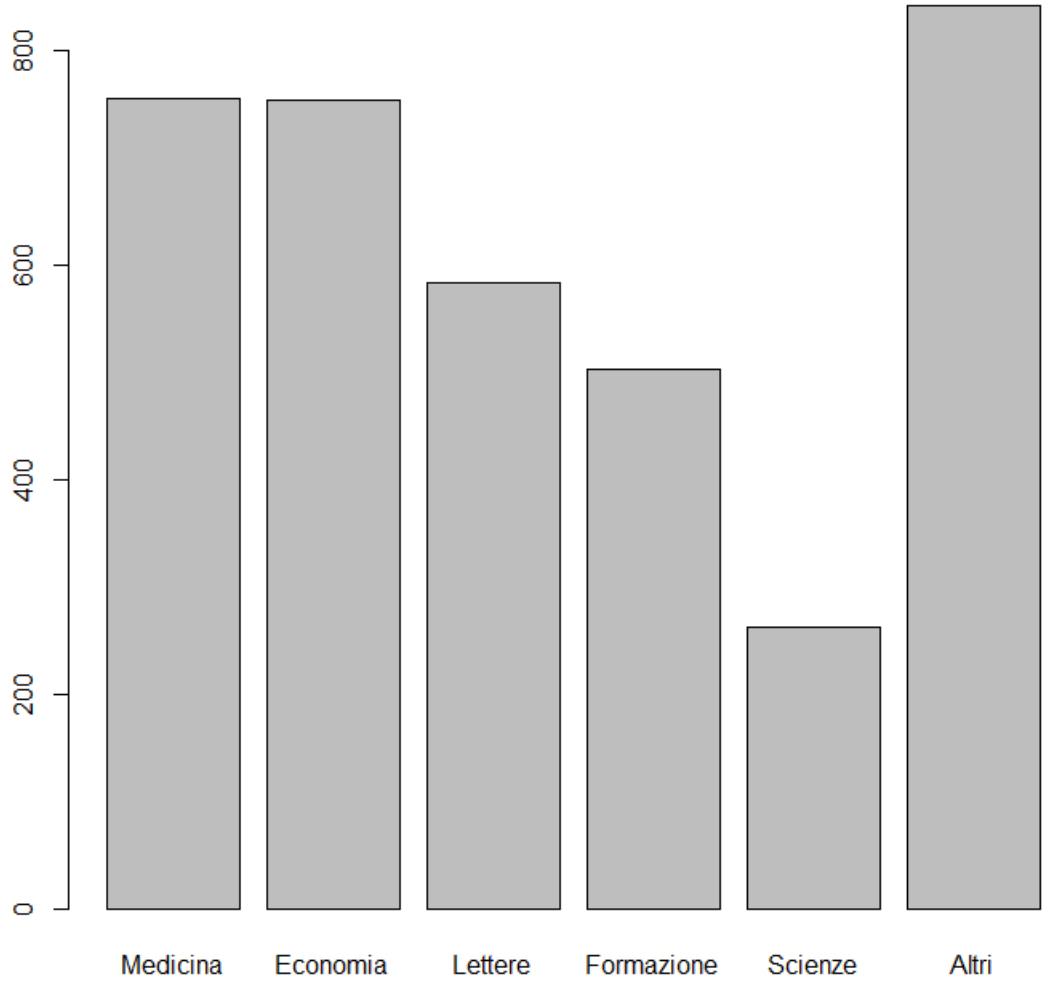
 # AGGIUNGIAMO LA COLONNA DELLE PERCENTUALI

```
> laureati=data.frame(laureati, perc)
> laureati
     facolta nlaureati       perc
1   Medicina        755 0.20399892
2   Economia        754 0.20372872
3    Lettere        584 0.15779519
4 Formazione        503 0.13590921
5    Scienze        263 0.07106188
6      Altri        842 0.22750608
```

1 - STATISTICA DESCRITTIVA – LAUREATI

 # GRAFICO DEL NUMERO DI LAUREATI PER FACOLTA'

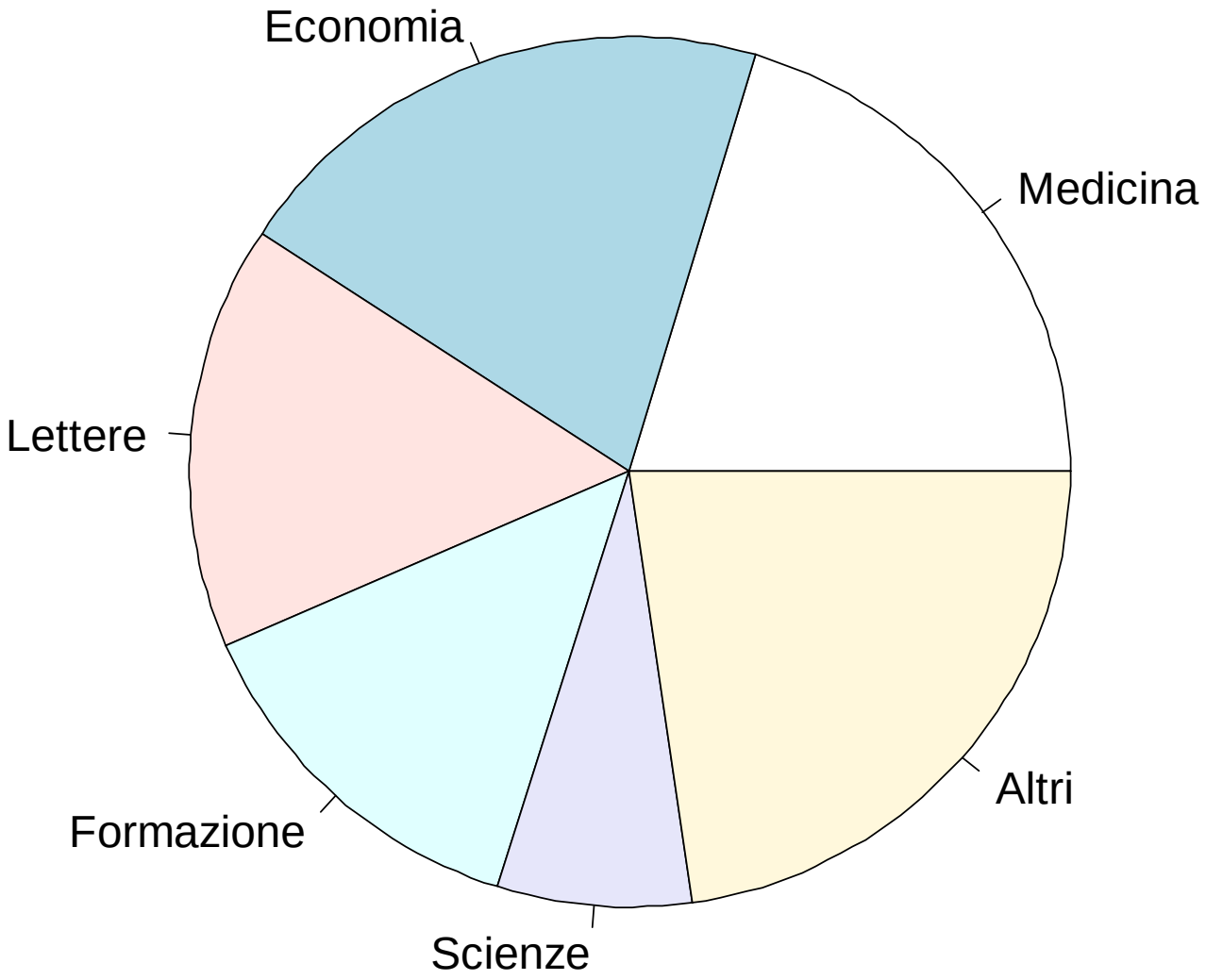
```
> barplot(nlaureati, names.arg=facolta)
```



