Topologia generale

Geometria course – outline and diary of notes day by day

Warning: notes very likely contain typos!

March 31, 2014

Contents

Part I
Topologia

1 Lesson 1

1.1 Definizione di una topologia

Sia X un insieme. Quando $U \subset X$ è un sottoinsieme, indichiamo con U^c il complementare di U,

$$U^c = X \setminus U = \{y \in X | y \notin U\}.$$

Definizione. *Una* topologia su X *è una collezione* $\mathcal{T}$ *di sottoinsiemi di* X *tali che*

1. X *e* $\emptyset$ *appartengono a* $\mathcal{T}$*,*
2. *l'unione di una quantità arbitraria di insiemi appartenenti a* $\mathcal{T}$ *appartiene a* $\mathcal{T}$*,*
3. *l'intersezione di un numero finito di insiemi appartenenti a* T *appartiene a* $\mathcal{T}$*.*

La coppia $(X, \mathcal{T})$ si dice uno *spazio topologico*. Gli insiemi appartenti a $\mathcal{T}$ si dicono *aperti* in X, e sono detti *gli aperti* di X. I complementari degli aperti sono detti *i chiusi* di X.
Ricordiamoci le formule di De Morgan: se $\{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ è una collezione di sottoinsiemi di X, allora

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha\right)^c &= \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha^c \\ \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha\right)^c &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha^c. \end{aligned}$$

Quindi la topologia $\mathcal{T}$ è determinata dalla collezione di chiusi di X che soddisfano le seguenti condizioni:

1. X e $\emptyset$ sono chiusi,
2. l'intersezione di una quantità arbitraria di chiusi è chiuso,
3. l'unione di un numero finito di chiusi è chiuso.

Esempio. La *topologia triviale (o banale, o indiscreta)* su X è $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$.

Esempio. La *topologia discreta* su X è $\mathcal{T} = \wp(X)$, i.e., tutti i sottoinsiemi di X sono aperti.

Esempio. La topologia standard sulla retta $\mathbb{R}$: un aperto è qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che è l'unione di intervalli aperti $(a, b), a \leq b$. (Se includiamo $a = b$ allora l'intervallo $(a, a) = \emptyset$.)

Esempio. Varie topologie su uno spazio di 2 punti, o 3 punti.

Esercizio 1. *Trovare tutte le possibili topologie su un insieme di 3 punti.*

1.2 Relazione d'ordine sulle topologie

Definizione. *Se* $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ *sono due topologie su* X*, e* $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$*, allora si dice che* $\mathcal{T}_1$ è più fine *di* $\mathcal{T}_2$*.*

La topologia più fine di qualsiasi altra topologia è quella discreta. All'altra estremità, ogni topologia è più fine della topologia triviale.
L'insieme delle topologie su X è un insieme *parzialmente ordinato.*

1.3 Basi, intorni, numerabilità

Definizione. *Una base $\mathcal{B}$ per la topologia $\mathcal{T}$ è una collezione di aperti in $\mathcal{T}$ tale che ogni aperto non-vuoto di $\mathcal{T}$ è l'unione di aperti nella collezione $\mathcal{B}$.*

Esempio. Base della topologia standard di $\mathbb{R}$: $\{(a,b)|a<b, a,b\in\mathbb{R}\}$. Un'altra base è $\{(a,b)|a<b, a,b\in\mathbb{Q}\}$.

Esempio. Una base per la topologia discreta su X è $\mathcal{B}=\{\{x\}|x\in X\}$. Notiamo che ogni base per la topologia discreta deve contenere $\mathcal{B}$, perchè gli insiemi unitari $\{x\}$, $x\in X$ sono aperti.

Esempio. La topologia di Sorgenfrey sulla retta $\mathbb{R}$ ha per base la collezione $\{[a,b)|a<b, a,b\in\mathbb{R}\}$.

Proposizione 1.3.1. *Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ le basi per topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ rispettivamente. Allora $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2 \iff$ ogni aperto in $\mathcal{B}_1$ è l'unione di aperti in $\mathcal{B}_2$. (Quindi due basi generano la stessa topologia $\iff$ ogni aperto in $\mathcal{B}_1$ è l'unione di aperti in $\mathcal{B}_2$, e ogni aperto in $\mathcal{B}_2$ è l'unione di aperti in $\mathcal{B}_1$.)*

Proof. ($\implies$): Supponiamo che $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$, percui ogni aperto U nella base $\mathcal{B}_1$ è anche aperto nella topologia $\mathcal{T}_2$, e quindi U è l'unione di aperti in $\mathcal{B}_2$.
($\Longleftarrow$:) Supponiamo che ogni aperto in $\mathcal{B}_1$ sia l'unione di aperti in $\mathcal{B}_2$. $\emptyset$ è aperto in entrambe le topologie. Un aperto non-vuoto U nella topologia $\mathcal{T}_1$, essendo unione di aperti in $\mathcal{B}_1$, è anche l'unione di aperti in $\mathcal{B}_2$. Quindi è aperto in $\mathcal{T}_2$. Concludiamo che $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$. $\square$

Esempio. La topologia di Sorgenfrey è più fine della topologia standard su $\mathbb{R}$: ogni intervallo (a,b) nella base per la topologia standard è l'unione

$$(a,b)=\bigcup_{n\geq N}[a+\frac{1}{n},b)$$

dove N è qualsiasi intero tale che $a<a+\frac{1}{N}<b$. Quindi ogni aperto nella topologia standard è anche aperto nella topologia di Sorgenfrey. Gli intervalli semi-aperti $[a,b)$, $a<b$ non sono aperti nella topologia standard, quindi le due topologie su $\mathbb{R}$ sono diverse – si dice che la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$ è *strettamente* più fine della topologia standard.

Esercizio 2. *Siano $\mathcal{B}_1=\{[a,\infty)|a\in\mathbb{R}\}$ e $\mathcal{B}_2=\{(\infty,a]|a\in\mathbb{R}\}$, rispettivamente basi per topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$. Dimostrare che $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ non sono tra loro confrontabili (i.e. nessuna delle due è contenuta nell'altra).*

Definizione.

1. *Un* intorno *di $x\in X$ è un aperto U contenente x.*
2. *Un* sistema fondamentale di intorni *di x è una famiglia di intorni di x tale che ogni intorno di x contiene un intorno della famiglia.*
3. *Lo spazio topologico $(X,\mathcal{T})$ si dice* primo-numerabile *(first countable) se ogni punto $x\in X$ ammette un sistema fondamentale di intorni.*
4. *Lo spazio topologico$(X,\mathcal{T})$ si dice 2-numerabile (second countable) (o che è a base numerabile) se $\mathcal{T}$ ammette una base numerabile.*

Esempio. Consideriamo la retta $\mathbb{R}$ con la topologia standard. Un sistema fondamentale di intorni di $x\in\mathbb{R}$ è la collezione $\{(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n})|n\geq 1\}$. Quindi $\mathbb{R}$ è primo-numerabile.

Esempio. $\mathbb{R}$ con la topologia standard è 2-numerabile, perchè la base $\{(a,b)|a<b,a,b\in\mathbb{Q}\}$ è numerabile.

Esempio. $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey è primo-numerabile: per ogni $a\in\mathbb{R}$ la collezione $\{[a,a+\frac{1}{n})|n\geq 1\}$ è un sistema fondamentale di intorni di a, ed è numerabile. Però $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey non è 2-numerabile: sia $\mathcal{B}$ una qualsiasi base, e consideriamo l'aperto $[a,\infty)$. Dalla definizione di base, $[a,\infty)$ è l'unione di aperti in $\mathcal{B}$. Quindi esiste un aperto U_a nella base $\mathcal{B}$ che contiene a tale che $U_a\cap(-\infty,a)=\emptyset$. Osserviamo ora che se $a<b$, allora $U_a\neq U_b$, perchè $a\in U_a$ ma $a\notin U_b$. Quindi $\mathcal{B}$ contiene una sottocollezione $\{U_a|a\in\mathbb{R}\}$ di aperti distinti che non è numerabile (qui si utilizza il fatto che $\mathbb{R}$ non è numerabile), e concludiamo che $\mathcal{B}$ non è numerabile.

2-numerabile $\implies$ primo-numerabile: data una base $\mathcal{B}$ la collezione $\mathcal{N}=\{U\in\mathcal{B}|p\in U\}$ è un sistema fondamentale di intorni di p. Quindi se $\mathcal{B}$ è numerabile, allora $\mathcal{N}$ è numerabile.

1.4 Spazi metrici

Una classe di esempi importanti (sopratutto per applicazioni pratiche) è quella degli *spazi metrici.*

Definizione. *Uno spazio metrico è una coppia* (X, d)*, dove* X *è un insieme, e* d *è una* metrica*, i.e. una funzione* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *tale che, per ogni scelta di* $x, y, z \in X$*,*

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y,$
2. $d(x, y) = d(y, x),$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, z).$

L'ultima proprietà è detta disuguaglianza triangolare *(inglese: triangle inequality).*

La metrica induce una topologia su X che ha per base le *palle aperte*: la palla aperta centrata a $x \in X$ e di raggio r è il sottoinsieme $B_r(x) := \{y \in X | d(x, y) < r\}$. i.e. ogni aperto è una unione di palle aperte. bes La metrica discreta su X pone $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ per ogni $y \neq x$. Se $0 < \epsilon < 1$, allora $B_\epsilon(x) = \{x\}$, cioè ogni punto è aperto, quindi la topologia indotta dalla metrica discreta è la topologia discreta.

Esempio. $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la metrica euclidea $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$, dove $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Esempio. L'insieme $C^0([a, b])$ delle funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$, con la metrica $d(f, g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$. (sup-metric).

Esercizio 3. *Verificare che la funzione* $d : C^0([a, b]) \times C^0([a, b]) \to [0, \infty)$ *data da* $d(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ *è una metrica. (*L^1*-metric)*

Infatti, per ogni $k \geq 1$, $d(f, g) := \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^k dx\right)^{1/k}$ è una metrica. (L^k-metric).

Esercizio 4. *Determinare se le due topologie su* $C^0([a, b])$ *indotte dalle metriche sup e* L^1 *sono uguali, o se una è strettamente più fine dell'altra, o se non sono confrontabili tra loro.*

1.5 Topologia prodotto

Dati due insiemi X e Y, il prodotto cartesiano $X \times Y$ è l'insieme di coppie (x, y), $x \in X, y \in Y$.

