

MICHELA ELEUTERI

**DISPENSE DEL CORSO DI ANALISI  
MATEMATICA II**

*Università degli Studi di Verona, Facoltà di Scienze MM.FF.NN.*

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A. 2011/2012



A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica  
non assomigli al papà 😊



---

# Indice

<b>1</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>7</b>
1.1	Modelli differenziali . . . . .	7
1.2	Equazioni differenziali del primo ordine . . . . .	10
1.2.1	Generalità . . . . .	10
1.2.2	Equazioni a variabili separabili . . . . .	12
1.2.3	Equazioni lineari del primo ordine . . . . .	15
1.3	Equazioni differenziali lineari del secondo ordine . . . . .	18
1.3.1	Generalità . . . . .	18
1.3.2	La struttura dell'integrale generale . . . . .	20
1.3.3	Equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti . . . . .	22
1.3.4	Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti: metodo di somiglianza . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Calcolo infinitesimale per le curve</b>	<b>31</b>
2.1	Richiami di calcolo vettoriale . . . . .	31
2.2	Funzioni a valori vettoriali: alcune definizioni . . . . .	32
2.3	Calcolo differenziale e integrale per funzioni a valori vettoriali . . . . .	33
2.4	Curve regolari . . . . .	35
2.5	Lunghezza di un arco di curva . . . . .	37
2.6	Cambiamenti di parametrizzazione. Il parametro arco . . . . .	40
2.7	Integrali di linea di prima specie . . . . .	41
2.7.1	Applicazioni . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Calcolo infinitesimale per funzioni reali di più variabili</b>	<b>43</b>
3.1	Grafico, linee di livello e domini . . . . .	43
3.2	Limiti e continuità . . . . .	45
3.3	Analisi delle forme di indeterminazione . . . . .	47

<b>4</b>	<b>Calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili</b>	<b>53</b>
4.1	Nozione topologiche di base . . . . .	53
4.2	Derivate parziali, derivabilità e piano tangente . . . . .	55
4.3	Piano tangente . . . . .	59
4.4	Differenziabilità . . . . .	60
4.5	Derivate direzionali . . . . .	64
4.6	Calcolo delle derivate . . . . .	67
4.7	Derivate di ordine superiore . . . . .	69
4.8	Equazioni alle derivate parziali . . . . .	70
4.9	Differenziale secondo, matrice Hessiana, formula di Taylor del secondo ordine . .	71
4.10	Complementi: il caso $n$ . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Ottimizzazione. Estremi liberi</b>	<b>75</b>
5.1	Generalità . . . . .	75
5.2	Proprietà topologiche delle funzioni continue . . . . .	76
5.3	Estremi liberi: condizioni necessarie del primo ordine . . . . .	77
5.4	Dal segno dell'incremento alle forme quadratiche . . . . .	78
5.5	Classificazione e studio delle forme quadratiche: il caso $n = 2$ . . . . .	79
5.6	Classificazione e studio delle forme quadratiche: il caso generale . . . . .	81
5.7	Forme quadratiche: il test degli autovalori . . . . .	82
5.8	Studio della natura dei punti critici . . . . .	83
5.8.1	Il caso $n = 2$ . . . . .	83
5.8.2	Il caso generale . . . . .	84
5.9	Esercizi di ricapitolazione riguardanti estremi liberi . . . . .	86
5.10	Funzioni convesse in $n$ variabili . . . . .	89
5.11	Funzioni definite implicitamente . . . . .	91
5.11.1	Funzione implicita di una variabile . . . . .	91
5.11.2	Derivate successive . . . . .	99
5.11.3	Funzione implicita di $n$ variabili . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali</b>	<b>107</b>
6.1	Superfici in forma parametrica . . . . .	107
6.2	Limiti, continuità e differenziabilità . . . . .	108
6.3	Superfici regolari in forma parametrica . . . . .	111
6.3.1	Superfici cartesiane (grafico di una funzione di due variabili) . . . . .	113
6.3.2	Superfici di rotazione . . . . .	113
6.4	Retta e piano normale, retta e piano tangente . . . . .	115
6.4.1	Caso della superficie in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	115

6.4.2	Caso della curva in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	117
6.4.3	Caso della curva in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	117
6.5	Teorema della funzione inversa e trasformazioni di coordinate . . . . .	122
6.6	Ottimizzazione vincolata . . . . .	124
6.6.1	Caso $n = 2$ : vincolo esplicitabile . . . . .	124
6.6.2	Caso $n = 2$ : metodo dei moltiplicatori di Lagrange . . . . .	134
6.6.3	Un esercizio con un punto singolare sul vincolo . . . . .	138
6.6.4	Il caso generale . . . . .	140
6.6.5	Metodo dei minimi quadrati . . . . .	143
<b>7</b>	<b>Calcolo integrale per funzioni di più variabili reali</b> . . . . .	<b>145</b>
7.1	Integrali doppi . . . . .	145
7.1.1	Integrale di una funzione limitata definita su un rettangolo . . . . .	145
7.1.2	Funzioni integrabili su domini non rettangolari . . . . .	149
7.1.3	Proprietà dell'integrale doppio . . . . .	151
7.1.4	Calcolo degli integrali doppi: metodo di riduzione . . . . .	152
7.1.5	Calcolo degli integrali doppi: cambiamento di variabili . . . . .	154
7.2	Integrali tripli . . . . .	157
7.2.1	Integrazione "per fili" . . . . .	157
7.2.2	Integrazione "per strati" . . . . .	157
7.2.3	Formula di cambiamento di variabili . . . . .	157
<b>8</b>	<b>Campi vettoriali</b> . . . . .	<b>159</b>
8.1	Campi vettoriali . . . . .	159
8.2	Linee integrali . . . . .	160
8.3	Operatore rotore e operatore divergenza . . . . .	161
8.3.1	L'operatore rotore . . . . .	161
8.3.2	L'operatore divergenza . . . . .	162
8.4	Campi vettoriali conservativi . . . . .	162
8.5	Domini connessi o semplicemente connessi . . . . .	166
8.6	Lavoro o integrale di linea di un campo vettoriale . . . . .	167
8.7	Lavoro di un campo conservativo . . . . .	170
8.8	Il linguaggio delle forme differenziali . . . . .	173
8.9	Formula di Gauss-Green nel piano . . . . .	173
8.10	Calcolo di aree mediante integrali curvilinei . . . . .	176
8.11	Area e integrali di superficie . . . . .	177
8.11.1	Area di una superficie . . . . .	177
8.11.2	Integrale di superficie di una funzione continua . . . . .	180

8.12	Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie . . . . .	182
8.12.1	Superfici orientate. Bordo di una superficie. . . . .	182
8.12.2	Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata . . . . .	183
8.13	Teorema della divergenza . . . . .	186
8.14	Il teorema di Stokes o del rotore . . . . .	189
<b>9</b>	<b>Serie di Fourier</b>	<b>191</b>
9.1	Cenni sulle serie di funzioni . . . . .	191
9.2	Serie di potenze . . . . .	192
9.2.1	Definizione e proprietà . . . . .	192
9.2.2	Serie di potenze e serie di Taylor. Funzioni analitiche . . . . .	196
9.3	Serie trigonometriche e serie di Fourier . . . . .	198
9.3.1	Polinomi trigonometrici e serie trigonometriche . . . . .	198
9.3.2	Serie di Fourier di una funzione . . . . .	200
9.3.3	Convergenza della serie di Fourier . . . . .	204
9.4	Complementi: richiami sugli spazi vettoriali con prodotto scalare . . . . .	207

---

---

# CAPITOLO 1

---

## Equazioni differenziali

### 1.1. Modelli differenziali

---

Dalla fisica sappiamo che se denotiamo con  $x(t)$  la posizione di una particella che si muove all'istante  $t$ , allora la sua derivata prima  $x'(t)$  esprime la velocità della particella in quell'istante e la sua derivata seconda  $x''(t)$  esprime l'accelerazione. Quindi quando andiamo a tradurre matematicamente le leggi che governano modelli naturali può essere naturale dover lavorare con equazioni che coinvolgono una funzione incognita e qualcuna delle sue derivate. Queste equazioni prendono il nome di *equazioni differenziali*.

✎ **Esempio 1.1.1.** *La seconda legge del moto di Newton  $F = ma$ , che stabilisce la posizione  $x(t)$  al tempo  $t$  di un corpo di massa  $m$  costante, soggetto a una forza  $F(t)$ , deve soddisfare l'equazione differenziale*

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \quad \text{equazione del moto.}$$

Quindi le equazioni differenziali (spesso useremo l'acronimo ED per indicare un'equazione differenziale) nascono in maniera naturale per modellizzare fenomeni che hanno origine in molti contesti della fisica. Possono essere classificate in modi diversi. Abbiamo infatti:

1) EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO) se vengono coinvolte solo le derivate rispetto a una sola variabile oppure EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI (EDP) se vengono coinvolte derivate parziali dell'incognita rispetto a più di una variabile.

✎ **Esempio 1.1.2.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

*rappresenta l'EQUAZIONE DELLE ONDE che modella lo spostamento trasversale  $u(x, t)$  nel punto  $x$  al tempo  $t$  di una corda tesa che può vibrare.*

2) classificazione in base all'ORDINE: l'ordine di una ED è l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione.

 **Esempio 1.1.3.** L'equazione

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t y^3 - \cos y = \sin t \quad \text{è di ordine 2}$$

mentre l'equazione

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2t \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = y \frac{d^2y}{dt^2} - e^t \quad \text{è di ordine 3.}$$

Possiamo dunque formalizzare i concetti finora introdotti attraverso la seguente definizione.

$\square$  **Definizione 1.1.4.** Si dice EQUAZIONE DIFFERENZIALE di ordine  $n$  un'equazione del tipo

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1.1}$$

dove  $y(t)$  è la funzione incognita e  $F$  è una funzione assegnata delle  $n + 2$  variabili  $t, y, y', \dots, y^{(n)}$  a valori reali.

Si dice ORDINE di un'equazione differenziale l'ordine massimo di derivazione che vi compare.

Si dice SOLUZIONE (O CURVA INTEGRALE) della (1.1.1) nell'intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  una funzione  $\varphi$ , definita almeno in  $I$  e a valori reali per cui risulti

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Infine si dice INTEGRALE GENERALE dell'equazione (1.1.1) una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione (1.1.1), eventualmente al variare di uno o più parametri in essa contenuti.

 **Esempio 1.1.5.** Consideriamo una popolazione di individui, animali o vegetali che siano, e sia  $N(t)$  il numero degli individui. Osserviamo che  $N$  è funzione di del tempo  $t$ , assume solo valori interi ed è a priori una funzione discontinua di  $t$ ; tuttavia può essere approssimata da una funzione continua e derivabile purché il numero degli individui sia abbastanza grande.

Supponiamo che la popolazione sia isolata e che la proporzione degli individui in età riproduttiva e la fecondità siano costanti.

Se escludiamo i casi di morte, immigrazione, emigrazione, allora il tasso di accrescimento coincide con quello di natalità e se indichiamo con  $\lambda$  il tasso specifico di natalità (i.e. il numero di nati per unità di tempo) l'equazione che descrive il modello diventa

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t).$$

Questo processo risulta realistico solo in popolazioni che crescono in situazioni ideali e sono assenti tutti i fattori che ne impediscono la crescita.

La stessa equazione compare anche in altri modelli relativi a sistemi fisiologici ed ecologici.

✎ **Esempio 1.1.6.** Consideriamo il caso della crescita di una cellula e sia  $p(t)$  il peso della cellula in funzione del tempo  $t$ . Supponendo che la crescita non sia influenzata da fattori esterni, è ragionevole pensare che in un piccolo intervallo di tempo l'accrescimento della cellula sia proporzionale al tempo trascorso e al peso della cellula all'istante  $t$ . Quindi se denotiamo con  $t$  e  $t + h$  due istanti successivi, esiste una costante  $k$  tale che

$$p(t + h) - p(t) = k h p(t).$$

La relazione è tanto più precisa quanto più  $h$  è piccolo, quindi passando al limite per  $h \rightarrow 0$  si ottiene

$$\dot{p}(t) = k p(t).$$

Quindi l'equazione modello in entrambi gli esempi proposti è

$$\dot{y} = k y.$$

Sono regolati dalla medesima equazione il processo di disgregazione radioattiva, quello relativo alla reazione di un tessuto vivente esposto a radiazioni ionizzanti e anche la reazione chimica di alcune sostanze.

✎ **Esempio 1.1.7.** Studiamo ora il modello di crescita (dovuto a Malthus, 1978) relativo all'evoluzione di una popolazione isolata in presenza di risorse limitate ed in assenza di predatori o antagonisti all'utilizzo delle risorse. In questo caso l'equazione che si ottiene è la seguente

$$\dot{N}(t) = (\lambda - \mu)N(t),$$

dove come prima  $\lambda$  è il tasso di natalità mentre  $\mu$  è il tasso di mortalità (cioè rispettivamente il numero di nati e morti nell'unità di tempo). Il numero  $\varepsilon = \lambda - \mu$  è detto POTENZIALE BIOLOGICO.

Ci chiediamo ora come possiamo trovare una soluzione del problema studiato nell'Esempio 1.1.7. Supponiamo per il momento che sia  $N \neq 0$ . Allora

$$\dot{N} = \varepsilon N \Rightarrow \frac{\dot{N}}{N} = \varepsilon \Rightarrow \frac{d}{dt}(\log |N|) = \varepsilon,$$

da cui

$$\log(|N(t)|) = \varepsilon t + c_1 \Rightarrow |N(t)| = e^{c_1} e^{\varepsilon t} =: k^2 e^{\varepsilon t}$$

dove abbiamo posto  $e^{c_1} =: k^2 > 0$  costante positiva e arbitraria. A questo punto allora

$$N(t) = \pm k^2 e^{\varepsilon t}$$

quindi possiamo senz'altro dire che

$$N(t) = C e^{\varepsilon t} \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tutto questo vale se  $N \neq 0$ ; ma è banale verificare che anche  $N = 0$  soddisfa l'equazione di partenza, quindi possiamo dire che l'integrale generale è

$$N(t) = C e^{\varepsilon t} = C e^{(\lambda - \mu)t} \quad C \in \mathbb{R}.$$

In particolare dall'ultima riga leggiamo che:

- 1) se  $\lambda > \mu$  prevale il tasso di natalità e quindi la popolazione aumenta in modo esponenziale;
- 2) se  $\lambda < \mu$  prevale invece il tasso di mortalità e quindi la popolazione diminuisce fino ad estinguersi;
- 3) se  $\lambda = \mu$  infine la popolazione rimane stabile nel tempo.

Osserviamo in particolare che non abbiamo trovato solo una soluzione, ma infinite soluzioni, dipendenti da una costante arbitraria.

☞ **Osservazione 1.1.8.** È bene rimarcare che nessun organismo e nessuna popolazione cresce indefinitamente nel tempo; ci sono infatti limiti posti dalla scarsità di cibo o di alloggio o da cause fisiche e oggettive...quindi per considerare un modello più attendibile occorrerebbe apportare ulteriori modifiche al modello stesso; questo è quanto è stato fatto nel corso degli anni da studiosi della dinamica delle popolazioni.

## 1.2. Equazioni differenziali del primo ordine

---

### 1.2.1. Generalità

Soffermiamo ora la nostra attenzione sulle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Esse sono della forma

$$F(t, y, y') = 0 \tag{1.2.1}$$

con  $F$  funzione assegnata di  $t, y, y'$  a valori reali.

☞ **Esempio 1.2.1.** La ricerca delle primitive di una funzione  $f$  continua su un intervallo  $I$  equivale a risolvere l'equazione differenziale  $y'(t) = f(t)$  che ammette infinite soluzioni del tipo

$$y(t) = \int f(t) dt + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Si dimostra** che l'insieme delle soluzioni di una ED ordinaria del primo ordine è costituito da una famiglia di funzioni dipendente da un parametro  $c$ :  $t \mapsto \varphi(t; c)$ . Tale famiglia prende il nome di INTEGRALE GENERALE dell'equazione.

La condizione supplementare  $y(t_0) = y_0$  permette, in generale, di selezionare una SOLUZIONE PARTICOLARE.

□ **Definizione 1.2.2.** Il problema di risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

prende il nome di PROBLEMA DI CAUCHY.

□ **Definizione 1.2.3.** Quando l'equazione (1.2.1) si presenta nella forma

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.2.3)$$

si dice che è in FORMA NORMALE.

Per equazioni di questo tipo si può assicurare, sotto larghe ipotesi, che il problema di Cauchy (1.2.2) ammette un'unica soluzione almeno localmente (cioè per valori di  $t$  intorno a  $t_0$ ).

☞ **Osservazione 1.2.4.** Le soluzioni dell'ED espresse dall'integrale generale potrebbero talvolta essere definite su insiemi diversi a seconda del valore della costante o anche su insiemi più complicati di un intervallo (es.  $t \neq 0$ ). Tuttavia quando parleremo di soluzione del problema di Cauchy andremo sempre a intendere una funzione che:

- a) è definita su un intervallo  $I$  contenente il punto  $t_0$  in cui è assegnata la condizione iniziale;
- b) è derivabile in tutto l'intervallo  $I$  e soddisfa l'equazione in tutto  $I$ .

📎 **Esempio 1.2.5.** *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} N'(t) = 3N(t) \\ N(0) = 7 \end{cases}$$

ammette, per quanto visto nel paragrafo precedente, un'unica soluzione data da  $N(t) = ce^{3t}$ . Imponendo il dato di Cauchy si ottiene  $N(0) = c = 7$  da cui la soluzione è  $N(t) = 7e^{3t}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  ( $\forall t \in \mathbb{R}^+$  se  $t$  ha il significato di tempo per cui il problema di Cauchy proposto considera un'evoluzione temporale di un fenomeno biologico).

## 1.2.2. Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono una particolare classe di ED ordinarie del primo ordine del tipo (1.2.3) che sono caratterizzate dalla presenza di una funzione  $f$  prodotto di due funzioni, una della sola variabile  $t$  e l'altra solo dell'incognita  $y$ . Più nel dettaglio, sono equazioni del tipo

$$y' = a(t)b(y) \quad (1.2.4)$$

con  $a$  funzione continua su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  e  $b$  funzione continua su un intervallo  $J \subset \mathbb{R}$ . Obiettivo di questo paragrafo è la determinazione dell'integrale generale per un'equazione di questo tipo.

Distinguiamo due casi:

a) Se  $\bar{y}$  è soluzione dell'equazione  $b(\bar{y}) = 0$ , allora la funzione costante  $y(t) = \bar{y}$  è una soluzione dell'ED (1.2.4). Infatti in tal caso il secondo membro della (1.2.4) si annulla e anche il primo membro si annulla (perché la derivata della funzione costante è zero).

b) Supponiamo ora che  $b(y) \neq 0$ . Allora la (1.2.4) si può riscrivere nella forma

$$\frac{y'}{b(y)} = a(t)$$

quindi un'ipotetica soluzione soddisfa l'identità

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t).$$

Prendendo gli integrali indefiniti di entrambi i membri si ottiene

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt + C$$

con  $C$  costante arbitraria. Adesso a primo membro si effettua il cambio di variabile  $y = y(t)$  da cui si ha  $dy = y'(t) dt$  e dunque

$$\int \frac{dy}{b(y)} dt = \int a(t) dt + C.$$

Quindi questo è l'integrale generale della ED proposta. Se  $B(y)$  è una primitiva di  $\frac{1}{b(y)}$  e  $A(t)$  una primitiva di  $a(t)$ , allora l'integrale generale della ED è assegnato dall'equazione (in forma IMPLICITA)

$$B(y) = A(t) + C \quad \text{con } C \text{ costante arbitraria.}$$

☞ **Osservazione 1.2.6.** Osserviamo che non è detto che si riesca a ricavare  $y$  esplicitamente o a ridurre la precedente equazione in forma normale.

In generale, per le equazioni a variabili separabili vale il seguente

**Teorema 1.2.7.** *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t) b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con  $a$  continua in un intorno  $I$  di  $t_0$  e  $b$  continua in un intorno  $J$  di  $y_0$ . Allora esiste un intorno di  $t_0$  che denoteremo con  $I' \subset I$  e una funzione continua  $y$  definita su  $I'$  con derivata anch'essa continua su  $I'$  che è soluzione del problema. Inoltre se anche  $b'$  è continua su  $J$  (o  $b$  ha rapporto incrementale limitato in  $J$  anche se non è derivabile) allora tale soluzione è anche unica.

 **Esempio 1.2.8.** *Determinare l'integrale generale dell'ED*

$$y' = t y^3$$

disegnare alcune soluzioni nel piano e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t y^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Prima di tutto si osserva che  $y = 0$  è integrale singolare per l'equazione data. Quindi se  $y \neq 0$ , separando le variabili e integrando si ottiene

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int t dt + C$$

da cui

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{t^2}{2} + C$$

che porta a sua volta a

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{k - t^2}}, \quad k := -2C.$$

Imponendo il dato di Cauchy si osserva che l'unica soluzione è quella che si ottiene per  $k = 1$  e considerando il segno positivo davanti alla radice, cioè

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

 **Esercizio 1.2.9.** *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y y' = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

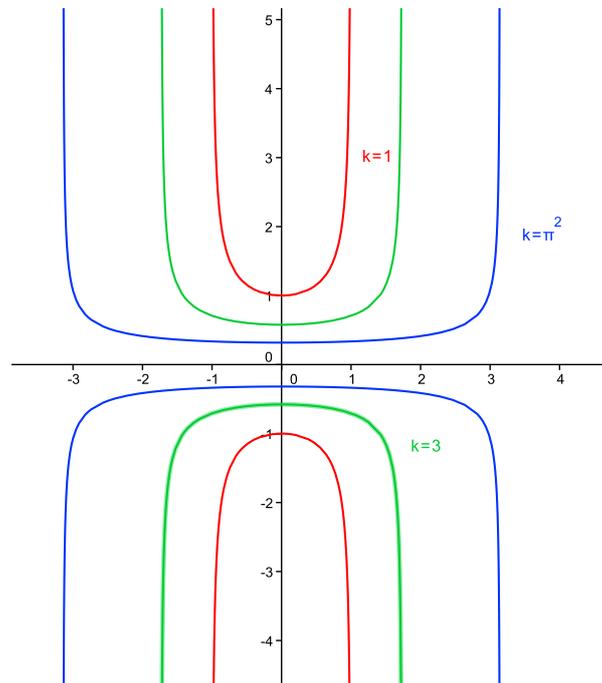


Figura 1: Alcune soluzioni dell'ED dell'Esempio 1.2.8.

Integrando ambo i membri della ED proposta si ottiene con facili calcoli

$$y = \pm\sqrt{4t + 2C}, \quad C \in \mathbb{R},$$

quindi per ogni  $C \in \mathbb{R}$  esistono due soluzioni (corrispondenti ai due segni davanti alla radice) definite solo per  $t \geq -C/2$ . Imponendo il dato di Cauchy si ottiene  $y(0) = \pm\sqrt{2C} = 1$ , quindi per compatibilità occorre scegliere il segno positivo davanti alla radice. La soluzione del problema proposto è dunque  $y = \sqrt{4t + 1}$ , definita solo per  $t \geq -1/4$ .

Andiamo a controllare se sono soddisfatte le condizioni del teorema:  $a(t) = 2$  che è dunque una funzione continua e derivabile ovunque;  $b(t) = 1/y$  che è continua e derivabile se  $y \neq 0$ . Quindi il problema di Cauchy per questa equazione ha una e una sola soluzione purché la condizione iniziale non sia del tipo  $y(t_0) = 0$ . Infatti l'equazione non è soddisfatta in questo punto perché si otterrebbe  $0 = 2$ . Quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y y' = 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Non ha soluzione.

Quindi abbiamo trovato un esempio di problema di Cauchy in cui viene a mancare l'esistenza di soluzioni. In altre situazioni potrebbe venire a mancare l'unicità delle soluzioni, come mostra l'esempio successivo.

✎ **Esempio 1.2.10.** *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Si osserva che  $b(y) = 2\sqrt{y}$  è una funzione continua ma non è derivabile in zero, quindi non possiamo dire che  $b'$  sia continua e in più nemmeno il rapporto incrementale di  $b$  è limitato (il grafico di  $b$  ha tangente verticale in 0). Quindi le ipotesi del Teorema 1.2.7 non sono soddisfatte e potrebbe a priori mancare l'unicità della soluzione (osserviamo che questo non è automatico! Se le ipotesi del teorema non valgono, a priori nulla si può dire, occorre analizzare caso per caso).

In questo caso comunque effettivamente manca l'unicità della soluzione. Infatti è facile dimostrare che

$$y_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad y_2(t) = \begin{cases} t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

sono entrambe soluzioni del problema di Cauchy assegnato (per altro coincidono se  $t < 0$ ). Inoltre si nota che  $y_2$  è derivabile in 0 con  $y_2'(0) = 0$ .

### 1.2.3. Equazioni lineari del primo ordine

In questo paragrafo andiamo a trattare un caso particolare di ED ordinarie del primo ordine del tipo (1.2.1), il caso in cui  $F$  è lineare in  $y$  e  $y'$ . In questo caso tali equazioni si possono scrivere nella forma

$$a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = g(t),$$

con  $a_1, a_2$  e  $g$  funzioni continue su un intervallo.

Se il coefficiente  $a_1(t)$  non si annulla, l'ED lineare si può scrivere in forma normale

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t). \tag{1.2.5}$$

Anche in questo caso supporremo  $a$  e  $f$  continue in un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ .

Se  $f$  non è identicamente nulla, la (1.2.5) si dice EQUAZIONE COMPLETA. Se  $f \equiv 0$  invece, l'equazione si dice OMOGENEA e di solito, vista l'importanza che riveste tale equazione nella

struttura dell'integrale generale, si è soliti indicare con una lettera diversa (usualmente  $z$ ) la soluzione di tale equazione, che diventa perciò

$$z'(t) + a(t)z(t) = 0. \quad (1.2.6)$$

Vale il seguente risultato

**Teorema 1.2.11.** *L'integrale generale dell'equazione completa si ottiene aggiungendo all'integrale generale dell'equazione omogenea una soluzione particolare dell'equazione completa.*

Nella parte restante del paragrafo ci occuperemo di studiare la struttura dell'integrale generale per l'equazione (1.2.5). Dal Teorema 1.2.11 sappiamo dunque che dobbiamo occuparci prima dello studio dell'integrale generale dell'equazione omogenea e poi della ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa.

### Ricerca dell'integrale generale dell'equazione omogenea

Sia  $A(t)$  una primitiva di  $a(t)$  (tale per cui si abbia  $A'(t) = a(t)$ ). Moltiplichiamo ambo i membri di (1.2.7) per  $e^{A(t)}$ ; si ottiene

$$z'(t)e^{A(t)} + a(t)z(t)e^{A(t)} = 0$$

da cui

$$\frac{d}{dt}[z(t)e^{A(t)}] = 0$$

e cioè  $z(t)e^{A(t)} = C$  che si riscrive come

$$z(t) = C e^{-\int a(t) dt}. \quad (1.2.7)$$

☞ **Osservazione 1.2.12.** Notiamo che si può pensare la soluzione generale dell'equazione omogenea del tipo  $z = C z_0$  con  $z_0$  soluzione particolare dell'equazione omogenea e  $C$  costante arbitraria. Questo fatto può essere interpretato dicendo che L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI UNA ED LINEARE OMOGENEA È UNO SPAZIO VETTORIALE di dimensione 1. Si noti che per le equazioni differenziali ordinarie omogenee del secondo ordine vale un risultato corrispondente (l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2), ☞ Teorema 1.3.7.

### Ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa

Utilizziamo il *metodo di variazione delle costanti*, che è un metodo piuttosto generale che funziona in diversi contesti. L'idea è di ricercare una soluzione simile alla (1.2.7); stavolta però

$C$  non la prenderemo costante (altrimenti avremmo una soluzione dell'equazione omogenea), ma lasciamo che dipenda da  $t$  cioè sia  $C \equiv C(t)$  funzione di  $t$ . Cerchiamo dunque la soluzione nella forma

$$\bar{y}(t) = C(t) e^{-A(t)}$$

La  $C(t)$  deve essere determinata in modo tale che la  $\bar{y}$  così strutturata sia soluzione dell'equazione completa (1.2.5). Quindi osservando che

$$\bar{y}'(t) = C'(t) e^{-A(t)} - C(t) a(t) e^{-A(t)}$$

si deduce inserendo le corrispondenti informazioni all'interno dell'equazione completa (1.2.5)

$$e^{-A(t)}[C'(t) - C(t)a(t)] + a(t)C(t)e^{-A(t)} = f(t)$$

cioè

$$e^{-A(t)}C'(t) = f(t)$$

da cui  $C'(t) = f(t)e^{A(t)}$  e dunque

$$C(t) = \int f(s) e^{A(s)} ds$$

(non c'è bisogno di aggiungere una costante arbitraria visto che basta trovare una scelta di  $C(t)$  compatibile).