1 - STATISTICA DESCRITTIVA – LAUREATI

 # GRAFICO A TORTA DELLE PERCENTUALI

> pie(perc, labels=facolta)



2 – CURTOSI E APPIATTIMENTO – laureati

ESERCIZIO 2: Sui seguenti dati calcolare:

- Media, mediana, primo e terzo quartile
- Il minimo e il massimo
- La varianza campionaria

Infine misurare la simmetria e l'appiattimento con degli opportuni indici

N.
50
27
35
42
22
61

2 – CURTOSI E APPIATTIMENTO – laureati

```
> x=c(50, 27, 35, 42, 22, 61)
# CALCOLO LE STATISTICHE RICHIESTE
> summary(x)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.
Max.
   22.0    29.0    38.5    39.5    48.0    61.0

# CALCOLO LA VARIANZA CAMPIONARIA
> var(x)
[1] 212.3
```

2 – CURTOSI E APPIATTIMENTO – laureati

> gamma(x) = 0.1997853

IL VALORE DELL'INDICE GAMMA È PARI A 0.1997853. C'È UN'ASIMMETRIA POSITIVA, LA DISTRIBUZIONE PRESENTA UNA CODA PIÙ LUNGA A DESTRA.

CREAZIONE DI UNA FUNZIONE PER GAMMA

$$\gamma = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^3$$

```
gamma =  function(x) {
m3 = mean((x-mean(x))^3)
skew = m3/(sd(x)^3)
skew
}
```

{ = AltGr + 7
} = AltGr + 0
NO tastiera numerica

2 – CURTOSI E APPIATTIMENTO – laureati

```
> beta(x)
[1] 1.273843
```

IL VALORE DELL'INDICE BETA E' PARI A 1.273843 LA DISTRIBUZIONE APPARE SCHIACCIATA, PLATICURTICA

CREAZIONE DI UNA FUNZIONE PER BETA

$$\beta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^4$$

```
beta =  function(x) {
m4 = mean((x-mean(x))^4)
curt = m4/(sd(x)^4)
curt
}
```

3 – STATISTICHE E BOXPLOT - JOHNSON

ESERCIZIO 3: Utilizzando la base dati già presente in R relativamente ai dividendi trimestrali dell'azione della Johnson & Johnson, aerei fra il 1960 e il 1980 (nome del database: "JohnsonJohnson"), calcolare:

- Media
- Mediana
- Primo e terzo quartile
- Minimo e Massimo
- Varianza campionaria
- Numero di elementi del database

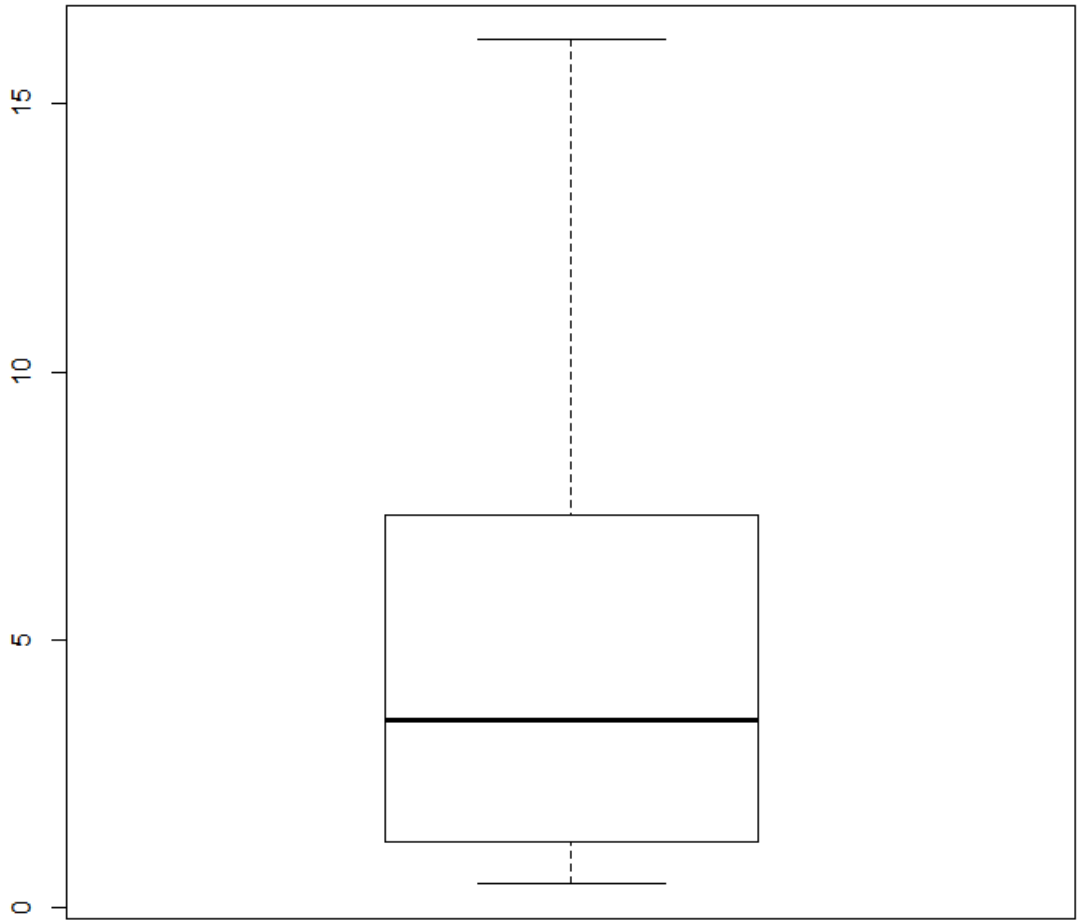
Infine disegnare il grafico boxplot della serie storica.