Definizione. *Siano* X *e* Y *spazi topologici. La* topologia prodotto *su* $X \times Y$ *ha per base i rettangoli* $U \times V$ *dove* U *è aperto in* X *e* V *è aperto in* Y*.*

Esercizio 5. *Verificare che la topologia su* $\mathbb{R}^2$ *indotta dalla metrica euclidea è uguale alla topologia prodotto indotta dalla metrica euclidea su* $\mathbb{R}$*.*

1.6 Topologia indotta/relativa/di sottospazio

Definizione. *La topologia indotta (o topologia di sottospazio, o topologia relativa) per* $Y \subset X$*: un sottoinsieme* $S \subset Y$ *è aperto in* $Y \iff$ *esiste un aperto* $\widehat{S} \subset X$ *tale che* $S = \widehat{S} \cap Y$*.*

Cioè, gli aperti di Y sono tutti i sottoinsiemi (aperto di X) $\cap Y$.

Esempio. Topologia indotta su $[a, b)$. Una base è $\{[a, c) | a < c < b\} \cup \{(c, d) | a < c < d < b\}$. Gli intervalli semi aperti $[a, c)$ sono aperti nella topologia indotta anche se non sono aperti in $\mathbb{R}$.

Esempio. La topologia indotta su qualsiasi sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ è uguale alla topologia discreta.

Esempio. La topologia indotta su $Y = \{1/n | n \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ è la topologia discreta su Y; ogni elemento è aperto. Nella topologia indotta su $\{0\} \cup Y$, $\{0\}$ non è aperto, perchè ogni intorno di 0 ha intersezione non vuota con Y.

2 Lesson 2

2.1 Nozioni di separazione

Definizione. *Si dice che uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è :*

1. T_2, *o* di Hausdorff, *se per ogni $x, y \in X$ esistono intorni $U \ni x$, $V \ni y$ con $U \cap V = \emptyset$ (intorni disgiunti);*
2. T_1 *se per ogni $x, y \in X$ esistono intorni $U \ni x$, $V \ni y$ tali che $y \notin U$, $x \notin V$;*
3. T_0 *se per ogni $x, y \in X$, esiste o un intorno $U \ni x$ tale che $y \notin U$, o un intorno $V \ni y$ tale che $x \notin V$.*

È chiaro che $T_2 \implies T_1 \implies T_0$.

Esempio. Tutti gli spazi metrici sono di Hausdorff: se $x \neq y$, e $\epsilon < d(x, y)/2$, dimostrare che $B_\epsilon(x) \cap B_\epsilon(y) = \emptyset$.

Esempio. T_1 e non T_2: le topologie di Zariski (geometria algebrica). Nella topologia di Zariski su $\mathbb{C}$ i chiusi sono tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{C}$. Quindi ogni paio di aperti in questa topologia si intersecano, e la topologia non può essere di Hausdorff. È T_1 perchè se $z_1 \neq z_2$ sono due punti in $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{z_2\}$ è un intorno di z_1 che non contiene z_2, e $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$ è un intorno di z_2 che non contiene z_1.

Esercizio 6. *Esibire un esempio di uno spazio topologico T_1 che non è di Hausdorff.*

Esercizio 7. *Dimostrare che uno spazio topologico è T_1 $\iff$ gli insiemi unitari $\{p\}$, $p \in X$, sono chiusi.*

Proposizione 2.1.1. *Lo spazio X è di Hausdorff $\iff$ la diagonale $\triangle = \{(x, x) | x \in X\}$ è chiuso in $X \times X$.*

Dimostrazione. ($\implies$) Supponiamo che X sia di Hausdorff. Consideriamo una coppia $(y, z) \in \triangle^c = X \times X \setminus \triangle$. Siccome $y \neq z$, per ipotesi esistono intorni $U \ni y$, $V \ni z$ tali che $U \cap V = \emptyset$. Quindi il rettangolo $R_{y,z} := U \times V$ è un intorno di (y, z) tale che $U \times V \subset \triangle^c$, e quindi $\triangle^c = \bigcup_{y \neq z} R_{y,z}$ è aperto. Concludiamo che $\triangle$ è chiuso in $X \times X$.
($\impliedby$) Supponiamo che $\triangle$ sia chiuso in $X \times X$. Quindi $\triangle^c$ è aperto, percui per ogni $y \neq z$ esiste un rettangolo $U \times V \ni (y, z)$ con $U \times V \cap \triangle = \emptyset$. Quindi U e V sono aperti di X tali che $U \ni y, V \ni z$ e $U \cap V = \emptyset$. Concludiamo che X è di Hausdorff. □

2.2 Chiusura

Siano $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $U \subset X$.

Definizione. *La* chiusura *(closure) di U, indicata con $\overline{U}$ o $cl(U)$, è il più piccolo insieme chiuso che contiene U.*

Lemma 2.2.1. *Proprietà della chiusura:*

1. *$\overline{U}$ è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono U.*
2. *$U = \overline{U} \iff U$ è chiuso in X.*
3. *$U \subset V \implies \overline{U} \subset \overline{V}$.*
4. *Se A è un sottospazio di X, e $S \subset A$, $cl_A(S) = cl_X(S) \cap A$.*

Dimostrazione.

1. L'intersezione U_∞ di tutti i chiusi che contengono U è chiuso, e essendo contenuta in ogni chiuso che contiene U, U_∞ è necessariamente il più piccolo.
2. Chiaro.
3. Ogni chiuso contenente V contiene U, quindi

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \text{l'intersezione di tutti i chiusi contenenti } V \\ &\supset \text{l'intersezione di tutti i chiusi contenenti } U \\ &= \overline{U}. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} cl_A(S) &= \{x \in A | x \in U \ \forall\, U \text{ chiuso in } A \text{ tale che } U \supset S\} \\ &= \{x \in A | x \in \hat{U} \cap A \ \forall\, \hat{U} \text{ chiuso in } X \text{ tale che } \hat{U} \cap A \supset S\} \\ &= \{x \in A | x \in \hat{U} \ \forall\, \hat{U} \text{ chiuso in } X \text{ tale che } \hat{U} \supset S\} \\ &= A \cap cl_X(S) \end{aligned}$$

□

2.3 Interno

La definizione dell'*interno* (o *la parte interna*) di un sottoinsieme è duale a quella della chiusura:

Definizione. L'interno *(inglese: interior) di U, indicato con U° o $int(U)$, è il più grande aperto contenuto in U.*

Lemma 2.3.1. *Proprietà dell'interno:*

1. *$\overline{U}$ è l'unione di tutti gli aperti contenuti in U.*
2. *$U^\circ = U \iff U$ è aperto in X.*
3. *$U \subset V \implies U^\circ \subset V^\circ$.*
4. *Se A è un sottospazio di X, e $S \subset A$, $int_A(S) = int_X(S) \cap A$.*
5. *$U^\circ = (cl(U^c))^c$*
6. *$cl(U) = ((U^c)^\circ)^c$*

Dimostrazione. Dimostriamo solo 5.)

$$\begin{aligned} U^o &= \text{l'unione di tutti gli aperti di } X \text{ contenuti in } U \\ \implies (U^o)^c &= \text{l'intersezione di tutti i complementari degli aperti contenuti in } U \\ &= \text{l'intersezione di tutti i chiusi contenente } U^c \\ &= cl(U^c). \end{aligned}$$

□

Definizione. 1. *L'insieme $\partial U := \overline{U} \setminus U^\circ$ si dice la* frontiera *di U.*

2. *Un punto $x \in X$ è un* punto di accumulazione *(o* punto limite*) per U se ogni intorno di x interseca U in almeno uno punto diverso da x.*

La frontiera è chiuso: $\partial U = \overline{U} \setminus U^\circ = \overline{U} \cap (U^\circ)^c$.

Esempio. $U = \{1/n | n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ con la topologia standard.

- $\overline{U} = U \cup \{0\}$
- $U^o = \emptyset$
- $\partial U = \overline{U} \setminus U^o = U \cup \{0\}$
- 0 è l'unico punto di accumulazione di U.

Esempio. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia standard. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}^0 = \emptyset, \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, e ogni punto di $\mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{Q}$.

Esempio. $[a, b) \subset \mathbb{R}$ con la topologia standard: $\overline{[a, b)} = [a, b]$. Però nella topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$, $\overline{[a, b)} = [a, b)$ perchè $[a, b)$ è già chiuso. (Perchè $[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$, e ponendo

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n \geq 1} [a - n, a), \quad [b, \infty) = \bigcup_{n \geq 1} [b, b + n)$$

si vede che $[a, b)^c$ è aperto nella topologia di Sorgenfrey.)

Esempio. (X, d) spazio metrico, $B_\epsilon(x) = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}$ una palla aperta. È spesso il caso (per esempio gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$) che

$$\overline{B_\epsilon(x)} = \{y \in X | d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

Ma non è sempre così: per esempio, se d è la metrica discreta su X, $B_1(x) = \{y \in X | d(x, y) < 1\} = \{x\}$, e $\overline{B_1(x)} = \{x\}$ perchè $\{x\}$ è chiuso nella topologia discreta, mentre $\{y \in X | d(x, y) \leq 1\} = X$.

Esempio. X con la topologia triviale: se $|X| \geq 2$, e U è qualsiasi sottoinsieme non vuoto di X, ogni $x \in X$ è un punto di accumulazione di U. Se invece X è munito della topologia discreta, punti di accumulazione non esistono, perche ogni punto x ha l'intorno $\{x\}$.

Esempio. $Y = \{-\frac{1}{n} | n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Nella topologia standard, $\{0\}$ è un punto di accumulazione di Y. Nella topologia di Sorgenfrey, Y non ha nessun punto di accumulazione.

Esempio. In uno spazio metrico, x è un punto di accumulazione di $U \iff$ per ogni $\epsilon > 0$, $(B_\epsilon(x) \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$.