Quindi una soluzione particolare dell'equazione completa ha la forma

$$\bar{y}(t) = e^{-A(t)} \int f(s) e^{A(s)} ds.$$

☞ **Osservazione 1.2.13.** Osserviamo che  $A(t)$  è già una primitiva, non c'è bisogno di aggiungere anche stavolta una ulteriore costante arbitraria; inoltre si può dimostrare che se scelgo un'altra primitiva il risultato non cambia e alla fine si ottiene la stessa formula.

Quindi riassumendo l'integrale generale dell'equazione completa ha la forma

$$y(t) = c e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(s) e^{A(s)} ds \quad (1.2.8)$$

### Risoluzione del problema di Cauchy

La costante arbitraria nella (1.2.8) è determinata dalla condizione iniziale  $y(t_0) = y_0$ . Scegliendo una primitiva tale per cui  $A(t_0) = 0$  (cioè  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ ), l'integrale generale che soddisfa il dato di Cauchy è

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t f(s) e^{A(s)} ds. \quad (1.2.9)$$

Vale il seguente teorema

**Teorema 1.2.14.** (PROBLEMA DI CAUCHY PER UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DEL PRIMO ORDINE). *Siano  $a, f$  funzioni continue su un intervallo  $I \ni t_0$ . Allora per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*ha una e una sola soluzione  $y \in \mathcal{C}^1(I)$  (dove  $\mathcal{C}^k(I)$  è l'insieme delle funzioni continue, derivabili fino all'ordine  $k$  e con tutte le derivate fino all'ordine  $k$  continue); tale soluzione è assegnata dalla (1.2.9).*

## 1.3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

---

In questo paragrafo andremo a studiare una classe particolare di ED ordinarie del tipo (1.1.1): quelle del secondo ordine lineari; la linearità della  $F$  è il punto cruciale per determinare la struttura dell'integrale generale.

### 1.3.1. Generalità

□ **Definizione 1.3.1.** Un'equazione differenziale del secondo ordine si dice LINEARE se è del tipo

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \quad (1.3.1)$$

dove i coefficienti  $a_i$  e il termine noto  $g$  sono funzioni definite in un certo intervallo  $I$  e continue nello stesso intervallo. L'equazione si dice OMOGENEA se  $g$  è identicamente nullo; in caso contrario si dice COMPLETA. L'equazione si dice A COEFFICIENTI COSTANTI se i coefficienti  $a_i$  sono costanti (per inciso, il termine noto può invece dipendere da  $t$ ); in caso contrario si dice A COEFFICIENTI VARIABILI. Infine se  $a_1$  non si annulla mai, l'equazione si può riscrivere in IN FORMA NORMALE come

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t). \quad (1.3.2)$$

☞ **Osservazione 1.3.2.** Consideriamo il seguente operatore

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^2(I) &\rightarrow \mathcal{C}^0(I) \\ L : y &\mapsto Ly \end{aligned}$$

dove gli spazi  $\mathcal{C}^k(I)$ , come abbiamo già accennato, sono gli spazi delle funzioni continue, derivabili fino all'ordine  $k$  e con tutte le derivate fino all'ordine  $k$  continue e dove abbiamo indicato con  $Ly$  il primo membro dell'equazione (1.3.1). Prima di tutto l'operatore è ben definito, perché se  $y \in \mathcal{C}^2$  si ha che  $Ly \in \mathcal{C}^0(I)$  e questo grazie alla continuità dei coefficienti  $a_i$ . Inoltre è facile dimostrare che  $L$  è un operatore lineare, nel senso che per ogni  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , per ogni  $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^2(I)$  si ha

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 Ly_1 + \lambda_2 Ly_2.$$

Questa proprietà dell'operatore  $L$  giustifica il motivo per cui l'equazione (1.3.1) è detta lineare.

☞ **Esempio 1.3.3.** Il più semplice esempio di equazione lineare del secondo ordine è

$$y''(t) = 0.$$

Essa naturalmente equivale a dire che  $y'(t) = C_1$  e da cui  $y(t) = C_1 t + C_2$ , con  $C_1, C_2$  costanti arbitrarie. Quindi le soluzioni di questa equazione sono tutti e soli i polinomi di primo grado.

☞ **Esempio 1.3.4.** (L'OSCILLATORE ARMONICO) Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  che rimane libero di muoversi in linea orizzontale, attaccato a una molla che esercita una forza di richiamo di tipo elastico. Denotiamo con  $y(t)$  la posizione del punto sulla retta (rispetto alla configurazione di riposo). Allora si può dimostrare che  $y$  soddisfa l'equazione

$$my'' = -ky$$

dove  $k > 0$  denota la costante elastica del sistema. Siccome ovviamente  $m \neq 0$ , allora si può riscrivere l'equazione in forma normale come

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (1.3.3)$$

dove  $\omega^2 = k/m$ . L'equazione prende il nome di OSCILLATORE ARMONICO.

L'equazione (1.3.3) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare omogenea

e a coefficienti costanti. Se sul punto agisce una forza esterna (dipendente solo dal tempo  $t$ ) l'equazione si riscrive come

$$y'' + \omega^2 y = f(t);$$

nel caso venga presa in considerazione lo smorzamento dovuto all'attrito, l'equazione si trasforma in

$$y'' + hy' + \omega^2 y = 0$$

con  $h > 0$ .

Sarà chiaro in seguito che l'integrale generale di una qualunque equazione lineare del secondo ordine dipende da due parametri arbitrari. Quindi per selezionare una soluzione all'interno della famiglia di soluzioni stavolta, diversamente da quanto visto nel caso delle equazioni differenziali del primo ordine, dovremo assegnare due condizioni.

□ **Definizione 1.3.5.** Si dice PROBLEMA DI CAUCHY per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine (per semplicità la consideriamo espressa in forma normale), il problema

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

**Teorema 1.3.6.** (ESISTENZA E UNICITÀ PER IL PROBLEMA DI CAUCHY (1.3.4)) *Siano  $a, b, f$  funzioni continue in un intervallo  $I \ni t_0$ . Allora per ogni  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy (1.3.4) ammette un'unica soluzione  $y \in \mathcal{C}^2(I)$ .*

Questo risultato è analogo al corrispondente enunciato per le equazioni lineari del primo ordine. Anche in questo caso, la soluzione sarà ottenuta imponendo le condizioni iniziali nell'espressione che individua l'integrale generale dell'equazione (1.3.2). Quindi di nuovo il problema si riduce a comprendere come ottenere la struttura dell'integrale generale per un'equazione del tipo 1.3.2.

### 1.3.2. La struttura dell'integrale generale

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che un'equazione differenziale lineare del secondo ordine si può scrivere nella forma  $Ly = f$ , dove  $L : \mathcal{C}^2(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$  è un operatore lineare tra due spazi di funzioni continue. L'equazione  $Lz = 0$  si dice EQUAZIONE OMOGENEA associata all'equazione completa  $Ly = f$ . Il seguente teorema permette di determinare facilmente la struttura dell'integrale generale dell'equazione (1.3.2). Questo risultato non usa il fatto che

$Ly = f$  sia un'equazione differenziale e non dipende dall'ordine dell'equazione, sfrutta solamente il fatto che  $L$  è un operatore lineare.

**Teorema 1.3.7.** (STRUTTURA DELL'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE LINEARE COMPLETA) *Si può dimostrare che:*

- 1) *l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea  $Lz = 0$  in un dato intervallo  $I$  è uno spazio vettoriale di dimensione 2 (sottospazio di  $\mathcal{C}^2(I)$ );*
- 2) *l'integrale generale dell'equazione completa si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione omogenea e una soluzione particolare dell'equazione completa.*

☞ **Osservazione 1.3.8.** Dal punto 1) del teorema precedente possiamo dedurre che esistono due soluzioni  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  dell'equazione omogenea che sono linearmente indipendenti (ovvero non sono una multipla dell'altra) e ogni altra soluzione dell'equazione omogenea è combinazione lineare di  $z_1$  e  $z_2$ ; quindi questo significa che l'integrale generale dell'equazione omogenea è dato dalla formula

$$C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t)$$

al variare dei coefficienti reali  $C_1, C_2$ .

☞ **Esempio 1.3.9.** Si consideri l'equazione  $t^2 z'' - 3tz' + 3z = 0$ . Sia  $z_1 = t$ . Allora  $z_1'(t) = 1$ ,  $z_1''(t) = 0$  da cui  $t^2 \cdot 0 - 3t \cdot 1 + 3t = -3t + 3t = 0$ ; quindi  $z_1$  è una soluzione dell'equazione data. Sia ora  $z_2 = t^3$ . Allora  $z_2'(t) = 3t^2$  e  $z_2''(t) = 6t$  da cui inserendo le informazioni nell'equazione si ottiene  $t^2 \cdot 6t - 3t \cdot 3t^2 + 3t^3 = 6t^3 - 9t^3 + 3t^3 = 0$ ; quindi anche  $z_2(t) = t^3$  è soluzione dell'equazione data. Le due soluzioni sono linearmente indipendenti, quindi l'integrale generale dell'equazione è dato da

$$z(t) = C_1 t + C_2 t^3,$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Nel caso precedente è particolarmente facile vedere che le due soluzioni proposte sono linearmente indipendenti; in generale può non essere così immediato. Il seguente criterio generale permette di decidere qualora due soluzioni proposte siano o no linearmente indipendenti.

**Teorema 1.3.10.** (DETERMINANTE WRONSKIANO E INDIPENDENZA) *Siano  $z_1, z_2$  due funzioni  $\mathcal{C}^2(I)$  soluzioni dell'equazione lineare omogenea*

$$Lz \equiv z'' + a(t)z' + b(t) = 0$$

*nell'intervallo  $I$ . Allora esse sono linearmente indipendenti in  $\mathcal{C}^2(I)$  se e soltanto se la seguente matrice*

$$\begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{pmatrix}$$

*detta MATRICE WRONSKIANA ha determinante diverso da zero per ogni  $t \in I$  (dalla regolarità delle soluzioni, è sufficiente che il determinante di tale matrice sia diverso da zero in un punto  $t_0 \in I$ ).*

**Riassumendo:** per determinare l'integrale generale dell'equazione completa occorre:

- 1) determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea, quindi serve determinare 2 soluzioni  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  dell'equazione omogenea linearmente indipendenti;
- 2) determinare una soluzione particolare  $\bar{y}(t)$  dell'equazione completa.

A questo punto l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da

$$\bar{y}(t) + C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t)$$

al variare di  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Osserviamo che in generale risolvere tale problema non è affatto banale e noi riusciremo a farlo solo in alcuni casi particolari. Nei prossimi paragrafi mostreremo come fare.

### 1.3.3. Equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti

$$z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0, \quad a, b \text{ costanti.} \quad (1.3.5)$$

In analogia con il caso analogo del primo ordine, che ammette degli esponenziali come soluzioni, cerchiamo anche qui delle soluzioni di tipo esponenziale  $t \mapsto e^{rt}$ , con  $r \in \mathbb{C}$ . Sostituendo  $z(t) = e^{rt}$  in (1.3.5) otteniamo

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0.$$

Siccome l'esponenziale è una funzione sempre positiva, affinché l'equazione precedente abbia soluzione è necessario che la costante  $r$  sia una radice dell'equazione di secondo grado

$$r^2 + ar + b = 0$$

che viene detta *equazione caratteristica* della (1.3.5). Si possono distinguere tre casi, a seconda del segno del discriminante.

- PRIMO CASO  $\Delta = a^2 - 4b > 0$ . In tal caso l'equazione caratteristica possiede due radici reali e distinte  $r_1$  e  $r_2$ ; quindi le funzioni  $z_1(t) = e^{r_1 t}$  e  $z_2(t) = e^{r_2 t}$  sono due soluzioni distinte e indipendenti della (1.3.5) il cui integrale generale si scrive

$$z(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

- SECONDO CASO  $\Delta = a^2 - 4b = 0$ . In tal caso l'equazione caratteristica possiede l'unica radice (con doppia molteplicità)  $r = -a/2$ ; quindi una soluzione è sicuramente

$$z(t) = C e^{-\frac{a}{2}t} \tag{1.3.6}$$

Per trovare una seconda soluzione usiamo (come nel caso delle equazioni del primo ordine) di nuovo il metodo delle variazioni delle costanti. La cerchiamo simile alla (1.3.6) con l'idea che stavolta la costante dipenda da  $t$ , cioè nella forma

$$z(t) = C(t) e^{rt}, \quad r = -\frac{a}{2}.$$

Da cui

$$z'(t) = e^{rt}(rC(t) + C'(t)), \quad z''(t) = e^{rt}(r^2C(t) + 2rC'(t) + C''(t))$$

quindi sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene

$$e^{rt}[(r^2 + ar + b)C(t) + (2r + a)C'(t) + C''(t)] = 0.$$

Siccome ricordiamo che  $r = -a/2$ , allora il coefficiente davanti alla  $C'(t)$  si annulla; inoltre  $r$  è soluzione dell'equazione caratteristica quindi anche il coefficiente davanti alla  $C(t)$  si annulla; quindi deve necessariamente essere  $C''(t) = 0$  da cui  $C(t) = C_2 t + C_1$ . Allora la soluzione generale dell'equazione (1.3.5) si può scrivere come

$$z(t) = e^{-\frac{a}{2}t}(C_1 + C_2 t).$$

• TERZO CASO  $\Delta = a^2 - 4b < 0$ . In tale caso l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate  $r_1 = \alpha + i\beta$  e  $r_2 = \alpha - i\beta$  (con  $\alpha$  e  $\beta$  reali). Quindi soluzioni (indipendenti) della (1.3.5) sono le funzioni

$$z_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t); \quad z_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t).$$

A volte è preferibile avere delle soluzioni reali; quindi ricordando che ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione dell'equazione, allora invece che  $z_1$  e  $z_2$  scegliamo  $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$  e  $\frac{1}{2i}(z_1 - z_2)$ , cioè

$$e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{e} \quad e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

L'integrale generale della (1.3.5) si può dunque scrivere nella forma

$$z(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

o in maniera del tutto equivalente (ricordando lo sviluppo del coseno di una somma)

$$z(t) = e^{\alpha t} A \cos(\beta t + \varphi).$$

**Riassumendo:** in ciascuno dei tre casi studiati abbiamo determinato due soluzioni dell'equazione omogenea che risultano linearmente indipendenti:

Caso $\Delta > 0$	$e^{r_1 t}$	$e^{r_2 t}$
Caso $\Delta = 0$	$e^{rt}$	$te^{rt}$
Caso $\Delta < 0$	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$e^{\alpha t} \sin \beta t$

 **Esempio 1.3.11.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} z'' - 2z' - 3z = 0 \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione proposta è differenziale ordinaria del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti omogenea. L'equazione caratteristica associata è

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

che dà come soluzioni  $r = -1$  e  $r = 3$ . Quindi da quanto detto sopra l'integrale generale dell'equazione risulta

$$z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t},$$

al variare di  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Imponendo i dati di Cauchy si deduce

$$1 = z(0) = C_1 + C_2; \quad 2 = z'(0) = -C_1 + 3C_2$$

da cui

$$C_1 = \frac{1}{4}; \quad C_2 = \frac{3}{4}.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$z(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t}.$$

### 1.3.4. Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti: metodo di somiglianza

In questo paragrafo ci occupiamo di trovare un integrale particolare dell'equazione completa associata a un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti costanti del tipo

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = f(t), \quad a, b \text{ costanti} \quad (1.3.7)$$

nel caso in cui il termine noto  $f(t)$  abbia una forma particolare. Un metodo più generale (ma anche di solito più complesso a livello di calcoli) si basa sul metodo di variazione delle costanti. Invece quando  $f$  ha una forma particolarmente semplice, un'idea alternativa è quella di cercare una soluzione che *assomigli* a  $f$  nel senso che andremo a specificare.

- PRIMO CASO:  $f(t) = p_r(t)$  polinomio di grado  $r$ . In tal caso si cerca una soluzione che sia anch'essa un polinomio, con le seguenti caratteristiche:

dove  $q_r(t)$  è il generico polinomio di grado  $r$  di cui bisogna determinare i coefficienti.

$\bar{y}(t) = q_r(t)$	se $b \neq 0$
$\bar{y}(t) = t q_r(t)$	se $b = 0$ e $a \neq 0$
$\bar{y}(t) = t^2 q_r(t)$	se $b = 0$ e $a = 0$

- SECONDO CASO:  $f(t) = A e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . In tal caso si cerca una soluzione del tipo  $y(t) = e^{\lambda t} \gamma(t)$ . Con calcoli del tutto simili a quelli svolti per l'equazione omogenea si ottiene

$$\gamma'' + \gamma'(2\lambda + a) + \gamma(\lambda^2 + a\lambda + b) = A.$$

Osserviamo che è sufficiente trovare una qualunque  $\gamma$  tale che l'equazione precedente sia soddisfatta. Quindi possiamo distinguere i seguenti casi:

a) Se  $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$  (cioè se  $\lambda$  non è radice dell'equazione caratteristica) basta prendere

$$\gamma(t) = \text{costante} = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}$$

da cui

$$\bar{y}(t) = \frac{A e^{\lambda t}}{\lambda^2 + a\lambda + b}.$$

Quindi una soluzione particolare della (1.3.7) può essere scritta nella forma

$$\bar{y}(t) = C e^{\lambda t},$$

con  $C \in \mathbb{C}$  (e quindi visto che basta trovare una soluzione particolare posso anche scegliere  $C \in \mathbb{R}$ ).

b) Se  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  ma  $2\lambda + a \neq 0$ , allora basta prendere

$$\gamma'(t) = \text{costante} = \frac{A}{2\lambda + a} \quad \text{da cui} \quad \gamma(t) = \frac{At}{2\lambda + a}.$$

Quindi si ha

$$\bar{y}(t) = \frac{At e^{\lambda t}}{2\lambda + a}.$$

perciò una soluzione particolare della (1.3.7) può essere scritta nella forma

$$\bar{y}(t) = C t e^{\lambda t},$$

con  $C \in \mathbb{C}$  (e quindi di nuovo posso anche scegliere  $C \in \mathbb{R}$ ).

c) Se infine  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  e  $2\lambda + a = 0$  allora semplicemente si ha  $\gamma''(t) = A$  da cui

$$\gamma(t) = \frac{A}{2} t^2, \quad \bar{y}(t) = \frac{A}{2} t^2 e^{\lambda t}.$$

Quindi una soluzione particolare della (1.3.7) può essere scritta nella forma

$$\bar{y}(t) = C t^2 e^{\lambda t},$$

con  $C \in \mathbb{R}$ .

Osserviamo che in questa classe particolare di termini noti del tipo  $A e^{\lambda t}$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$  rientrano anche i casi

$$\cos \omega t, \sin \omega t, e^{\mu t} \cos \omega t, e^{\mu t} \sin \omega t \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}.$$

 **Esempio 1.3.12.** Si trovi una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = 1 + t^2$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Cerchiamo una soluzione del tipo generico polinomio di secondo grado

$$\bar{y}(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2.$$

Siccome si ha

$$\bar{y}'(t) = C_1 + 2C_2 t, \quad \bar{y}''(t) = 2C_2$$

inserendo queste informazioni nell'equazione di partenza si ottiene

$$2C_2 - 3(C_1 + 2C_2 t) + 2(C_0 + C_1 t + C_2 t^2) = 1 + t^2.$$

A questo punto vado a uguagliare i coefficienti dei termini con lo stesso grado, a destra e a sinistra, ottenendo il seguente sistema

$$\begin{cases} 2C_2 - 3C_1 + 2C_0 = 1 \\ -6C_2 + 2C_1 = 0 \\ 2C_2 = 1 \end{cases}$$

da cui si deduce immediatamente

$$C_0 = \frac{9}{4}; \quad C_1 = \frac{3}{2}; \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione proposta è

$$\bar{y}(t) = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2.$$

 **Esempio 1.3.13.** Si trovi una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 2y' = t$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Osserviamo che il termine noto è di primo grado ma nell'equazione manca il termine in  $y$ ; quindi si ricade nel caso b) elencato in precedenza. Quindi cerchiamo una soluzione del tipo polinomio di secondo grado della forma

$$\bar{y}(t) = C_1 t + C_2 t^2$$

Con semplici calcoli si deduce che deve essere

$$2C_2 + 2C_1 + 4C_2 t = t$$

quindi

$$\begin{cases} 4C_2 = 1 \\ 2C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$C_1 = -\frac{1}{4}; \quad C_2 = \frac{1}{4}.$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione proposta è

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2.$$

 **Esempio 1.3.14.** Si trovi una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 2y' + 3y = 3e^{3t}.$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per quanto detto sopra, possiamo cercare una soluzione particolare del tipo  $\bar{y}(t) = C e^{3t}$ . Da cui con semplici calcoli

$$C e^{3t}(9 + 2 \cdot 3 + 3) = 18 C e^{3t} = 3 e^{3t}$$

quindi  $C = 1/6$  e  $\bar{y}(t) = \frac{1}{6} e^{3t}$ .

 **Esempio 1.3.15.** Si trovi una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{3t}.$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Ripetendo lo stesso ragionamento dell'esempio precedente, quindi andando a cercare una soluzione particolare del tipo  $\bar{y}(t) = C e^{3t}$  si ottiene

$$C e^{3t}(9 - 2 \cdot 3 - 3) = 0 = 3 e^{3t}$$

quindi non esiste una costante  $C$  (nemmeno in campo complesso) tale per cui la funzione  $\bar{y}$  proposta risolva l'equazione data. Questo perché a ben vedere  $r = -3$  è soluzione dell'equazione caratteristica associata  $r^2 - 2r - 3 = 0$ . Cerchiamo quindi una soluzione particolare del tipo  $\bar{y}(t) = C t e^{3t}$ . Si ottiene innanzitutto

$$\bar{y}'(t) = C e^{3t} + 3C t e^{3t}; \quad \bar{y}''(t) = 6C e^{3t} + 9C t e^{3t}$$

da cui inserendo nell'equazione si ottiene  $C = 3/4$ . Una soluzione particolare è dunque

$$\bar{y}(t) = \frac{3}{4} t e^{3t}.$$

 **Osservazione 1.3.16.** Quando il termine noto è del tipo  $A e^{\mu t} \cos(\omega t)$ , ricordando che

$$A e^{(\mu+i\omega)t} = A e^{\mu t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

si può procedere risolvendo l'equazione con il termine noto  $A e^{(\mu+i\omega)t}$  e poi prendere la parte reale di tale soluzione complessa; per linearità infatti troveremo la soluzione con il termine noto cercato. Analogamente se il termine noto è della forma  $A e^{\mu t} \sin(\omega t)$  si procede andando a prendere la parte immaginaria. Alternativamente, si può pensare di procedere senza usare i numeri complessi: in tal caso si deve andare a cercare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = e^x (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)).$$

Usualmente comunque l'uso dell'esponenziale complesso rende i calcoli delle derivate di  $y$  meno laboriosi. Inoltre, anche se il termine noto contiene solo seno oppure coseno, quando si cerca una soluzione particolare si deve sempre cercare come combinazione lineare di entrambi seno e coseno.

✎ **Esercizio 1.3.17.** *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'' + 2y' - y = 2 e^x \cos(3x).$$

•✎ **R.** Procedendo come sottolineato, si ottiene infatti una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = \frac{2 e^x}{193} (-7 \cos 3x + 12 \sin 3x)$$

☞ **Osservazione 1.3.18.** (METODO DI SOVRAPPOSIZIONE) Nel caso in cui  $f(t)$  sia combinazione lineare di termini appartenenti a due tipologie diverse (esempio polinomio più esponenziale o polinomio più funzione trigonometrica) per linearità prima si trova una soluzione dell'equazione che ha come termine noto il primo termine del termine noto originario, poi si trova una soluzione dell'equazione che ha come termine noto il secondo termine del termine noto originario e infine una soluzione dell'equazione di partenza sarà la somma delle due soluzioni trovate.

✎ **Esercizio 1.3.19.** *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'' + 3y = t + 2 \cos t$$

•✎ **R.** Procedendo come sottolineato, si ottiene infatti una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = \frac{t}{3} + \cos t.$$



---

---

## CAPITOLO 2

---

# Calcolo infinitesimale per le curve

### 2.1. Richiami di calcolo vettoriale

---

Per lo studio del calcolo infinitesimale in più variabili occorre un certo uso del calcolo vettoriale. In questo paragrafo andiamo a richiamare le nozioni di base che verranno incontrate nel seguito. Ambientiamo tutto in  $\mathbb{R}^n$ ; gli elementi di  $\mathbb{R}^n$  li chiamiamo VETTORI e vengono indicati con  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Gli  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  si dicono COMPONENTI del vettore. Il MODULO di un vettore è definito come

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

mentre si dice VERSORE un vettore di modulo unitario e si indica con

$$\text{vers}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

$\mathbb{R}^n$  è dotato della base canonica

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

e ogni vettore può essere espresso come combinazione lineare degli elementi della base canonica

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

I casi che ci interessano maggiormente sono naturalmente quelli corrispondenti a  $n = 2$  e  $n = 3$ , cioè  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . In tal caso spesso per i vettori si usano notazioni che non fanno uso di indici, come  $(x, y)$  o  $(x, y, z)$  e anche i versori della base canonica sono di solito indicati con  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (in  $\mathbb{R}^3$ ) e  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  (in  $\mathbb{R}^2$ ).

Tra le operazioni che si fanno di solito con i vettori, oltre a somma e prodotto per uno scalare,

ricordiamo il **PRODOTTO SCALARE** che è un'operazione che coinvolge due vettori e che dà come risultato uno scalare, secondo la legge

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Talvolta per indicare il prodotto scalare di due vettori si usa anche la notazione  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  invece di  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .

Nel caso particolare di  $n = 2$  e  $n = 3$  c'è anche un preciso significato geometrico, visto che

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta,$$

dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra i due vettori. Quindi  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  se e soltanto se i due vettori sono ortogonali tra loro. Per analogia, la definizione di angolo tra due vettori si estende anche nel caso  $n > 3$ , definendolo come

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

e anche in questo contesto si dice che due vettori sono **ORTOGONALI** se  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Infine introduciamo anche un'altra operazione che agisce tra due vettori di  $\mathbb{R}^3$  e che dà come risultato un vettore di  $\mathbb{R}^3$ : il **PRODOTTO VETTORIALE**. Si indica con  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  e agisce nel seguente modo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(u_2 v_3 - u_3 v_2) - \mathbf{j}(u_1 v_3 - u_3 v_1) + \mathbf{k}(u_1 v_2 - u_2 v_1). \end{aligned}$$

Si noti che  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$  se e soltanto se i due vettori sono paralleli. Talvolta per indicare il prodotto vettoriale si usa la notazione  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  invece che  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

## 2.2. Funzioni a valori vettoriali: alcune definizioni

---

Fino ad ora ci siamo occupati di *funzioni reali di una variabile reale*, ossia oggetti del tipo  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  dominio e  $f$  la legge che ad ogni elemento di  $A$  associa un solo elemento di  $f(A)$  (chiamata *immagine* di  $A$  tramite  $f$ ) anch'esso reale.

Il nostro obiettivo ora è quello di estendere questa nozione al caso in cui i dati in ingresso o quelli in uscita (o entrambi) possono essere più di uno (mantenendo l'univocità della corrispondenza input-output come deve essere per definizione di funzione).

---

□ **Definizione 2.2.1.** Si dice **FUNZIONE DI UNA VARIABILE** una funzione definita su  $A \subset \mathbb{R}$ .

Si dice **FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI** una funzione definita su  $A \subset \mathbb{R}^n$  con  $n > 1$ .

Si dice **FUNZIONE A VALORI REALI** una funzione che ha immagine  $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

Si dice **FUNZIONE A VALORI VETTORIALI** una funzione che ha immagine  $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m > 1$ .

Le funzioni a valori vettoriali solitamente si indicano in grassetto come i vettori.

✎ **Esempio 2.2.2.** Una funzione  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  è una funzione a valori vettoriali di una variabile reale; una funzione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di tre variabili a valori reali.

## 2.3. Calcolo differenziale e integrale per funzioni a valori vettoriali

Ci occupiamo ora degli elementi fondamentali del calcolo infinitesimale per funzioni  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m > 1$ . Questo è il caso più semplice perché molte delle principali nozioni del calcolo differenziale e integrale si riconducono a quelle già studiate per il caso di funzioni reali di una variabile reale. Nel caso  $n = 2, 3$  vedremo che le funzioni  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  hanno il significato geometrico di curve nel piano o nello spazio.