3 – STATISTICHE E BOXPLOT – JOHNSON

```
> summary(JohnsonJohnson)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
  0.440   1.248   3.510   4.800   7.132  16.200 
> var(JohnsonJohnson)
[1] 18.57602

> length(JohnsonJohnson)
[1] 84
```

3 – STATISTICHE E BOXPLOT - JOHNSON

> boxplot(JohnsonJohnson)



ES. REDDITO E CILINDRATA AUTO

ESERCIZIO 4: La seguente tabella riporta la distribuzione per classi di reddito e per cilindrata d'auto di un campione di 10.000 persone. Disegnare il grafico a mosaico e valutare la connessione ad un livello di significatività dell'1%.

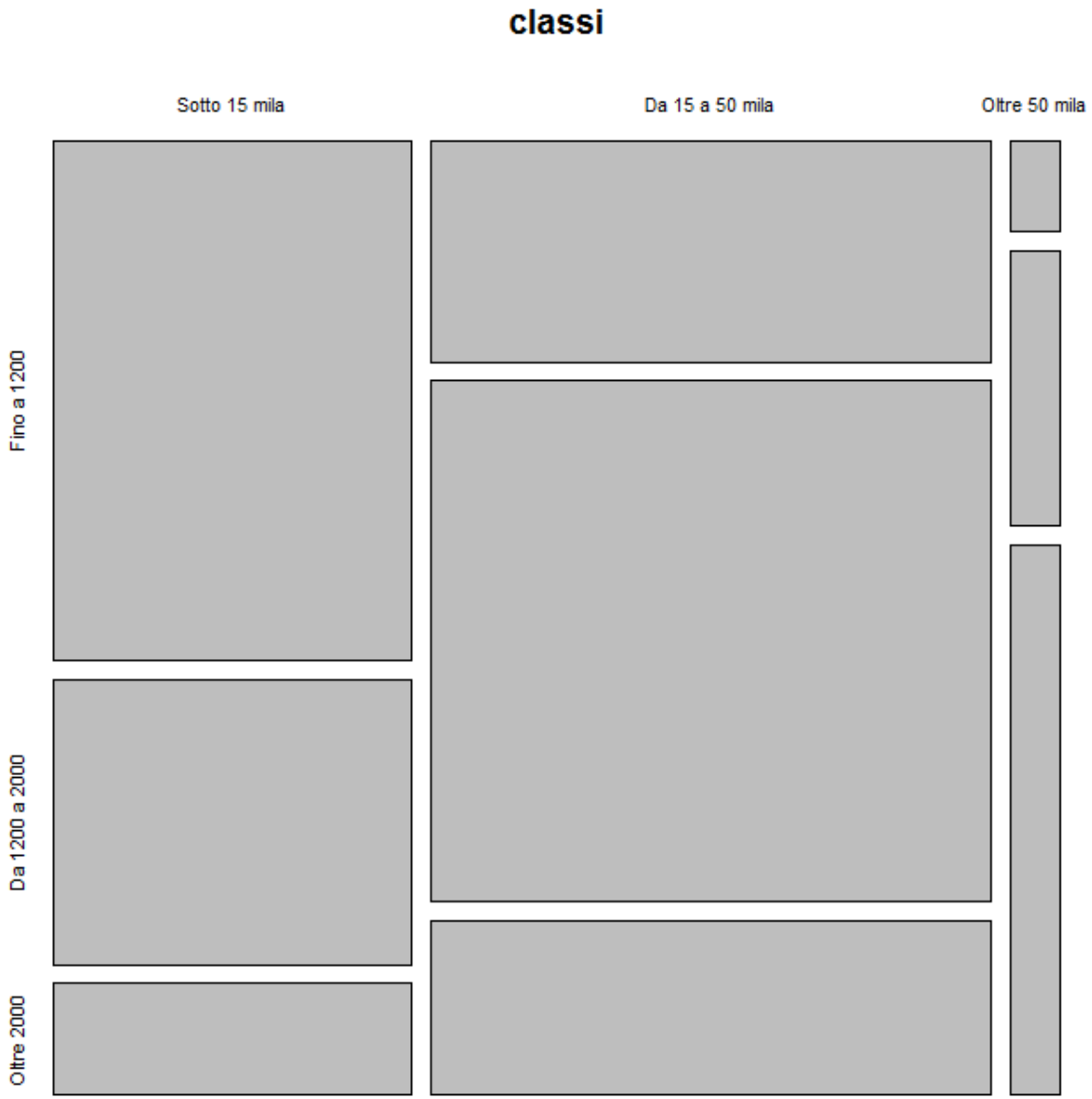
		Cilindrata auto			
		Fino a 1200	Da 1200 a 2000	Oltre 2000	TOTALE
Reddito	Sotto 15 mila euro	2.100	1.150	450	**3.700**
	Da 15 a 50 mila euro	1.400	3.300	1.100	**5.800**
	Oltre 50 mila euro	50	150	300	**500**
	TOTALE	**3.550**	**4.600**	**1.850**	**10.000**

	fertilizzante (significatività)	
g.d.l.	1%	5%
1	6,64	3,84
2	9,21	5,99
3	11,35	7,82
4	13,28	9,49
5	15,09	11,07
6	16,81	12,59
7	18,48	14,07
8	20,09	15,51
9	21,67	16,92
10	23,21	18,31

ES. REDDITO E CILINDRATA AUTO

```
> classi=matrix(c(2100, 1150, 450, 1400, 3300, 1100, 50, 150, 300), nrow=3, byrow=TRUE)
> classiReddito=c("Sotto 15 mila", "Da 15 a 50 mila", "Oltre 50 mila")
> classiCilindrata=c("Fino a 1200", "Da 1200 a 2000", "Oltre 2000")
> dimnames(classi)=list(classiReddito, classiCilindrata)
> classi
                 Fino a 1200 Da 1200 a 2000 Oltre 2000
Sotto 15 mila           2100            1150         450
Da 15 a 50 mila         1400            3300        1100
Oltre 50 mila             50             150         300

> mosaicplot(classi)
```