Proposizione 2.3.2. *Siano X uno spazio topologico T_1 e $U \subset X$ un sottoinsieme. Allora x è un punto di accumulazione di $U \iff$ ogni intorno di x contiene una quantità infinita di punti di U.*

Dimostrazione. $\Longleftarrow$: è immediato.
$\Longrightarrow$: Supponiamo che x sia un punto di accumulazione di U. Consideriamo un intorno V di x. Dobbiamo dimostrare che V contiene una quantità infinita di punti di U. per ipotesi, sappiamo che V contiene un punto $u_1 \in U$, $u_1 \neq x$. La proprietà T_1 di $X \implies$ esiste un'intorno W_1 di x che non contiene u_1. Quindi $V \cap W_1$ è un'altro intorno di x, che per ipotesi deve contenere un punto $u_2 \in U$, $u_2 \notin \{x, u_1\}$. Allora la proprietà $T_1 \implies$ esiste un intorno W_2 di x che non contiene u_2; quindi $V \cap W_1 \cap W_2$ è un'intorno di x, che contiene un $u_3 \in U$, $u_3 \notin \{x, u_1, u_2\}$. Proseguendo così otteniamo una successione infinita $u_1, u_2, u_3, \ldots$ di punti distinti di U che sono contenuti in V. □

---

3 Lesson 3

3.1 Denso, mai denso, separabile

Definizione. 1. *Il sottoinsieme $S \subset X$ si dice* denso in X *se $cl(S) = X$.*

2. *Un sottoinsieme $S \subset X$ si dice* mai denso *se $(\overline{S})^\circ = \emptyset$, i.e., la parte interna della chiusura di S è $\emptyset$.*

3. *Lo spazio X si dice* separabile *se ammette un sottoinsieme denso numerabile.*

Esempio. Topologia standard su $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ è denso e numerabile, quindi $\mathbb{R}$ è separabile. $\mathbb{Z}$ è mai denso.

3.2 Continuità

Siano X e Y due spazi topologici, e $f : X \to Y$ un'applicazione. Dato un sottoinsieme $U \subset Y$, la *controimmagine di U* è il sottoinsieme di X definito nel modo seguente

$$f^{-1}(U) := \{x \in X | f(x) \in U\}.$$

Definizione. *Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice* continua *se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:*

1. *per ogni aperto U in Y, $f^{-1}(U)$ è aperto in X.*

2. *per ogni intorno V di $f(p)$ in Y esiste un intorno U di p in X tale che $f(U) \subset V$.*

3. *per ogni chiuso U in Y, $f^{-1}(U)$ è chiuso in X.*

Dimostrazione dell'equivalenza delle due definizioni di continuità:
1) $\implies$ 2): sia V un intorno di $f(p)$. Dalla definizione di continuità, $f^{-1}(V)$ è aperto in X, e contiene p. Dunque $f^{-1}(V)$ è un intorno di p, e $f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X) \subset V$.
2) $\implies$ 1): sia V un aperto in Y. Se $V \cap f(X) = \emptyset$, $f^{-1}(V) = \emptyset$ quindi è aperto. Se invece $V \cap f(X) \neq \emptyset$, per ogni $p \in f^{-1}(V)$, V è un intorno di $f(p)$ dunque per ipotesi esiste un intorno $U_p \ni p$ con $f(U_p) \subset V$, ossia $U_p \subset f^{-1}(V)$. Quindi $f^{-1}(V) = \bigcup_{p \in f^{-1}(V)} U_p$ è aperto.

Esercizio 8. *Dimostrare che per qualsiasi applicazione* $f : X \to Y$, $f^{-1}(U)^c = f^{-1}(U^c)$. *Concludere che 1.* $\iff$ *3.*

Esempio. Ricostruiamo dalla seconda definizione la solita definizione "ϵ-δ" di applicazioni continue tra spazi metrici: $f : X \to Y$ è *continua* se per ogni $\epsilon > 0$, e ogni $x \in X$, esiste $\delta > 0$ tale che $d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon$. (Per ogni $x \in X$ la palla $B_\epsilon(f(x))$ è un'intorno di $f(x)$ nello spazio Y, e f continua $\implies$ esiste un intorno $B_\delta(x)$ di x nello spazio X tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$.)

Esempio. Un'applicazione continua $f : (\mathbb{R}, \text{Sorgenfrey}) \to (\mathbb{R}, \text{standard})$ soddisfa la seguente condizione: per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c.

$$f([x, x+\delta)) \subset (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon),$$

cioè $t \in [x, x+\delta) \implies |f(t) - f(x)| < \epsilon$. Ciò significa che il limite destro $\lim\limits_{t \to x^+} f(t)$ esiste ed è uguale a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ossia f è *continua a destra.*

Uno studente ha fatto la seguente buona domanda, a proposito dell'esempio precedente:

"La definizione di continuità dice che esiste un intorno di $p \in X$. Nella topologia di Sorgenfrey, un intorno di x non deve essere per forza del tipo $[x, x+\delta)$, potrebbe anche essere un intervallo $(x-\delta, x+\delta)$. Perchè abbiamo detto che l'intorno garantita dalla continuità di f è del tipo $[x, x+\delta)$? "

La ragione è che la collezione $\{[x, x+\delta) | \delta > 0\}$ di intorni di $x \in \mathbb{R}$ è un sistema fondamentale di intorni per x. Questo significa che ogni intorno di x contiene un intorno appartenente al sistema fondamentale di intorni. Quindi, la continuità di f garantisce che esiste un intorno V di x tale che $f(V) \subset (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$, l'intorno V deve contenere un intorno $[x, x+\delta)$ dal sistema fondamentale di intorni, e allora $f([x, x+\delta)) \subset f(V) \subset (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$.

Proposizione 3.2.1. *Se* $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ *sono due topologie sullo stesso insieme* X *(*$\mathcal{T}_2$ *è più fine di* $\mathcal{T}_1$*), allora*

1. $f : (X, \mathcal{T}_1) \to Y$ *è continua* $\implies$ $f : (X, \mathcal{T}_2) \to Y$ *è continua,*
2. $f : Y \to (X, \mathcal{T}_2)$ *è continua* $\implies$ $f : Y \to (X, \mathcal{T}_1)$ *è continua.*

Dimostrazione.

1. Sia U un aperto di Y. Poichè $f^{-1}(U)$ è aperto nella topologia $\mathcal{T}_1$, e ogni aperto nella topologia $\mathcal{T}_1$ è aperto nella topologia $\mathcal{T}_2$, $f^{-1}(U)$ è aperto nella topologia $\mathcal{T}_2$.
2. Sia U un aperto di X nella topologia T_1. Poichè U è anche aperto nella topologia $\mathcal{T}_2$, per la continuità di f segue che $f^{-1}(U)$ è aperto in Y.

□

3.3 Omeomorfismo

Definizione. *Se* $f : X \to Y$ *è biunivoca, e se* f *e l'inversa* $f^{-1} : Y \to X$ *sono continue,* f *è detta un omeomorfismo, e si dice che* X *e* Y *sono spazi* omeomorfi *e* X *è omeomorfo a* Y.

Si scrive $X \cong Y$ per dire che X è omeomorfo a Y.

Esempio. L'applicazione $\tan : (\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, è un omeomorfismo.

Esempio. La funzione $f : [0, 2\pi) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $t \mapsto e^{it}$ è iniettiva e suriettiva e quindi biunivoca, ma non è un'omeomorfismo: $[0, \epsilon)$, $0 < \epsilon < 2\pi$ è aperto nella topologia di $[0, 2\pi)$, ma l'immagine $f([0, \epsilon))$ non è un aperto nella topologia di S^1.

3.4 La topologia quoziente

Definizione. *Un sottoinsieme* $R \subset X \times X$ *si dice una* relazione di equivalenza *se:*

1. $\forall\, x \in X$, $(x, x) \in R$ *(proprietà riflessiva)*
2. $(x, y) \in R \iff (y, x) \in R$ *(proprietà simmetrica)*
3. $(x, y), (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$ *(proprietà transitiva)*

Spesso si scrive xRy o $x \sim y$ per dire $(x, y) \in R$.

Una relazione di equivalenza partisce X in *classi di equivalenza*. Se $x \in X$, indichiamo con $[x]$ la classe di equivalenza contenente x, i.e. $[x] = \{y \in X | (x, y) \in R\}$. Quindi $[x] = [y] \iff xRy$, e per ogni paio di classi di equivalenza $[x], [y]$, ci sono due possibilità: o $[x] = [y]$, o $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Definizione. *L'insieme delle classi di equivalenza di R si dice* l'insieme quoziente *associato ad R. Lo denotiamo con X/R.*

L'applicazione $\pi : X \to X/R$, $x \mapsto [x]$, è detta la *proiezione canonica*, ed è ovviamente suriettiva.

Quando X è uno spazio topologico si può definire su X/R una topologia, detta la *topologia quoziente*, nel seguente modo:

$U \subset X/R$ è aperto in $X/R \iff \pi^{-1}(U)$ è aperto in X.

Quindi, la topologia quoziente rende la proiezione canonica continua. Inoltre,

Proposizione 3.4.1. *La topologia quoziente è la topologia più fine su X/R che rende la proiezione canonica π continua.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T}$ un'altra topologia su X/R, e supponiamo che $\pi : X \to X/R$ sia continua rispetto a $\mathcal{T}$. Allora per ogni aperto U nella topologia $\mathcal{T}$, dalla definizione di continuità $\pi^{-1}(U)$ è aperto in X. Dalla definizione della topologia quoziente segue che U è anche aperto nella topologia quoziente su X/R. Quindi, ogni aperto nella topologia $\mathcal{T}$ è anche aperto nella topologia quoziente, ossia la topologia quoziente è più fine di $\mathcal{T}$. $\square$

Esempio. X= $[0, 1]$, $0 \sim 1$, $X/\sim = S^1$.

Esempio. $D = \{z \in \mathbb{C} | \|z\| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$, $z_1 \sim z_2 \iff \|z_1\| = 1 = \|z_2\|$. $D/\sim = S^2$.

Esempio. Il cilindro $\mathbb{R}^2/\sim$, relazione di equivalenza $(x, y) \sim (x + n, y) \forall n \in \mathbb{Z}$.

Esempio. Il toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\sim, (x + n, y + m) \sim (x, y) \forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Spazi proiettivi reali $\mathbb{R}P^k$, $k \geq 1$.