Sia dunque  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ . Sia  $t_0 \in I$  e sia  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ .

□ **Definizione 2.3.1.** Si dice che

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{l}$$

se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{l}| = 0. \quad (2.3.1)$$

Questa definizione ci permette di ricondurre il calcolo del limite per funzioni a valori vettoriali al caso del calcolo di limiti per funzioni a valori reali; infatti la funzione  $t \mapsto |\mathbf{r}(t) - \mathbf{l}|$  è una funzione reale di variabile reale; inoltre geometricamente la (2.3.1) significa che la distanza tra il punto  $\mathbf{r}(t)$  e il punto  $\mathbf{l}$  in  $\mathbb{R}^m$  tende a zero se  $t \rightarrow t_0$  e questo è possibile solo se tendono a zero contemporaneamente le distanze tra le componenti di  $\mathbf{r}$  e le componenti di  $\mathbf{l}$  rispettivamente. Quindi se  $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t))$  con  $r_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$  allora se  $t \rightarrow t_0$

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{l} \Leftrightarrow r_i(t) \rightarrow l_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Quindi grazie all'interpretazione geometrica di (2.3.1) e alle nozioni note riguardanti il caso di limiti di funzioni reali di variabile reale possiamo concludere che il limite di una funzione a valori vettoriali si calcola componente per componente nel modo seguente:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} (r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t)) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} r_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} r_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} r_m(t) \right). \quad (2.3.2)$$

✎ **Esempio 2.3.2.** Sia  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $\mathbf{r}(t) = (\cos t + \pi, e^t - 1, \sin t^2)$ . Calcoliamo  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t)$ .

Dalla (2.3.2) si ha che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (r_1(t), r_2(t), r_3(t)) = \left( \lim_{t \rightarrow 0} (\lim_{t \rightarrow 0} (\cos t + \pi)), \lim_{t \rightarrow 0} (e^t - 1), \lim_{t \rightarrow 0} (\sin t^2) \right) = (1 + \pi, 0, 0).$$

Per curiosità andiamo a verificare che questo modo di procedere è equivalente a calcolare direttamente la (2.3.1). Si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} |\mathbf{r}(t) - \ell| = \lim_{t \rightarrow 0} |((\cos t - 1), (e^t - 1), (\sin t^2))| = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{(\cos t - 1)^2 + (e^t - 1)^2 + \sin^2 t^2} = 0$$

☞ **Osservazione 2.3.3.** Si dimostra che molte delle proprietà dei limiti per funzioni reali di una variabile reale si estendono in maniera immediata nel caso di funzioni a valori vettoriali, come ad esempio il *teorema di unicità del limite*, il *teorema sul limite della somma o del prodotto* e la *definizione di funzione continua* (in particolare una funzione a valori vettoriali è continua se e solo se lo sono tutte le sue componenti).

□ **Definizione 2.3.4.** Sia  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  e sia  $t_0 \in I$ . Si dice che  $\mathbf{r}$  è DERIVABILE in  $t_0$  se esiste finito

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} & (2.3.3) \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(t_0 + h) - r_1(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_2(t_0 + h) - r_2(t_0)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_m(t_0 + h) - r_m(t_0)}{h} \right) \\ &\stackrel{(2.3.2)}{=} (r'_1(t_0), r'_2(t_0), \dots, r'_m(t_0)). \end{aligned}$$

Si osservi che negli ultimi passaggi abbiamo sfruttato il fatto osservato in precedenza, cioè che i limiti di funzioni a valori vettoriali si fanno componente per componente. Quindi anche la derivata di una funzione a valori vettoriali si fa componente per componente: il vettore derivata è il vettore delle derivate delle componenti.

□ **Definizione 2.3.5.** Se  $\mathbf{r}$  è derivabile in tutto  $I$  e inoltre la funzione  $\mathbf{r}'$  è continua in  $I$ , si dice che  $\mathbf{r}$  è DI CLASSE  $\mathcal{C}^1(I)$  e si scrive  $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1(I)$ . Analogamente si definiscono le derivate di ordine successivo e le funzioni di classe  $\mathcal{C}^k(I)$  per  $k > 1$ .

Infine in maniera naturale si può introdurre anche l'integrale definito di una funzione a valori vettoriali.

□ **Definizione 2.3.6.** Sia  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  e poniamo

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left( \int_a^b r_1(t) dt, \int_a^b r_2(t) dt, \dots, \int_a^b r_m(t) dt \right) \quad (2.3.4)$$

e diciamo che  $\mathbf{r}$  è integrabile in  $[a, b]$  se e solo se lo è ogni sua componente  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ); in questo caso (2.3.4) dà la definizione di integrale di  $\mathbf{r}$ .

Ragionando di nuovo componente per componente si dimostra il seguente

**Teorema 2.3.7.** (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI A VALORI VETTORIALI) *Se  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  è di classe  $\mathcal{C}^1([a, b])$  allora*

$$\int_a^b \mathbf{r}'(t) dt = \mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a).$$

Un altro risultato importante ma di dimostrazione meno immediata è il seguente

**Proposizione 2.3.8.** *Se  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  è integrabile, allora*

$$\left| \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \right| \leq \int_a^b |\mathbf{r}(t)| dt.$$

Osserviamo che l'integrale che compare a primo membro è l'integrale di una funzione a valori vettoriali, mentre quello che compare a secondo membro coinvolge una funzione a valori scalari, cioè  $|\mathbf{r}(t)|$ . In entrambi i casi, i moduli che compaiono nella formula sono moduli di vettori e non valori assoluti di numeri reali.

## 2.4. Curve regolari

Consideriamo ora un punto materiale che si muove nello spazio tridimensionale lungo una certa traiettoria; le sue coordinate sono funzioni del tempo, quindi la sua posizione all'istante  $t$  può essere descritta da una funzione di questo tipo

$$\mathbf{r} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dove  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  e

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t); \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

quindi si può anche scrivere

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$$

usando la notazione vettoriale richiamata in questo capitolo, o anche

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Analogamente se il punto si muove nel piano, il suo moto viene descritto da una funzione

$$\mathbf{r} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

con  $\mathbf{r} = (x, y)$  e

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (2.4.1)$$

quindi si possono anche usare le notazioni

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad \text{oppure} \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

Quindi si vede da questo semplice esempio come le funzioni  $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $m = 2$  o  $m = 3$  abbiano un significato fisico e geometrico notevole, quello di curve o cammini nel piano o nello spazio Euclideo. Vale dunque la pena di dare la seguente definizione.

**□ Definizione 2.4.1.** Sia  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo. Si dice **ARCO DI CURVA CONTINUA O CAMMINO** in  $\mathbb{R}^m$  una funzione  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  che sia continua, nel senso che le sue componenti sono funzioni continue.

Se si pensa la variabile  $t$  come il tempo, com'era nel caso dell'esempio precedente, allora un arco di curva continuo è la legge oraria di un punto mobile che si sposta cioè assegna la traiettoria e la posizione in cui il punto si trova ad ogni istante di tempo.

**☞ Osservazione 2.4.2.** Dobbiamo distinguere innanzitutto tra la rappresentazione della linea percorsa dal punto (a prescindere dalla legge con cui è percorsa) in tutto l'intervallo temporale, che è la *traiettoria* o *immagine* della funzione, cioè l'insieme dei suoi valori, dal *grafico* della funzione stessa (che è un oggetto che vive rispettivamente in  $\mathbb{R}^4$  (o in  $\mathbb{R}^3$ )). Sono due cose diverse e naturalmente la seconda è un'informazione più completa rispetto alla prima, in quanto la traiettoria ci dice sono dove passa il punto materiale ma non ci dice in quali istanti lo fa. Quindi più rigorosamente si potrebbe dire che un arco di curva continuo  $\gamma$  è la coppia costituita da una funzione (continua)  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  che chiamiamo **PARAMETRIZZAZIONE DELLA CURVA** e un insieme di punti di  $\mathbb{R}^m$  (immagine di  $\mathbf{r}$ ) che chiameremo **SOSTEGNO DELLA CURVA**. In questo modo di sicuro possono esistere "parametrizzazioni diverse della stessa curva", cioè due diverse funzioni che individuano lo stesso sostegno.

Se torniamo all'esempio iniziale di questo paragrafo, il vettore  $\mathbf{r}(t)$  rappresenta la posizione del punto mobile all'istante  $t_0$ ; il vettore  $\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)$  che compare nella (2.3.3) rappresenta lo spostamento del punto mobile dall'istante  $t_0$  all'istante  $t_0 + h$ , quindi il limite del rapporto incrementale rappresenta cinematicamente il vettore *velocità istantanea* del moto, che risulta *tangente alla curva*.

Analogamente, se esiste, la derivata seconda  $\mathbf{r}''(t)$  ha il significato cinematico di *vettore accelerazione istantanea* del moto. Si può anche definire la VELOCITÀ SCALARE

$$v(t) = |\mathbf{r}'(t)|. \quad (2.4.2)$$

Quest'ultimo concetto tornerà utile quando introdurremo gli integrali di linea di prima specie.

□ **Definizione 2.4.3.** Un arco di curva continua si dice CHIUSA se  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$  con  $I = [a, b]$  (cioè punto iniziale e punto finale coincidono); si dice SEMPLICE se non ripassa mai dallo stesso punto (cioè se  $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$  (a parte il caso in cui sia chiusa); si dice PIANA se esiste un piano che contiene il suo sostegno.

Il vettore velocità istantanea individua effettivamente una direzione, e quindi ha il significato di vettore tangente, solo quando le sue componenti non sono tutte nulle. Questo motiva la prossima definizione.

□ **Definizione 2.4.4.** Sia  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo. Si dice ARCO DI CURVA REGOLARE un arco di curva  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che  $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1(I)$  e  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  per ogni  $t \in I$ .

Quindi il vettore derivato esiste in ogni punto, varia con continuità e non si annulla mai. Di conseguenza, per le curve regolari è ben definito il VERSORE TANGENTE

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

che inoltre dipende con continuità da  $t$ .

□ **Definizione 2.4.5.** Sia  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo. Si dice ARCO DI CURVA REGOLARE A TRATTI un arco di curva  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che  $\mathbf{r}$  è continua e l'intervallo  $I$  può essere suddiviso in un numero finito di sottointervalli, su ciascuno dei quali  $\mathbf{r}$  è un arco di curva regolare.

☞ **Osservazione 2.4.6.** Osserviamo che possiamo trovare curve in  $\mathbb{R}^2$  descritte in *forma parametrica* come in (2.4.1) oppure ci sono curve che sono rappresentabili come *grafico* di una funzione di una variabile, cioè nella forma  $y = g(x)$ . Esiste anche un terzo modo per rappresentare le curve di  $\mathbb{R}^2$  che è la *rappresentazione implicita* cioè quelle curve che sono definite da un'equazione del tipo  $f(x, y) = 0$ . Questi concetti si possono anche generalizzare in maniera opportuna al caso di curve a valori in  $R^3$  (e più in generale di funzioni a valori in  $R^n$ ).

## 2.5. Lunghezza di un arco di curva

Sia  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  la parametrizzazione di un arco di curva  $\gamma$  continuo e consideriamo una *partizione*

$$\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$$

dell'intervallo  $[a, b]$ , con  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  non necessariamente equidistanti. Alla partizione  $\mathcal{P}$  risulta associata la *poligonale inscritta* in  $\gamma$  costituita dagli  $n$  segmenti di estremi  $\mathbf{r}(t_{j-1})$  e  $\mathbf{r}(t_j)$  con  $j = 1, \dots, n$ ; sia  $\ell(\mathcal{P})$  la lunghezza di tale poligonale, da cui si ha

$$\ell(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n |\mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(t_{j-1})|.$$

Siccome intuitivamente il segmento è la linea più breve che congiunge due punti, l'idea è che  $\ell(\mathcal{P})$  approssimi per difetto la lunghezza di  $\gamma$ ; per cui facendo variare in tutti i modi possibili la partizione  $\mathcal{P}$  e prendendo l'*estremo superiore* delle  $\ell(\mathcal{P})$  si ottenga la lunghezza dell'arco di curva desiderato. Si ha perciò la seguente definizione:

□ **Definizione 2.5.1.** Si dice che  $\gamma$  è **RETTIFICABILE** se

$$\sup_{\mathcal{P}} \ell(\mathcal{P}) = \ell(\gamma) < +\infty.$$

dove l'estremo superiore è calcolato al variare di tutte le possibili partizioni  $\mathcal{P}$  di  $[a, b]$ . In tal caso  $\ell(\gamma)$  si dice **LUNGHEZZA** di  $\gamma$ .

Ricordando che cinematicamente lo spazio è uguale al prodotto della velocità per il tempo e che abbiamo introdotto la velocità scalare in (2.4.2) allora si giustifica il seguente teorema.

**Teorema 2.5.2.** Sia  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  la parametrizzazione di un arco di curva  $\gamma$  regolare. Allora  $\gamma$  è rettificabile e

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Nello spazio tridimensionale la formula precedente prende la seguente forma

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt;$$

se la curva è piana, manca il termine  $z'(t)^2$ .

Vale la seguente utile osservazione.

**Proposizione 2.5.3.** Sia  $\gamma$  una curva unione di due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , rispettivamente di equazioni  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$  per  $t \in [a, b]$  e  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$  per  $t \in [b, c]$ , soddisfacenti alla condizione di raccordo  $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(b)$ , allora  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  è definita dalla curva  $\mathbf{r} : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^m$  di equazione

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) & t \in [a, b] \\ \mathbf{r}_2(t) & t \in [b, c] \end{cases}$$

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono rettificabili, anche  $\gamma$  è rettificabile e  $\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$ . La stessa proprietà si estende a un numero finito di curve rettificabili.

Se  $\gamma$  è regolare a tratti, allora è rettificabile e la lunghezza si calcola tramite la medesima formula (dove la funzione integranda sarà continua a tratti).

### Lunghezza di un grafico

Una classe particolare di curve piane è data dalle curve che si ottengono come grafici di funzioni di una variabile, ossia  $y = f(x)$  per  $x \in [a, b]$ . In tal caso la curva può essere scritta in forma parametrica ponendo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad \text{per } t \in [a, b].$$

Una curva espressa come grafico di una funzione  $f$  ha le seguenti proprietà:

- 1) è continua se e soltanto se  $f$  è continua in  $[a, b]$ ;
- 2) è regolare se e soltanto se  $f$  è derivabile con continuità in  $[a, b]$  (notiamo che il vettore velocità non si annulla mai visto che  $x'(t) \equiv 1$ );
- 3) è regolare a tratti se e solo se  $f$  è continua in  $[a, b]$  e a tratti derivabile con continuità in  $[a, b]$ ;
- 4) non è mai chiusa;
- 5) è sempre semplice.

Nel caso di una curva espressa come grafico di una funzione, per calcolare la lunghezza della curva si usa la formula

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

### Curve piane in forma polare

Una forma particolare che possono avere le equazioni parametriche di una curva piana è quella *polare*. L'equazione

$$\rho = f(\theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

indica la seguente scrittura

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2].$$

Possiamo immediatamente osservare che

$$\mathbf{r}'(\theta) = (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta)$$

da cui

$$|\mathbf{r}'(\theta)| = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}.$$

Una curva piana espressa in forma polare ha le seguenti proprietà:

- 1) è continua se e soltanto se  $f$  è continua in  $[\theta_1, \theta_2]$ ;
- 2) è regolare se e soltanto se  $f$  è derivabile con continuità in  $[\theta_1, \theta_2]$  e inoltre  $f$  e  $f'$  non si

annullano contemporaneamente;

3) è chiusa se e soltanto se  $f(\theta_1) = f(\theta_2)$  e  $\theta_2 - \theta_1 = 2n\pi$  per qualche intero  $n$ .

Nel caso di una curva espressa in forma polare, per calcolare la lunghezza della curva si usa la formula

$$\ell(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta.$$

☞ **Osservazione 2.5.4.** Com'è noto, l'estremo superiore di un insieme può anche essere infinito, se l'insieme non è limitato. Quindi in particolare, ci sono curve che non sono rettificabili, perché hanno lunghezza infinita. Ad esempio si dimostra che la curva piana che è il grafico della funzione

$$f(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t} & t \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right] \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

non è rettificabile dato che l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonalì inscritte nella curva è infinito.

## 2.6. Cambiamenti di parametrizzazione. Il parametro arco

---

In questo paragrafo cercheremo di formalizzare il concetto intuitivo che la lunghezza dell'arco di curva percorsa da un punto mobile dipende solo dal sostegno della curva e non dalla velocità con cui il punto si muove o dal verso di percorrenza.

Sia infatti  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  con  $t \in [a, b]$  un arco di curva regolare. Un cambiamento di parametrizzazione significa introdurre una funzione  $t = \varphi(u)$  con  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  derivabile e invertibile (quindi in particolare monotona) tale che la nuova curva  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi(u))$ ,  $u \in [c, d]$  abbia lo stesso sostegno anche se sarà percorsa con una velocità diversa. Inoltre se  $\varphi$  è crescente, le due parametrizzazioni si diranno *equivalenti* perché percorse nello stesso verso; se invece  $\varphi$  è decrescente allora la nuova parametrizzazione si dice *cambio di orientazione* rispetto alla precedente. In entrambi i casi passando da  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  a  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi(u))$  diremo che abbiamo *riparametrizzato* la curva. Si ha inoltre il seguente fatto.

**Proposizione 2.6.1.** *La lunghezza di un arco di curva regolare è invariante per parametrizzazioni equivalenti ed anche per cambiamento di orientazione.*

Osserviamo che la lunghezza dell'arco di curva  $\mathbf{r}(\tau)$  per  $\tau \in [t_0, t]$  è una funzione di  $t$  e si ha

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau.$$

Se si è in grado di calcolare esplicitamente tale funzione e poi invertirla, esprimendo  $t$  come funzione di  $s$ , allora è possibile riparametrizzare la curva in funzione del parametro  $s$  detto

PARAMETRO ARCO O ASCISSA CURVILINEA. Il vantaggio è che  $s$  è esattamente lo spazio percorso dal punto mobile quando il parametro passa da 0 a  $s$ . Si può inoltre far vedere che se  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  è una curva parametrizzata con il parametro arco, allora il vettore derivato  $\mathbf{r}'(s)$  coincide con il versore tangente.

## 2.7. Integrali di linea di prima specie

**□ Definizione 2.7.1.** Sia  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  un arco di curva regolare di sostegno  $\gamma$  e sia  $f$  una funzione a valori reali, definita su un sottoinsieme  $A \subset \mathbb{R}^m$  contenente  $\gamma$ , cioè  $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\gamma \subset A$ . Allora si dice INTEGRALE DI LINEA (DI PRIMA SPECIE) DI  $f$  LUNGO  $\gamma$  l'integrale

$$\int_{\gamma} f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

bf Significato geometrico dell'integrale di linea di prima specie. Se  $m = 2$ ,  $f$  positiva e continua e  $\gamma$  è parametrizzata con il parametro arco, il precedente integrale ha un'interessante interpretazione geometrica. Infatti sia  $S$  la superficie in  $\mathbb{R}^3$  formata dai segmenti che congiungono i punti di  $\gamma$  con il grafico di  $f$ . Visto che  $\gamma$  è parametrizzata dal parametro arco, se pensiamo di sviluppare in un pannello  $x, y$  la superficie  $S$  in modo da far coincidere  $\gamma$  con l'asse  $x$  allora il parametro arco coincide con l'ascissa  $x$  e l'integrale  $\int_{\gamma} f ds$  rappresenta l'area di questa superficie sviluppata e quindi l'area della superficie originale.

Per l'integrale di linea di prima specie valgono i risultati di invarianza rispetto a parametrizzazioni analogo a quanto abbiamo enunciato per la lunghezza dell'arco di curva.

**Proposizione 2.7.2.** *L'integrale di  $f$  di prima specie lungo  $\gamma$  è invariante per parametrizzazioni equivalenti ed anche per cambiamento di orientazione su  $\gamma$ .*

### 2.7.1. Applicazioni

#### Massa di un filo non omogeneo nota la densità lineare

Sia  $\gamma$  una linea materiale non omogenea di densità lineare  $\rho$  e sia  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione regolare di  $\gamma$ . Allora la massa totale è data da

$$m = \int_{\gamma} \rho ds = \int_a^b \rho(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Se il corpo è omogeneo ( $\rho$  costante), si ritrova  $m = \rho \ell(\gamma)$ , dove  $\ell(\gamma)$  è la lunghezza di  $\gamma$ .

**Baricentro**

Il *baricentro* di  $\gamma$  è il punto  $B \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  dove

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x \rho ds = \frac{1}{m} \int_a^b x(t) \rho(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \\ \bar{y} = \frac{1}{m} \int_{\gamma} y \rho ds = \frac{1}{m} \int_a^b y(t) \rho(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \\ \bar{z} = \frac{1}{m} \int_{\gamma} z \rho ds = \frac{1}{m} \int_a^b z(t) \rho(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \end{cases}$$

dove  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

Se il corpo è omogeneo ( $\rho$  costante), il baricentro si dice **CENTROIDE** e ha coordinate

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\rho}{m} \int_{\gamma} x ds = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_a^b x(t) |\mathbf{r}'(t)| dt = \frac{\int_a^b x(t) |\mathbf{r}'(t)| dt}{\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt} \\ \bar{y} &= \frac{\rho}{m} \int_{\gamma} y ds = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_a^b y(t) |\mathbf{r}'(t)| dt = \frac{\int_a^b y(t) |\mathbf{r}'(t)| dt}{\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt} \\ \bar{z} &= \frac{\rho}{m} \int_{\gamma} z ds = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_a^b z(t) |\mathbf{r}'(t)| dt = \frac{\int_a^b z(t) |\mathbf{r}'(t)| dt}{\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt} \end{aligned}$$

**Momento di inerzia**

Calcoliamo infine il *momento di inerzia* di  $\gamma$  rispetto a un asse fissato. Se  $\delta(x, y, z)$  indica la distanza di  $(x, y, z)$  da quest'asse, si ha

$$I = \int_{\gamma} \delta^2 \rho ds = \int_a^b \delta^2(\mathbf{r}(t)) \rho(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Se il corpo è omogeneo si ottiene

$$I = \frac{m}{\ell(\gamma)} \int_{\gamma} \delta^2 ds = m \frac{\int_a^b \delta^2(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt}{\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt}.$$

---

---

## CAPITOLO 3

---

# Calcolo infinitesimale per funzioni reali di più variabili

Scopo di questo capitolo è iniziare a studiare le funzioni reali di più variabili reali, del tipo  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 3.1. Grafico, linee di livello e domini

---

□ **Definizione 3.1.1.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora il GRAFICO di una funzione reale di più variabili è l'insieme

$$\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

È chiaro che se  $n = 2$  è possibile una visualizzazione del grafico in  $\mathbb{R}^3$  altrimenti per  $n > 2$  questo non è più possibile.

Un altro modo per rappresentare graficamente una funzione reale di più variabili reali è tramite gli insiemi di livello.

□ **Definizione 3.1.2.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora gli INSIEMI DI LIVELLO (O IPERSUPERFICI DI LIVELLO) per una funzione reale di più variabili sono gli insiemi

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = c\}$$

al variare di  $c \in \mathbb{R}$ .

Se  $n = 2$  si parla di LINEE DI LIVELLO alla superficie di equazione  $z = f(x, y)$  e sono gli insiemi

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in A\};$$

se  $n = 3$  si parla di SUPERFICI DI LIVELLO alla ipersuperficie di equazione  $k = f(x, y, z)$  e sono gli insiemi

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in A\}.$$

Le curve di livello rappresentano il luogo dei punti dove  $f$  ha valore costante, quindi danno informazioni sulla  $f$  anche se implicitamente. Ad esempio, sono le linee che vengono tracciate sulle carte topografiche ad indicare luoghi che hanno la stessa altitudine oppure nelle carte delle previsioni del tempo, a indicare ad esempio le linee isobare (a pressione costante).

Si mediti sui seguenti esempi chiave.

✎ **Esempio 3.1.3.** Sia  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Tale superficie prende il nome di PARABOLOIDE. È una funzione definita su tutto  $\mathbb{R}^2$ , è sempre positiva o nulla, le linee di livello sono del tipo  $x^2 + y^2 = C$ , al variare di  $C \geq 0$ . Queste linee rappresentano delle circonferenze centrate nell'origine di raggio  $\sqrt{C}$ . Il paraboloido quindi ha simmetria radiale e allontanandosi dall'origine cresce più velocemente (perché le linee sono più fitte).

✎ **Esempio 3.1.4.** Sia  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Questa superficie prende il nome di CONO. Anch'essa è definita su tutto  $\mathbb{R}^2$  ed è sempre positiva o nulla, ma stavolta le linee di livello sono del tipo  $x^2 + y^2 = C^2$ , quindi rappresentano circonferenze centrate nell'origine e di raggio  $C$ . Stavolta le linee di livello sono equidistanziate e quindi il cono cresce "meno velocemente" del paraboloido.

Se pensiamo di andare a sezionare le precedenti superfici con il piano  $y = 0$  otteniamo rispettivamente una parabola di equazione  $z = x^2$  e la funzione valore assoluto  $z = |x|$  da cui si evince il punto angoloso.

Naturalmente anche le funzioni reali di più variabili reali sono definite all'interno di un dominio naturale che è il più grande sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  dove ha senso scrivere la  $f$ . Valgono le stesse regole di buona definizione usate per le funzioni reali di una variabile reale, con una difficoltà in più, che i domini risultati saranno sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ , quindi nel caso ad esempio  $n = 2$  dove c'è una visualizzazione delle nostre superfici, i domini saranno sottoinsiemi del piano.

✎ **Esempio 3.1.5.** Trovare il dominio naturale della seguente funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\tan(xy)} \sin(e^{\sqrt{xy}})$$

Si osserva che la radice quadrata è ben definita se il suo argomento è positivo o nullo; l'esponenziale è ben definito ovunque così come la funzione seno; la funzione tangente invece è ben definita se il suo argomento è diverso da  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Dunque le condizioni da porre sono

$$\begin{cases} \tan(xy) \geq 0 \\ xy \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ xy \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq xy \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ xy \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

quindi la condizione da porre è

$$0 \leq xy < \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si tratta di una successione di regioni comprese tra due iperboli equilateri nel primo e nel terzo quadrante (alcune iperboli sono comprese, altre sono escluse).

## 3.2. Limiti e continuità

Abbiamo visto nel capitolo precedente il significato dell'operazione di limite per una funzione di una variabile a valori vettoriali e abbiamo visto che per queste funzioni il comportamento può essere in buona parte ricondotto a quello per funzioni reali di una variabile reale. Nel caso di funzioni reali di più variabili reali il comportamento sarà in generale più complesso e più difficilmente riconducibile a quello unidimensionale.

Iniziamo con la seguente definizione.

□ **Definizione 3.2.1.** Data una successione  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$  di punti di  $\mathbb{R}^n$  e un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  si dice che

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty \quad \text{se} \quad |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0| \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty.$$

□ **Definizione 3.2.2.** Si dice INTORNO SFERICO DI CENTRO  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  E RAGGIO  $r > 0$  l'insieme

$$U_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r\}$$

$r$  si dice RAGGIO DELL'INTORNO;  $\mathbf{x}_0$  si dice CENTRO DELL'INTORNO.

□ **Definizione 3.2.3.** (DEFINIZIONE SUCCESSIONALE DI LIMITE O LIMITE PER SUCCESSIONI)

Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita almeno in un intorno sferico di  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  (escluso al più il punto  $\mathbf{x}_0$  stesso). Sia  $L \in \mathbb{R}^*$  dove  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Allora diremo che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

$$\Updownarrow$$

$\forall \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$  di punti tale che  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$  per  $k \rightarrow \infty$  (con  $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0$  per ogni  $k$ ), si ha che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = L.$$

Più in generale si ha la seguente

□ **Definizione 3.2.4.** (DEFINIZIONE TOPOLOGICA DI LIMITE) Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita almeno in un intorno sferico di  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  (escluso al più il punto  $\mathbf{x}_0$  stessi e sia  $L \in \mathbb{R}$ . Si dice che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che se  $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$  allora  $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$ .

Si dice che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty \quad \llbracket -\infty \rrbracket$$

$\Updownarrow$

$\forall M > 0 \exists \delta > 0$  tale che se  $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$  allora  $f(\mathbf{x}) > M \quad \llbracket f(\mathbf{x}) < -M \rrbracket$ .