ES. REDDITO E CILINDRATA AUTO



ES. REDDITO E CILINDRATA AUTO

```
> testchiq=chisq.test(classi)
> testchiq
        Pearson's Chi-squared test

data:  classi
X-squared = 1676.496, df = 4, p-value < 2.2e-16
```

 # POICHE' IL VALORE CALCOLATO DEL CHI-QUADRATO E' 1676.496, BEN SUPERIORE ALLA SOGLIA CRITICA DI 13,28 VALIDO ALL'1% PER 4 G.D.L., SI RIFIUTA L'IPOTESI NULLA DI INDIPENDENZA E SI CONFERMA LA CONNESSIONE FRA I FENOMENI

	fertilizzante (significatività)	
g.d.l.	1%	5%
1	6,64	3,84
2	9,21	5,99
3	11,35	7,82
4	13,28	9,49
5	15,09	11,07
6	16,81	12,59
7	18,48	14,07
8	20,09	15,51
9	21,67	16,92
10	23,21	18,31

ES. REDDITO E CILINDRATA AUTO

 # CALCOLIAMO IL VALORE DELLA STATISTICA V DI CRAMER

```
> chiquadrato=testchiq$statistic
> chiquadrato
X-squared
 1676.496
> N = sum(classi)
> N
[1] 10000
> V=sqrt( chiquadrato / (N*(3-1)) )
> V
X-squared
0.2895251
```

 # IL V DI CRAMER E' PARI A 0,2895251 E QUESTO RISULTATO PORTA AD AFFERMARE CHE C'È UNA BASSA CONNESSIONE FRA I DUE FENOMENI

REGRESSIONE LINEARE: GIRASOLI

ESERCIZIO 5:

I risultati dell'utilizzo di un fertilizzante su una coltura di girasoli ha portato alla crescita di piante come riportato in tabella.
Analizzare la relazione fra i fenomeni utilizzando la regressione lineare, disegnando il grafico, calcolando i parametri della retta interpolante, i residui con grafico, il coefficiente di correlazione lineare e giudicandone la bontà di accostamento.

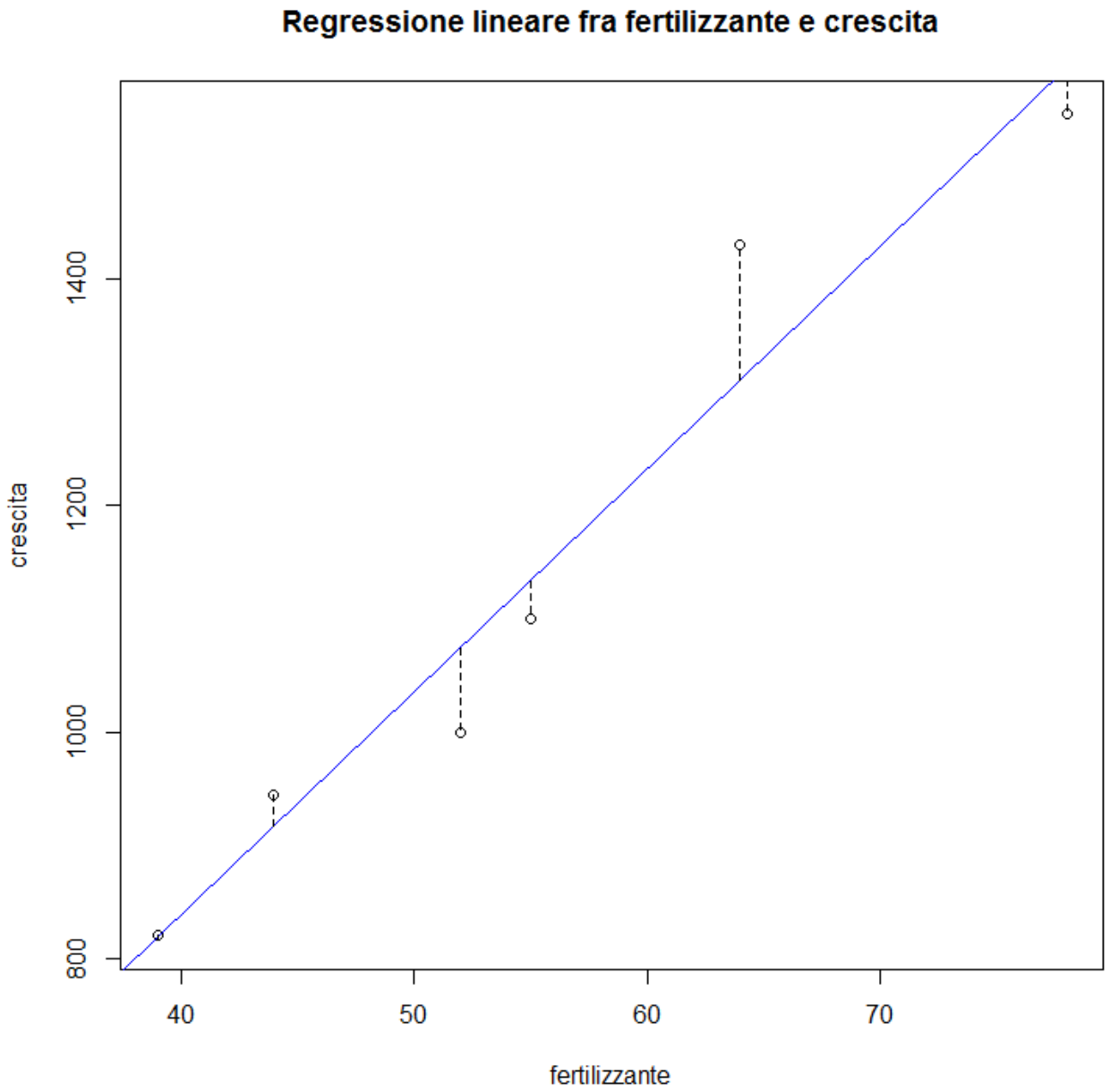
Mg di fertilizzante	Mm di crescita
52	1000
78	1545
64	1430
39	820
44	945
55	1100