Sia $X = \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$, e poniamo su X la relazione di equivalenza $(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) \sim \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cioè, i punti che stanno sulla stessa retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^{k+1}$ vengono identificati.

Definizione. $\mathbb{R}P^k$ *è il quoziente $X/\sim$.*

Ogni retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^{k+1}$ interseca la sfera $S^k := \{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} | x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{k+1}^2 = 1\}$ ad esattamente due punti antipodali. Quindi $\mathbb{R}P^k$ si definisce anche come il quoziente $S^k/\sim$, dove la relazione $\sim$ identifica punti antipodali: $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \sim (-x_1, -x_2, \ldots, -x_k)$.

Ad esempio $k = 1$: $\mathbb{R}P^1$ è il quoziente $S^1/\sim$ associato alla relazione $(x, y) \sim (-x, -y)$. Se dimentichiamo i punti di S^1 con $y < 0$, e identifichiamo $S^1 \cap \{y \geq 0\}$ con l'intervallo $[0, \pi]$ che parametrizza gli angoli, vediamo che $\mathbb{R}P^1$ si realizza come il quoziente $[0, \pi]/(0 \sim \pi)$.

$k = 2$: $\mathbb{R}P^2 = S^3/\sim$, dove $\sim$ identifica punti antipodali. L'applicazione $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ identifica l'emisfera $S^3 \cap \{z \geq 0\}$ con il disco $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, e quindi $\mathbb{R}P^2 = D^2/\sim$ dove $\sim$ identifica punti antipodali di $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.

Spazi proiettivi complessi $\mathbb{C}P^k$

Ponendo $\mathbb{C}$ al posto di $\mathbb{R}$ nella costruzione precedente si ottengono gli spazi proiettivi complessi, $\mathbb{C}P^k$. Concretamente:

$X = \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, relazione di equivalenza $(z_1, \ldots, z_{k+1}) \sim (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_k)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Definizione. $\mathbb{C}P^k$ *è il quoziente $X/\sim$.*

Ad esempio, $k = 1 : X = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(z_1, z_2) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}P^1 = X/\sim$.

Si denota la classe di equivalenza di $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con $(z_1 : z_2)$. Quindi $(z_1 : z_2) = (1 : z_2/z_1)$ se $z_1 \neq 0$, e $(z_1 : z_2) = (z_1/z_2 : 1)$ se $z_2 \neq 0$. Quindi ogni punto di $\mathbb{C}P^1$ corrisponde o a $(1 : a)$ o $(b : 1)$, con l'identificazione $(1 : \zeta) = (\frac{1}{\zeta} : 1)$ quando $\zeta \neq 0$. L'unico punto di $\mathbb{C}P^1$ che non può essere rappresentata nel modo $(1 : \zeta)$ è il punto $(0 : 1)$. Il punto $(0 : 1)$ è detto *il punto all'infinito.*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^1 &= \{(1 : \zeta) | \zeta \in \mathbb{C}\} \cup \{(0 : 1)\} \\ &\cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ &\cong S^2. \end{aligned}$$

Caveat: Il quoziente $X/\sim$ non deve ereditare tutte le proprietà topologiche di X. Per esempio, la topologia quoziente di uno spazio di Hausdorff non è sempre Hausdorff:

Esempio. $X = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}$ è di Hausdorff. Poniamo una relazione di equivalenza $\sim$ su X che identifica un punto $x \neq 0$ nella prima retta con lo stesso punto $x \neq 0$ nella seconda retta. Il quoziente è la retta $\mathbb{R}$ con un doppio punto a 0, perchè i due zeri di X non vengono identificati. Indichiamo i due zeri con $0_1, 0_2$. Il quoziente $X/\sim$ non è di Hausdorff perchè ogni intorno di 0_1 interseca ogni intorno di 0_2.

---

4 Lesson 4

4.1 Review of exercises

First hour of class = recitation.

4.2 Spazi connessi

Definizione. *Lo spazio X si dice* connesso *se per ogni due aperti $U, V \subset X$ tali che $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = X$, o $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$. Altrimenti si dice* sconesso *o* disconesso.

Alternativamente:

Definizione. *X si dice* disconnesso *se esistono aperti non-vuoti U, V tali che $U \cup V = X$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Definizione. *Un sottoinsieme $S \subset X$ di dice connesso se è connesso nella topologia indotta. Cioè,*

- *S è disconnesso $\iff$ esistono aperti U, V di X tali che $U \cap S$ e $V \cap S$ non sono vuoti, $S \subset U \cup V$, e $U \cap V \cap S = \emptyset$*
- *S è connesso $\iff$ per ogni paio di aperti U, V di X tali che $U \cap V \cap S = \emptyset$ e $S \subset U \cup V$, o $U \cap S$ o $V \cap S$ è l'insieme vuoto.*

Proposizione 4.2.1.

Sia $f : S \to X$ continua. Allora S è connesso $\implies$ $f(S)$ è connesso.

Dimostrazione. Siano U, V aperti di X tali che $U \cap V \cap f(S) = \emptyset$ e $f(S) \subset U \cup V$. Allora, poichè f è continua, sia $f^{-1}(U)$ che $f^{-1}(V)$ sono aperti in S, e $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = S$. Poichè S è connesso, uno di questi due aperti deve essere vuoto, e quindi o $U \cap f(S)$ o $V \cap f(S)$ è vuoto, il che significa che $f(S)$ è connesso.

□

Definiamo una relazione di equivalenza $\sim$ su X nel modo seguente: $x \sim y \iff$ *non* esistono intorni U di x, V di y tali che $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = X$.

Esercizio 9. *Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.*

Le classi di equivalenza di $\sim$ costituiscono una partizione di X.

Definizione. *Le classi di equivalenza di $\sim$ si dicono le* componenti connesse *di X.*

Proposizione 4.2.2. *Le componenti connesse di uno spazio X sono insiemi chiusi. Se X ha un numero finito di componenti connesse, allora le componenti sono anche aperte.*

Dimostrazione. Indichiamo con $[x]$ la componente contenente $x \in Y$. Se $y \in [x]^c$, esistono intorni U_x di x e V_y di y tali che $U_x \cap V_y = \emptyset$ e $U_x \cup V_y = X$. Chiaramente ogni $z \in V_y$ è anche in $[x]^c$, e quindi $V_y \subset [x]^c$. Quindi $[x]^c = \bigcup_{y \in [x]^c} V_y$ è aperto $\implies$ $[x]$ è chiuso.

Supponiamo che ci sia un numero finito di componenti connesse di X. Allora per ogni componente connessa $[x]$,

$$[x] = \left(\bigcup_{[y] \neq [x]} [y] \right)^c .$$

Poichè l'unione di un numero finito di chiusi è chiuso, $[x]$ è il complementare di un chiuso, quindi aperto. □

Esempio. $\mathbb{R}$ con la topologia standard, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta.

- $\mathbb{Q}$ non è connesso: per qualunque $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, i due aperti $(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$ e $(a, \infty) \cap \mathbb{Q}$ sono non-vuoti e disgiunti, e la loro unione è $\mathbb{Q}$.
- Le componenti connessi sono $[x] = \{x\}$. Siano $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq y$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $x < y$. Poichè esiste un $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che $x < a < y$, gli aperti $(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$ e $(a, \infty) \cap \mathbb{Q}$ sono aperti non-vuoti disgiunti, ricoprono $\mathbb{Q}$, e $x \in (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$, $y \in (a, \infty) \cap \mathbb{Q}$, quindi $y \notin [x]$.
- Le componenti connesse $\{x\}$ sono chiusi, e non sono aperti.

---

5 Lesson 5

Esercizio 10. *Trovare le componenti connesse di* $\{0\} \bigcup \{\frac{1}{n} | n \geq 1, n \in \mathbb{Z}\}$. *Quali componenti sono aperte nella topologia indotta? Quali non sono aperte?*

Esempio. $GL(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. La funzione $\det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è continua. L'immagine di $GL(n, \mathbb{R})$ tramite det è l'unione $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ che è disconnesso, quindi $GL(n, \mathbb{R})$ è disconnesso.

5.1 Connessione per archi

Un'altra nozione di connessione è connessione per cammini/per archi. Un *arco*, o un cammino, è una funzione continua $p : [0, 1] \to X$.

Definizione (spazio connesso per archi/path-connected space)**.** *Lo spazio X si dice* connesso per archi *se per ogni $x, y \in X$, esiste un arco $p : [0, 1] \to X$ con $p(0) = x, p(1) = y$.*

Ponendo su X la relazione di equivalenza

$$xRy \iff \text{esiste un arco che collega } x \text{ e } y,$$

le classi di equivalenza si dicono le *componenti connesse per archi* di X. Quindi X è connesso per archi $\iff$ c'è un'unica componente connessa per archi.

Caveat: Diversamente dalle componenti connesse, le componenti connesse per archi non sono necessariamente chiusi (nè aperti) nella topologia.

Proposizione 5.1.1. *Connesso per archi $\implies$ connesso.*

Dimostrazione. Siano U, V aperti disgiunti e non vuoti tali che $U \cup V = X$. Allora consideriamo $x \in U$ e $y \in V$. Poichè X è connesso per archi, esiste un arco $p : [0, 1] \to X$ con $p(0) = x, p(1) = y$. Ma l'immagine di p è sconnesso, perche $p([0, 1]) \cap U$ e $p([0, 1]) \cap V$ sono disgiunti, non-vuoti, e ricoprono $p([0, 1])$ - dato Proposizione 4.2.1, assurdo. □

Ma connesso non implica connesso per archi, come dimostrato dal seguente famoso esempio.

5.2 Il seno topologico

Il *seno topologico*, detto anche serpente topologico, è il sottoinsieme X del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ definito nel modo seguente:

$$X := \underbrace{\{(x, \sin(\frac{1}{x}))|x \in (0,\infty)\}}_{G} \bigcup \underbrace{\{(0,y)|y \in [-1,1]\}}_{I}.$$

Cioè, è l'unione del grafico di $\sin(\frac{1}{x})$, $x > 0$, con un'intervallo verticale nell'asse y.

- X è connesso: il grafico e l'intervallo sono entrambi connessi, e osserviamo che ogni intorno di un punto $(0, y)$ dell'intervallo deve intersecare il grafico, percui $(0, y)$ appartiene alla componente connessa contenente il graphico, ossia X ha un' unica componente connessa.