☞ **Osservazione 3.2.5.** A differenza del caso delle curve, non c'è una mania diretta per ricondurre il calcolo dei limiti di funzioni del tipo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a quello per funzioni reali di variabile reale. Le definizioni presentate presentano delle somiglianze solo dal punto di vista *formale*; per altro anche in questo caso molti enunciati continuano a valere in maniera analoga, per esempio il teorema di unicità del limite, il teorema sul limite della somma, del prodotto per una costante, del prodotto e del quoziente di due funzioni, il teorema del confronto e il teorema di permanenza del segno, giusto per citarne alcuni

□ **Definizione 3.2.6.** (CONTINUITÀ) Si dice che  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $\mathbf{x}_0$  se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

☞ **Osservazione 3.2.7.** Come conseguenza dei teoremi sui limiti valgono i teoremi sulla continuità della somma, del prodotto, del quoziente di funzioni continue (quando hanno senso e il denominatore non si annulla) e della composizione di funzioni continue (quando ha senso).

Osserviamo che se una funzione di una variabile è continua, rimane ovviamente continua anche se la consideriamo come funzione di più variabili. Esempio:  $f(x) = e^x$  e  $g(x, y) = e^x$  oppure  $g(x, y) = e^y$ .

Le proprietà enunciate permettono, combinandole tra loro, di mostrare la continuità di un gran numero di funzioni senza dover ricorrere alla definizione (cioè al calcolo dei limiti).

📎 **Esempio 3.2.8.** *La funzione*

$$f(x, y) = \frac{\arctan(x^2 + y^2)}{1 + e^{-x-y}}$$

è definita e continua su  $\mathbb{R}$ .

Quindi quando una funzione è continua, si può calcolare  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$  semplicemente valutando  $f(\mathbf{x}_0)$ .

📎 **Esempio 3.2.9.**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{\arctan(x^2 + y^2)}{1 + e^{-x-y}} = 0$$

Quindi il ricorso alla definizione diventerà indispensabile solo nel caso dell'analisi delle forme di indeterminazione.

### 3.3. Analisi delle forme di indeterminazione

**Fatto fondamentale:** se  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$  allora significa che  $f$  si avvicina a  $L$  indefinitamente quando la distanza tra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_0$  tende a zero INDIPENDENTEMENTE dalla direzione con cui  $\mathbf{x}$  si avvicina a  $\mathbf{x}_0$ . Quindi in generale si distinguono due casi:

→ **il limite esiste.** Allora l'esistenza del limite va dimostrata; in particolare può essere utile passare a coordinate polari. Infatti in questo caso, per esempio se  $n = 2$ , si riesce a mettere in evidenza la dipendenza di  $f(x, y)$  dalla distanza tra  $(x, y)$  e  $(0, 0)$  attraverso  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . A questo punto è INDISPENSABILE che una volta operata la trasformazione la  $f(\rho, \theta)$  non dipenda più da  $\theta$  (o si possa controllare con una  $g$  dipendente solo da  $\rho$ ). Vale il seguente criterio generale per funzioni di due variabili (che può anche essere esteso al caso di  $n$  variabili).

**Proposizione 3.3.1.** CRITERIO GENERALE (VALIDO PER PROVARE L'ESISTENZA DEL LIMITE) *Per dimostrare che  $f(x, y) \rightarrow L$  se  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  è sufficiente riuscire a scrivere una maggiorazione del tipo*

$$|f(\rho, \theta) - L| \leq g(\rho) \quad g(\rho) \rightarrow 0.$$

L'essenziale è dunque che  $g$  non dipenda da  $\theta$ .

☞ **Osservazione 3.3.2.** Se  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \neq (0, 0)$  il criterio si può ancora applicare con  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  cioè si pone

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho \cos \theta \\ y &= y_0 + \rho \sin \theta. \end{aligned}$$

*Naturalmente non riuscire a dimostrare una tale maggiorazione NON SIGNIFICA che il limite non esiste.*

Il suddetto criterio può anche essere generalizzato al caso di  $n$  variabili.

📎 **Esempio 3.3.3.** *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2 + y^2}$$

SOLUZIONE 1. *Ricordiamo che*

$$f \rightarrow 0 \iff |f| \rightarrow 0$$

*a questo punto dunque, osservando che  $\frac{y^2}{z^2 + y^2} \leq 1$  per ogni  $(y, z) \in \mathbb{R}^2$*

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^2 |\log x|}{(x-1)^2 + y^2} = \lim_{(z,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 |\log(z+1)|}{z^2 + y^2} \leq \lim_{(z,y) \rightarrow (0,0)} |\log(z+1)| = 0.$$

Il teorema del confronto ci permette allora di concludere che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2 + y^2} = 0.$$

SOLUZIONE 2. Si può anche passare a coordinate polari ponendo  $x = 1 + \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ . Si ottiene

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin^2 \theta \log(1 + \rho \cos \theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin^2 \theta \cos \theta = 0$$

poiché  $\sin^2 \theta \cos \theta$  è una quantità limitata in modulo da 1.

Alternativamente per provare l'esistenza del limite si può tentare di usare opportune maggiorazioni, al fine di mostrare che la differenza tra la funzione e il presunto limite tende a zero. A tal fine possono risultare utili le seguenti maggiorazioni

$$e^z \geq 1 + z \quad \log z \leq z - 1 \quad \sin z \leq z \quad \sin z \leq 1 \quad \cos z \leq 1$$

oppure le seguenti maggiorazioni derivanti da fatti elementari

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad \frac{a^2}{a^2 + b^2} \leq 1$$

(ma si badi che ovviamente non è vero che  $\frac{a^3}{a^3 + b^3} \leq 1$ ) unite al fatto che  $f \rightarrow 0 \Leftrightarrow |f| \rightarrow 0$  e all'uso appropriato del teorema del confronto. Possono talora risultare comodi anche i limiti notevoli dell'analisi 1. Il prossimo esempio mostra alcune possibili applicazioni.

 **Esempio 3.3.4.** Calcolare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3 - 2 \sin(x^2y) \cos(x + 2y)}{x^2 + y^2}$$

Il limite dato può essere riscritto come

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \sin(x^2y) \cos(x + 2y)}{x^2 + y^2}$$

a patto che questi ultimi due limiti esistano, finiti o infiniti ma tali da non dar luogo alla forma di indecisione  $[+\infty, -\infty]$ . Per quanto riguarda

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$$

prendendo i valori assoluti e utilizzando la nota disuguaglianza  $|x||y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , si ha

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x||y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 = 0.$$

Quindi dal teorema del confronto e utilizzando il fatto che

$$f \rightarrow 0 \Leftrightarrow |f| \rightarrow 0$$

si ottiene che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$$

esiste e fa 0.

Per quanto riguarda

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \sin(x^2y) \cos(x + 2y)}{x^2 + y^2}$$

si osserva immediatamente che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos(x + 2y) = 1;$$

d'altra parte, utilizzando il fatto che  $|\sin z| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{R}$  e il fatto ovvio che  $x^2 \leq x^2 + y^2$  si ottiene, prendendo i valori assoluti

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2|\sin(x^2y)|}{x^2 + y^2} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2|y| = 0.$$

Il teorema del confronto unito al fatto che

$$f \rightarrow 0 \Leftrightarrow |f| \rightarrow 0$$

ci dà

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \sin(x^2y)}{x^2 + y^2} = 0$$

e dunque anche

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \sin(x^2y) \cos(x + 2y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Allora anche il limite proposto in partenza esiste e fa 0.

☞ **Osservazione 3.3.5.** I limiti possono essere usati anche nello studio della continuità di una funzione come mostra il seguente esempio.

📎 **Esempio 3.3.6.** Sia data la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) Si stabilisca se  $f$  è continua in  $(0, 0)$ .

b) Si stabilisca se è continua in  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 1\}$

a) Per  $x \neq 0$  la funzione è continua. Per concludere occorre analizzare la continuità della funzione data lungo la retta  $x = 0$ . Per fare questo bisogna calcolare il limite per  $x \rightarrow 0$  con  $y$  qualunque di  $f(x, y)$  e verificare se esso è 0 che è il valore assunto lungo l'asse delle  $y$ . Questo è falso dato che se consideriamo la curva  $y = \sqrt{x}$  allora  $f(x, y)$  vale costantemente 1 e dunque non può tendere a 0 al tendere di  $x$  a 0. Dunque la funzione data non è continua in 0.

b) Usando la condizione imposta dal dominio  $D$  si ottiene

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

dove osserviamo che non abbiamo avuto bisogno di considerare i valori assoluti delle quantità in gioco dato che  $x \in D \Rightarrow x \geq 0$ . A questo punto il teorema del confronto permette di concludere che il limite considerato esiste e fa 0, dunque la funzione  $f$  è continua in  $D$ . Notiamo che questo esempio mostra che una funzione può essere discontinua in un punto mentre una sua restrizione può essere continua nello stesso punto. Ciò non deve stupire, in quanto, restringendo una funzione ad un sottoinsieme del suo dominio, si può escludere un insieme rilevante di curve lungo le quali calcolare i limiti.

→ **il limite non esiste.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di  $n$  variabili, sia  $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un arco di curva di  $\mathbb{R}^n$  e supponiamo che esista la funzione composta  $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ . Quest'ultima scrittura si dice **RESTRIZIONE DI  $f$  ALLA CURVA  $\mathbf{r}$**  ed è una funzione reale di una variabile reale.

Il termine restrizione deriva dalla seguente idea geometrica: invece di far variare  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ci restringiamo ai punti di  $\mathbb{R}^n$  che stanno sull'arco di curva  $\mathbf{r}(t)$ . È chiaro che se  $f$  e  $\mathbf{r}$  sono continue, anche  $g$  è continua (composizione di funzioni continue).

Quindi: per mostrare che il limite per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  non esiste, è sufficiente determinare due curve *passanti per  $\mathbf{x}_0$*  lungo le quali la funzione tende a due limiti diversi. La stessa conclusione vale se la restrizione di  $f$  a una curva non ammette limite.

📌 **Esempio 3.3.7.** Determinare il dominio di definizione della funzione

$$f(x, y) := x^{-1}[(\sin x)^2 + y^2] \tan(e^{x+y})$$

e studiarne il comportamento per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Innanzitutto la funzione  $\tan e^{x+y}$  è definita per  $e^{x+y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Se  $k \in \mathbb{Z}^-$  questo è sicuramente verificato, quindi basterà imporre

$$e^{x+y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Inoltre il denominatore di  $f$  deve essere diverso da zero, dunque

$$\text{dom } f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq \log \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \quad k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \wedge x \neq 0 \right\}.$$

Per quanto riguarda il comportamento di  $f$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , dimostriamo che il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{((\sin x)^2 + y^2) \tan(e^{x+y})}{x}$$

non esiste. A tale scopo basta trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione data ammetta limite diverso. Si ha ad esempio (utilizzando un noto limite notevole)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(\sin x)^2 + x] \tan(e^{x+\sqrt{x}})}{x} = \tan 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((\sin x)^2 + x^2) \tan e^{2x}}{x} = 0.$$

Questo basta a concludere che il limite dato non esiste.

🔗 **Esempio 3.3.8.** Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La funzione data è continua sicuramente per  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Per vedere se è continua nell'origine, è sufficiente studiare il limite di  $f$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  per vedere se esso esiste e se coincide con il valore della funzione in  $(0, 0)$ . Si ha che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

non esiste. Infatti se consideriamo la curva  $y = x$  otteniamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

mentre se prendiamo in esame la curva  $y = x^2$ , si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Questo basta a concludere che la funzione data non è continua nell'origine (in realtà per concludere che la funzione non è continua nell'origine bastava solo considerare una curva tale che il limite preso lungo quella curva non fosse uguale a zero, nel nostro caso bastava dunque l'esame del limite lungo la curva  $y = x^2$ ).



---

---

## CAPITOLO 4

---

# Calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili

### 4.1. Nozione topologiche di base

---

Ricordiamo la definizione di intorno sferico già introdotto nel capitolo precedente.

□ **Definizione 4.1.1.** Si dice INTORNO SFERICO DI CENTRO  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  E RAGGIO  $r > 0$  l'insieme

$$U_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r\}$$

□ **Definizione 4.1.2.** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Un punto  $\mathbf{x}_0 \in E$  si dice:

- INTERNO AD  $E$  se  $\exists U_r(\mathbf{x}_0) \subseteq E$ ;
- ESTERNO AD  $E$  se  $\exists U_r(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus E$ ;
- DI FRONTIERA PER  $E$  se  $\forall U_r(\mathbf{x}_0), U_r(\mathbf{x}_0) \cap E \neq \emptyset$  e  $U_r(\mathbf{x}_0) \cap \mathbb{R}^n \setminus E \neq \emptyset$ .

L'insieme dei punti interni ad  $E$  si dice PARTE INTERNA DI  $E$  e si indica con  $\overset{\circ}{E}$ . L'insieme dei punti di frontiera si dice BORDO DI  $E$  e si indica con  $\partial E$ . L'unione di  $E$  e del suo bordo si dice CHIUSURA DI  $E$  e si indica con  $\overline{E} = E \cup \partial E$ . Si ha sempre  $\overset{\circ}{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}$  e anche  $\overset{\circ}{E} \cup \partial E = \overline{E}$ .

✎ **Esempio 4.1.3.** Sia  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Allora un intorno sferico dell'origine è

$$U_r(0, 0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$$

quindi sono le sfere bidimensionali (piene) private del cerchio  $x^2 + y^2 = r^2$ . Sia ora  $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > x^2\}$ . L'insieme descritto è l'unione delle due regioni "interne" alle parabole  $y = x^2$  e  $y = -x^2$ . I punti  $(0, y)$  con  $y \neq 0$  sono interni ad  $E$ . I punti  $(x, 0)$  con  $x \neq 0$  sono esterni ad  $E$ . I punti delle due parabole  $y = \pm x^2$  sono di frontiera per  $E$  e costituiscono il bordo di  $E$ . Notiamo che, detto  $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq x^2\}$ , allora  $\partial E = \partial F$ ;  $E$  non contiene la sua frontiera,  $F$  la contiene. Questa differenza viene rimarcata dalla seguente definizione.

□ **Definizione 4.1.4.** Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice APERTO se ogni suo punto è interno all'insieme; si dice CHIUSO se il complementare è aperto.

✎ **Esempio 4.1.5.** L'insieme  $E$  dell'esempio precedente è aperto; l'insieme  $F$  dell'esempio precedente è chiuso. L'insieme

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \vee y < -x^2\}$$

non è né aperto né chiuso.

**Proposizione 4.1.6.** L'unione di una famiglia qualsiasi (anche infinita) di aperti e l'intersezione finita di aperti è ancora un aperto. L'unione finita di chiusi e l'intersezione qualsiasi (anche infinita) di chiusi è ancora un chiuso.

✎ **Osservazione 4.1.7.** Non è difficile rendersi conto che l'unione qualsiasi di chiusi può non essere un chiuso e l'intersezione qualsiasi di aperti può non essere un aperto.

✎ **Esempio 4.1.8.** Sia

$$C_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

una successione di aperti. Allora è facile intuire che  $\bigcap_n C_n = \{0\}$  che è un chiuso.

**Proposizione 4.1.9.** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita e continua in tutto  $\mathbb{R}^n$ . Allora:

a) gli insiemi

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > 0\}$$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) < 0\}$$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\}$$

sono aperti;

b) gli insiemi

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq 0\}$$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \geq 0\}$$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$$

sono chiusi.

✎ **Esempio 4.1.10.** L'insieme di definizione di

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 - y}$$

è

$$F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \vee y \leq x^2\}$$

ed è un chiuso perchè intersezione dei due insiemi

$$F_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

e

$$F_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$$

che sono chiusi perché controimmagine di chiusi tramite funzioni continue.

 **Esempio 4.1.11.** Gli insiemi di livello di una funzione  $f(x, y)$  sono insiemi del tipo  $f(x, y) = C$  e quindi sono chiusi (se  $f$  è continua!).

## 4.2. Derivate parziali, derivabilità e piano tangente

---

Sia  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale. Dall'Analisi I è ben chiaro il concetto di derivata in un punto definita come limite del rapporto incrementale

$$g'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

La derivata di una funzione in un punto ha un interessante significato geometrico: infatti è il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto (che ha il significato di approssimare localmente la funzione data); inoltre  $g$  è derivabile se e soltanto se è ben definita la retta tangente in quel punto.

In questo capitolo vorremmo tentare di estendere questi concetti anche al caso di funzioni di più variabili. Ci accorgeremo che non sempre è verificato ciò che ci si aspetta e la presenza di più variabili porta a diverse nozioni di derivabilità e a situazioni inusuali nel contesto di una variabile. Presenteremo i risultati nella maggioranza dei casi per  $n = 2$  sia perché è il caso più semplice (e quindi più leggibile e perciò di più immediata comprensione) che per il fatto che per una funzione di due variabili è possibile una visualizzazione nello spazio euclideo. Naturalmente l'estensione in più di due variabili è possibile e spesso richiede solo un formalismo tecnico maggiore.

Innanzitutto la definizione di derivata per una funzione di più variabili vista come limite del rapporto incrementale non è più applicabile: intanto non è ovvio che cosa sia un incremento in più dimensioni e secondariamente anche se si arrivasse a una definizione accettabile, non si sa cosa voglia dire dividere per un vettore (la controparte di  $h$  nella definizione scalare di derivata). Quindi la soluzione non è affatto banale.

Una prima soluzione consiste nel tentare di incrementare una variabile alla volta, cercando di utilizzare la nozione di derivata che conosciamo dall'Analisi I. Sia dunque  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di due variabili il cui grafico in  $\mathbb{R}^3$  rappresenta una superficie di equazione  $z = f(x, y)$ . Supponiamo di voler tenere  $y$  costante, per esempio  $y = y_0$  e andiamo a considerare la funzione  $x \mapsto f(x, y_0)$ . Questa è una funzione della sola variabile  $x$  perciò di essa si sa calcolare la derivata in un punto  $x = x_0$  come limite del rapporto incrementale. La stessa cosa si può

fare tenendo costante  $x = x_0$  e andando a fare la derivata della funzione di una sola variabile  $y \mapsto f(x_0, y)$ . Si arriva perciò alle seguenti definizioni.

□ **Definizione 4.2.1.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di due variabili. La quantità (se esiste)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si chiama DERIVATA PARZIALE DI  $f$  FATTA RISPETTO A  $x$  CALCOLATA NEL PUNTO  $(x_0, y_0)$ ; analogamente la quantità (se esiste)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

si chiama DERIVATA PARZIALE DI  $f$  FATTA RISPETTO A  $y$  CALCOLATA NEL PUNTO  $(x_0, y_0)$

Si noti che trattandosi di limiti, le derivate parziali in un punto potrebbero anche non esistere. Per indicare le derivate parziali in letteratura si usa una delle seguenti notazioni

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \partial_x f(x_0, y_0) & f_x(x_0, y_0) & D_x f(x_0, y_0) & D_1 f(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) & D_y f(x_0, y_0) & D_2 f(x_0, y_0) \end{array}$$

□ **Definizione 4.2.2.** Il vettore che ha per componenti le derivate parziali di  $f$  in  $(x_0, y_0)$  si dice GRADIENTE DI  $f$  IN  $(x_0, y_0)$  e si indica con una delle seguenti notazioni

$$\nabla f(x_0, y_0) \quad Df(x_0, y_0) \quad \text{grad}f(x_0, y_0).$$

☞ **Osservazione 4.2.3.** Se occorre calcolare le derivate parziali di  $f$  in un punto  $(x_0, y_0)$  è necessario che gli incrementi lungo una delle due variabili, quindi  $x_0 + h$  oppure  $y_0 + k$  stiano ancora nel dominio di  $f$ , almeno per un incremento abbastanza piccolo. Questo naturalmente è vero se il dominio di  $f$  è un aperto. Quindi d'ora in avanti considereremo sempre  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto.

□ **Definizione 4.2.4.** Una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice DERIVABILE in un punto del suo dominio se in quel punto esistono tutte le derivate parziali;  $f$  si dice DERIVABILE in tutto  $A$  se è derivabile in ogni punto di  $A$ .

☞ **Osservazione 4.2.5.** La nozione di derivabilità, di derivata parziale e di gradiente si può tranquillamente estendere al caso  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $n > 2$ . In tal caso, se  $f$  è derivabile in  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  si avrà

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

✎ **Esempio 4.2.6.** La funzione  $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}$  è derivabile ovunque su  $\mathbb{R}^2$ ; la funzione  $f(x, y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$  è derivabile ovunque tranne che in  $(0, 0)$ . Osserviamo che la controparte in una variabile sarebbe: la funzione  $g(t) = e^{-t^2}$  è derivabile ovunque su  $\mathbb{R}$  mentre la funzione  $g(t) = e^{-|t|}$  è derivabile ovunque tranne che in  $0$  dove ha un punto angoloso. Quindi alcuni comportamenti naturali nel caso di una variabile hanno effettivamente una controparte analoga in più variabili; altri comportamenti invece no: ci sono situazioni in più variabili che non hanno controparte in una variabile, come chiariranno i prossimi esempi.

✎ **Esempio 4.2.7.** Calcolare (se esistono) le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = y^3 \sin x + 2xy^2 + x^3$$

prima nel generico punto  $(x, y)$  e poi nel punto  $(\pi, 0)$ .

Usando le regole di calcolo provenienti dall'Analisi I (quindi evitando di fare sempre ricorso alla definizione quando si lavora con funzioni di una variabile che sono derivabili) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^3 \cos x + 2xy^2 + 3x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 \sin x + 4xy$$

e quindi, avendo ottenuto funzioni continue, si ottiene semplicemente per sostituzione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0) = 3\pi^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\pi, 0) = 0.$$

Quindi nell'esempio precedente, trattandosi di funzioni derivabili rispetto all'una o all'altra variabile, si può tranquillamente far ricorso alle regole note di derivazione senza usare necessariamente la definizione. Quando è obbligatorio invece far ricorso alla definizione? Quando si ha a che fare con funzioni che nell'una o nell'altra variabile presentano un punto di non derivabilità (almeno apparentemente) oppure per funzioni definite "a tratti" nel senso specificato dai prossimi 3 esempi.

✎ **Esempio 4.2.8.** Sia  $f(x, y) = y\sqrt{x}$ . Calcolare (se esiste)  $f_x(0, 0)$ .

È chiaro che  $\sqrt{x}$  non è derivabile in  $0$ , quindi ci si aspetta un comportamento critico vicino all'origine. Supponiamo che non ci si accorga di questa singolarità e si proceda come al punto precedente. Si avrebbe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che si presenta quindi sotto una forma di indecisione. Quindi il calcolo della derivata parziale tramite la definizione risulta l'unica via percorribile in ogni caso. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

☞ **Osservazione 4.2.9.** Prima di tutto osserviamo nell'esempio precedente che il limite esiste quindi esiste la derivata parziale di  $f$  in  $(0,0)$  contro l'intuizione che ci poteva far pensare che la presenza di un punto di non derivabilità per  $\sqrt{x}$  potesse rendere singolare anche il comportamento dell'intera  $f$ . Quindi è bene in più variabili affidarsi poco all'intuito e molto al ragionamento analitico, per evitare brutte sorprese!

Secondariamente osserviamo che nell'ultima riga dell'esempio precedente, la quantità  $\frac{0}{h}$  non è una forma di indecisione! Infatti al numeratore si ha 0 "secco", mentre al denominatore si ha  $h$  una quantità che almeno prima del processo di limite è *diversa da zero*; quindi la quantità  $\frac{0}{h}$  è sempre zero e quindi dopo il passaggio al limite risulta di nuovo zero (il limite di 0 è sempre 0).

📎 **Esempio 4.2.10.** Sia  $f$  la funzione di due variabili definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcolare (se esiste)  $f_x(0, 0)$

In questo caso non si può fare a meno di calcolare la derivata parziale richiesta utilizzando la definizione. Un errore GRAVE e molto comune è dire:  $f$  in  $(0,0)$  vale 1 che è una costante dunque la derivata di una costante fa zero. Questo ragionamento è errato! Ci mancherebbe che la funzione in un punto assumesse più valori!!! La funzione in un punto è sempre costante (per definizione stessa di funzione), quindi ovviamente questa non è una strada percorribile.

Utilizziamo allora la definizione di derivata parziale. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 1}{h}$$

e quest'ultimo limite non esiste (se  $h \rightarrow 0^+$  fa  $-\infty$  mentre se  $h \rightarrow 0^-$  fa  $+\infty$ ). Dunque la derivata parziale di  $f$  in  $(0,0)$  non esiste e dunque  $f$  non è derivabile nella direzione dell'asse delle  $x$ .

☞ **Osservazione 4.2.11.** Intuitivamente si poteva ragionare come segue: la funzione dell'esempio precedente non è continua quindi ci si aspetta che non sia nemmeno derivabile, nel senso che non esistano le derivate parziali, sulla base del ben noto fatto appreso dall'Analisi I che se una funzione è derivabile allora è continua e dunque se non è continua in un punto non è ivi derivabile. Tuttavia anche questo ragionamento è errato come mostra il seguente controesempio. Di nuovo dunque il comportamento in più variabili ammette situazioni che non hanno controparte in una dimensione.

📎 **Esempio 4.2.12.** Sia  $f$  la funzione di due variabili definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcolare (se esistono)  $f_x(0, 0)$  e  $f_y(0, 0)$ .

Per lo stesso motivo dell'esempio precedente, utilizziamo la definizione di derivata parziale in un punto. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Quindi le derivate parziali in  $(0,0)$  esistono e fanno 0; d'altra parte è facile verificare che la funzione proposta non è continua in  $(0,0)$  (basta prendere la retta  $y = x$  lungo la quale  $f$  vale  $1/2$ ); quindi abbiamo trovato un esempio di *funzione che non è continua in un punto ma per la quale in quel punto esistono le derivate parziali*. Questo ci fa capire che la nozione di derivabilità proposta è troppo debole, non rispecchiando l'intuizione. Vedremo dunque di affiancare a questa nozione di derivabilità una nozione più forte (la *differenziabilità*) ove ritrovare i comportamenti noti dall'Analisi I. Ritroveremo questo esempio nel parlare di piano tangente.

## 4.3. Piano tangente

Abbiamo detto nell'introduzione al capitolo che se una funzione di una variabile è derivabile allora il valore della derivata in un punto coincide con il valore del coefficiente angolare della retta tangente in quel punto. Quindi la derivabilità è equivalente all'esistenza della retta tangente.

Ci poniamo il problema di estendere questo concetto in più dimensioni, quindi di vedere se esiste il piano tangente a una superficie. È intuitivo pensare che se tale piano esiste, deve essere "tangente" alla funzione in quel punto e quindi "approssimare" almeno localmente la funzione in quel punto, così come la retta tangente approssima localmente la funzione a cui è tangente (per esempio  $y = \sin x$  per  $x$  vicino a zero è approssimata dalla sua retta tangente  $y = x$  e infatti si ha che  $\sin x \sim x$  se  $x \rightarrow 0$ ).

Facciamo il seguente ragionamento: supponiamo di avere la nostra superficie  $z = f(x, y)$  e consideriamo il piano verticale  $y = y_0$ ; sezioniamo la superficie con il piano: troveremo la curva data da  $z = f(x, y_0)$  (con  $y = y_0$  perché una curva in  $\mathbb{R}^3$  è sempre individuata da due equazioni). È facile immaginare che la retta tangente a tale curva, chiamiamola  $r_1$ , apparterrà al piano tangente che stiamo considerando. Analogamente, se sezioniamo la superficie con il piano verticale  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $z = f(x_0, y)$  la cui retta tangente, chiamiamola  $r_2$ , starà apparterrà al piano tangente che stiamo costruendo. Quindi quali sono le equazioni di  $r_1$  e  $r_2$ ? Tenendo conto che le curve sono funzioni di una sola variabile e che la derivata (parziale!) nel punto coincide con il coefficiente angolare della retta

tangente si avrà

$$\begin{aligned} r_1 & \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases} \\ r_2 & \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

quindi il piano che contiene entrambe le rette sarà

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (4.3.1)$$

La domanda che ci facciamo è la seguente: siamo sicuri che questo piano così come l'abbiamo costruito partendo da un ragionamento intuitivo sia effettivamente "tangente" alla nostra superficie nel senso di approssimarla localmente? La risposta purtroppo è negativa come mostra il prossimo esempio già incontrato nel paragrafo precedente.

 **Esempio 4.3.1.** Sia  $f$  la funzione di due variabili definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Allora abbiamo visto prima che le derivate parziali in  $(0, 0)$  esistono e fanno  $0$ , dunque il presunto piano tangente, secondo la formula ricavata sopra avrebbe la forma  $z = 0$  cioè il piano orizzontale  $xy$ . Ma come già rimarcato la funzione data non è nemmeno continua nell'origine, addirittura lungo la bisettrice  $y = x$  fa  $1/2$ : dunque è chiaro che il piano  $z = 0$  non è "tangente" alla funzione data nel senso che non approssima la funzione localmente. Quindi in più variabili LA DERIVABILITÀ DA SOLA NON IMPLICA NÉ LA CONTINUITÀ NÉ L'ESISTENZA DEL PIANO TANGENTE (comportamento che non ha controparte in una dimensione).