ES. STUDIO RELAZIONE FERTILIZZANTE-GIRASOLI

```
> fertilizzante=c(52, 78, 64, 39, 44, 55)
> crescita=c(1000, 1545, 1430, 820, 945, 1100)
> plot(fertilizzante, crescita)
> rettafertilizzante=lm(crescita~fertilizzante)
> abline(rettafertilizzante, col="blue")
> segments(fertilizzante, fitted(rettafertilizzante), fertilizzante,
crescita, lty=2)
> title(main="Regressione lineare fra fertilizzante e crescita")
```

Per scrivere la tilde ~ in Ubuntu premere:
ALT GR + ì

ES. STUDIO RELAZIONE FERTILIZZANTE-GIRASOLI



ES. STUDIO RELAZIONE FERTILIZZANTE-GIRASOLI

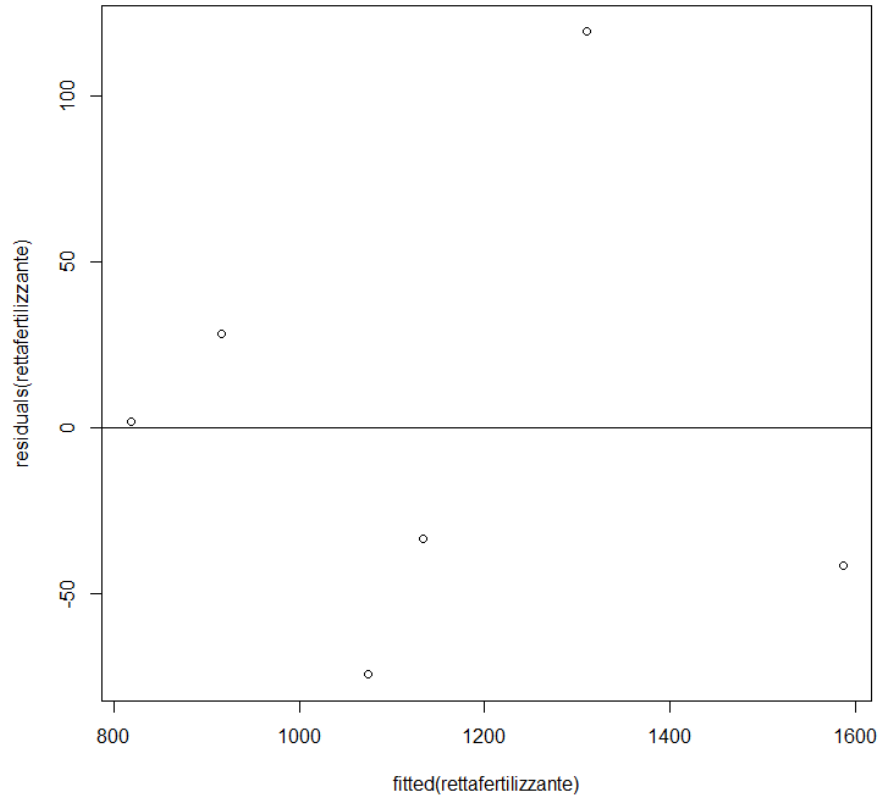
```
> summary (rettafertilizzante)

Call:
lm(formula = crescita ~ fertilizzante)

Residuals:
      1       2       3       4       5       6
-74.327 -41.577 119.250   1.798  28.289 -33.433

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    49.826    137.718   0.362  0.73581
fertilizzante  19.702      2.424   8.128  0.00125 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 76.48 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9429,      Adjusted R-squared:  0.9286
F-statistic: 66.06 on 1 and 4 DF,  p-value: 0.001247
```

ES. STUDIO RELAZIONE FERTILIZZANTE-GIRASOLI

 # I PARAMETRI TROVATI SONO a=49.826 E b=19.702
 # QUINDI IL MODELLO TEORICO SARA':
 # Y'=49.826+19.702*fertilizzante

 # EFFETTO L'ANALISI DEI RESIDUI

```
> plot(fitted(rettafertilizzante), residuals(rettafertilizzante))
> abline(0, 0)
```



 # L'ANALISI DEI RESIDUI CONFERMA CHE QUESTI SI DISTRIBUISCONO IN MANIERA UNIFORME E APPARENTEMENTE CASUALE ATTORNO ALL'ASSE ZERO, QUINDI SI PUÒ CONFERMARE L'IPOTESI DI DISTRIBUZIONE CASUALE DEGLI STESSI, CON MEDIA NULLA E INCORRELAZIONE.

ES. STUDIO RELAZIONE FERTILIZZANTE-GIRASOLI

 # CALCOLO IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE:

```
> R=cor(fertilizzante, crescita)
> R
[1] 0.9710327
```

 # R E' PARI A 0,97103217 E CONFERMA CHE C'E' UNA FORTE RELAZIONE LINEARE DIRETTA FRA LE DUE VARIABILI

 # CALCOLO IL COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE:

```
> R2=R^2
> R2
[1] 0.9429044
```

 # R2 E' PARI A 0,9429044 QUINDI IL MODELLO TEORICO USATO SI ADATTA MOLTO BENE AI VALORI OSSERVATI

ESERCIZIO 6

Studiare la distribuzione di probabilità relativa ad un numero qualsiasi della roulette su 100 tentativi (tenendo conto che ci sono 37 possibili risultati).

Utilizzare una opportuna variabile aleatoria e rappresentarla graficamente.