- X non è connesso per archi. Dimostriamo che per ogni $x > 0$ e $y \in [-1, 1]$, non esiste un arco $p : [0, 1] \to X$ con $p(0) = (x, \sin(\frac{1}{x})$ e $p(1) = (0, y)$.

  Supponiamo per assurdo che tale arco esista. Poichè p è continua, e I è chiuso, $p^{-1}(I) \subset [0, 1]$ è chiuso e non-vuoto. Inoltre $p(0) \notin I$, quindi esiste un intervallo $[0, t_0) \subset [0, 1]$ tale che $p(t) \in G$ per ogni $t \in [0, t_0)$, e $p(t_0) = (0, y_0) =: p_0 \in I$.

  Per la definizione di continuità, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $f(t) \in B_\epsilon(p_0)$ per ogni $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

  Ora consideriamo l'immagine dell'intervallo aperto $U = (t_0 - \delta, t_0)$ tramite p. Sappiamo che $p(U) \subset G \cap B_\epsilon(p_0)$. Poichè U è connesso, $p(U)$ è connesso, quindi $p(U)$ è un sottoinsieme connesso di $G \cap B_\epsilon(p_0)$.

  Adesso arriviamo alla contradizione: se ϵ è sufficientemente piccolo (ad esempio, $\epsilon < \frac{1}{2}$), l'insieme $G \cap B_\epsilon(p_0)$ è l'unione di una quantità infinita di componenti connesse. Inoltre, per ogni componente connessa C di $G \cap B_\epsilon((0, y_0))$ esiste un $\gamma_C > 0$ tale che per ogni $p \in C$, la distanza $d(p, p_0) > \gamma_C$. Quindi se scegliamo un $0 < \epsilon_1 < \gamma_C$, avremo

  $$B_{\epsilon_1}(p_0) \cap p(U) = \emptyset.$$

  D'altra parte, tuttavia, poichè p è continua esiste un $\delta_1 > 0$ tale che per ogni $t \in \underbrace{(t_0 - \delta_1, t_0)}_{U_1}$, $p(t) \subset B_{\epsilon_1}(p_0)$.

  Quindi

  $$B_{\epsilon_1}(p_0) \cap p(U) \supset p(U_1) \cap B_{\epsilon_1}(p_0) \neq \emptyset,$$

  -assurdo.

- X ha due componenti connesse per archi, G ed I. G è aperto e non chiuso, ed I è chiuso e non aperto.

Esercizio 11. *Se X è uno spazio topologico connesso per archi, e $\sim$ è una relazione di equivalenza, allora $X/\sim$ con la topologia quoziente è connesso per archi.*

Adesso dimostreremo che "localmente connesso per archi + connesso = connesso per archi".

Definizione. *Uno spazio topologico X si dice* localmente connesso per archi *se ogni $p \in X$ ha un intorno connesso per archi.*

Proposizione 5.2.1. *Se uno spazio X è localmente connesso per archi, allora X è connesso $\iff$ X è connesso per archi.*

Dimostrazione. La direzione $\Longleftarrow$ vale sempre (Proposizione 5.1.1). Quindi supponiamo che lo spazio sia connesso. La proprietà di essere localmente connesso per archi implica che le componenti connesse per archi sono aperti. Se ci fossero più di una componente connessa per archi, X sarebbe disconnesso. □

Esempio. Gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, sono tutti localmente connessi per archi.

Esempio. Il serpente topologico non è localmente connesso per archi.

5.3 Spazi compatti

Sia X uno spazio topologico. Un *ricoprimento aperto* di X è una famiglia $\{U_i|i \in I\}$, U_i aperto in X, tale che

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Definizione. *X si dice* compatto *se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottocoprimento finito, i.e., per ogni ricoprimento aperto $\{U_i|i \in I\}$ di V, esistono $i_1, \ldots, i_n \in I$ tale che $X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$.*

Definizione. *Un sottoinsieme $V \subset X$ si dice compatto se V è compatto nella topologia indotta.*

Più concretamente, se $V \subset X$, un ricoprimento aperto di V è una famiglia $\{U_i|i \in I\}$, U_i aperto in X, tale che

$$V \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

e V è compatto se per ogni ricoprimento aperto $\{U_i|i \in I\}$ di V, esistono $i_1, \ldots, i_n \in I$ tali che $V \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$.

Esempio. $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}$ non sono compatti. L'intervallo aperto (a, b) non è compatto.

---

6 Lesson 6

Esercizio 12. *In uno spazio X con $|X| < \infty$, quali sono i sottoinsiemi compatti?*

Esercizio 13. *In uno spazio X con la topologia discreta, quali sono i sottoinsiemi compatti?*

6.1 Il teorema di Heine-Borel

Lemma 6.1.1 (Teorema di Heine-Borel, caso dell'intervallo chiuso)**.** *L'intervallo chiuso $[0, 1]$ è compatto in $\mathbb{R}$ con la topologia standard. Quindi ogni intervallo chiuso $[a, b], a < b$ è compatto, perchè è omeomorfo a $[0, 1]$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i|i \in I\}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1]$. Definiamo un sottoinsieme $S \subset [0, 1]$ nel modo seguente:

$$x \in S \iff [0, x] \text{ è ricoperto da un numero finito degli aperti nella famiglia } \mathcal{U}.$$

$0 \in S$, quindi S non è vuoto. È anche chiaro che se $x \in S$, allora $[0, x] \subset X$. A questo punto entra una proprietà importante di $\mathbb{R}$: lo spazio $\mathbb{R}$ è *completo*, il che significa che per ogni sottoinsieme non-vuoto X di $\mathbb{R}$ limitato superiormente, esiste un elemento $y \in \mathbb{R}$ detto *l'estremo superiore* di X, indicato $y = \sup(X)$.

Il nostro sottoinsieme $S \subset [0, 1]$ è limitato superiormente, quindi consideriamo $y = \sup S \in [0, 1]$. Proveremo

1. $y \neq 0$,
2. $y \notin (0, 1)$,
3. $y \in S$,

così per i primi due fatti $y = 1$, e dal terzo $1 \in S$, ossia $[0, 1]$ ha un sottoricoprimento finito.

1. Prendiamo qualsiasi aperto $U \in \mathcal{U}$ contenente 0. Esiste un $\epsilon > 0$ tale che $[0, \epsilon) \subset U$, quindi per ogni $x \in [0, \epsilon)$ l'intervallo $[0, x]$ è ricoperto da U, perciò $x \in S$. Quindi $y = \sup S \geq \epsilon > 0$.

2. Ora supponiamo per assurdo che $0 < y = \sup S < 1$. Sia $U \in \mathcal{U}$ un aperto contenente y; quindi esiste $\epsilon > 0$ tale che $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset U$. Poichè y è l'estremo superiore di S, esiste un $x \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \cap S$. Allora l'unione del sottoricoprimento finito di $[0, x]$ con l'aperto U è un sottoricoprimento finito di $[0, y + \delta]$ per qualsiasi $0 < \delta < \epsilon$, quindi $y + \delta \in S$ e $y \neq \sup S$ − assurdo.

3. Finalmente dimostriamo che $y \in S$. Sia $U \in \mathcal{U}$ qualsiasi aperto contenente y. Esiste un $\epsilon > 0$ tale che $(y-\epsilon, y] \subset U$, e esiste un $x \in S \cap (y-\epsilon, y]$, quindi

$$(\text{un sottoricoprimento finito di } [0,x]\ ) \bigcup U$$

è un sottoricoprimento finito di $[0,y] \implies y \in S$.

□

La dimostrazione del teorema precedente utilizza *in modo essenziale* delle proprietà specifiche della topologia standard di $\mathbb{R}$ – la completezza di $\mathbb{R}$ come spazio metrico, e la relazione tra la topologia e l'ordine totale su $\mathbb{R}$, sono proprietà necessarie per la definizione e l'esistenza dell'estremo superiore $\sup S \in \mathbb{R}$.

Esempio. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta dalla topologia standard su $\mathbb{R}$. In questo caso la topologia è collegata alla relazione d'ordine, però $\mathbb{Q}$ non è completo. E infatti $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto nella topologia indotta su $\mathbb{Q}$: sia $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap (0,1)$, e siano $\{\underline{a}_n\}$ e $\{\overline{a}_n\}$ due successioni in $\mathbb{Q}$ con limite a tali che $\{\underline{a}_n\}$ è monotona crescente e $\{\overline{a}_n\}$ è monotona decrescente. Allora

$$[0,1] \cap \mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 1} ([0, \underline{a}_n) \cup (\overline{a_n}, 1]) \cap \mathbb{Q}$$

è un ricoprimento aperto che non ammette un sottoricoprimento finito.

Esempio. $\mathbb{R}$ con la metrica discreta è banalmente completo: se $\{x_n\}$ è una successione convergente nella topologia discreta, allora per ogni $0 < \epsilon < 1$, $d(x_n, x_m) < \epsilon \iff x_n = x_m$. Però la topologia discreta non ha niente da fare con l'ordinamento totale di $\mathbb{R}$. E infatti il sottoinsieme $[0,1]$ non è compatto nella topologia discreta, perchè contiene una quantità infinita di punti.

6.2 Proprietà di spazi compatti

Proposizione 6.2.1. *Proprietà di spazi compatti. Siano X ed Y spazi topologici.*

1. *Il prodotto $U \times V \subset X \times Y$ è compatto $\iff$ i fattori U e V sono compatti.*
2. *Se $f : X \to Y$ è continua, e $V \subset X$ è compatto, allora $f(V) \subset Y$ è compatto.*
3. *Se V è compatto e $U \subset V$ è chiuso, allora U è compatto.*
4. *In uno spazio di Hausdorff, compatto $\implies$ chiuso.*

Dimostrazione. 1. ($\implies$:) Sia $\{U_i, i \in I\}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di U. Allora la famiglia $\{U_i \times Y | i \in I\}$ è un ricoprimento aperto di $U \times V$, pertanto, per la compattezza di $U \times V$, esiste un sottoricoprimento finito $\{U_{i_1} \times Y, \ldots, U_{i_n} \times Y\}$ di $U \times V$. Quindi $U \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots U_{i_n}$, ciò prova la compattezza di U. Lo stesso ragionamento prova la compattezza di V. ($\Longleftarrow$:) Sia $\{U_i \times V_i, i \in I\}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di $U \times V$, cioè $U \times V \subset \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i)$. Per la definizione della topologia prodotto ogni U_i è aperto in X e ogni V_i è aperto in Y, quindi $U \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ e $V \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ sono ricoprimenti aperti. Per la compattezza di U e V, esistono $i_1, \ldots, i_n \in I$ e $j_1, \ldots, j_m \in I$ tali che $U \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ e $V \subset V_{j_1} \cup \ldots \cup V_{j_m}$. Dunque $\{U_a \times V_a | a \in \{i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m\}\}$ è un sottoricoprimento finito di $U \times V$, e quindi $U \times V$ è compatto.