Ci chiediamo dunque qual è la proprietà che garantisca che effettivamente la (4.3.1) è l'equazione di un piano tangente nel vero senso del termine. A questa domanda risponderemo nel paragrafo successivo introducendo il concetto di DIFFERENZIABILITÀ.

## 4.4. Differenziabilità

---

Facciamo di nuovo un passo indietro al caso unidimensionale. In un variabile abbiamo detto che la derivata in un punto è il limite del rapporto incrementale, cioè

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

quindi ricordando la definizione di  $o(h)$ , si ha che

$$g(t+h) - g(t) = g'(t)h + o(h) \quad h \rightarrow 0.$$

Questa relazione si legge dicendo che *l'incremento della funzione coincide al primo ordine con il differenziale della funzione stessa, cioè con l'incremento calcolato lungo la retta tangente. I due incrementi differiscono per un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad  $h$  (incremento della variabile indipendente).*

Analogamente in più variabili: se una funzione  $f$  è DIFFERENZIABILE accadrà che *l'incremento di  $f$  sarà uguale all'incremento calcolato lungo il piano tangente più un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla lunghezza dell'incremento  $(h, k)$  delle variabili indipendenti.* In simboli

$$\underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)}_{\text{incremento di } f} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \overbrace{h}^{(x-x_0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \overbrace{k}^{(y-y_0)}}_{\text{incremento calcolato lungo il piano tangente}} + \underbrace{o(\sqrt{h^2+k^2})}_{\text{infinitesimo di ordine superiore}} \quad (4.4.1)$$

per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

dove per definizione di  $o$  piccolo si ha che  $o(\sqrt{h^2+k^2})$  è tale che

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{o(\sqrt{h^2+k^2})}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

□ **Definizione 4.4.1.** Se vale la (4.4.1) allora diremo che  $f$  è DIFFERENZIABILE in  $(x_0, y_0)$ .

☞ **Osservazione 4.4.2.** Si osserva che il piano tangente è tale se la (4.4.1) vale altrimenti non esiste. La (4.4.1) garantisce che il piano dato dalla (4.3.1) sia effettivamente tangente al grafico di  $f$ . Anche il concetto di differenziabilità può essere opportunamente generalizzato al caso di  $n$  variabili, allo stesso modo della proposizione seguente e del concetto di differenziale.

La seguente proposizione chiarisce i ruoli tra derivabilità, differenziabilità e continuità.

**Proposizione 4.4.3.** *Se  $f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  allora  $f$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$  e inoltre  $f$  è anche continua in  $(x_0, y_0)$ .*

Mostriamo che i viceversa della proposizione precedente non valgono.

Prima di tutto infatti  $f$  continua non implica  $f$  differenziabile: basta considerare la funzione  $f(x, y) = |x|$ ; essa è continua dappertutto quindi anche in  $(0, 0)$  ma non è differenziabile in  $(0, 0)$  ( $f_x(0, 0)$  non esiste nemmeno quindi la (4.4.1) non può nemmeno essere scritta).

D'altra parte  $f$  derivabile non implica  $f$  differenziabile. Basta considerare la funzione dell'Esempio 4.3.1 e mostrare che essa non è differenziabile. Si dovrebbe mostrare con la definizione che

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h f_x(0, 0) - k f_y(0, 0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

invece

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h f_x(0,0) - k f_y(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

non esiste (basta considerare  $h = k$  e si otterrebbe  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{2\sqrt{2}h^2|h|}$ ) che non esiste.

□ **Definizione 4.4.4.** Se  $f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$ , si dice **DIFFERENZIALE** di  $f$  in  $(x_0, y_0)$  l'applicazione lineare  $df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $df(x_0, y_0) : (h, k) \mapsto \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$ .

La quantità  $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$  rappresenta l'incremento della funzione nel passare da  $(x_0, y_0)$  a  $(x_0 + h, y_0 + k)$  lungo il piano tangente al grafico di  $f$  in  $(x_0, y_0)$ .

□ **Definizione 4.4.5.** L'approssimazione dell'incremento di  $f$  mediante il suo differenziale (applicato all'incremento) si chiama **LINEARIZZAZIONE** di  $f$ .

Come mostrato nell'ultimo controesempio, non è facile controllare la differenziabilità usando la definizione. Si tratta di avere a che fare con un limite anche piuttosto complicato in cui compare sempre una forma di indecisione. Il seguente risultato semplifica un pò le cose. Anche questo enunciato può essere generalizzato al caso di  $n$  variabili.

**Teorema 4.4.6.** (CONDIZIONE SUFFICIENTE DI DIFFERENZIABILITÀ) *Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto e  $(x_0, y_0) \in A$ . Supponiamo che le derivate parziali esistano in un intorno di  $(x_0, y_0)$  e siano continue in  $(x_0, y_0)$ . Allora  $f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$ . In particolare, se le derivate parziali di  $f$  esistono e sono continue in  $A$  allora  $f$  è differenziabile in tutti i punti di  $A$ . Quindi vale l'implicazione*

$$f \in \mathcal{C}^1(A) \Rightarrow f \text{ differenziabile in } A.$$

Il viceversa non vale come mostra il seguente controesempio.

✎ **Esempio 4.4.7.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se  $(x, y) \neq (0, 0)$  allora

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2}}{h} = 0$$

dove l'ultimo limite si può vedere grazie al teorema dei due carabinieri. D'altra parte, se  $(x, y) \neq (0, 0)$  allora

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2}}{h} = 0.$$

Dunque

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(h^2 + k^2) \sin \frac{1}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

dato che

$$0 \leq \sqrt{h^2 + k^2} \left| \sin \frac{1}{h^2 + k^2} \right| \leq \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0.$$

Dunque  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$ . D'altra parte

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$$

non esiste e quindi in particolare non è zero (per vederlo basta prendere la curva  $y = x$ ).

✎ **Esercizio 4.4.8.** Sia  $f(x, y) = \arctan \sqrt{4x^2 + y^2}$ . Calcolare  $\nabla f$  nel punto  $(0, 1)$  e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  sopra tale punto; calcolare, se esistono, le derivate parziali di  $f$  in  $(0, 0)$ .

La funzione è sicuramente differenziabile su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  in quanto composizione di funzioni differenziabili ( $\sqrt{4x^2 + y^2}$  si annulla solo in  $(0, 0)$ ). Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + (4x^2 + y^2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + y^2}} \cdot 8x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + (4x^2 + y^2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + y^2}} \cdot 2y$$

e sono continue su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (da qui si poteva dedurre  $f \in \mathcal{C}^1$  e dunque differenziabile).

Possiamo dunque affermare che esiste il piano tangente in  $(0, 1)$ :

$$\nabla f(0, 1) = \left( 0, \frac{1}{2} \right)$$

e il piano tangente

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(y - 1) = \frac{1}{2}y + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Si ha poi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan \sqrt{4h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan 2|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan 2|h|}{2|h|} \cdot \frac{2|h|}{h}$$

che non esiste perché

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -2.$$

Analoghi conti mostrano che non esiste nemmeno  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

## 4.5. Derivate direzionali

---

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che per una funzione reale di più variabili reali, la derivata parziale rispetto a una variabile  $x_i$  rappresenta la velocità di crescita nella direzione dell'asse  $x_i$ . È naturale immaginare di voler conoscere la velocità di crescita di  $f$  anche rispetto ad altre direzioni che non siano quelle lungo gli assi cartesiani.

Consideriamo un punto  $\mathbf{x}_0$  e andiamo a spostarci sulla retta uscente da  $\mathbf{x}_0$  e di versore  $\mathbf{v}$ , cioè sulla retta di equazione parametrica  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Il corrispondente incremento subito dalla  $f$  sarà

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)$$

quindi, essendoci ricondotti a una situazione uni-dimensionale, possiamo prendere il limite per  $t \rightarrow 0$ . Si ha dunque la seguente definizione.

**□ Definizione 4.5.1.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto; sia  $\mathbf{x}_0 \in A$  e  $\mathbf{v}$  un versore (cioè un vettore di  $\mathbb{R}^n$  di modulo unitario). Si dice DERIVATA DIREZIONALE DI  $f$  RISPETTO AL VERSORE  $\mathbf{v}$  NEL PUNTO  $\mathbf{x}_0$  IL LIMITE

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

a patto che esista finito.

Si osservi che studiare il tasso di incremento di  $f$  lungo  $\mathbf{v}$  in  $\mathbf{x}_0$  è come considerare la restrizione di  $f$  rispetto alla retta uscente da  $\mathbf{x}_0$  in direzione  $\mathbf{v}$ , cioè

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v});$$

perciò andare a fare il limite di tale funzione (di una variabile reale!) per  $t \rightarrow 0$  significa calcolare la derivata di  $g$  in 0, cioè

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = g'(0).$$

☞ **Osservazione 4.5.2.** Si osserva immediatamente che le derivate parziali non sono altro che derivate direzionali corrispondenti ai versori canonici  $\mathbf{e}_i$ .

Nel caso di una funzione reale di due variabili reali, un versore di  $\mathbb{R}^2$  può essere convenientemente scritto nella forma

$$\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

dove  $\theta$  è come da convenzione l'angolo che  $\mathbf{v}$  forma con la direzione positiva dell'asse delle  $x$ . Quindi la definizione di derivata direzionale può essere riscritta nella forma

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

In questo caso si ritrova

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) & \mathbf{v} &= \mathbf{i} & \theta &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) & \mathbf{v} &= \mathbf{j} & \theta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

☞ **Esercizio 4.5.3.** Sia  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}$ . Calcolare se esistono  $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ .  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$ ?

Sia  $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Allora

$$D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sqrt[3]{\cos \theta \sin^2 \theta} - 0}{t} = \sqrt[3]{\cos \theta \sin^2 \theta}$$

quindi per questa funzione esistono tutte le derivate direzionali in  $(0, 0)$ . D'altra parte verifichiamo con la definizione che  $f$  non è differenziabile nell'origine. Se così fosse, si dovrebbe avere che il seguente limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

esiste e fa zero. Invece si ha che il limite proposto non esiste. Infatti dal punto precedente si ha che  $f_x(0, 0) = 0$  e  $f_y(0, 0) = 0$  (basta prendere  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/2$ ) da cui

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{h k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

non esiste; (basta prendere  $h = k$  e si ottiene  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{2}|h|}$ ). Quindi  $f$  non è differenziabile in  $(0, 0)$ . Si può dunque concludere che anche l'esistenza di tutte le derivate direzionali (non solo quelle parziali) non basta a concludere che  $f$  è differenziabile.

Il viceversa però vale e costituisce un importante teorema.

**Teorema 4.5.4.** (FORMULA DEL GRADIENTE) *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A$  aperto) una funzione differenziabile in  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Allora per ogni versore  $\mathbf{v}$  esiste la derivata direzionale  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$  e vale l'identità (detta FORMULA DEL GRADIENTE)*

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) v_i.$$

☞ **Osservazione 4.5.5.** La derivata direzionale risulta quindi data dal prodotto scalare tra il gradiente e il vettore nella cui direzione si va a derivare. Quindi *tutte le derivate direzionali risultano combinazione lineare delle derivate parziali.*

Nel caso  $n = 2$  la formula del gradiente assume la forma

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sin \theta$$

dove come prima abbiamo posto  $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

📎 **Esempio 4.5.6.** *Consideriamo la funzione*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & |y| > x^2 \vee y = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si osserva innanzitutto che  $f = 0$  sull'asse  $x$  e quindi  $f_x(0, 0) = 0$ . Si osserva poi che per ogni versore  $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$  diverso da  $(1, 0)$ , l'intersezione tra l'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > x^2\}$  e la retta per l'origine di direzione  $\mathbf{v}$  è un segmento centrato nell'origine. Poiché su tale segmento  $f(x, y) = 1$ , si ha

$$D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

Perciò  $\nabla f(0, 0) = 0$  e la formula del gradiente è verificata. D'altra parte la funzione non è differenziabile nell'origine in quanto non è nemmeno continua nell'origine. Infatti ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x^3) = 0.$$

☞ **Osservazione 4.5.7.** Il risultato precedente inoltre ci fornisce un'utile interpretazione del vettore gradiente. Per ogni vettore unitario  $\mathbf{v}$  abbiamo

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \mathbf{v} \cdot \nabla f(x_0, y_0) = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos \varphi$$

dove  $\varphi$  è l'angolo compreso tra i vettori  $\mathbf{v}$  e  $\nabla f(x_0, y_0)$ . Poiché  $\cos \varphi$  assume solo valori compresi tra  $-1$  e  $1$ , si ha che  $D_{\mathbf{v}}$  assume solo valori compresi tra  $-|\nabla f(x_0, y_0)|$  e  $|\nabla f(x_0, y_0)|$ . Inoltre

$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = -|\nabla f(x_0, y_0)|$  se e solo se  $\mathbf{v}$  punta nella direzione opposta a quella di  $\nabla f(x_0, y_0)$  e  $D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = |\nabla f(x_0, y_0)|$  se e solo se  $\mathbf{v}$  punta nella stessa direzione di  $\nabla f(x_0, y_0)$ ; nel primo caso  $\cos \varphi = -1$ , nel secondo caso  $\cos \varphi = 1$ . La derivata direzionale è nulla nella direzione  $\varphi = \pi/2$ ; questa è la direzione della (retta tangente alla) curva di livello di  $f$  passante per  $(x_0, y_0)$  (cioè il gradiente è ortogonale in ogni punto alle linee di livello della funzione).

## 4.6. Calcolo delle derivate

Enunciamo le seguenti proprietà del gradiente.

**Teorema 4.6.1.** (FORMULE DI CALCOLO PER LE DERIVATE) *Siano  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni derivabili e siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Allora valgono le seguenti proprietà del gradiente:*

$$\begin{aligned}\nabla(\alpha f + \beta g) &= \alpha \nabla f + \beta \nabla g \\ \nabla(fg) &= g \nabla f + f \nabla g \\ \nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}\end{aligned}$$

Analoghe proprietà valgono per i differenziali.

Molto importante è anche la regola per la derivazione delle funzioni composte che enunciamo in due casi particolari.

**Teorema 4.6.2.** (DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE - PRIMO CASO) *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che la funzione composta  $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$  sia definita in almeno un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Se  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e  $g$  è derivabile in  $f(\mathbf{x}_0)$ , allora la funzione composta*

$$h = g \circ f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

*è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e si ha*

$$\nabla h(\mathbf{x}_0) = g'(f(\mathbf{x}_0)) \nabla f(\mathbf{x}_0).$$

 **Esempio 4.6.3.** *Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x, y, z) = z^2 e^{2x-y}$  e sia  $g : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $g(r) = \sqrt{r+1}$ . Allora la funzione composta  $h(x, y, z) = g(f(x, y, z))$  è ben definita (perché l'immagine di  $f$  è sempre positiva o nulla) e dalla formula di derivazione della funzione*

composta si ha

$$\nabla h(x, y, z) = g'(f(x, y, z)) \nabla f(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{z^2 e^{2x-y} + 1}} (2z^2 e^{2x-y}, -z^2 e^{2x-y}, 2z e^{2x-y}).$$

Un errore frequente è quello di scrivere nella formula  $g'(x, y, z)$  (che non ha assolutamente senso visto che  $g$  è funzione di una sola variabile reale!); infatti  $g'$  deve essere calcolata non nel punto  $(x, y, z)$  ma nella sua immagine tramite  $f$ , cioè nel nostro caso  $z^2 e^{2x-y}$ . Lo stesso risultato si ottiene esplicitando

$$h(x, y, z) = \sqrt{z^2 e^{2x-y} + 1}$$

e calcolandone il gradiente direttamente senza usare la formula della derivazione della funzione composta.

**Teorema 4.6.4.** (DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE - SECONDO CASO) Sia  $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che la funzione composta  $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$  sia definita in almeno un intorno  $J$  di  $t_0 \in I$ . Se  $\mathbf{r}$  è derivabile in  $t_0$  e  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{r}(t_0)$ , allora la funzione composta

$$g = f \circ \mathbf{r} : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

è derivabile in  $t_0$  e si ha

$$g'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{r}(t_0)) r'_i(t_0).$$

**Esempio 4.6.5.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(u, v, z) = v e^{u^2}$  e sia  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $\mathbf{r}(x) = (x, \cos x, x + 1)$ . Allora la funzione composta  $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$  è ben definita e derivabile e si ha

$$g'(x) = \nabla f(\mathbf{r}(x)) \cdot \mathbf{r}'(x).$$

A questo punto

$$\nabla f(u, v, z) = (2u v e^{u^2}, e^{u^2}, 0)$$

quindi

$$\nabla f(\mathbf{r}(x)) = (2x \cos x e^{x^2}, e^{x^2}, 0)$$

perciò, dalla definizione di prodotto scalare

$$g'(x) = (2x \cos x e^{x^2}, e^{x^2}, 0) \cdot (1, -\sin x, 1) = 2x \cos x e^{x^2} - \sin x e^{x^2}.$$

Lo stesso risultato si ottiene esplicitando

$$g(x) = \cos x e^{x^2}$$

e calcolandone la derivata direttamente senza usare la formula della derivazione della funzione composta.

## 4.7. Derivate di ordine superiore

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto. Una volta determinate le derivate parziali  $f_x$  e  $f_y$  di una funzione  $f(x, y)$  ci si può chiedere ad esempio se esse siano a loro volta funzioni derivabili. In caso affermativo, si possono calcolare le derivate parziali di  $f_x$  e  $f_y$  ottenendo rispettivamente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (4.7.1)$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (4.7.2)$$

Naturalmente tutto ciò se queste derivate esistono (essendo limiti di opportuni rapporti incrementali, potrebbero anche non esistere).

Le (4.7.1) e (4.7.2) si dicono DERIVATE PARZIALI SECONDE; per indicarle, si usano anche altri simboli, per esempio  $f_{xx}, f_{xy}, \dots$

Le stesse nozioni si possono estendere anche al caso di una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto.

**□ Definizione 4.7.1.** La derivata rispetto a una certa variabile  $x_j$  di una funzione  $f_{x_i}$ , se esiste, si indica con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

**✎ Esempio 4.7.2.** Sia  $f(x, y) = e^x \cos y$ . Allora si ha che

$$f_x(x, y) = e^x \cos y \quad f_y(x, y) = -e^x \sin y$$

da cui

$$f_{xx}(x, y) = e^x \cos y \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -e^x \sin y \quad f_{yy}(x, y) = -e^x \cos y.$$

Notiamo che nell'esempio precedente viene  $f_{xy} = f_{yx}$ ; non è un caso ma un fatto generale come mostra il seguente teorema (che enunciamo nel caso  $n = 2$  ma che può essere facilmente esteso al caso  $n$  qualunque  $\Rightarrow$  Sezione 4.10).

**Teorema 4.7.3.** (TEOREMA DI SCHWARZ) *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto. Supponiamo che le derivate parziali seconde miste esistano in un intorno di un punto  $(x, y)$  e siano entrambe continue in  $(x, y)$ . Allora coincidono in  $(x, y)$ . In particolare, se le derivate parziali miste esistono e sono continue in tutto  $A$  allora coincidono su tutto  $A$ .*

In particolare allora il teorema di Schwarz afferma che

$$f \in \mathcal{C}^2(A) \Rightarrow f_{xy} = f_{yx}.$$

D'altra parte, ricordando che

$$f \in \mathcal{C}^2(A) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(A) \Rightarrow f \text{ differenziabile in } A$$

allora in particolare si ha che

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}^2(A) &\Rightarrow \text{le derivate parziali prime sono differenziabili in } A \\ &\Rightarrow \text{le derivate parziali seconde sono continue in } A \\ &\Rightarrow \text{le derivate parziali miste sono uguali.} \end{aligned}$$

Naturalmente, sebbene di solito questa condizione sia verificata, esistono casi in cui una funzione possiede derivate miste diverse tra loro. Naturalmente questa funzione non sarà di classe  $\mathcal{C}^2$  come mostra il seguente controesempio.

 **Esempio 4.7.4.** *Sia*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

*Si verifica che  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  mentre le derivate parziali seconde sono discontinue nell'origine. Quindi il teorema di Schwarz non si applica e non possiamo affermare a priori che  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ . Per altro infatti si può mostrare attraverso calcoli diretti che  $f_{xy}(0, 0) = 1 \neq f_{yx}(0, 0) = -1$ .*

 **Osservazione 4.7.5.** Il teorema di Schwarz e la definizione delle derivate successive si può generalizzare al caso di derivate di ordine  $k$ .

## 4.8. Equazioni alle derivate parziali

$\square$  **Definizione 4.8.1.** Si dice EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI un'equazione differenziale in cui compare una funzione incognita di più variabili assieme ad alcune delle sue derivate fatte rispetto (almeno) a due variabili diverse.

Le equazioni alle derivate parziali (abbreviato E.D.P.) intervengono nella formulazione e modellizzazione di numerosissime leggi fisiche e fenomeni nel campo della fisica e dell'ingegneria. Molte E.D.P. (non lineari) sono attualmente oggetto di studio da parte di diversi rami dell'Analisi Matematica.

Alcuni esempi tra i più importanti sono:

\* EQUAZIONE DEL TRASPORTO

$$c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Come dice il nome, rappresenta il trasporto di sostanze, per esempio di una sostanza inquinante  $u$  che si muove a velocità  $c$ .

\* EQUAZIONE DI LAPLACE

$$\Delta u(x, y, z) = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

dove

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ è detto OPERATORE DI LAPLACE o LAPLACIANO.}$$

Le soluzioni dell'equazione di Laplace si dicono FUNZIONI ARMONICHE. L'equazione di Laplace interviene ad esempio per modellizzare il potenziale elettrostatico  $u$  (o quello gravitazionale) nei punti dello spazio privi di carica (o di materia rispettivamente).

\* EQUAZIONE DEL CALORE

$$u_t = k \Delta u;$$

modellizza ad esempio la temperatura  $u$  di un corpo omogeneo e isotropo rispetto alla conduzione, senza pozzi né sorgenti;  $k$  è la costante di diffusione e dipende dalle caratteristiche del materiale.

\* EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE

$$u_{tt} = c^2 u_{xx};$$

modellizza ad esempio piccole vibrazioni di una corda elastica e tesa;  $c$  è la velocità di propagazione dell'onda.

## 4.9. Differenziale secondo, matrice Hessiana, formula di Taylor del secondo ordine

---

□ **Definizione 4.9.1.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(A)$  e sia  $(x_0, y_0) \in A$ . Si dice DIFFERENZIALE SECONDO di  $f$  in  $(x_0, y_0)$  la funzione definita da

$$d^2 f(x_0, y_0) : (h, k) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) k^2$$

I coefficienti che compaiono nel differenziale secondo possono essere ordinati in una matrice  $2 \times 2$  detta **MATRICE HESSIANA** di  $f$  in  $(x_0, y_0)$

$$\mathbf{H}f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Si nota che dal teorema di Schwarz, se  $f \in \mathcal{C}^2(A)$  allora la matrice Hessiana è simmetrica in ogni punto di  $A$ .

Se la differenziabilità di una funzione di più variabili permette di approssimare il suo grafico con quello del piano tangente, il fatto che una funzione sia (almeno) di classe  $\mathcal{C}^2(A)$  permette di migliorare ancora l'approssimazione. Abbiamo infatti la seguente formula.

**Teorema 4.9.2.** (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO SECONDO LAGRANGE) *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ ; per ogni  $(x_0, y_0) \in A$  e  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  tale che  $(x_0 + h, y_0 + k) \in A$ . Allora esiste un numero reale  $\delta \in (0, 1)$  dipendente da  $(x_0, y_0)$  e  $(h, k)$  tale che*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0 + \delta h, y_0 + \delta k)h^2 \\ &\quad + f_{xy}(x_0 + \delta h, y_0 + \delta k)hk + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0 + \delta h, y_0 + \delta k)k^2 \end{aligned}$$

**Teorema 4.9.3.** (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO SECONDO PEANO) *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ ; per ogni  $(x_0, y_0) \in A$  vale la formula*

$$\begin{aligned} f((x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)h^2 \\ &\quad + f_{xy}(x_0, y_0)hk + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)k^2 + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad \text{per } (h, k) \rightarrow (0, 0). \end{aligned}$$

## 4.10. Complementi: il caso $n$

---

In questa sezione andiamo a presentare la generalizzazione al caso di funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di alcune definizioni e risultati contenuti nella precedente sezione e presentati nel caso  $n = 2$ .

**Teorema 4.10.1.** (TEOREMA DI SCHWARZ) *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto. Supponiamo che per certi indici  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  le derivate parziali seconde miste  $f_{x_i x_j}$  e  $f_{x_j x_i}$  esistano in un intorno di un punto  $\mathbf{x}_0$  e siano entrambe continue in  $\mathbf{x}_0$ . Allora coincidono in  $\mathbf{x}_0$ . In particolare, se le derivate parziali miste  $f_{x_i x_j}$  e  $f_{x_j x_i}$  esistono e sono continue in tutto  $A$  allora coincidono su tutto  $A$ .*

□ **Definizione 4.10.2.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(A)$  e sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Si dice DIFFERENZIALE SECONDO di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  la funzione definita da

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) : \mathbf{h} \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j.$$

I coefficienti  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  che compaiono nel differenziale secondo possono essere ordinati in una matrice  $2 \times 2$  detta MATRICE HESSIANA di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_1 x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_1 x_n}(\mathbf{x}_0) \\ f_{x_2 x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_2 x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_2 x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_n x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_n x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Si nota che dal teorema di Schwarz, se  $f \in \mathcal{C}^2(A)$  allora la matrice Hessiana è simmetrica in ogni punto di  $A$ .

Si ha inoltre

**Teorema 4.10.3.** (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO SECONDO LAGRANGE) *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ ; per ogni  $\mathbf{x}_0 \in A$  e  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in A$ . Allora esiste un numero reale  $\delta \in (0, 1)$  dipendente da  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{h}$  tale che*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{h}) h_i h_j$$

**Teorema 4.10.4.** (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO SECONDO PEANO) Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ ; per ogni  $\mathbf{x}_0 \in A$  vale la formula

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + o(|\mathbf{h}|^2) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

dove  $o(|\mathbf{h}|^2)$  è tale che (il limite è inteso in  $\mathbb{R}^n$ )

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{o(|\mathbf{h}|^2)}{|\mathbf{h}|^2} = 0.$$

---

---

## CAPITOLO 5

---

# Ottimizzazione. Estremi liberi

### 5.1. Generalità

---

Il termine *ottimizzazione* si riferisce a un'ampia categoria di problemi che rivestono enorme importanza nelle scienze applicate. L'idea di fondo è quella di massimizzare o minimizzare una certa quantità sotto opportune condizioni, la cui modellizzazione matematica dipende dalla natura del problema e quindi presenta diversi gradi di complessità; ad esempio, in meccanica minimizzare l'energia potenziale di un sistema significa individuare le posizioni di equilibrio stabile, ma ci sono anche problemi di ottimizzazione che intervengono anche in campo economico (massimizzare un utile o un profitto o minimizzare i costi) in campo tecnologico (minimizzare l'attrito o le turbolenze...)

In questo corso andremo a lavorare con funzioni reali di  $n$  variabili reali, con particolare attenzione al caso  $n = 2$ . Ci occuperemo di due problemi fondamentali:

- ricerca di estremi assunti in punti interni al dominio  $A$  di  $f$  (si chiamano ESTREMI LIBERI se  $A$  è aperto);
- ricerca degli estremi di  $f$  assunti su un sottoinsieme  $A$  non necessariamente aperto o sulla frontiera di  $A$  (si chiamano ESTREMI VINCOLATI).

Cominciamo con alcune fondamentali definizioni.

□ **Definizione 5.1.1.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Diciamo che:

- $\mathbf{x}_0$  è PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO per  $f$  in  $A$  se  $\forall \mathbf{x} \in A$  si ha  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ . In tal caso  $f(\mathbf{x}_0)$  si dice MASSIMO ASSOLUTO O GLOBALE per  $f$  in  $A$ .
- $\mathbf{x}_0$  è PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO per  $f$  in  $A$  se  $\forall \mathbf{x} \in A$  si ha  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ . In tal caso  $f(\mathbf{x}_0)$  si dice MINIMO ASSOLUTO O GLOBALE per  $f$  in  $A$ .
- $\mathbf{x}_0$  è PUNTO DI MASSIMO RELATIVO O LOCALE per  $f$  se esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che  $\forall \mathbf{x} \in U$  si ha  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ . In tal caso  $f(\mathbf{x}_0)$  si dice MASSIMO RELATIVO O LOCALE per  $f$ .