ESERCIZIO 6

 # CREO IL VETTORE DEI k

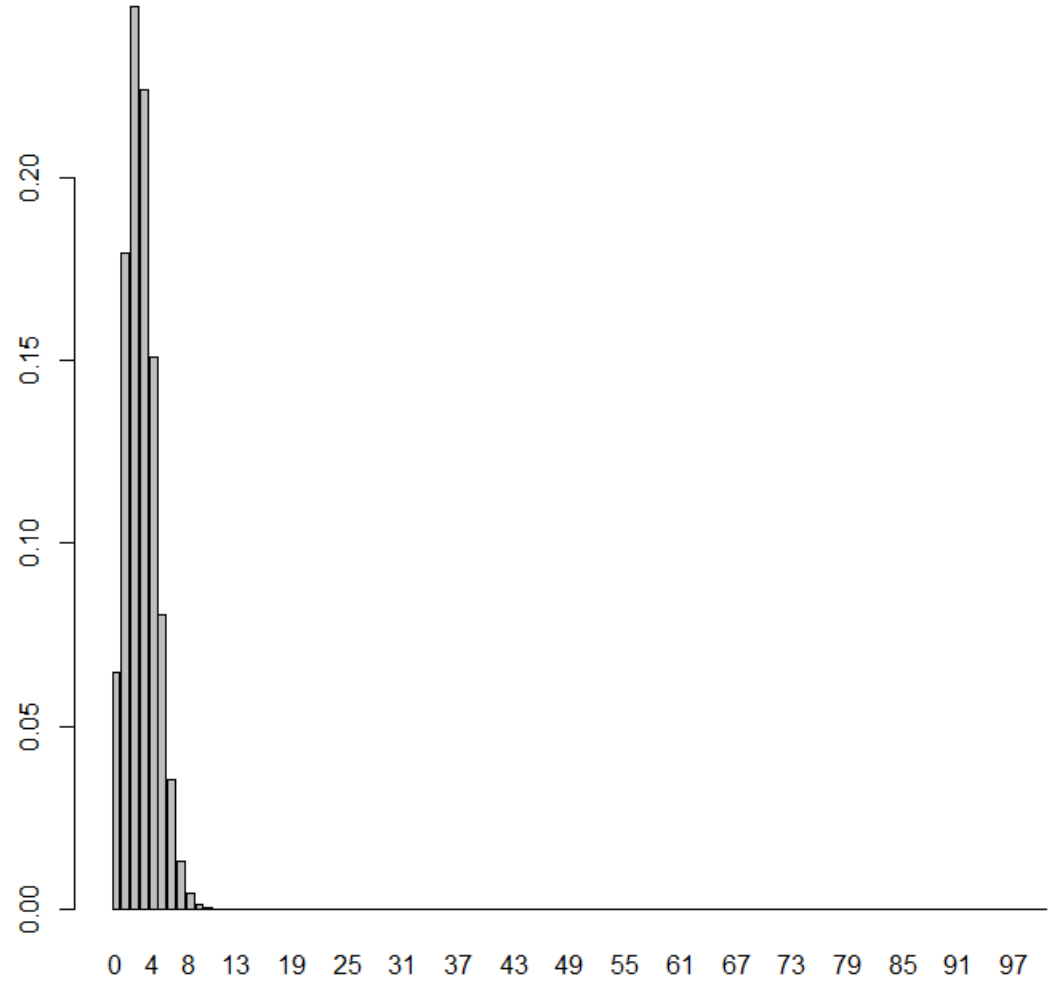
```
> k=c(0:100)
```

 # CALCOLO LE PROBABILITA' DELLA BINOMIALE CON LA FUNZIONE dbinom

```
> roulette=dbinom(k, 100, 1/37)
> roulette
[1] 6.457697e-02  1.793805e-01  2.466482e-01
2.238104e-01  1.507611e-01  8.040594e-02
 ...
```

DISEGNO IL GRAFICO

> barplot(roulette, names.arg=k)



ESERCIZIO 6a

Sui dati dell’esercizio precedente, calcolare la probabilità di ottenere 12 un numero pari o inferiore a 5 volte su 100 lanci.

ESERCIZIO 6a

 # CALCOLO LA PROBABILITÀ DI OTTENERE 12 UN NUMERO PARI O INFERIORE A 5 VOLTE SU 100 LANCI

```
> n12_5p=pbinom(5, 100, 1/37)
> n12_5p
[1] 0.945583
```

ESERCIZIO 6b

Sui dati dell’esercizio precedente, calcolare la probabilità di ottenere un numero fra 0 e 12 venti volte su 100 lanci.

ESERCIZIO 6b

 # CALCOLO LA PROBABILITÀ DI OTTENERE UN NUMERO FRA 0 E 12 VENTI VOLTE SU 100 LANCI

```
> n_0_12_20volte=dbinom(20, 100, 13/37)
> n_0_12_20volte
[1] 0.0004024809
```

ESERCIZIO 6c

Sui dati dell’esercizio precedente, descrivere la probabilità che la pallina si fermi su una casella colorata di rosso su 100 lanci.

ESERCIZIO 6c

 # CALCOLO LA PROBABILITÀ DI OTTENERE ROSSO SU 100 LANCI

```
> rosso=dbinom(k, 100, 18/37)
> [1] 1.135501e-29 1.075738e-27 5.044646e-26
1.561185e-24 3.586618e-23 6.523869e-22
9.785803e-21
...
```

ESERCIZIO 6d

Sui dati dell'esercizio precedente, descrivere la probabilità che la pallina si fermi su un numero pari su 100 lanci.

ESERCIZIO 6d

 # CALCOLO LA PROBABILITÀ DI OTTENERE UN NUMERO PARI SU 100 LANCI

> pari=dbinom(k, 100, 18/37)

> [1] 1.135501e-29 1.075738e-27 5.044646e-26 1.561185e-24 3.586618e-23 6.523869e-22 9.785803e-21

…

ESERCIZIO 6e

Sui dati dell'esercizio precedente, descrivere la probabilità che la pallina si fermi sullo zero su 100 lanci.

ESERCIZIO 6e

 # CALCOLO LA PROBABILITÀ DI OTTENERE ZERO SU 100 LANCI

```
> zero=dbinom(k, 100, 1/37)
[1] 6.457697e-02  1.793805e-01  2.466482e-01
2.238104e-01  1.507611e-01  8.040594e-02
 ...
```

ESERCIZIO 7

La produzione di una nuova APU prevede che i macchinari preposti producano ogni 100.000 unità due pezzi difettosi ($\lambda=2$).

Descrivere con una opportuna variabile aleatoria la probabilità di avere un numero di pezzi difettosi compreso da 0 a 10 e rappresentarla graficamente.

LA FUNZIONE dpois(k, λ)