2. Sia $\{U_i, i \in I\}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di $f(V)$. Poichè f è continua, $f^{-1}(U_i)$ è aperto per ogni $i \in I$, dunque $\{f^{-1}(U_i), i \in I\}$ è un ricoprimento aperto di V. Per la compattezza di V, esiste un sottoricoprimento finito $\{f^{-1}(U_i) | i \in \{i_1, \ldots, i_n\}\}$. Allora

$$V \subset \bigcup_{i \in \{i_1, \ldots, i_n\}} f^{-1}(U_i) \implies f(V) \subset \bigcup_{i \in \{i_1, \ldots, i_n\}} U_i,$$

perciò $f(V)$ è compatto.

3. Sia $\{X_i | i \in I\}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di U. Poichè U è chiuso, U^c è aperto, quindi $\{X_i | i \in I\} \cup U^c$ è un ricoprimento aperto di V. Per la compattezza di V esiste un sottoricoprimento finito $V \subset U^c \cup X_{i_1} \cup \ldots X_{i_n}$, percui $X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_n}$ è un sottoricoprimento finito di U.

4. Sia X uno spazio di Hausdorff, e $U \subset X$ compatto. Dimostreremo che U^c è aperto. Sia $x \in U^c$. Per ogni $y \in U$, esistono intorni disgiunti A_y di y e B_y di x. La famiglia $\{A_y | y \in U\}$ è un ricoprimento aperto di U, quindi per la compattezza di U esiste un sottoricoprimento finito, $\{A_{y_1}, \dots, A_{y_n}\}$. Allora l'intersezione $C_x := B_{y_1} \cap \dots \cap B_{y_n}$ è un intorno di x disgiunto dall'unione $A_{y_1} \cup \dots \cup A_{y_n}$ e quindi disgiunto da U, ossia $C_x \subset U^c$. Dunque ogni $x \in U^c$ ha un intorno $C_x \subset U^c$, e quindi $U^c = \bigcup_{x \in U^c} C_x$ è aperto.

□

Esempio. $[a, b] \times [c, d]$ è compatto in $\mathbb{R}^2$, da Proprietà 1 di Proposizione 6.2.1.

Esempio. S^1 è compatto, perchè $S^1 = [0, 1]/0 \sim 1$, e $\pi : [0, 1] \to S^2$ è continua.

Esempio. Il toro T^2 è compatto, perchè $T^2 = S^1 \times S^1$. Il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ non è compatto perchè $\mathbb{R}$ non è compatto.

Esercizio 14. *Vero/falso: In uno spazio T_1, compatto $\implies$ chiuso.*

Definizione. *Un sottoinsieme V di uno spazio metrico si dice* limitato *se esiste un $N > \mathbb{R}$ tale che $d(x, y) < N$ per ogni $x, y \in V$.*

Esercizio 15. *Sia X uno spazio metrico, e $V \subset X$. Dimostrare che V compatto $\implies$ V limitato. (Suggerimenti: 1. $V \subset \bigcup\limits_{n \geq 1} B_n(x)$ per qualsiasi $x \in X$, 2. l'uguaglianza triangolare.)*

Teorema 6.2.2 (Teorema di Heine-Borel, versione completa per $\mathbb{R}$)**.** *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con la topologia standard è compatto $\iff$ è chiuso e limitato.*

Dim. $\implies$: Sia $V \subset \mathbb{R}$ compatto. La topologia standard è di Hausdorff $\implies$ V è chiuso (Proposizione 6.2.1). Inoltre $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico, quindi V è limitato (Esercizio 15).

$\impliedby$: Sia $V \subset R$ chiuso e limitato. Poichè è limitato, esiste un $N > 0$ tale che $V \subset [-N, N]$. Abbiamo dimostrato (Lemma 6.1.1) che $[-N, N]$ è compatto. Dunque V è un sottoinsieme chiuso di un compatto, quindi V è compatto (Proprietà 3 di Proposizione 6.2.1).

□

---

7 Lesson 7

Corollario 7.0.3 (Teorema di Heine-Borel per $\mathbb{R}^n$.)**.** *Un sottoinsieme dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è compatto $\iff$ è chiuso e limitato.*

Proof. $\implies$: Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ compatto. Allora V è chiuso perchè $\mathbb{R}^n$ è T_2, e V è limitato perchè $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico.
$\impliedby$: Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato. V è limitato quindi esiste un $N > 0$ tale che V è contenuto nella palla aperta $B_N(0)$ di raggio N centrata all'origine $0 = (0, \dots, 0)$. E $B_N(0)$ è contenuta nel prodotto $\underbrace{[-N, N] \times \dots [-N, N]}_{n}$ di intervalli chiusi. Dal teorema di Heine-Borel per $\mathbb{R}$, ogni intervallo $[-N, N]$ è compatto, quindi il loro prodotto è compatto (Proprietà 1 di Proposizione 6.2.1). Quindi V è un sottoinsieme chiuso di un sottoinsieme compatto, quindi è compatto (Proprietà 3 di Proposizione 6.2.1). □

Per il Teorema di Heine-Borel, possiamo aumentare il nostro catalogo di esempi di spazi compatti.

Esempio. Le sfere $S^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k+1} | \|\mathbf{x}\| = 1\}$, $k \geq 1$, sono tutte compatte: è chiaro che sono limitate, e la funzione $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ data da $(x_1, \dots, x_k) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{k+1} x_i^2$ è continua, quindi $S^k = f^{-1}(1)$ è chiuso perchè $\{1\}$ è chiuso.

Esempio. Le palle chiuse $B^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k+1} | \|x\| \leq 1\}$ sono chiuse (perchè $B^k = f^{-1}([0, 1])$ per la funzione continua $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$.

Esempio. Ogni quoziente di uno spazio compatto è compatto, perchè è l'immagine di uno spazio compatto tramite la proiezione canonica. Ad esempio gli spazi proiettivi $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 1$, essendo tutti quozienti di S^n sono compatti.

Proposizione 7.0.4. *Se S è compatto, una funzione continua $f : S \to \mathbb{R}$ ha un massimo e minimo assoluto.*

Dim. Se S è compatto, l'immagine $f(S)$ è compatto in $\mathbb{R}$, quindi $f(S)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$, e quindi l'immagine $f(S)$ ha un massimo e minimo assoluto. □

Esempio. $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$ è aperto quindi non è compatto.

Esempio. $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) | \det A = 1\}$ è chiuso ma non è compatto, – ad esempio la funzione $A \mapsto a_{11}$ non ha un massimo/minimo assoluto.

Esempio. $O(n,\mathbb{R})$ è compatto: l'insieme delle matrici $A \in M(n,\mathbb{R})$ che soddisfano $AA^T = A^T A = Id$ (l'inversa di A è la trasposta). Possiamo identificare $M(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, e verificare che 1) $O(n,\mathbb{R})$ è chiuso perchè è la controimmagine del sottoinsieme chiuso $\{-1,1\} \subset \mathbb{R}$ tramite det; 2) $O(n,\mathbb{R})$ è limitato in $M(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ perchè ogni elemento deve soddisfare $|a_{ij}| \leq 1$.

Esercizio 16. *Verificare che l'insieme di matrici ortogonali $O(2,\mathbb{R}) = \{A \in M(2,\mathbb{R}) | AA^T = A^T A = Id\}$ ha due componenti connesse, e ciascuna delle componenti connesse è omeomorfa a S^1.*

7.1 Compattezza sequenziale

Una nozione alternativa di compattezza è basata sulla nozione di *successione convergente*.

Definizione. *Si dice che una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di X* converge *ad un punto $x \in X$ se per ogni intorno U di x, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ $\forall$ $n \geq N$.*

Si può anche dire che x è un *punto limite* della successione $\{x_n\}$.
Caveat: In generale, una successione convergente può avere più di uno punto limite.

Esempio. Se X è un insieme munito della topologia triviale, allora ogni successione $\{x_n\}$ converge ad ogni $x \in X$, perchè X è l'unico intorno di qualsiasi $x \in X$.

Esempio. In uno spazio metrico, la definizione equivale a "la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x) < \epsilon$ per ogni $n \geq N$".

Proposizione 7.1.1. *In uno spazio metrico, il limite di una successione convergente è unico.*

Proof. Siano x e y due punti limite di una successione convergente $\{x_n\}$. Allora per ogni $\epsilon > 0$, esisterebbe un $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x, x_n) < \epsilon$ e $d(y, x_n) < \epsilon$ per ogni $n \geq N$. (Perchè esiste un N_1 per x, e N_2 per y, quindi possiamo prendere $N = \max(N_1, N_2)$.) Per l'uguaglianza triangolare $d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) < 2\epsilon$, ed ϵ arbitrario $\implies$ $d(x,y) = 0$, ossia $x = y$. □

Definizione. *Un sottoinsieme $V \subset X$ si dice* sequenzialmente compatto *se ogni successione $\{x_n\}$ in V ammette una sottosuccessione convergente ad un limite $x \in V$.*

Il fatto che le definizioni di compattezza e compattezza sequenziale sono diverse una dall'altra suggerisce che non sono concetti equivalenti. E infatti ci sono esempi di spazi che hanno una proprietà e non l'altra. (In generale sono proprietà indipendenti nel senso che nessuna proprietà implica l'altra.) Per i nostri obbiettivi è importante sapere che *i due tipi di compattezza sono equivalenti per gli spazi metrici.*

Ricordiamoci la definizione di *una successione di Cauchy* in uno spazio metrico:

Definizione. *Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X si dice una* successione di Cauchy *se per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \epsilon$ per ogni $n, m \geq \mathbb{N}$.*

Definizione. *Lo spazio metrico X si dice* completo *se ogni successione di Cauchy converge ad un limite in X.*

Lemma 7.1.2. *Sia X uno spazio metrico.*

1. *Una successione convergente in X è necessariamente una successione di Cauchy.*

2. *Se X è sequenzialmente compatto allora X è completo.*

Proof.
1. Sia $\{x_n\}$ una successione convergente nello spazio metrico X, perciò esiste un $x \in X$ tale che per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x) < \epsilon$ per ogni $n \geq \mathbb{N}$. Per la disuguaglianza triangolare, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\epsilon$ per $n, m \geq \mathbb{N}$, quindi la sucessione è di Cauchy.

2. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in X. Per la compattezza sequenziale di X esiste una sottosuccessione $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente ad un limite $x \in X$. Perciò per ogni $\epsilon > 0$,

- esiste un $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_{i_k}, x) < \epsilon$ per $k \geq N_1$, (convergenza della sottosuccessione)
- esiste un $N_2 \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \epsilon$ per $n \geq N_2$, (successione di Cauchy)

quindi se prendiamo $N = \max(i_{N_1}, N_2)$, segue dalla disuguaglianza triangolare che

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{i_{N_1}}) + d(x_{i_{N_1}}, x) < 2\epsilon$$

per ogni $n \geq N$, ossia $\{x_n\}$ converge allo stesso limite x.

□

Dimostriamo l'equivalenza dei due tipi di compattezza tramite una terza caratterizzazione di compattezza per gli spazi metrici, che richiede la seguente definizione:

Definizione. *Uno spazio metrico X si dice* totalmente limitato *se per ogni $\epsilon > 0$, esiste un numero finito $x_1, \ldots, x_n$ di elementi di X tale che le palle aperte $B_\epsilon(x_i)$ ricoprono X. i.e., $X = \cup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$.*

Teorema 7.1.3. *Sia X uno spazio metrico. Allora le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1. *X è sequenzialmente compatto*
2. *X è completo e totalmente limitato*
3. *X è compatto.*

Dimostrazione.

- $1 \implies 2$: Abbiamo uno spazio metrico X che è sequenzialmente compatto, e vogliamo provare che è completo e totalmente limitato. Sappiamo che per uno spazio metrico sequenzialmente compatto $\implies$ completo (Lemma 7.1.2). Supponiamo, per assurdo, che X *non* sia totalmente limitato, e quindi esiste un $\epsilon > 0$ tale che X non ammette alcun ricoprimento aperto da un numero finito di palle aperte di raggio ϵ. Construiamo una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nel modo seguente: prendiamo qualsiasi $x_1 \in X$ come primo elemento della successione. Poi prendiamo un $x_2 \in (B_\epsilon(x_1))^c$ – esiste tale x_2 perchè $X \neq B_\epsilon(x_1)$. Per induzione, dati $x_1, \ldots, x_n$ scegliamo un $x_{n+1} \in (\bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i))^c$ che esiste per il fatto che $X \neq \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$. Allora si vede che la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ così costruita ha la proprietà che $d(x_n, x_m) > \epsilon$ per ogni $n \neq m$, e quindi *non ammette alcuna sottosuccessione di Cauchy*. Quindi non ammette alcuna sottosuccessione convergente, contro il fatto che X è sequenzialmente compatto.

- $2 \implies 3$: Abbiamo uno spazio metrico X che è completo e totalmente limitato, e vogliamo provare che X è compatto. Supponiamo, per assurdo, che X *non* fosse compatto, percui esisterebbe un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ di X che non ammette un sottoricoprimento finito, ossia nessuna collezione finita degli aperti U_α ricopre X.

  X è totalmente limitato, quindi esiste un ricoprimento di X da un numero finito di palle aperte di raggio 1.

  Se ogni palla aperta di raggio 1 nel ricoprimento fosse ricoperta da un numero finito degli aperti U_α, avremmo un ricoprimento finito di X da aperti U_α, contro il fatto che nessuna collezione finita degli aperti U_α ricopre X. Quindi esiste una palla $B_1(x_0)$ che non è ricoperta da alcuna collezione finita degli aperti U_α.

  E di nuovo: poichè X è totalmente limitato, esiste un ricoprimento di X da un numero finito di palle aperte di raggio 1/2. Quindi anche la palla $B_1(x_0)$ è ricoperta da un numero finito di palle di raggio 1/2. Inoltre possiamo dire che le palle di raggio 1/2 in questo ricoprimento di $B_1(x_0)$ sono centrate a punti che sono una distanza inferiore a $1 + \frac{1}{2}$ da x_0 (perchè altrimenti la palla di raggio 1/2 non interseca $B_1(x_0)$).

  Se ogni palla aperta di raggio 1/2 in questo ricoprimento fosse ricoperta da un numero finito degli aperti U_α, avremmo un ricoprimento finito di $B_1(x_0)$ da aperti U_α, contro il fatto che nessuna collezione finita degli aperti U_α ricopre $B_1(x_0)$. Quindi esiste una palla $B_{1/2}(x_1)$ che non è ricoperta da alcuna collezione finita degli aperti U_α, e $d(x_1, x_0) < 1 + \frac{1}{2}$.

  Possiamo proseguire per induzione, ripetendo gli argomenti precedenti. Supponiamo che abbiamo $x_0, \ldots, x_n$ tali che per $i < j$, $d(x_i, x_j) < \sum_{k=i}^{j} \frac{1}{2^k}$, e per ogni k la palla aperta $B_{1/2^k}(x_k)$ non è ricoperta da alcuna collezione finita degli aperti U_α. Allora poichè X è totalmente limitato, esiste un ricoprimento di X da un numero finito di palle aperte di raggio $1/2^{k+1}$. Quindi anche la palla $B_{1/2^k}(x_k)$ è ricoperta da un numero finito di palle di raggio $1/2^{k+1}$, e inoltre tutte queste palle sono centrate a punti che sono una distanza inferiore a $\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$ da x_k (perchè altrimenti una palla di raggio $1/2^{k+1}$ non interseca $B_{1/2^k}(x_k)$). Se ogni palla aperta di raggio $1/2^{k+1}$ in questo ricoprimento fosse ricoperta da un numero finito degli aperti U_α, avremmo un ricoprimento finito di $B_{1/2^k}(x_k)$ da aperti U_α, contro il fatto che nessuna collezione finita degli aperti U_α ricopre $B_{1/2^k}(x_k)$. Quindi esiste una palla $B_{1/2^{k+1}}(x_{k+1})$ che non è ricoperta da alcuna collezione finita di aperti U_α, e $d(x_k,x_{k+1})<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$. Quindi, per induzione, abbiamo una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di X tale che $d(x_n,x_m)<\sum\limits_{k=n}^{m}\frac{1}{2^k}$, quindi è una successione di Cauchy. Inoltre, nessuna delle palle aperte $B_{1/2^k}(x_k)$ ammette alcun ricoprimento finito dagli aperti U_α.

Adesso arriviamo alla contradizione. X è completo $\implies$ la successione di Cauchy $\{x_n\}$ converge ad un $x\in X$. Prendiamo un aperto U_x dal ricoprimento $\mathcal{U}$ che contiene il limite $x\in X$. Siccome le palle aperte centrate a x sono un sistema fondamentale di intorni, U_x contiene una palla aperta $B_\epsilon(x)\subset U_x$ per qualche $\epsilon>0$. Poichè $\{x_k\}$ converge ad x, possiamo trovare un $K\in\mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $d(x_K,x)<\epsilon-\frac{1}{2^K}$, percui la palla aperta $B_{1/2^K}(x_K)$ è contenuta nella palla $B_\epsilon(x)$, e quindi $B_{1/2^K}(x_K)\subset B_\epsilon(x)\subset U_x$, contro il fatto che la palla aperta $B_{1/2^k}(x_k)$ non ammette alcun ricoprimento finito da aperti appartenenti ad $\mathcal{U}$ – assurdo.

Concludiamo che il ricoprimento $\mathcal{U}$ ammette un sottoricoprimento finito, ossia X è compatto.

- $3\implies 1$: Abbiamo uno spazio metrico X che è compatto, e vogliamo provare che è sequenzialmente compatto. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ una successione qualsiasi in X e consideriamo il sottoinsieme $S=\{x_n|n\in\mathcal{N}\}\subset X$. Ci sono due possibilità – o $|S|<\infty$ o $|S|=\infty$. Nel primo caso, deve esistere un elemento $s\in S$ che appare un numero infinito di volte nella successione, perciò esiste una sottosuccessione $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $x_{i_k}=s$, che è una sottosuccessione convergente trivialmente ad s. Quindi supponiamo che $|S|=\infty$. Passando se necessario ad una sottosuccessione, possiamo supporre inoltre che tutti gli elementi della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono distinti, ossia $x_m\neq x_n$ se $m\neq n$. La dimostrazione sarà completa se possiamo provare la seguente asserzione:

  Esiste un $x\in X$ tale che ogni palla aperta $B_{1/n}(x)$ contiene *un numero infinito* di elementi di $\{x_n\}$.

  Perchè prendendo qualsiasi $x_{i_1}\in B_1(x)$, siccome la palla $B_{1/2}(x)$ contiene un numero infinito di elementi della successione possiamo scegliere un elemento $x_{i_2}\in B_{1/2}(x)$ tale che $i_2>i_1$. Per induzione, per la stessa ragione possiamo scegliere un $x_{i_n}\in B_{1/n}(x)$ in modo tale che $i_n>i_{n-1}$. Così otteniamo una sottosuccessione $\{x_{i_k}\}$ convergente ad x.