(d)  $\mathbf{x}_0$  è PUNTO DI MINIMO RELATIVO O LOCALE per  $f$  se esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che  $\forall \mathbf{x} \in U$  si ha  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ . In tal caso  $f(\mathbf{x}_0)$  si dice MINIMO RELATIVO O LOCALE per  $f$ .

Le domande che ci poniamo sono: esistono effettivamente punti di massimo o minimo, locali o globali, per una data funzione  $f$ ? Sono unici? Come si fa a determinarli?

Prima di andare a rispondere a questi quesiti, premettiamo alcuni esempi che riguardano il caso di funzioni reali di variabile reale.

✎ **Esempio 5.1.2.** Sia  $f(x) = x^2$ .  $x = 0$  è punto di minimo globale per  $f$  su  $\mathbb{R}$  e  $f(0) = 0$  è minimo globale: infatti  $x^2 \geq 0$  per ogni  $x$  reale. Osserviamo per altro che  $f'(x) = 2x$  che si annulla solo in  $x = 0$ .

✎ **Esempio 5.1.3.** Sia  $f(x) = x^3$ . Anche in questo caso la derivata prima di  $f$  si annulla solo in  $x = 0$  ma  $x = 0$  non è punto di minimo (o massimo) (né locale né globale). Quindi anche nel caso di funzioni reali di una variabile reale non tutti i punti che annullano la derivata prima sono effettivamente punti di massimo (o minimo).

✎ **Esempio 5.1.4.** Sia  $f(x) = |x|$ . Allora  $x = 0$  è punto di minimo ma in  $x = 0$  la  $f$  non è derivabile. Quindi anche in una variabile i punti di massimo/minimo globale o locale possono trovarsi tra i punti di non derivabilità per  $f$ .

✎ **Esempio 5.1.5.** Sia  $f(x) = x^2$  per  $x \in [-1, 2]$ . Allora  $x = 0$  è punto di minimo globale;  $x = -1$  è punto di massimo locale;  $x = 2$  è punto di massimo globale. Quindi anche nel caso di funzioni di una variabile reale a valori reali i punti di massimo o minimo, locale o globale, si possono trovare anche nei punti del bordo (dove si ha solo la nozione di derivata destra o sinistra) e in generale vanno analizzati a parte.

Quindi il nostro obiettivo sarà quello di andare a studiare il caso di funzioni di  $n$  variabili cercando di recuperare tutti questi diversi comportamenti.

## 5.2. Proprietà topologiche delle funzioni continue

Premettiamo alcune proprietà fondamentali delle funzioni continue che hanno importanti ricadute nei problemi di ottimizzazione.

**Teorema 5.2.1.** (TEOREMA DI WEIERSTRASS) Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme chiuso e limitato e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  ammette massimo e minimo in  $E$  ossia esistono  $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_M$  in  $E$  tali che

$$f(\mathbf{x}_m) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_M) \quad \forall \mathbf{x} \in E.$$

Questo risultato sarà spesso fondamentale nei problemi di ottimizzazione vincolata.

**Teorema 5.2.2.** (TEOREMA DEGLI ZERI) *Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme connesso (per archi, cioè un insieme tale che presi comunque due punti dell'insieme, esiste un arco continuo che li congiunge tutto contenuto in  $E$ ) di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono due punti di  $E$  tali che  $f(\mathbf{x}) > 0$  e  $f(\mathbf{y}) < 0$  allora esiste un punto  $\mathbf{z} \in E$  tale che  $f(\mathbf{z}) = 0$ .*

Quest'ultimo risultato è particolarmente significativo nello studio del segno di una funzione  $f$ : infatti se una funzione è continua su un dominio qualunque, l'insieme degli zeri di  $f$  spezza il dominio in un certo numero di insiemi connessi su ciascuno dei quali  $f$  ha segno costante; quindi è sufficiente valutare il segno di  $f$  in un solo punto di ogni componente connessa per conoscere il segno dappertutto il quella parte. Questo risultato verrà usato per studiare il segno di  $f$  nell'analisi della natura di punti critici (problemi di ottimizzazione libera).

### 5.3. Estremi liberi: condizioni necessarie del primo ordine

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto. Procedendo come nel caso unidimensionale, se  $f$  è sufficientemente regolare, cerchiamo di selezionare i candidati punti di estremo locale individuando una condizione necessaria. Vale il seguente teorema.

**Teorema 5.3.1.** (TEOREMA DI FERMAT) *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto, e  $\mathbf{x}_0 \in A$  un punto di massimo o minimo locale per  $f$ . Se  $f$  è derivabile in  $\mathbf{x}_0$ , allora  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .*

Quindi se  $f$  è derivabile in  $A$ , i punti di massimo locale si trovano tra quelli che annullano il gradiente. Naturalmente nulla si può dire se  $f$  non è derivabile in qualche punto: tali eventuali punti di non derivabilità andranno esaminati a parte.

✎ **Esempio 5.3.2.** *Sia  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Questa funzione è chiaramente la controparte in due variabili della funzione  $g(t) = |t|$  e infatti anche  $f$  non è derivabile in  $(x, y) = (0, 0)$ . Però  $f(x, y) \geq 0$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  quindi  $(0, 0)$  è punto di minimo globale per  $f$ .*

✎ **Esempio 5.3.3.** *Sia  $f(x, y) = x^2 - y^3$ . Si nota subito che  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  quindi essendo derivabile in ogni punto di  $\mathbb{R}^2$  è possibile applicare il teorema di Fermat. Dunque  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  se e soltanto se  $(2x, -3y) = (0, 0)$  se e soltanto se  $(x, y) = (0, 0)$ . Quindi l'origine è*

*l'unico punto stazionario o critico per  $f$ . Bisognerebbe capire se si tratta di un massimo o di un minimo. Per capirlo, occorre studiare il segno dell'INCREMENTO DI  $f$  cioè della quantità  $\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0)$ . In realtà non è nessuno dei due. Infatti, restringendosi all'asse delle  $y$ , si ha  $f(0,y) = -y^3$  e quindi  $\Delta f(0,0) > 0$  se  $y < 0$  e viceversa. In particolare ogni intorno dell'origine contiene punti in cui l'incremento ha segno opposto, quindi il punto  $(0,0)$  non può essere né di massimo né di minimo: si dice pertanto che è un punto di SELLA O COLLE*

**Esempio 5.3.4.** *Sia  $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$ . Anche in questo caso si nota subito che  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  e quindi essendo  $f$  derivabile in ogni punto di  $\mathbb{R}^2$ , possiamo applicare il teorema di Fermat. Si ha*

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x - 2xy, 4y - x^2) = (0,0) \Leftrightarrow (2x(1-y), 4y - x^2) = (0,0)$$

da cui i punti critici sono

$$(x,y) = (0,0) \quad (x,y) = (2,1) \quad (x,y) = (-2,1).$$

*In questo caso però non è facile studiare la natura di tali punti passando attraverso lo studio dell'incremento. È chiaro quindi che si rende necessario stabilire dei criteri che aiutino a portare avanti in modo agevole questa analisi.*

## 5.4. Dal segno dell'incremento alle forme quadratiche

---

Consideriamo il caso di una funzione di due variabili (i ragionamenti che seguono possono naturalmente essere generalizzati al caso di  $n$  variabili). Per studiare la natura dei punti critici o stazionari, cioè dei punti che annullano il gradiente, l'idea è quella di andare a considerare il segno dell'INCREMENTO di  $f$ , come già accennato negli esempi precedenti, il quale è definito come

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Infatti per definizione, se  $\Delta f(x_0, y_0) \geq 0$  almeno in un intorno di  $(x_0, y_0)$ , allora  $(x_0, y_0)$  è punto di minimo locale; se  $\Delta f(x_0, y_0) \leq 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è punto di massimo locale; se invece l'incremento non ha un segno definito, allora  $(x_0, y_0)$  è punto di sella o colle.

Quindi per far vedere che un punto critico è sella o colle è sufficiente trovare due curve diverse lungo le quali la restrizione della  $f$  ammette in un caso un punto di massimo e nell'altro un punto di minimo (l'incremento corrispondente non ha segno definito).

Tuttavia come mostrato negli esempi precedenti, talvolta non è facile andare a studiare direttamente il segno dell'incremento. Ci vuole un criterio più immediato.

Ricordiamoci della formula di Taylor del secondo ordine con resto di Peano. Allora la possiamo riscrivere in questo modo

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)h^2 \\ &\quad + f_{xy}(x_0, y_0)hk + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)k^2 + o(\sqrt{h^2 + k^2}).\end{aligned}$$

Naturalmente se  $(x_0, y_0)$  è punto critico, allora  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$  quindi la relazione precedente si riscrive come

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + f_{xy}(x_0, y_0)hk + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)k^2 \\ &\quad + o(\sqrt{h^2 + k^2}).\end{aligned}$$

Quindi la determinazione del segno dell'incremento di  $\Delta f(x_0, y_0)$  conduce all'analisi del differenziale secondo di  $f$  in  $(x_0, y_0)$  e quindi all'analisi del polinomio omogeneo di secondo grado nelle componenti  $(h, k)$  dato da

$$\frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + f_{xy}(x_0, y_0)hk + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)k^2$$

che è un caso particolare di FORMA QUADRATICA. Quindi l'analisi della natura dei punti stazionari si riconduce ad un problema puramente algebrico: studiare il segno di una forma quadratica.

## 5.5. Classificazione e studio delle forme quadratiche: il caso $n = 2$

---

□ **Definizione 5.5.1.** Una FORMA QUADRATICA in  $\mathbb{R}^2$  è una funzione  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$q(h, k) = a_{11}h^2 + a_{12}hk + a_{21}kh + a_{22}k^2$$

dove gli  $a_{ij}$  sono numeri reali detti COEFFICIENTI DELLA FORMA QUADRATICA. Si può supporre senza perdita di generalità che  $a_{12} = a_{21}$ .

Ogni forma quadratica risulta così associata biunivocamente a una matrice simmetrica

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

che nel caso del differenziale secondo coincide con la matrice Hessiana.

---

 **Esempio 5.5.2.** *La forma quadratica*

$$q(h, k) = h^2 - 2k^2 + 4hk$$

risulta associata alla matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Una prima osservazione riguardante le forme quadratiche è che  $q$  è sempre un polinomio omogeneo di secondo grado, quindi  $q(th, tk) = t^2q(h, k)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , perciò  $q(h, k)$  assume sempre segno costante su ogni retta passante per l'origine (con  $q(0, 0) = 0$ ).

Analizziamo quale può essere il comportamento di una forma quadratica attraverso semplici esempi.

- CASO (A)  $q(h, k) = h^2 + k^2$ . In questo caso  $q(h, k) > 0$  per ogni  $(h, k) \neq (0, 0)$ .
- CASO (B)  $q(h, k) = -h^2 - k^2$ . In questo caso  $q(h, k) < 0$  per ogni  $(h, k) \neq (0, 0)$ .
- CASO (C)  $q(h, k) = h^2$ . In questo caso  $q(h, k)$  è sempre positiva tranne che nei vettori del tipo  $(0, k)$  in cui si annulla.
- CASO (D)  $q(h, k) = -h^2$ . In questo caso  $q(h, k)$  è sempre negativa tranne che nei vettori del tipo  $(0, k)$  in cui si annulla.
- CASO (E)  $q(h, k) = -h^2 + k^2$ . In questo caso  $q(h, k) > 0$  se  $(h, k) = (0, k)$  ( $k \neq 0$ ) e  $q(h, k) < 0$  se  $(h, k) = (h, 0)$  ( $h \neq 0$ ).

Questi esempi suggeriscono la seguente classificazione che si applica sia alla forma quadratica che alla matrice ad essa associata.

**□ Definizione 5.5.3.** Una forma quadratica  $q(h, k)$  con  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  (o la matrice simmetrica corrispondente) si dice:

- CASO (A) DEFINITA POSITIVA se  $q(h, k) > 0$  per ogni  $(h, k) \neq (0, 0)$
- CASO (B) DEFINITA NEGATIVA se  $q(h, k) < 0$  per ogni  $(h, k) \neq (0, 0)$
- CASO (C) SEMIDEFINITA POSITIVA se per ogni  $(h, k) \neq (0, 0)$  si ha  $q(h, k) \geq 0$  ed esiste  $(h, k) \neq (0, 0)$  tale che  $q(h, k) = 0$
- CASO (D) SEMIDEFINITA NEGATIVA se per ogni  $(h, k) \neq (0, 0)$  si ha  $q(h, k) \leq 0$  ed esiste  $(h, k) \neq (0, 0)$  tale che  $q(h, k) = 0$
- CASO (E) INDEFINITA se esistono  $(h_1, k_1)$  e  $(h_2, k_2)$  tali che  $q(h_1, k_1) > 0$  e  $q(h_2, k_2) < 0$ .

Si noti che le varie condizioni sono mutuamente esclusive.

Vale il seguente teorema.

**Teorema 5.5.4.** (SEGNO DELLE FORME QUADRATICHE IN 2 VARIABILI) *Se  $a \neq 0$ , la forma quadratica  $q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$  è:*

- CASO (A) DEFINITA POSITIVA *se e soltanto se  $\det \mathbf{M} > 0$  e  $a > 0$*
- CASO (B) DEFINITA NEGATIVA *se e soltanto se  $\det \mathbf{M} > 0$  e  $a < 0$*
- CASO (C) SEMIDEFINITA POSITIVA *se e soltanto se  $\det \mathbf{M} = 0$  e  $a > 0$*
- CASO (D) SEMIDEFINITA NEGATIVA *se e soltanto se  $\det \mathbf{M} = 0$  e  $a < 0$*
- CASO (E) INDEFINITA *se e soltanto se  $\det \mathbf{M} < 0$*

*Se  $a = 0$  e  $c \neq 0$  allora nelle affermazioni precedenti basta sostituire  $a$  con  $c$ .*

✎ **Esempio 5.5.5.** *Sia  $q(h, k) = -2h^2 + 2hk - 3k^2$ . Allora la matrice corrispondente è*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

*Allora  $a_{11} = -2 < 0$ ;  $\det \mathbf{M} = 5 > 0$  quindi la forma quadratica è definita negativa*

## 5.6. Classificazione e studio delle forme quadratiche: il caso generale

□ **Definizione 5.6.1.** Una FORMA QUADRATICA in  $\mathbb{R}^n$  è una funzione  $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$q(\mathbf{h}) = q(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$$

dove gli  $a_{ij}$  sono numeri reali detti COEFFICIENTI DELLA FORMA QUADRATICA. Si può supporre senza perdita di generalità che  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Ogni forma quadratica risulta associata biunivocamente a una matrice simmetrica  $\mathbf{M} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ .

□ **Definizione 5.6.2.** Una forma quadratica  $q(\mathbf{h})$  con  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  (o la matrice simmetrica corrispondente) si dice:

- CASO (A) DEFINITA POSITIVA se  $q(\mathbf{h}) > 0$  per ogni  $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$
- CASO (B) DEFINITA NEGATIVA se  $q(\mathbf{h}) < 0$  per ogni  $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$
- CASO (C) SEMIDEFINITA POSITIVA se per ogni  $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$  si ha  $q(\mathbf{h}) \geq 0$  ed esiste  $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$  tale che  $q(\mathbf{h}) = 0$
- CASO (D) SEMIDEFINITA NEGATIVA se per ogni  $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$  si ha  $q(\mathbf{h}) \leq 0$  ed esiste  $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$

tale che  $q(\mathbf{h}) = 0$

- CASO (E) INDEFINITA se esistono  $(\mathbf{h}_1)$  e  $(\mathbf{h}_2)$  tali che  $q(\mathbf{h}_1) > 0$  e  $q(\mathbf{h}_2) < 0$ .

Vale il seguente teorema.

**Teorema 5.6.3.** (SEGNO DELLE FORME QUADRATICHE IN  $n$  VARIABILI) *Sia  $q(\mathbf{h})$  una forma quadratica con  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ . Sia  $\mathbf{M}$  la matrice associata e siano  $\mathbf{M}_k$  le SOTTOMATRICI PRINCIPALI NORD-OVEST, cioè le matrici composte dalle prime  $k$  righe e  $k$  colonne di  $\mathbf{M}$*

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{M}_n = \mathbf{M}$$

Allora  $q(\mathbf{h})$  è:

- CASO (A) DEFINITA POSITIVA se e soltanto se  $\det \mathbf{M}_k > 0$  per ogni  $k = 1, \dots, n$
- CASO (B) DEFINITA NEGATIVA se e soltanto se  $(-1)^k \det \mathbf{M}_k > 0$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ .

## 5.7. Forme quadratiche: il test degli autovalori

Rimandiamo a un testo di algebra lineare per le proprietà delle matrici simmetriche e il legame con gli autovalori (riduzione a forma canonica di una forma quadratica). Ci limitiamo in questa sede a enunciare un criterio alternativo che si basa sugli autovalori di una matrice per avere una classificazione delle forme quadratiche.

**□ Definizione 5.7.1.** Sia  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  con  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Allora  $\lambda$  si dice AUTOVALORE e  $\mathbf{v}$  AUTOVETTORE di una matrice quadrata  $\mathbf{M}$  di ordine  $n$  se soddisfano la relazione  $\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  o equivalentemente  $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , dove  $\mathbf{I}_n$  è la matrice identità in  $\mathbb{R}^n$ .

La precedente equazione ha soluzioni  $\mathbf{v}$  non nulle se e solo se la matrice dei coefficienti è singolare cioè se e soltanto se  $\lambda$  è soluzione dell'EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0.$$

Il primo membro è un polinomio di grado  $n$  in  $\lambda$  pertanto dal teorema fondamentale dell'algebra esistono esattamente  $n$  autovalori di  $\mathbf{M}$  contati con la loro molteplicità. Quindi si può dimostrare che vale il seguente teorema.

**Teorema 5.7.2.** (TEST DEGLI AUTOVALORI) *La forma quadratica  $q(\mathbf{h})$  è:*

- CASO (A) DEFINITA POSITIVA *se e soltanto se tutti gli autovalori di  $\mathbf{M}$  sono positivi*
- CASO (B) DEFINITA NEGATIVA *se e soltanto se tutti gli autovalori di  $\mathbf{M}$  sono negativi*
- CASO (C) SEMIDEFINITA POSITIVA *se e soltanto se tutti gli autovalori di  $\mathbf{M}$  sono non negativi (quindi  $\geq 0$ ) e almeno uno di essi è nullo*
- CASO (D) SEMIDEFINITA NEGATIVA *se e soltanto se tutti gli autovalori di  $\mathbf{M}$  sono non positivi (quindi  $\leq 0$ ) e almeno uno di essi è nullo*
- CASO (E) INDEFINITA *se e soltanto se  $\mathbf{M}$  ha almeno un autovalore positivo e uno negativo.*

La classificazione delle forme quadratiche quindi si può basare sullo studio del segno degli autovalori.

## 5.8. Studio della natura dei punti critici

---

### 5.8.1. Il caso $n = 2$

Concludiamo la nostra analisi dando informazioni utili per determinare la natura di un punto stazionario per una funzione di classe almeno  $\mathcal{C}^2$ . Essendo il punto critico, il gradiente è nullo, dal Teorema di Fermat, quindi abbiamo visto dalla formula di Taylor che per estrarre informazioni sulla natura del punto critico, occorre studiare e classificare la forma quadratica corrispondente alla matrice Hessiana. Si perviene dunque al seguente teorema.

**Teorema 5.8.1.** (STUDIO DELLA NATURA DEI PUNTI CRITICI - IL CASO  $n = 2$ ) Sia  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ , sia  $(x_0, y_0) \in A$  un punto critico per  $f$  e sia

$$\mathbf{H}_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

la matrice Hessiana di  $f$  nel punto critico. Allora:

- CASO (A) se  $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  allora la matrice Hessiana è definita positiva e  $(x_0, y_0)$  è punto di minimo locale forte
- CASO (B) se  $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  allora la matrice Hessiana è definita negativa e  $(x_0, y_0)$  è punto di massimo locale forte
- CASO (C) e CASO (D) se  $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) = 0$  allora la matrice Hessiana è semidefinita (positiva o negativa) e occorre un'analisi ulteriore
- CASO (E) se  $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) < 0$  allora la matrice Hessiana è indefinita e  $(x_0, y_0)$  è un punto di sella o colle.

## 5.8.2. Il caso generale

Vale il seguente teorema.

**Teorema 5.8.2.** (STUDIO DELLA NATURA DEI PUNTI CRITICI - IL CASO GENERALE) Sia  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ , sia  $(\mathbf{x}_0) \in A$  un punto critico per  $f$ . Se la forma quadratica

$$q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j$$

- CASO (A) è definita positiva allora  $(\mathbf{x}_0)$  è punto di minimo locale forte
- CASO (B) è definita negativa allora  $(\mathbf{x}_0)$  è punto di massimo locale forte
- CASO (C) è non nulla e semidefinita positiva allora  $(\mathbf{x}_0)$  è punto di minimo locale forte
- CASO (D) è non nulla e semidefinita negativa allora  $(\mathbf{x}_0)$  è punto di massimo locale forte
- CASO (E) è indefinita allora  $(\mathbf{x}_0)$  è un punto di sella o colle.

Torniamo agli esempi studiati in precedenza.

✎ **Esempio 5.8.3.** Sia  $f(x, y) = x^2 - y^3$ . Studiando il segno dell'incremento, avevamo visto che l'origine è un punto di sella o colle. La matrice Hessiana nel generico punto è

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$$

quindi nell'origine è

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita positiva. Quindi dal teorema possiamo solo dedurre a priori che l'origine non è un punto di massimo relativo ma potrebbe essere minimo relativo o sella. La conclusione viene da un'analisi ulteriore come si è fatto in precedenza.

✎ **Esempio 5.8.4.** Sia  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$ . Avevamo trovato che i punti critici erano

$$(x, y) = (0, 0) \quad (x, y) = (2, 1) \quad (x, y) = (-2, 1).$$

Andiamo ora a studiarne la natura attraverso lo studio della corrispondente matrice Hessiana. Si ha che la matrice Hessiana di  $f$  nel generico punto vale

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(1-y) & -2x \\ -2x & 4 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice Hessiana nei tre punti critici vale rispettivamente

$$\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_f(-2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Quindi riassumendo

$$f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \quad \det \mathbf{H}_f(0, 0) = 8 < 0$$

quindi la matrice Hessiana relativa all'origine è definita positiva: allora l'origine è un punto di minimo assoluto (si poteva pervenire già a tale conclusione mostrando che la funzione è data dalla somma della funzione  $g(x, y) = x^2 + 2y^2$  per cui l'origine è chiaramente un punto di minimo assoluto più una perturbazione  $-x^2y$  di terzo grado (quindi di grado superiore)). D'altro canto

$$\det \mathbf{H}_f(2, 1) = \det \mathbf{H}_f(-2, 1) = -16 < 0$$

quindi la matrice Hessiana relativa ai punti stazionari  $(\pm 2, 1)$  è indefinita e perciò entrambi questi punti sono punti di sella.

## 5.9. Esercizi di ricapitolazione riguardanti estremi liberi

✎ **Esercizio 5.9.1.** Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

La funzione  $f$  è a simmetria radiale, cioè è funzione solo della distanza dall'origine  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Come conseguenza, le curve di livello di  $f$  sono circonferenze con centro nell'origine. In casi come questo si può semplificare la ricerca degli estremi studiando la funzione di una sola variabile

$$g(r) = r^2 e^{-r^2} \quad r \geq 0.$$

Si ha  $g(0) = 0$  e anche  $g(r) \geq 0$  per ogni  $r$  anzi più precisamente  $g(r) > 0$  per ogni  $r \neq 0$ . Inoltre

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 0$$

e dunque  $r = 0$  è punto di minimo globale. D'altra parte

$$g'(r) = 2r(1 - r^2)e^{-r^2}$$

e dunque  $g'(r) = 0$  se  $r = 1$ . Perciò se  $r = 1$  è punto di massimo globale.

Per trasferire i risultati ottenuti per  $g$  a  $f$  basta osservare che  $r = 0$  corrisponde all'origine  $(0, 0)$  mentre  $r = 1$  corrisponde alla circonferenza unitaria centrata in  $(0, 0)$ . Di conseguenza il valore minimo è assunto in  $(0, 0)$  mentre il valore massimo è assunto in tutti i punti della circonferenza unitaria.

✎ **Esercizio 5.9.2.** Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione

$$f(x, y) = x^3 \sqrt[3]{(y-x)^2}.$$

La funzione  $f$  è definita e continua in  $\mathbb{R}^2$ . Dimostriamo che in tutti i punti dell'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$  tranne l'origine si ha che  $f$  non è differenziabile. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, x) - f(x, x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 \sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} xh^{-1/3} + \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{h^2}.$$

Il limite del primo addendo, per  $x \neq 0$  non esiste e quindi sicuramente  $f$  non è differenziabile nei punti  $(x, x)$  con  $x \neq 0$ . nell'origine invece si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \sqrt[3]{(-h)^2}}{h} = 0$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

dunque

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h\sqrt[3]{(k-h)^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

e questo limite esiste e fa 0, dunque in  $(0,0)$   $f$  è differenziabile. I punti di estremo andranno cercati tra i punti critici e i punti della bisettrice del primo e terzo quadrante (origine esclusa).

Allora

$$f_x(x,y) = \frac{3y - 5x}{3\sqrt{y-x}} \quad f_y(x,y) = \frac{2x}{3\sqrt{y-x}}$$

e dunque il gradiente di  $f$  è diverso da zero in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = x\}$ . Pertanto possono essere punti di estremo solo i punti della retta  $y = x$  (origine esclusa). Su tale retta si ha  $f(x,y) = 0$ . Studiando il segno di  $f(x,y)$  si ricava che i punti della bisettrice del primo quadrante sono di minimo locale mentre i punti della bisettrice del terzo quadrante sono di massimo locale. Infatti  $f(x,y) \geq 0$  per  $x > 0$  e  $f(x,y) \leq 0$  per  $x < 0$ . Per curiosità l'origine è punto di sella. Non ci sono estremi globali perché la funzione è illimitata superiormente e inferiormente. Ad esempio:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty,0)} f(x,y) = +\infty$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty,0)} f(x,y) = -\infty.$$

✎ **Esercizio 5.9.3.** Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione

$$f(x,y) = x^2 \log(1+y) + x^2 y^2$$

nel suo dominio.

Il dominio di  $f$  è l'insieme aperto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}.$$

In questo insieme  $f$  è una funzione di classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Gli eventuali punti di estremo locale devono perciò essere soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x(\log(1+y) + y^2) = 0 \\ f_y(x,y) = x^2 \left( \frac{1}{1+y} + 2y \right) = 0. \end{cases}$$

Si ha sicuramente  $x = 0$ ; inoltre deve aversi

$$\log(1 + y) + y^2 = 0$$

e

$$\frac{1}{1 + y} + 2y = 0.$$

La prima equazione ci dà come soluzione  $y = 0$  mentre dalla seconda equazione deriviamo  $2y^2 + 2y + 1 = 0$  che non ci dà soluzioni reali. Quindi il sistema ammette come soluzioni gli infiniti punti  $(0, k)$  con  $k > -1$ . Su tali punti si ha  $f(x, y) = 0$ . Proviamo il test della matrice Hessiana.

$$f_{xx}(x, y) = 2(\log(1 + y) + y^2) \quad f_{yy}(x, y) = x^2 \left( 2 - \frac{1}{(1 + y)^2} \right)$$

e

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2x \left( \frac{1}{1 + y} + 2y \right);$$

dunque

$$H_f(0, k) = \begin{pmatrix} \log(1 + k) + k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque il test della matrice Hessiana si rivela inefficace.

Proviamo a valutare

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(0, k) = f(x, y) = x^2 \log(1 + y) + x^2 y^2 = x^2 [\log(1 + y) + y^2].$$

Studiamo il segno del termine  $\log(1 + y) + y^2 =: g(y)$ . È immediato verificare che

$$g(y) < 0 \Leftrightarrow -1 < y < 0, \quad g(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0, \quad g(y) > 0 \Leftrightarrow y > 0.$$

Da questo è possibile concludere che:

se  $k > 0$  allora i punti  $(0, k)$  sono punti di minimo locale;

se  $k = 0$  allora l'origine è un punto di sella;

se  $-1 < k < 0$  allora i punti  $(0, k)$  sono punti di massimo locale.

