

## Esercitazione I: calcolo dei predittori.

Nel corso si sono studiati modelli appartenenti alla seguente famiglia di modelli

$$A_0(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (1)$$

Dove  $e(t)$  è un rumore bianco a media nulla ed in cui solo alcuni dei polinomi in  $q$  sono diversi da 1. Si è altresì dimostrato come per la famiglia di modelli

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \quad (2)$$

il predittore sia dato dalla seguente

$$\hat{y}(t|t-1) = H^{-1}(q)G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)]y(t) \quad (3)$$

Pertanto, per determinare i predittori richiesti è sufficiente declinare la formula nei casi in esame

### Modello ARX

Il modello arx in esame può essere riscritto nella seguente formulazione

$$y(t) + 0.2 y(t-1) + 0.3 y(t-2) = u(t-1) + e(t)$$

Introducendo l'operatore di ritardo  $q$  si ricava che

$$[1 + 0.2q^{-1} + 0.3 q^{-2}]y(t) = q^{-1}u(t) + e(t)$$

L'espressione rientra nella famiglia generale (1) una volta imposti i seguenti polinomi

$$A_0(q) = 1 + 0.2q^{-1} + 0.3 q^{-2} \quad B(q) = q^{-1} \quad C(q) = D(q) = F(q) = 1$$

Mentre per rientrare nella (2) diviene necessario imporre

$$H(q) = \frac{1}{A_0(q)} \quad G(q) = \frac{B(q)}{A_0(q)}$$

Da cui il predittore risulta essere

$$\begin{aligned} \hat{y}(t|t-1) &= H^{-1}(q)G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)]y(t) = A_0(q) \frac{B(q)}{A_0(q)} u(t) + [1 - A_0(q)]y(t) = \\ &= q^{-1}u(t) - 0.2q^{-1}y(t) - 0.3 q^{-2} y(t) = u(t-1) - 0.2y(t-1) - 0.3 y(t-2) \end{aligned}$$

### Modello OE

Il modello oe in esame può essere derivato dalla (1) imponendo

$$F(q) = 1 + 0.2q^{-1} + 0.3 q^{-2} \quad B(q) = q^{-1} \quad A_0(q) = C(q) = D(q) = 1$$

Mentre per rientrare nella (2) diviene necessario imporre

$$G(q) = \frac{B(q)}{F(q)} \quad H(q) = 1$$

Il predittore risulta essere

$$\hat{y}(t|t-1) = H^{-1}(q)G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)]y(t) = 1 \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + [1 - 1]y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t)$$

Da cui si ricava

$$F(q)\hat{y}(t|t-1) = B(q)u(t)$$

$$\hat{y}(t|t-1) + 0.2q^{-1}\hat{y}(t|t-1) + 0.3q^{-2}\hat{y}(t|t-1) = q^{-1}u(t)$$

$$\hat{y}(t|t-1) = -0.2\hat{y}(t-1|t-2) - 0.3\hat{y}(t-2|t-3) + q^{-1}u(t)$$

**Remark** si noti come i due predittori sebbene sembrano uguali sono molto diversi. Infatti, il predittore *ARX* usa le uscite del sistema mentre il predittore *OE* non usa alcun valore relativo alle uscite passate ma solo i valori stimati.