 # CREO IL VETTORE DEI k

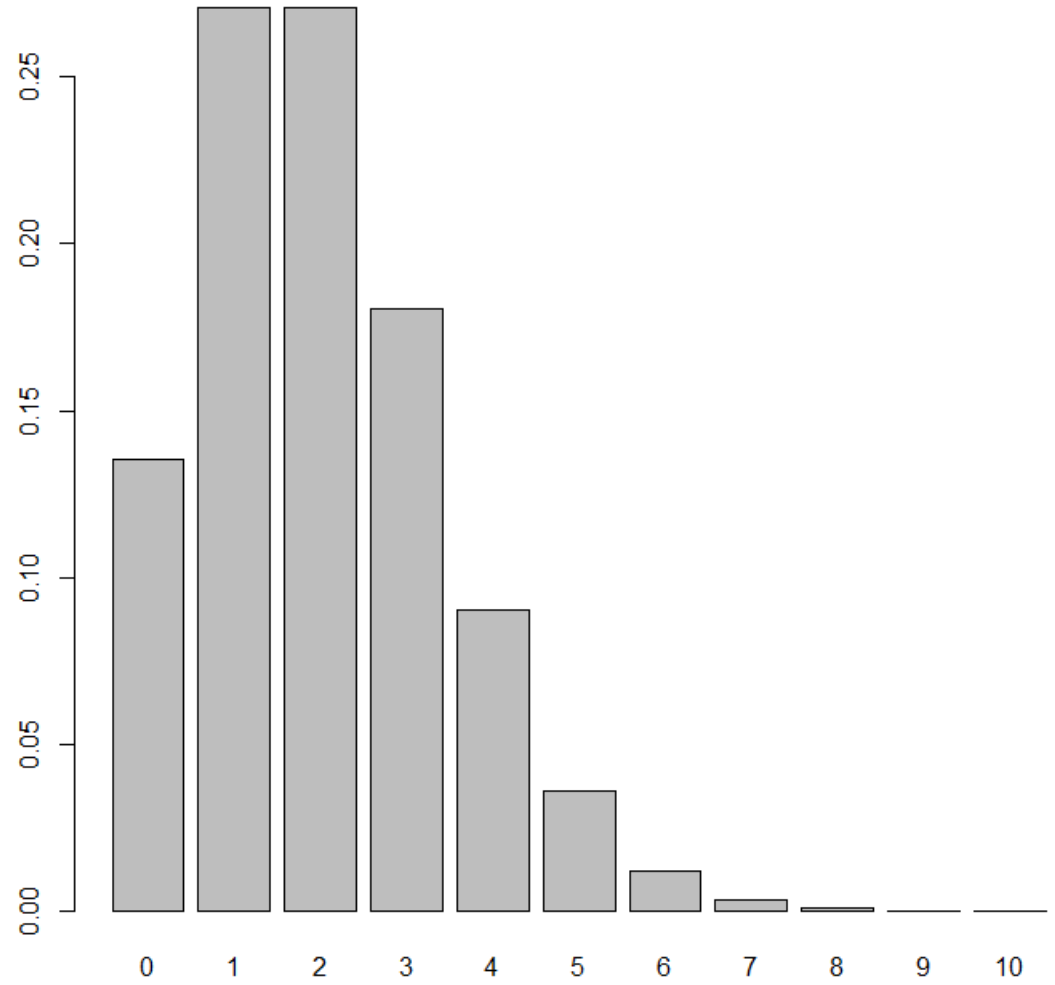
```
> k=c(0:10)
```

 # CALCOLO LE PROBABILITA' DELLA POISSON CON LA FUNZIONE dpois

```
> poisson=dpois(k, 2)
> poisson
 [1] 1.353353e-01 2.706706e-01 2.706706e-01 1.804470e-01 9.022352e-02 3.608941e-02 1.202980e-02
 [8] 3.437087e-03 8.592716e-04 1.909493e-04 3.818985e-05
```

DISEGNO IL GRAFICO

```
> barplot(poisson, names.arg=k)
```



ESERCIZIO 7a

Sui dati dell'esercizio precedente calcolare:

- La probabilità di $k \leq 3$
- La probabilità di $k > 3$

ESERCIZIO 7a

 # CALCOLO LA PROBABILITA' DI k ≤ 3:

```
> ppois(3, 2)
[1] 0.8571235
```

ESERCIZIO 7a

 # CALCOLO LA PROBABILITA' DI k > 3:

```
> 1-ppois(3, 2)
[1] 0.1428765
```

 # OPPURE:

```
> ppois(3, 2, lower.tail=FALSE)
[1] 0.1428765
```

ESERCIZIO 7b

Sui dati dell'esercizio precedente calcolare:

- Il valore mediano
- Il valore corrispondente al 75% della distribuzione

ESERCIZIO 7b

 # CALCOLO IL VALORE MEDIANO:

```
> qpois(0.5, 2)
[1] 2
```

 # CALCOLO IL VALORE CORRISPONDENTE AL 75% DELLA DISTRIBUZIONE:

```
> qpois(0.75, 2)
[1] 3
```

ESERCIZIO 8

Ipotizziamo di avere dei dati distribuiti come una normale con media 300 e deviazione standard 55 (si consiglia asse delle X da 0 a 600).

Disegnare il grafico e calcolare:

- probabilità x=400
- probabilità di $x \leq 200$
- probabilità di $x > 500$

ESERCIZIO 8

 # CREO INNANZITUTTO L'ASSE DELLE X

```
> x=seq(0, 600, 0.01)
```

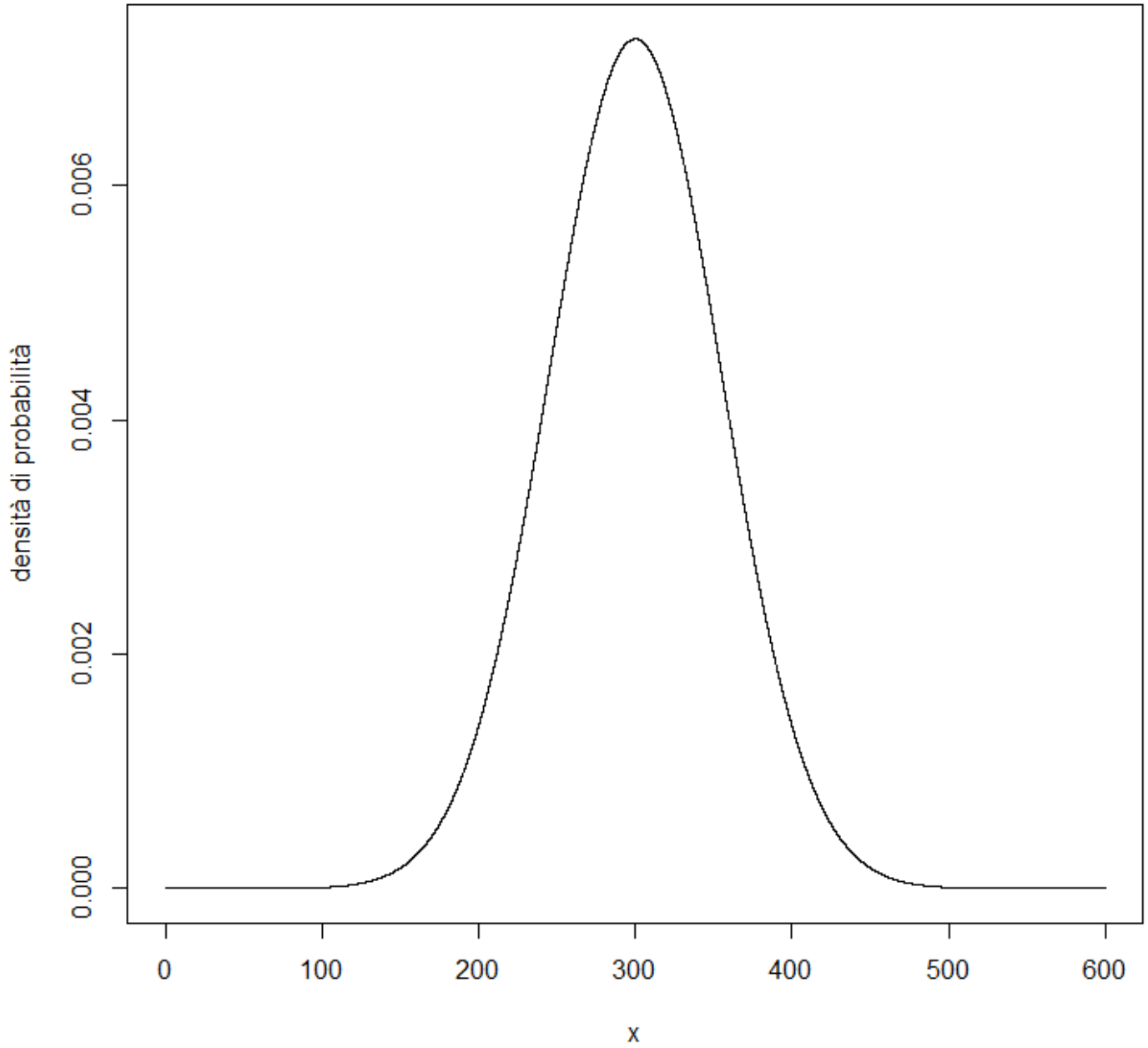
 # CREO LA DISTRIBUZIONE NORMALE

```
> normale=dnorm(x, 300, 55)
```