Osserviamo infine che  $f$  non ha punti di estremo globale in quanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, y_0)} f(x, y) = \begin{cases} +\infty & y_0 > 0 \\ -\infty & -1 < y_0 < 0 \end{cases}$$

e perciò

$$\sup f(x, y) = +\infty \quad \inf f(x, y) = -\infty.$$

## 5.10. Funzioni convesse in $n$ variabili

Ci occupiamo ora brevemente di una classe di funzioni importanti, soprattutto per quanto riguarda i problemi di ottimizzazione: le *funzioni convesse*.

□ **Definizione 5.10.1.** Un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **CONVESSO** se per ogni coppia di punti  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$  si ha che  $\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in \Omega$  per ogni  $\lambda \in [0, 1]$  (cioè se presi comunque due punti di  $\Omega$  il segmento che li unisce è ancora tutto contenuto in  $\Omega$ ). L'insieme  $\Omega$  si dice **STRETTAMENTE CONVESSO** se se per ogni coppia di punti  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$  si ha che  $\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in \Omega$  per ogni  $\lambda \in (0, 1)$  (cioè se presi comunque due punti di  $\Omega$  il segmento che li unisce privato degli estremi è ancora tutto contenuto in  $\Omega$ ).

□ **Definizione 5.10.2.** Si dice **EPIGRAFICO** di una funzione  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  l'insieme

$$\text{epi}f = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z \geq f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}.$$

Si dice che una funzione  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è **CONVESSA** (risp. **STRETTAMENTE CONVESSA**) se l'epigrafico di  $f$  è un insieme convesso (risp. strettamente convesso) di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; si dice che  $f$  è **CONCAVA** se  $-f$  è convessa.

Osservando che se  $\Omega$  non è un insieme convesso, l'epigrafico di  $f$  non sarà mai convesso, d'ora in avanti assumeremo  $\Omega$  convesso. Si ha la seguente proposizione.

**Proposizione 5.10.3.** Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso) è convessa se e soltanto se per ogni  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$  e per ogni  $t \in [0, 1]$  vale la condizione

$$f(t\mathbf{x}_1 + (1 - t)\mathbf{x}_2) \leq tf(\mathbf{x}_1) + (1 - t)f(\mathbf{x}_2);$$

se la precedente vale con il segno di disuguaglianza stretta per ogni  $t \in (0, 1)$  allora  $f$  è strettamente convessa.

Vale anche il seguente teorema che mostra che la condizione di convessità implica una certa regolarità per  $f$ .

**Teorema 5.10.4.** (REGOLARITÀ DELLE FUNZIONI CONVESSE) Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso). Se  $f$  è convessa allora:

- 1)  $f$  è continua;
- 2)  $f$  ha derivate parziali destre e sinistre in ogni punto;
- 3) nei punti in cui è derivabile  $f$  è differenziabile.

Inoltre vale il seguente importante risultato che è l'analogo in più dimensioni del fatto che una funzione reale di una variabile reale convessa sta sopra la retta tangente in ogni suo punto.

**Teorema 5.10.5.** (FUNZIONI CONVESSE E PIANO TANGENTE) *Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso), differenziabile in  $\Omega$ . Allora  $f$  è convessa in  $\Omega$  se e soltanto se per ogni coppia di punti  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$  si ha:*

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

In due dimensioni il significato geometrico è molto chiaro: infatti si ha

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

che equivale a dire che il piano tangente in  $(x_0, y_0)$  sta sotto il grafico di  $f$ .

Per funzioni di più variabili si può enunciare un criterio che è dato dallo studio del segno della forma quadratica data dal differenziale secondo, in analogia al fatto che in una variabile il segno della derivata seconda fornisce un criterio per studiare la convessità di una funzione.

**Teorema 5.10.6.** (CONVESSITÀ E MATRICE HESSIANA) *Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto convesso),  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ . Se per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  la forma quadratica  $d^2 f(\mathbf{x}_0)$  è semidefinita positiva allora  $f$  è convessa in  $\Omega$ .*

Concludiamo enunciando il legame tra funzioni convesse e problemi di ottimizzazione. Come abbiamo sottolineato nei precedenti paragrafi, per individuare i massimi o i minimi per una funzione occorre prima di tutto andare ad individuare i punti stazionari cioè i punti che annullano il gradiente, grazie al Teorema di Fermat (condizioni del primo ordine) e successivamente andare a studiare la natura di tali punti attraverso la matrice Hessiana (condizioni del secondo ordine). Nel caso di funzioni convesse le condizioni del primo ordine risultano sufficienti per la ricerca dei massimi o minimi. Infatti per funzioni convesse (e/o naturalmente concave) i punti stazionari, se esistono, sono punti di estremo globale.

**Proposizione 5.10.7.** *Sia  $\Omega$  un aperto convesso e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa (risp. concava) e differenziabile in  $\Omega$ ; sia  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Se  $\mathbf{x}_0$  è punto critico per  $f$  allora  $\mathbf{x}_0$  è punto di minimo (risp. massimo) globale. Inoltre se  $f$  è strettamente convessa (risp. concava), allora  $\mathbf{x}_0$  è punto di minimo (risp. massimo) globale forte quindi in particolare il punto di minimo (risp. massimo) globale è unico.*

## 5.11. Funzioni definite implicitamente

### 5.11.1. Funzione implicita di una variabile

Quando abbiamo parlato di insiemi di livello, abbiamo detto che l'insieme  $f(x, y) = c$  è dato da curve, dette appunto curve di livello. In realtà, anche se  $f$  è molto regolare, l'insieme definito da  $f(x, y) = c$  con  $c$  costante generica può non essere una curva regolare o può non essere addirittura una curva.

✎ **Esempio 5.11.1.** *L'insieme  $x^3 - y^2 = 0$  rappresenta una curva non regolare; l'insieme  $x^2 - y^2 = 0$  rappresenta l'unione di due rette; l'insieme  $x^2 + y^2 = 0$  rappresenta un solo punto; infine l'insieme  $x^2 + y^2 = -1$  rappresenta l'insieme vuoto.*

Obiettivo di questo paragrafo è dunque il seguente: data una funzione  $f(x, y)$  definita almeno in un aperto e ivi regolare (almeno di classe  $C^1$  precisare le condizioni sotto le quali l'equazione  $f(x, y) = 0$  definisce *implicitamente* una funzione  $y = g(x)$ ).

□ **Definizione 5.11.2.** Una funzione  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo) tale che

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

si dice DEFINITA IMPLICITAMENTE dall'equazione  $f(x, y) = 0$  o più brevemente si dice FUNZIONE IMPLICITA

Per chiarire: l'equazione  $f(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $g$  se esiste un intervallo  $I$  tale per cui per ogni  $x \in I$  esiste unico  $y \in g(I)$  tale che  $f(x, g(x)) = 0$ . L'unicità di  $y$  è dovuta alla richiesta di definire implicitamente una *funzione* che è caratterizzata dalla univocità della corrispondenza input-output.

✎ **Esempio 5.11.3.** *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y - 3y^2.$$

L'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente un'unica funzione  $f_1$  definita su  $I_1 = (-\infty, -\sqrt{3})$ . Infatti se  $x \leq -\sqrt{3}$  la funzione  $y \mapsto F(x, y)$  è strettamente crescente. Come si dimostra questo? Prima di tutto si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + x^2 - 6y \geq 3y^2 - 6y + 3 = 3(y - 1)^2 \geq 0$$

visto che  $x \leq -\sqrt{3} \Rightarrow x^2 \geq 3$ . Dato inoltre che

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} F(x, y) = \pm\infty,$$

allora  $\forall x \leq -\sqrt{3}$  esiste unico  $y = f_1(x)$  tale che

$$F(x, f_1(x)) = 0.$$

Infatti essendo  $\frac{\partial F}{\partial y} \geq 0$ , si ha che la funzione  $y \mapsto F(x, y)$  con  $x$  fissato, è strettamente crescente, quindi intersecherà l'asse delle  $x$  una volta sola, cioè si annulla una sola volta. Dunque per ogni  $x_0$  fissato esiste un solo  $y_0$  tale che  $F(x_0, y_0) = 0$ . Ne segue che per ogni  $x \leq -\sqrt{3}$  esiste un unico valore di  $y$  che è funzione di  $x$  (cioè  $y = f_1(x)$ ) tale che

$$F(x, f_1(x)) = 0.$$

Analogamente si prova che

$$F(x, y) = 0$$

definisce implicitamente un'unica funzione  $f_2$  nell'intervallo  $I_2 = [\sqrt{3}, +\infty)$ . In entrambi i casi, le funzioni  $f_1$  e  $f_2$  sono perfettamente determinate dalla condizione di soddisfare l'equazione  $F(x, y) = 0$  rispettivamente per  $x \in I_1$  e  $x \in I_2$ . Si noti invece che se  $x \notin I_1 \vee x \notin I_2$  per esempio per  $x = 0$  si ha

$$F(0, y) = y^3 - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 3$$

e quindi l'equazione  $F(0, y) = 0$  ammette due soluzioni. Nel caso  $x = 1$  si ha

$$F(1, y) = 1 + y^3 + y - 3y^2 = (y - 1)(y^2 - 2y - 1)$$

e dunque l'equazione  $F(x, y) = 0$  ha tre soluzioni:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 1 - \sqrt{2}, \quad y_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Affinché una tale funzione esista, è necessario che l'equazione  $f(x, y) = 0$  sia soddisfatta almeno in un punto  $(x_0, y_0)$  e in tal caso sarà  $y_0 = g(x_0)$ ; poi vorremmo che  $g$  fosse definita almeno in un intorno  $I$  di  $x_0$  e ivi regolare (quanto meno derivabile).

Ragioniamo a rovescio. Se una tale funzione  $g(x)$  esiste ed è derivabile in  $I$ , siccome anche  $f$  è differenziabile, possiamo andare a derivare rispetto a  $x$  l'identità

$$f(x, g(x)) = 0,$$

ottenendo, per il teorema delle funzioni composte

$$f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) g'(x) = 0$$

da cui si ricava

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

per ogni  $x \in I$  in cui il denominatore non si annulla.

Quindi questa idea giustifica il seguente importantissimo teorema.

**Teorema 5.11.4.** (TEOREMA DI DINI O DELLA FUNZIONE IMPLICITA) *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto) una funzione di classe  $\mathcal{C}^1(A)$ . Supponiamo che in un punto  $(x_0, y_0) \in A$  si abbia*

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

*Allora esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  in  $\mathbb{R}$  e un'unica funzione  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che*

$$y_0 = g(x_0) \quad \text{e} \quad f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

*Inoltre  $g \in \mathcal{C}^1(I)$  e si ha*

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \quad \forall x \in I.$$

☞ **Osservazione 5.11.5.** Se  $f(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$  ma  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$  allora si può applicare il teorema scambiando i ruoli tra  $x$  e  $y$ , ossia affermare che esiste un intorno  $J$  di  $y_0$  e un'unica funzione  $x = h(y)$  definita in  $J$  tale che  $x_0 = h(y_0)$  e  $(h(y), y) = 0$  per ogni  $y \in J$ . Inoltre  $h \in \mathcal{C}^1(J)$  e si ha

$$h'(y) = -\frac{f_y(h(y), y)}{f_x(h(y), y)} \quad \forall y \in J.$$

In sostanza i punti in cui il teorema del Dini non è applicabile sono quelli in cui il gradiente di  $f$  si annulla, cioè i punti critici di  $f$ .

📎 **Esempio 5.11.6.** Sia  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . L'equazione  $x^2 + y^2 = 1$  com'è noto rappresenta la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, che è una ben nota curva (regolare) ma non è una funzione. Ci chiediamo se essa definisce implicitamente una funzione delle variabili  $x$  o  $y$  e per quali punti. Il gradiente di  $f$  si annulla solo nell'origine che non appartiene alla curva, quindi il Teorema del Dini è applicabile in ogni punto. Si ha tuttavia che  $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ : quindi se  $y \neq 0$ , sicuramente si applica il Teorema del Dini e l'equazione data definisce implicitamente una funzione della sola variabile  $x$  (che possiamo anche ricavare esplicitamente:  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$  a seconda che si consideri  $y > 0$  o  $y < 0$ ). Invece nei punti  $(\pm 1, 0)$  non è possibile definire implicitamente una funzione della sola variabile  $x$ . Questo è giustificabile vedendo che comunque preso un intorno, per ogni  $x$  appartenente a quell'intorno ci sono sempre due valori di  $y$  che vi appartengono: venendo a cadere l'univocità della corrispondenza input-output, non si tratta mai di una funzione. Però il Teorema del Dini ci invita a osservare cosa succede alla  $f_x$ : ci accorgiamo che  $f_x(\pm 1, 0) = \pm 2 \neq 0$ . Quindi applicando il teorema si deduce che l'equazione

data definisce implicitamente una funzione stavolta della sola variabile  $y$  (che esplicitata ha la forma  $x = \pm\sqrt{1-y^2}$  a seconda che si consideri  $x > 0$  o  $x < 0$ ).

 **Esempio 5.11.7.** Verificare che per il teorema del Dini, l'equazione

$$(x-1)\log(\sin y) + (y-1)\tan(x^2) = 0$$

permette di rappresentare  $y$  come funzione di  $x$ , ovvero  $y = y(x)$ , in un intorno del punto  $(1, 1)$ . Si calcoli  $y'(1)$ .

Verifichiamo che effettivamente si possa applicare il teorema del Dini. Poniamo

$$f(x, y) = (x-1)\log(\sin y) + (y-1)\tan(x^2);$$

si ha che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  in un intorno di  $(1, 1)$ . Poi si ha  $f(1, 1) = 0$  e infine

$$f_y(x, y) = (x-1)\frac{\cos y}{\sin y} + \tan(x^2)$$

da cui  $f_y(1, 1) = \tan 1 \neq 0$ .

Allora il teorema del Dini ci assicura che esiste un intorno  $I$  di  $x = 1$  ed esiste  $y = y(x)$  definita su  $I$  a valori reali tale che  $f(x, y(x)) = 0$ . Si ha inoltre

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} \quad \forall x \in I$$

da cui

$$f_x(x, y) = \log(\sin y) + (y-1)(1 + \tan^2(x^2))2x$$

e quindi

$$y'(1) = -\frac{\log(\sin 1)}{\tan 1}.$$

 **Esempio 5.11.8.** Sia ora

$$F(x, y) = x^2 - y^2.$$

Consideriamo l'origine. Si ha  $F(0, 0) = F_x(0, 0) = F_y(0, 0) = 0$ . Le ipotesi del teorema del Dini con punto iniziale  $(0, 0)$  non sono soddisfatte e anche la tesi non è soddisfatta, infatti non esiste alcun intorno dell'origine in cui l'equazione definisca implicitamente un'unica funzione della  $x$  o della  $y$ .

 **Esempio 5.11.9.** Sia

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3rxy = 0 \quad r > 0.$$

Questa equazione rappresenta una curva piana detta “folium” di Cartesio. Si ha  $F(0,0) = F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0$  dunque il teorema del Dini non è applicabile nel punto  $(0,0)$ . Invece fuori dall'origine si può definire implicitamente una funzione  $y = y(x)$  tale che

$$x^3 + (y(x))^3 - 3rxy(x) = 0.$$

Derivando rispetto a  $x$  si ha

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ry - 3rxy' = 0,$$

da cui risolvendo rispetto a  $y'$

$$y' = -\frac{ry - x^2}{rx - y^2}.$$

Osserviamo prima di tutto che questa è un'equazione differenziale del primo ordine, che esprime  $y'$  in funzione di  $x$  e  $y$  purché risulti  $y^2 - rx \neq 0$ . In secondo luogo si ha, in conformità col teorema del Dini

$$F_x = 3x^2 - 3xy \quad F_y = 3y^2 - 3ry.$$

Infine si osservi che gli unici punti  $(x, y)$  della curva per cui risulta  $y^2 - rx = 0$  sono  $(0,0)$  e  $(2^{2/3}r, 2^{1/3}r)$ .

✎ **Esercizio 5.11.10.** Sia

$$E = \{x^2y + \log(xy) = 0, \quad x > 0, \quad y > 0\}.$$

Studiare  $E$ .

SOLUZIONE. L'insieme  $E$  è del tipo  $F(x, y) = 0$  con  $F(x, y) = x^2y + \log(xy)$ .

Fisso  $x_0$ . Si ha

$$F(x_0, y) = x_0^2y + \log(x_0y).$$

Quindi è possibile individuare una funzione della sola variabile  $y$  tale che

$$y \mapsto F(x_0, y).$$

Si riesce a stabilire che

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} F(x_0, y) = -\infty,$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x_0, y) = +\infty,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \frac{1}{y} > 0 \quad \forall x, y.$$

Il grafico qualitativo della funzione  $y \mapsto F(x_0, y)$  è rappresentato in figura

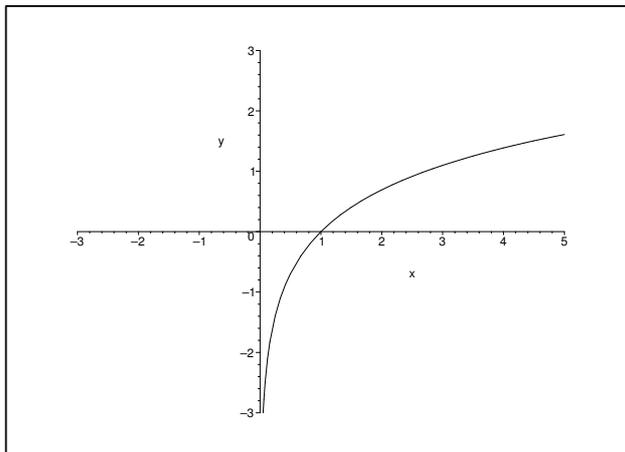


Figura 5.1: Grafico qualitativo della funzione  $y \mapsto F(x_0, y)$ .

Essendo la funzione sempre strettamente crescente, esiste unico il punto  $y_0$  in cui  $F(x_0, y_0) = 0$ . Questo ragionamento lo posso fare per ogni  $x_0 > 0$ . Dunque l'insieme  $E$  coincide col grafico di una funzione  $u = u(x)$  con  $x > 0$ . Tutto questo è in conformità col teorema del Dini, visto la condizione che abbiamo sulla derivata  $F_y$ .

L'obiettivo ora è disegnare il grafico qualitativo di  $u(x)$ .

Si ha

$$u'(x) = -\frac{F_x(x, u(x))}{F_y(x, u(x))} = -\frac{2xu(x) + \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{1}{u(x)}} < 0.$$

Dunque  $u(x)$  è derivabile e decrescente.

Cerchiamo di stabilire il comportamento di  $u$  agli estremi del dominio. Ci chiediamo se possiamo ottenere informazioni sul seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x).$$

Innanzitutto questo limite esiste perché  $u$  è decrescente, denotiamo con  $l$  tale limite. Inoltre  $l \geq 0$  perché  $u \geq 0$  e anche  $l < +\infty$  visto che  $u$  è decrescente. D'altra parte, visto che l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente la funzione  $x \mapsto u(x)$ , si ha che

$$x^2u(x) + \log(xu(x)) = 0$$

dunque anche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2u(x) + \log(xu(x))] = 0.$$

Se fosse  $l > 0$ , allora passando al limite dentro alla parentesi quadra si avrebbe che

$$[x^2u(x) + \log(xu(x))] \rightarrow +\infty$$

in contraddizione con quanto trovato in precedenza. Dunque deve essere  $l = 0$ .

Analogamente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$$

di sicuro esiste (non negativo) perché  $u$  è decrescente (e non negativa), e può essere finito o infinito. Se fosse finito, si avrebbe

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2u(x) + \log(xu(x))] = -\infty,$$

ma di nuovo, visto che l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente la funzione  $x \mapsto u(x)$ , si ha che

$$x^2u(x) + \log(xu(x)) = 0$$

dunque anche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2u(x) + \log(xu(x))] = 0.$$

Questo è assurdo, dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = +\infty.$$

Il grafico qualitativo di  $u$  è rappresentato in figura. Si noti che non si è studiato il comportamento delle derivate successive di  $u$  dunque non abbiamo informazioni sulla convessità o la concavità di  $u$ .

✎ **Esercizio 5.11.11.** *Studiare l'insieme*

$$E = \{\sqrt{x}(y^3 - x^3) + y - 2 = 0, x \geq 0\}.$$

SOLUZIONE. Poniamo  $F(x, y) = \sqrt{x}(y^3 - x^3) + y - 2$  e fissiamo  $x_0$ . Si ha

$$F(x_0, y) = \sqrt{x_0}(y^3 - x_0^3) + y - 2.$$

Per ogni  $x_0$  fissato viene individuata una funzione

$$y \mapsto F(x_0, y).$$

Studiamo per sommi capi il comportamento di questa funzione. Si ha

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} F(x_0, y) = \pm\infty.$$

Inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2\sqrt{x_0} + 1 > 0.$$

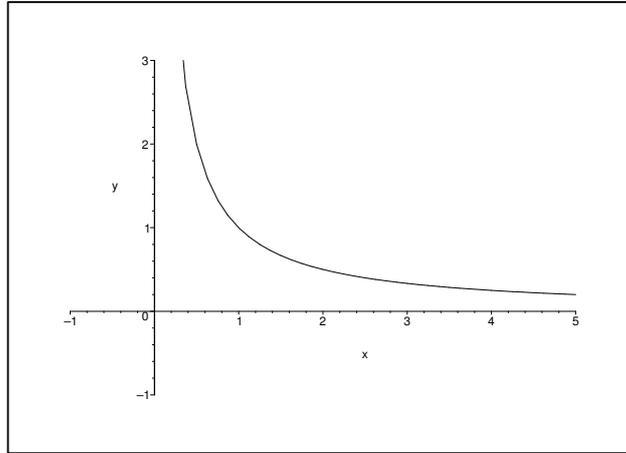


Figura 5.2: Grafico qualitativo della funzione implicita  $u$ .

Queste informazioni ci permettono di dedurre che la funzione  $y \mapsto F(x_0, y)$  è strettamente crescente, dunque per ogni  $x$  esiste unico  $y$  tale che  $y$  è funzione di  $x$  cioè  $y = y(x)$  e  $F(x, y(x)) = 0$ . (Tutto questo in conformità con il teorema del Dini, visto che  $F_y$  non si annulla mai). Vorremmo studiare per sommi capi il comportamento della funzione  $y$ .

Siccome si ha  $F \in \mathcal{C}^\infty$  allora anche  $y \in \mathcal{C}^\infty$ . Inoltre si ha

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{y^3 - 7x^3}{3y^2\sqrt{x} + 1}.$$

Vediamo se si riesce a stabilire il valore di  $y'(0)$ . Si ha che  $(0, y(0))$  è tale che  $F(0, y(0)) = 0$  dunque  $F(0, y(0)) = y(0) - 2 = 2$  da cui  $y(0) \neq 0$  e dunque se  $x \rightarrow 0^+$   $y'(0) \rightarrow -\infty$ , la funzione  $y(x)$  parte con tangente verticale.

D'altra parte vorremmo discutere quando si ha  $y'(x) = 0$ . Questo è equivalente a vedere quando  $y^3 - 7x^3 = 0$ . Nel grafico è illustrato il comportamento della funzione  $y$  vicino al punto  $(0, 2)$ . Si ha la retta  $y = \sqrt[3]{7x}$  e se  $y^3 - 7x^3 > 0$  allora si ottiene  $y' < 0$  cioè  $y$  decrescente. Come si vede dal grafico,  $y$  parte con tangente verticale, decresce e interseca la retta in un punto. In quel punto il grafico di  $y$  ammette tangente orizzontale. Dopo di che, essendo  $y^3 - 7x^3 < 0$  si ha  $y' > 0$  e dunque  $y$  cresce. Il dubbio è: ci sarà un'altra intersezione con la retta o si avrà  $y$  crescente ma che rimane sempre sotto la retta stessa? Se ci fosse un'altra intersezione tra il grafico di  $y$  e la retta si avrebbe in quel punto, che denoteremo con  $(\bar{x}, y(\bar{x}))$ , tangente orizzontale. Ragioniamo sul coefficiente angolare della retta tangente al grafico di  $y$  nel punto  $(\bar{x}, y(\bar{x}))$  che chiameremo  $m$ . Esso deve essere 0 perché abbiamo appena detto che deve esserci tangente orizzontale, d'altra parte  $y$  sta sotto la retta, dunque  $m$  deve essere maggiore o uguale

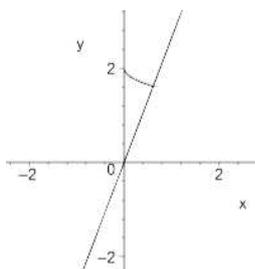


Figura 5.3: Grafico qualitativo della funzione implicita  $y$  vicino al punto  $(0, 2)$ .

a  $\sqrt[3]{7}$ . Questo è assurdo. Detto altrimenti, se  $x \leq \bar{x}$  si ha  $y(x) < 7\sqrt[3]{x}$  (sto arrivando da sinistra al punto di ascissa  $\bar{x}$  rimanendo sempre col grafico di  $y$  sotto la retta) e d'altra parte  $y(\bar{x}) = 7\sqrt[3]{\bar{x}}$  (perché il punto  $(\bar{x}, y(\bar{x}))$  sta anche sulla retta). Allora

$$0 = y'(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{y(x) - y(\bar{x})}{x - \bar{x}} > \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\sqrt[3]{7}x - \sqrt[3]{7}\bar{x}}{x - \bar{x}} = \sqrt[3]{7}$$

assurdo. Dunque non c'è più nessuna intersezione tra il grafico di  $y$  e la retta  $y = \sqrt[3]{7}x$ .

A questo punto vediamo se riusciamo a ricavare informazioni sul comportamento all'infinito di  $y$ . Definitivamente  $y$  è crescente, dunque il limite all'infinito esiste, chiamiamolo  $\lambda$ . Si avrà  $\lambda > 0$  oppure  $\lambda = +\infty$ . D'altra parte, l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente la funzione  $y = y(x)$  dunque chiaramente  $F(x, y(x)) = 0$  da cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x}(y^3 - x^3) + y - 2] = 0.$$

Ma se supponiamo che  $\lambda$  sia finito e passiamo al limite dentro la parentesi quadra otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x}(y^3 - x^3) + y - 2] = +\infty$$

che è assurdo. Dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty.$$

La figura illustra il grafico qualitativo della funzione implicita  $y$ .

### 5.11.2. Derivate successive

Dall'identità

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

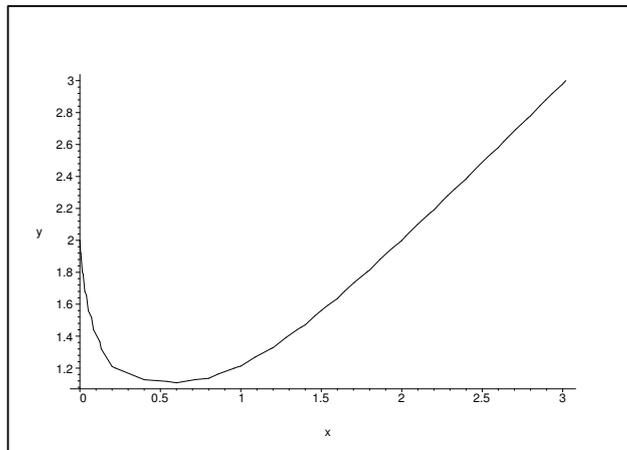


Figura 5.4: Grafico qualitativo della funzione implicita  $y$ .

derivando entrambi i membri si ottiene (al secondo membro ho applicato la regola di derivazione di una funzione composta)

$$f''(x) = -\frac{(F_{xx} + F_{xy}f'(x))F_y - (F_{yx} + F_{yy}f'(x))F_x}{(F_y)^2}$$

da cui, sostituendo l'espressione di  $f'(x)$  in funzione di  $F_x$  e  $F_y$  si ottiene

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}(F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3}.$$

A questo punto ricordiamo che *condizione sufficiente affinché  $x_0$  sia un massimo (risp. minimo) relativo per  $f$*  è che

$$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) < 0 \quad (\text{risp. } > 0).$$

A questo punto, supponiamo che  $F(x_0, y_0) = 0$  (il punto  $(x_0, y_0)$  con  $y_0 = f(x_0)$  deve soddisfare l'equazione  $F(x, y) = 0$  visto che questa equazione definisce la funzione implicita  $f$ ) e  $F_x(x_0, y_0) = 0$  ( $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ ); inseriamo queste informazioni nell'espressione di  $f''$ : otteniamo

$$f''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

dunque dalla seconda parte data dalla condizione sufficiente si ha che

$$\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} > 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di massimo relativo per } f$$

mentre

$$\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} < 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di minimo relativo per } f.$$

✎ **Esempio 5.11.12.** Riprendiamo l'equazione

$$F(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y - 3y^2 = 0.$$

Abbiamo visto che essa definisce implicitamente una funzione  $f : (-\infty, -\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{R}$  visto che per  $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$  si ha

$$F_y = 3y^2 + x^2 - 6y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vogliamo avere qualche informazione su  $f$ . Cerchiamo i punti  $(x_0, y_0 = f(x_0))$  tali che  $F(x_0, y_0) = 0$  e tali che  $x_0$  sia di minimo o massimo relativo per  $f$ . Da quanto detto in precedenza, questo è equivalente a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_0^3 + y_0^3 + x_0^2y_0 - 3y_0^2 = 0 \\ 3x_0^2 + 2x_0y_0 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ci dà come soluzioni  $x_0 = 0$  e  $x_0 = -\frac{2}{3}y_0$ . La prima non è accettabile visto che  $x_0 \in (-\infty, -\sqrt{3})$ ; se invece si sostituisce la seconda soluzione nella prima equazione si ottiene il punto

$$x_0 = -\frac{54}{31} \quad y_0 = f(x_0) = \frac{81}{31}.$$

A questo punto si ha

$$f''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = \frac{162}{31} \cdot \frac{1}{F_y(x_0, y_0)} > 0.$$

Dunque  $x_0$  è punto di minimo relativo per  $f$ . Qui di seguito è presentato il grafico qualitativo della curva  $F(x, y) = 0$ ; (tale grafico non evidenzia con esattezza il comportamento nel punto  $(0, 0)$ .)