  L'asserzione viene provata per assurdo: supponiamo che *non* esistasse tale $x\in X$. Quindi per ogni $x\in X$, esisterebbe un $n_x\in\mathbb{N}$ tale che la palla $B_{1/n_x}(x)$ contiene un numero finito di elementi di $\{x_n\}$. L'unione di tutte queste palle è un ricoprimento aperto di X,

  $$X=\bigcup_{x\in X}B_{1/n_x}(x)$$

  e per la compattezza di X esiste un sottoricoprimento finito

  $$X=\bigcup_{i=1}^{k}B_{1/n_i}(x_i)$$

  per un sottoinsieme $\{x_1,\dots,x_k\}$ di X. Ma se ogni palla ha un numero finito di elementi della successione $\{x_n\}$, e X è ricoperto da un numero finito di palle, allora $\{x_n\}$ ha un numero finito di elementi – assurdo. □

7.2 Il Teorema di Bolzano-Weierstrass

Teorema 7.2.1 (Teorema di Bolzano-Weierstrass). *Ogni successione limitata in $\mathbb{R}^n$ ammette una sottosuccessione convergente.*

Proof. Una successione limitata in $\mathbb{R}^n$ è contenuta nel prodotto $I_N = [-N, N]^n$ per un $N \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Per il teorema di Heine-Borel, I_N è compatto, e per il Teorema 7.1.3 I_N è sequenzialmente compatto. Quindi la successione ammette una sottosuccessione convergente ad un limite in I_N. □

Esercizio 17. *Abbiamo provato il Teorema di Bolzano-Weierstrass citando il Teorema di Heine-Borel, ciò mostra che "il Teorema di Heine-Borel* $\implies$ *il Teorema di Bolzano-Weierstrass". Usando il fatto che compattezza e compattezza sequenziale sono equivalenti in* $\mathbb{R}^n$*, dimostrare che il Teorema di Bolzano-Weierstrass* $\implies$ *il Teorema di Heine-Borel, ossia i due teoremi sono equivalenti.*

8 Epilogo ed esercizi

8.1 Proprietà topologiche

Un omeomorfismo $f : X \to Y$ è una funzione biunivoca tale che sia f che la sua inversa f^{-1} sono continue. Un omeomorfismo stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le topologie di X e Y, perchè $U \subset X$ è aperto se e solo se $f(U) \subset Y$ è aperto. Le proprietà di uno spazio topologico che dipendono soltanto sulla topologia sono dette *proprietà topologiche*, e spazi omeomorfi hanno le stesse proprietà topologiche. Quasi tutte le definizioni delle lezioni precedenti – di essere 1 o 2-numerabile, separabile, $T_2/T_1/T_0$, connesso/disconnesso, connesso/disconnesso per archi, compatto, sequenzialmente compatto – riguardano proprietà topologiche.

I tre concetti più fondamentali della topologia sono continuità, connessione, e compattezza. Infatti storicamente la topologia è stata sviluppata per studiare le funzioni continue, e capire bene le limitazioni imposte da sottoinsiemi connessi o compatti.

Esempio. Esiste una funzione continua $f : (0, 1) \to \mathbb{Q}$? Sì, ma tale funzione deve essere costante, $f(x) = c$. Ragionamento topologico: $(0, 1)$ e connesso quindi l'immagine di f deve essere connessa. Le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ sono gli insiemi unitari $\{c\}, c \in \mathbb{Q}$.

Nella seguente parte del corso tratteremo spazi (curve e superfici) dal punto di vista di geometria. Spazi omeomorfi possono avere proprietà geometriche diverse.

Esempio. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ è omeomorfo al elisse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4x^2 + 16y^2 = 1\}$ tramite l'omeomorfismo $(x, y) \mapsto (x/2, y/4)$. Però si distinguono geometricamente come curve nel piano, ad esempio hanno diverse curvature.

8.2 Esercizi

Esercizio 18. *Sia* X *uno spazio topologico. La chiusura* $cl(V)$ *di un sottoinsieme* $V \subset X$ *è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti* V*. Cioè* $x \in cl(V) \iff x \in U$ per ogni chiuso U *contenente* V*.*

1. *Sia* $x \in X$*. Dimostrare che se* x *ha un intorno contenuto in* V^c*, allora* $x \notin cl(V)$*.*
2. *Concludere che* $x \in cl(V) \iff$ *ogni intorno di* x *interseca* V*, ossia*
$$cl(V) = \{x \in X | U \cap V \neq \emptyset \text{ per ogni intorno } U \text{ di } x\}.$$
3. *Trovare la chiusura* $cl(A)$ *di*
   - $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}\}$ *sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *con la topologia standard*
   - $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}\}$ *sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *con la topologia di Sorgenfrey*
   - $A = \mathbb{Q}$ *sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *con la topologia standard*
   - $A = \mathbb{Q}$ *sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *con la topologia discreta*
   - $A = \{1\}$ *sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *con la topologia triviale*
   - $A = \mathbb{Q} \cap [2, \pi]$ *sottoinsieme di* $\mathbb{Q}$ *con la topologia indotta dalla top. standard su* $\mathbb{R}$
   - $A = (a, b), a < b$ *sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *con la topologia standard*
   - $A = (a, b), a < b$ *sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *con la topologia di Sorgenfrey*
   - $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) | x > 0\}$ *sottoinsieme del piano euclideo* $\mathbb{R}^2$
   - $A = B_r(p)$ *palla aperta di raggio* r *centrata a* $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 19. *Esibire:*

1. *uno spazio topologico T_1 che non è di Hausdorff;*
2. *uno spazio topologico T_0 che non è T_1;*
3. *uno spazio topologico che non è T_0;*
4. *un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ (topologia standard) tale che gli insiemi $A, cl(A), cl(int(A))$, e $cl(int(cl(A)))$ sono tutti diversi uno dall'altro.*

Esercizio 20. *Sia $C^0[a,b]$ l'insieme di funzioni continue dall'intervallo $[a,b]$ ad $\mathbb{R}$.*

1. *Verificare che $d(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ definisce una metrica (detta la metrica L^1) su $C^0([a,b])$.*
2. *Verificare che $d(f,g) := \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$ definisce una metrica (detta la metrica sup o L^∞) su $C^0([a,b])$.*
3. *Dimostrare che per qualunque $g \in C^0[a,b]$ e $\epsilon > 0$, non esistono $\delta > 0$, $f \in C^0([a,b])$ tali che $B_\delta^{L^1}(f) \subset B_\epsilon^{sup}(g)$. Concludere che $B_\epsilon^{sup}(f)$ non è aperta nella topologia L^1.*
4. *Dimostrare che per ogni $g \in B_\epsilon^{L^1}(f)$, esiste un $\delta > 0$ tale che $B_\epsilon^{sup}(g) \subset B_\epsilon^{L^1}(f)$. Concludere che $B_\epsilon^{L^1}(f)$ è aperta nella topologia sup, e quindi la topologia sup è più fine della topologia L^1.*

Esercizio 21.

1. *Esibire un omeomorfismo tra l'intervallo $[0,1]$ e un'intervallo $[0,a]$ $a > 0$.*
2. *Esibire un omeomorfismo dal quadrato $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [-1,1], y \in [-1,1]\}$ al disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.*

Esercizio 22. *Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia standard, e poniamo su $\mathbb{R}$ la relazione $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza, che la quoziente $\mathbb{R}/\sim$ non è numerabile, e che la topologia quoziente su $\mathbb{R}/\sim$ è la topologia triviale.*

Esercizio 23. *La retta con un doppio 0: siano $\mathbb{R}_1$ e $\mathbb{R}_2$ due copie della retta $\mathbb{R}$ con la topologia standard. Sulla loro unione $\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2$, poniamo una relazione di equivalenza $x_1 \sim x_2 \iff x_1 \in \mathbb{R}_1, x_2 \in \mathbb{R}_2, x_1 = x_2 \neq 0$. Quindi il quoziente $\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2/\sim$ è uguale ovunque ad $\mathbb{R}$ tranne al punto 0, dove ha due zeri 0_1 e 0_2.*

1. *Esibire un sistema fondamentale di intorni per 0_1.*
2. *Dimostrare che la topologia quoziente su $(\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2)/\sim$ è T_1 e non T_2.*

Esercizio 24. *Trovare le componenti connesse di $\{0\} \bigcup \{\frac{1}{n} | n \geq 1, n \in \mathbb{Z}\}$. Quali componenti sono aperte nella topologia indotta?*

Esercizio 25. *Dimostrare che se X è disconnesso, allora le componenti connesse sono aperte-chiuse (= sia aperte che chiuse). (In inglese si dice* clopen *per closed-open.) Concludere che se X è connesso, l'unico sottoinsieme che è aperto-chiuso e non-vuoto è X.*

Esercizio 26. *Dare una dimostrazione alternativa del teorema di Heine-Borel per l'intervallo $[0,1]$: dimostrare che S e S^c sono aperti, e concludere che $S = [0,1]$.*

Esercizio 27. *Dimostrare che se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono funzioni continue, allora la loro composizione $g \circ f : X \to Z$ è continua.*

Esercizio 28. *Verificare che le componenti connesse di $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey sono gli insiemi unitari $\{x\}, x \in \mathbb{R}$.*

Esercizio 29. *Decidere se i seguenti sottospazi del piano euclideo sono connessi o disconnessi.*

- $A = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{Q}\}$
- $A = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{Q}\} \cup \{(x,y) \mid y \in \mathbb{Q}\}$

Esercizio 30. *Sia $C^0([0,1])$ l'insieme di funzioni continue da $[0,1]$ ad $\mathbb{R}$ con la topologia indotta dalla metrica $d_{\sup}$. È uno spazio metrico completo (Analisi 1 o 2: se una successione di funzioni continue converge uniformemente, allora il limite è una funzione continua). Considerare il sottoinsieme*

$$B = \{f \mid d_{\sup}(f, 0) \leq 1\} = \{f \mid \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leq 1\}.$$

Dimostrare che B è chiuso e limitato, ma non è compatto. (Ossia l'analogo del teorema di Heine-Borel non vale.) Suggerimento: per il fatto che in uno spazio metrico compatto $\iff$ sequenzialmente compatto, basta esibire una successione in B che non ammette una sottosuccessione convergente.

Esercizio 31 (One point compactification)**.** *Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico con topologia τ. Poniamo $X^* = X \cup \{\infty\}$, dove ∞ significa un elemento che non appartiene ad X. Sia τ^* la collezione di sottoinsiemi $E \subset X^*$ tali che o $E \in \tau$ o $E = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ per un sottoinsieme compatto $K \subset E$.*

1. *Dimostrare che τ^* è una topologia.*
2. *Dimostrare che X^* è compatto.*
3. *Sia $X = \mathbb{C}$, quindi $X^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Esibire un sistema fondamentale di intorni di $\{\infty\}$.*