 # CREO IL GRAFICO

```
> plot(x, normale, type = "l", xlab="x", ylab =
"densità di probabilità")
```

ESERCIZIO 8


densità di probabilità
0.000
0.002
0.004
0.006
0
100
200
300
400
500
600
x

ESERCIZIO 8

 # PER CONOSCERE LA PROBABILITA'
DI x = 400:

```
> dnorm(400, 300, 55)
[1] 0.00138901
```

ESERCIZIO 8

 # PER CONOSCERE LA PROBABILITA'
DI x ≤ 200:

```
> pnorm(200, 300, 55)
[1] 0.03451817
```

ESERCIZIO 8

 # PER CONOSCERE LA PROBABILITA'
DI x > 500:

```
> pnorm(500, 300, 55, lower.tail=FALSE)
[1] 0.000138257
```

ESERCIZIO 8a

Sui dati dell'esercizio precedente calcolare:

- probabilità fra 315 e 520
- il valore mediano
- il primo e il terzo quartile

ESERCIZIO 8a

 # PER CONOSCERE LA PROBABILITA' FRA 315 E 520 CM:

```
> pnorm(520, 300, 55, lower.tail=TRUE) - pnorm(315, 300, 55, lower.tail=TRUE)
[1] 0.3924998
```

ESERCIZIO 8a

 # LA MEDIANA E':

```
> qnorm(0.5, 300, 55)
[1] 300
```

 # IL PRIMO QUARTILE CORRISPONDE AL 25% DELLA DISTRIBUZIONE:

```
> qnorm(0.25, 300, 55)
[1] 262.9031
```

 # IL TERZO QUARTILE CORRISPONDE AL 75% DELLA DISTRIBUZIONE:

```
> qnorm(0.75, 300, 55)
[1] 337.0969
```

ESERCIZIO 9

IL NUMERO MEDIO DI KG DI FRUTTA CONSUMATI OGNI ANNO RILEVATE SU UN CAMPIONE DI 10 PERSONE E' RISULTATO PARI AL SEGUENTE VETTORE:

```
frutta=c(3, 1, 0.5, 2, 1.5, 1, 1.5, 4, 0.5, 2)
```

1) VERIFICARE L'IPOTESI CHE IL NUMERO MEDIO DI KG DI FRUTTA CONSUMATI SIA PARI A 1,5 (AL LIVELLO DI CONFIDENZA DEL 99%).

2) INDICARE ANCHE L'INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA MEDIA.

ESERCIZIO 9

> t.test(frutta, mu=1.5, alternative="two.sided", conf.level=0.99)

One Sample t-test

data: frutta

t = 0.5695, df = 9, p-value = 0.583

alternative hypothesis: true mean is not equal to 1.5

99 percent confidence interval:

 0.5586953 2.8413047

sample estimates:

mean of x

      1.7

ESERCIZIO 9

 # 1) POICHE' IL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA' (0.01) E' MINORE DEL P-VALUE CALCOLATO (0.583) SI ACCETTA L'IPOTESI NULLA

 # 2) L'INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA MEDIA E' COMPRESO FRA 0.5586953 E 2.8413047

ESERCIZIO 10

SI IPOTIZZI DI AVER RILEVATO IL N. DI ORE DI STRAORDINARIO MENSILI SVOLTE DA UN GRUPPO DI LAVORATORI ITALIANI E DA UN CORRISPONDENTE GRUPPO DI COLLEGHI CINESI E CHE LA VARIANZA DELLE DUE POPOLAZIONI SIA UGUALE. IL LIVELLO DI CONFIDENZA E' IL 95%. VERIFICARE L'IPOTESI CHE LE MEDIE SIANO UGUALI.

ITALIA	CINA
12	30
15	25
14	8
27	19
21	6

ESERCIZIO 10

```
straord.ita = c(12, 15, 14, 27, 21)
straord.cin = c(30, 25, 8, 19, 6)


t.test(straord.ita, straord.cin,
var.equal=TRUE, conf.level=0.95)
```

ESERCIZIO 10

Two Sample t-test

data: straord.ita and straord.cin

t = 0.0369, df = 8, p-value = 0.9715

alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0

95 percent confidence interval:

-12.30356 12.70356

sample estimates:

mean of x mean of y

17.8 17.6

 # POICHE' L'ALPHA TEORICO (OSSIA IL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA') E' 0.05 ED E' INFERIORE AL p-value CALCOLATO DI 0.9715, SI ACCETTA L'IPOTESI NULLA DI UGUAGLIANZA FRA LE MEDIE