✎ **Esempio 5.11.13.** Sia

$$F(x, y) = x^4 + y^4 + a(x^2 - y^2) = 0 \quad a > 0.$$

Vediamo se questa equazione definisce implicitamente una funzione  $y = f(x)$  della sola variabile  $x$ . Si ha

$$F_y(x, y) = 4y^3 - 2ay = 2y[2y^2 - a].$$

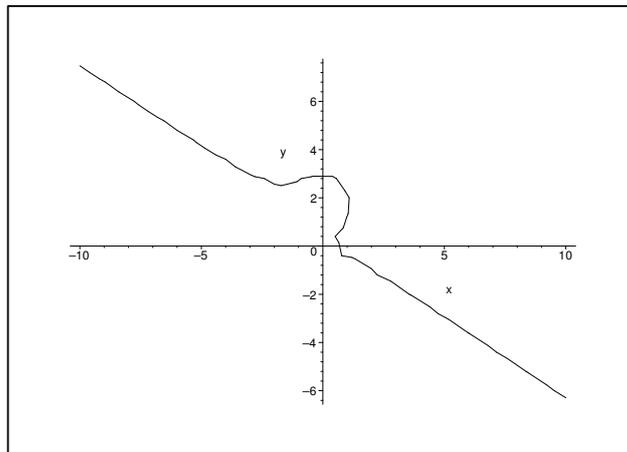


Figura 5.5: Grafico qualitativo della curva  $F(x, y) = 0$ .

$F_y$  si annulla per  $y = 0$  e  $y^2 = a/2$ . Vediamo a quali valori di  $x$  corrispondono questi valori di  $y$ . Prima di tutto

$$F(x, 0) = x^4 + ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

invece

$$F\left(x, \pm\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = x^4 + \frac{a^2}{4} + ax^2 - \frac{a^2}{2} = 0 \Leftrightarrow 4x^4 + 4ax^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a\sqrt{2} - a}{2}}.$$

Dunque nei punti

$$(0, 0) \quad \left(\pm\sqrt{\frac{a\sqrt{2} - a}{2}}, \pm\sqrt{\frac{a}{2}}\right) \quad \left(\pm\sqrt{\frac{a\sqrt{2} - a}{2}}, \mp\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$$

non è possibile applicare il teorema del Dini. Preso invece un qualunque altro punto  $(x_0, y_0)$  esiste un rettangolo  $R : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$  di tale punto tale che l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $y = f(x)$  definita in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Allora vediamo se esistono punti di massimo o di minimo locale per qualcuna di queste funzioni definite implicitamente. Questa ricerca equivale alla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = x^4 + y^4 + a(x^2 - y^2) = 0 \\ F_x(x, y) = 2x(2x^2 + a) = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ci dà  $x = 0$ ; inserendo questa informazione nella prima equazione ricaviamo immediatamente  $y = 0$  che non è accettabile perché  $(0, 0)$  è punto singolare, ma anche  $y^2 = a$  quindi come soluzioni otteniamo i punti  $(0, \pm\sqrt{a})$ . In questi punti è possibile, come detto in precedenza, applicare il teorema del Dini; si ottiene che esiste un intorno  $R_1$  del punto  $(0, \sqrt{a})$  della forma  $(-\delta_1, \delta_1) \times (\sqrt{a} - \sigma_1, \sqrt{a} + \sigma_1)$  tale che l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $y = f_1(x)$  definita su  $(-\delta_1, \delta_1)$  con  $F(x, f_1(x)) = 0$ . Allo stesso modo si può dire che esiste un intorno  $R_2$  del punto  $(0, -\sqrt{a})$  della forma  $(-\delta_2, \delta_2) \times (-\sqrt{a} - \sigma_2, -\sqrt{a} + \sigma_2)$  tale che l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $y = f_2(x)$  definita su  $(-\delta_2, \delta_2)$  con  $F(x, f_2(x)) = 0$ . Allora

$$f_1''(x) = -\frac{F_{xx}(x, f_1(x))}{F_y(x, f_1(x))} = -\frac{6x^2 + a}{f_1(x)[2(f_1(x))^2 - a]}$$

da cui

$$f_1''(0) = -\frac{F_{xx}(0, \sqrt{a})}{F_y(0, \sqrt{a})} = -\frac{a}{\sqrt{a}[2a - a]} = -\frac{1}{\sqrt{a}} < 0$$

mentre

$$f_2''(0) = -\frac{F_{xx}(0, -\sqrt{a})}{F_y(0, -\sqrt{a})} = \frac{a}{\sqrt{a}[2a - a]} = \frac{1}{\sqrt{a}} > 0.$$

Quindi la funzione implicita  $y = f_1(x)$  ha in  $x = 0$  un punto di massimo relativo, mentre la funzione  $y = f_2(x)$  ha in  $x = 0$  un punto di minimo relativo. Il grafico seguente illustra il comportamento qualitativo della curva  $F(x, y) = 0$  con la scelta di  $a = 100$ ; esso non visualizza correttamente il comportamento della curva nell'origine.

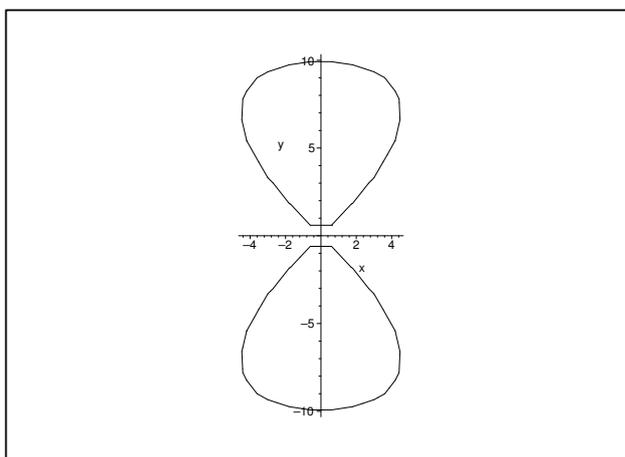


Figura 5.6: Grafico qualitativo della curva  $F(x, y) = 0$ .

 **Esempio 5.11.14.** Sia

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = y^2 - 4x^3 - x^2.$$

Vogliamo vedere dove l'equazione  $f(x, y) = 0$  è localmente grafico di qualche funzione. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (-12x^2 - 2x, 2y) = (0, 0)$$

Nei punti  $(x_0, y_0)$  tali che  $f(x_0, y_0) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  cioè nei punti  $(x_0, y_0)$  tali che  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  e  $(x_0, y_0) \neq \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$  con  $x_0 > -1/4$  l'equazione  $f(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $g : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$  con  $f(x, g(x)) = 0$ . La condizione  $x_0 > -1/4$  è necessaria visto che se  $x_0 < -1/4$  si ha  $y_0^2 - x_0^2[4x_0 + 1] > y_0^2 \geq 0$  e dunque  $f(x_0, y_0) > 0$  contro il fatto che  $g$  è funzione definita implicitamente dall'equazione  $f(x, y) = 0$ . In questo caso è possibile scrivere esplicitamente la funzione  $g$  :

$$g(x) = \text{sign}(y_0)\sqrt{4x^3 + x^2} \quad (5.11.1)$$

dove

$$\text{sign}(y_0) = \begin{cases} 1 & y_0 > 0 \\ 0 & y_0 = 0 \\ -1 & y_0 < 0. \end{cases}$$

È possibile mostrare che, in conformità con quanto si ottiene dal teorema del Dini

$$g'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, g(x_0))}{f_y(x_0, g(x_0))}.$$

Infatti, derivando in (5.11.1) si ottiene

$$g'(x_0) = \text{sign}(y_0) \frac{1}{2\sqrt{4x_0^3 + x_0^2}} (12x_0^2 + 2x_0)$$

mentre

$$f_x(x_0, g(x_0)) = -12x_0^3 - 2x_0 \quad f_y(x_0, g(x_0)) = 2g(x_0).$$

Dal confronto si ottiene il risultato ottenuto.

Vediamo ora i punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) = y_0^2 - 4x_0^3 - x_0^2 = 0 \\ f_x(x_0, y_0) = -12x_0^2 - 2x_0 = 0 \end{cases}$$

Il precedente sistema è soddisfatto dai punti

$$(0, 0) \quad \left(-\frac{1}{6}, \pm\sqrt{\frac{1}{108}}\right).$$

Quindi, se  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  e  $(x_0, y_0) \neq \left(-\frac{1}{6}, \pm\sqrt{\frac{1}{108}}\right)$  (con  $x_0 > -1/4$  altrimenti  $f(x_0, y_0) > 0$ ) allora la curva è localmente grafico di una funzione  $h : (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  ma in questo caso non è possibile scrivere esplicitamente  $h$  senza risolvere l'equazione di terzo grado  $4x^3 + x^2 - y = 0$ .

✎ **Esempio 5.11.15.** (LEMNISCATA DI BERNOULLI) La lemniscata di Bernoulli è il luogo dei punti del piano  $\mathbb{R}^2$  tali che il prodotto delle distanze da  $(a, 0)$  e  $(-a, 0)$  è uguale ad  $a^2$ , cioè

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Poniamo  $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$ . Si ha

$$\nabla F(x, y) = (4x(x^2 + y^2 - a^2), 4y(x^2 + y^2 + a^2)) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (\pm a\sqrt{2}, 0).$$

Tutti questi punti soddisfano  $F(x, y) = 0$ . In questi punti non posso applicare il teorema del Dini, mentre per tutti gli altri punti  $(x_0, y_0)$  si ha che l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $y = y(x)$  tale che si abbia

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y(x_0))}{F_y(x_0, y(x_0))} = \frac{x_0(x_0^2 + y_0^2) - ax_0^2}{y_0(x_0^2 + y_0^2) + a^2y_0}.$$

### 5.11.3. Funzione implicita di $n$ variabili

Naturalmente tutti i discorsi fatti fino ad ora relativamente alle funzioni definite implicitamente da un'equazione del tipo  $f(x, y) = 0$  si possono generalizzare al caso di funzioni di  $n$  variabili. Per esempio, supponiamo di considerare l'equazione

$$f(x, y, z) = 0$$

con  $f$  di classe  $\mathcal{C}^1$  e supponiamo che essa sia soddisfatta in un certo punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . Ci chiediamo se esistono un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  e una funzione  $z = g(x, y)$  definita e regolare in  $U$  tale che risulti

$$f(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in U.$$

In questo caso diremo che  $g$  è definita implicitamente dall'equazione  $f(x, y, z) = 0$ . Se questo è vero, derivando rispetto a  $x$  l'identità precedente, si avrà

$$f_x(x, y, g(x, y)) + f_z(x, y, g(x, y))g_x(x, y) = 0$$

quindi

$$g_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))} \quad \text{e} \quad g_x(x_0, y_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{f_z(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}.$$

Analogamente

$$g_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))} \quad \text{e} \quad g_y(x_0, y_0) = -\frac{f_y(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{f_z(x_0, y_0, g(x_0, y_0))},$$

a patto che sia  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ; se tale derivata si annulla, basta che almeno una delle altre due nel punto considerato non si annulli. Si comprende quindi come si arriva alla seguente generalizzazione del Teorema del Dini.

**Teorema 5.11.16.** (TEOREMA DI DINI O DELLA FUNZIONE IMPLICITA: CASO  $n$  DIMENSIONALE) *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  aperto) una funzione di classe  $\mathcal{C}^1(A)$ . Supponiamo che*

$$f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$$

*per un certo punto  $(\mathbf{x}_0, y_0) \in A$  (dove  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}$ ). Allora esistono un intorno  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  di  $\mathbf{x}_0$  e un'unica funzione  $g : U \rightarrow \mathbb{R}, g \in \mathcal{C}^1(U)$  tale che*

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U; \quad g_{x_j}(\mathbf{x}) = -\frac{f_{x_j}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{f_y(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))} \quad \forall \mathbf{x} \in U, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

 **Esempio 5.11.17.** *Verificare che l'equazione*

$$x^4 + 2y^3 + z^3 - yz - 2y = 0$$

*definisce implicitamente  $z = g(x, y)$  in un intorno di  $(0, 1, 0)$ . Scrivere poi l'equazione del piano tangente in  $(0, 1, 0)$  alla superficie di equazione  $z - g(x, y) = 0$ .*

L'idea è quella di applicare il teorema del Dini. Verifichiamo che questo teorema è applicabile nell'intorno del punto  $P = (0, 1, 0)$ . Si ha  $f(x, y, z) := x^4 + 2y^3 + z^3 - yz - 2y$ . Abbiamo  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $f(0, 1, 0) = 0$  e  $f_z(x, y, z) = 3z^2 - y$  da cui  $f_z(0, 1, 0) = -1 \neq 0$ . Dunque dal teorema del Dini ho che esiste un intorno  $I$  del punto  $(0, 1)$  e una funzione  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x, y, g(x, y)) = 0$  per ogni  $(x, y) \in I$ . Si ha inoltre  $g(0, 1) = 0$  e che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 0)} = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 0)} = 4.$$

L'equazione del piano tangente è

$$z = g(0, 1) + \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1)(x - 0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1)(y - 1)$$

cioè  $z = 4(y - 1)$ .

---

## CAPITOLO 6

---

# Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali

In questo capitolo inizieremo a studiare funzioni di più variabili a valori vettoriali, cioè oggetti del tipo  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n, m > 1$ . In particolare ora e nei capitoli successivi lavoreremo con:

- 1) superfici in forma parametrica in  $\mathbb{R}^3$ ;
- 2) trasformazioni di coordinate in  $\mathbb{R}^3$ ;
- 3) campi vettoriali, cioè funzioni  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

### 6.1. Superfici in forma parametrica

---

Abbiamo visto che un modo per rappresentare una curva nel piano o nello spazio è darla in forma parametrica, ovvero dare una funzione  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  oppure  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che il sostegno della curva sia rappresentato dai punti  $(x(t), y(t))$  o  $(x(t), y(t), z(t))$ , dipendenti da un parametro. Quindi in generale possiamo distinguere (esemplificando nel caso  $n = 2$ ):

- 1) rappresentazione in forma *implicita*  $f(x, y) = 0$ ;
- 2) rappresentazione in forma *esplicita* o in forma di *grafico*  $y = g(x)$ ;
- 3) rappresentazione *parametrica*  $t \mapsto (x(t), y(t))$ .

Cosa accade per le superfici? Per le superfici abbiamo le seguenti modalità di rappresentazione:

- 1) rappresentazione in forma *implicita*  $f(x, y, z) = 0$ ;
- 2) rappresentazione in forma *esplicita* o in forma di *grafico*  $z = g(x, y)$ ;
- 3) rappresentazione *parametrica*  $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Quindi riguardo alla rappresentazione parametrica di superfici, le tre coordinate di un punto mobile sulla superficie dipenderanno stavolta da due parametri, coerentemente col fatto che un punto vincolato a muoversi su una superficie ha due gradi di libertà. Quindi

□ **Definizione 6.1.1.** Una SUPERFICIE IN FORMA PARAMETRICA è una funzione  $\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

✎ **Esempio 6.1.2.** La sfera di raggio  $R$  e centro l'origine ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi].$$

$R$  è fissato;  $\varphi$  (colatitudine) e  $\theta$  (longitudine) variano.

È naturalmente essenziale precisare l'insieme dove variano i parametri.

## 6.2. Limiti, continuità e differenziabilità per funzioni di più variabili a valori vettoriali

Vogliamo ora studiare i concetti di limite, continuità e differenziabilità per funzioni di più variabili a valori vettoriali. È chiaro che si riuniscono qui due fatti: le nozioni di limite, continuità e differenziabilità per funzioni reali di più variabili e il fatto che in generale, per studiare una funzione a valori vettoriali si può ragionare componente per componente.

□ **Definizione 6.2.1.** Sia  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definita almeno in un intorno del punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , salvo al più il punto  $\mathbf{x}_0$  stesso e sia  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$ . Allora si dice che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

se accade

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| = 0.$$

Se  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , possiamo scrivere

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \quad \text{con } f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ per } i = 1, 2, \dots, m.$$

Le funzioni  $f_i$  si diranno COMPONENTI di  $\mathbf{f}$  e sono funzioni reali di più variabili. Analogamente a quanto visto per funzioni di una variabile a valori vettoriali, si dimostra che il limite si calcola componente per componente

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) = \left( \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \dots, \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x}) \right).$$

In maniera naturale si introduce il concetto di FUNZIONE CONTINUA e si dimostra che una funzione  $\mathbf{f}$  è continua se e soltanto se lo sono tutte le sue componenti. Quindi sia la nozione di limite che quella di continuità si riconducono alle analoghe nozioni per funzioni di più variabili a valori reali.

□ **Definizione 6.2.2.** Diremo che  $\mathbf{f}$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  se tutte le componenti lo sono. Esplicitamente questo significa che per  $i = 1, 2, \dots, m$  valgono le relazioni

$$f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j + o(|\mathbf{h}|) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

Queste  $m$  relazioni si possono anche scrivere in maniera compatta in *forma matriciale*. Infatti rappresentando la funzione  $\mathbf{f}$  e i punti di  $\mathbb{R}^n$  come vettori colonna delle loro componenti si ha

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

A questo punto possiamo introdurre la MATRICE JACOBIANA di  $\mathbf{f}$  che ha per righe i gradienti delle componenti di  $\mathbf{f}$  calcolate nel punto  $\mathbf{x}_0$  (che si indica con  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0)$  oppure anche con  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)$ )

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x}_0).$$

Si nota che la matrice Jacobiana ha  $m$  righe e  $n$  colonne. Allora la differenziabilità si può riscrivere usando la relazione

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

In questo caso dunque la quantità  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$  indica il prodotto matriciale (quindi righe per colonne) tra la matrice Jacobiana di  $\mathbf{f}$  calcolata in  $\mathbf{x}_0$  e l'incremento  $\mathbf{h}$  (che è un vettore).

□ **Definizione 6.2.3.** Il DIFFERENZIALE di  $\mathbf{f}$  (calcolato in  $\mathbf{x}_0$ ) è la funzione lineare  $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definita da:

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}.$$

Ragionando componente per componente e applicando la condizione sufficiente per la differenziabilità delle funzioni a valori reali, si ottiene il seguente teorema.

**Teorema 6.2.4.** *Condizione sufficiente affinché una funzione  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $A$  aperto sia differenziabile in  $A$  è che tutti gli elementi della sua matrice Jacobiana siano funzioni continue in  $A$ .*

Anche nel caso vettoriale naturalmente è vero che se  $\mathbf{f}$  è differenziabile allora è derivabile e continua, ma il viceversa non vale.

La nozione di matrice Jacobiana permette di enunciare il teorema della differenziazione di funzioni composte in un'unica forma che comprende i casi particolari già trattati.

**Teorema 6.2.5.** *Siano  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{g} : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  e supponiamo che la funzione composta  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  sia ben definita almeno in un intorno  $C$  di  $\mathbf{x}_0 \in A$ , cioè si abbia  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Supponiamo che  $\mathbf{f}$  sia differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{g}$  sia differenziabile in  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Allora anche la composta  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  risulta differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e la sua matrice Jacobiana si ottiene come prodotto matriciale delle matrici Jacobiane di  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ , calcolate nei punti  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  rispettivamente, cioè*

$$\mathbf{J}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

 **Esempio 6.2.6.** Siano  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  date da

$$\mathbf{F}(u, v, w) = (u + v, e^w) \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\mathbf{G}(x, y) = (y - x, \sin x) \quad \forall (x, y) \in [0, 2\pi]^2.$$

Le composizioni  $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$  hanno senso? Per quella (o quelle) che lo avessero, si calcoli la matrice Jacobiana.

La funzione composta  $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$  ha senso perché il codominio di  $\mathbf{F}$  coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di  $\mathbf{G}$ . La funzione composta  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$  non ha senso perché il codominio di  $\mathbf{G}$  ha dimensione 2 mentre il dominio di  $\mathbf{F}$  ha dimensione 3.

Si ha  $\mathbf{H} := \mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\mathbf{H}(u, v, w) = (e^w - u - v, \sin(u + v))$ .

Poniamo

$$H_1(u, v, w) = e^w - u - v \quad H_2(u, v, w) = \sin(u + v).$$

La funzione  $\mathbf{H}$  è differenziabile in tutti i punti di  $\mathbb{R}^3$  perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti.

Primo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $\mathbf{H}$ .

Si ha

$$J_{\mathbf{H}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial u} & \frac{\partial H_1}{\partial v} & \frac{\partial H_1}{\partial w} \\ \frac{\partial H_2}{\partial u} & \frac{\partial H_2}{\partial v} & \frac{\partial H_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^w \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $\mathbf{H}$ .

Le funzioni  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  sono differenziabili in quanto lo sono tutte le loro componenti. Quindi ha senso calcolare le matrici Jacobiane di  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$ . Poniamo  $F_1(u, v, w) = u + v$ ,  $F_2(u, v, w) = e^w$ ,  $G_1(x, y) = y - x$  e  $G_2(x, y) = \sin x$ . Quindi si ha

$$J_{\mathbf{F}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}$$

$$J_{\mathbf{G}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto la matrice Jacobiana di  $\mathbf{G}$  va calcolata nel punto  $\mathbf{F}(u, v, w) = (u + v, e^w)$  e si ha dunque

$$J_{\mathbf{G}}[\mathbf{F}(u, v, w)] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_{\mathbf{H}}(u, v, w) := J_{\mathbf{G}}[\mathbf{F}(u, v, w)] \cdot J_{\mathbf{F}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^w \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}.$$

## 6.3. Superfici regolari in forma parametrica

---

Abbiamo in precedenza introdotto la definizione di superficie in forma parametrica. In questo paragrafo vogliamo capire come si legge dalla parametrizzazione della superficie il fatto che essa sia regolare (per esempio dotata in ogni punto del piano tangente).

Ragioniamo in modo analogo a quando euristicamente abbiamo individuato l'equazione del piano tangente per funzioni di due variabili.

---

Se fissiamo uno dei due parametri, per esempio  $v = v_0$ , e facciamo variare  $u$ , otteniamo una curva sulla superficie; se fissiamo l'altro parametro, per esempio  $u = u_0$  e lasciamo variare  $v$  otteniamo un'altra curva sulla superficie. Più precisamente, al variare del valore fissato  $v = v_0$  otteniamo una famiglia di curve; al variare di  $u = u_0$  otteniamo un'altra famiglia di curve sulla superficie. Queste due famiglie di linee si chiamano LINEE COORDINATE. È facile vedere che per ogni punto sulla superficie passa esattamente una curva di ciascuna delle due famiglie.

Quindi esplicitamente le linee coordinate hanno equazioni

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v).$$

Il vettore tangente a una linea coordinata è dato rispettivamente da

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0)) \quad \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0)).$$

Visto che  $\mathbf{r}$  è differenziabile, questi due vettori sono ben definiti.

Il piano tangente alla superficie è l'unico piano che contiene questi due vettori e risulta ben definito se i due vettori sono non nulli e non sono paralleli. Queste due ultime richieste sono equivalenti a richiedere che il prodotto vettoriale dei due vettori non si annulli, ossia

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Questa condizione è algebricamente equivalente al fatto che la matrice Jacobiana di  $\mathbf{r}$  abbia rango (o caratteristica) 2, cioè rango massimo.

**□ Definizione 6.3.1.** Una superficie parametrizzata da  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  con  $\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice **REGOLARE** se  $\mathbf{r}$  è differenziabile in  $A$  e inoltre la matrice Jacobiana di  $\mathbf{r}$  ha rango 2 in ogni punto di  $A$ .

Se in qualche punto di  $A$  le condizioni vengono violate chiameremo **PUNTI SINGOLARI** della superficie i punti corrispondenti.

Il vettore  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  la cui esistenza e non annullamento definisce il concetto di regolarità della superficie, per le proprietà del prodotto vettoriale, è anche ortogonale al piano che contiene i vettori  $\mathbf{r}_u$  e  $\mathbf{r}_v$ , cioè ortogonale al piano tangente. Tale vettore può dirsi **NORMALE** alla superficie. Il suo versore prende il nome di **VERSORE NORMALE**. Si indica con

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

Si noti che il verso di  $\mathbf{n}$  dipende dall'ordine in cui consideriamo i parametri  $(u, v)$  e quindi dall'ordine in cui effettuiamo il prodotto vettoriale.

Scriviamo ora l'equazione del piano tangente alla superficie. Se  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  è il punto mobile sul piano tangente e  $\mathbf{x}_0$  è il punto in cui vogliamo calcolare il piano tangente, il vettore  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  dovrà essere ortogonale a  $\mathbf{n}$  e quindi anche a  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ . L'equazione del piano tangente è dunque

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = 0$$

ossia

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix}$$

### 6.3.1. Superfici cartesiane (grafico di una funzione di due variabili)

Come già accennato, il grafico  $z = f(x, y)$  con  $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$  è una superficie che si può scrivere in forma parametrica nel modo seguente

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in A$$

Quindi il vettore normale si calcola come segue

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u(u_0, v_0) \\ 0 & 1 & f_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} = -\mathbf{i}f_u - \mathbf{j}f_v + \mathbf{k}$$

quindi

$$\mathbf{n} = \frac{-\mathbf{i}f_u - \mathbf{j}f_v + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

Quindi l'orientazione indotta sulla superficie è con la normale verso l'alto. Si noti che se  $f$  è differenziabile in  $A$ , il suo grafico è sempre una superficie regolare (la matrice Jacobiana ha sempre un minore  $2 \times 2$  con determinante uguale a 1).

### 6.3.2. Superfici di rotazione

Molte superfici comuni si possono ottenere facendo ruotare una curva  $\gamma$  detta **GENERATRICE** attorno a un asse. In questo modo è anche facile scriverne le equazioni parametriche. Infatti se considero in un riferimento cartesiano l'asse  $z$  come l'asse attorno al quale vogliamo far ruotare la curva, assegnata in forma parametrica dalla formula

$$\begin{cases} x = x(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I.$$

In tal caso la superficie che si ottiene con una rotazione completa della curva  $\gamma$  attorno all'asse  $z$  è

$$\begin{cases} x = x(t) \cos \theta \\ y = x(t) \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I, \theta \in [0, 2\pi).$$

Diamo ora alcuni esempi delle principali superfici di rotazione.

 **Esempio 6.3.2.** (LA SFERA) È generata dalla rotazione attorno all'asse  $z$  della semicirconferenza posta nel piano  $x, z$

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Quindi le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi).$$

 **Esempio 6.3.3.** (IL TORO) È generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  della circonferenza posta nel piano  $x, z$  di centro  $(R, 0)$  e raggio  $r < R$

$$\begin{cases} x = R + r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Quindi le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (R + r \cos \varphi) \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, 2\pi).$$

 **Esempio 6.3.4.** (IL CONO A DUE FALDE) È generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  di una retta nel piano  $x, z$  passante per l'origine di equazione  $z = mx$ , con  $x \in \mathbb{R}$ . In forma parametrica la retta si scrive come

$$\begin{cases} x = t \\ z = mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \\ z = mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi).$$

 **Esempio 6.3.5.** (IL CILINDRO) *Il cilindro di raggio  $r$  è generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  di una retta assegnata nel piano  $x, z$  di equazioni*

$$\begin{cases} x = r \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi).$$

 **Esempio 6.3.6.** (L'ELLISSOIDE DI ROTAZIONE) *È generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  di una semiellisse nel piano  $x, z$  di equazioni*

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \\ z = b \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Quindi le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta \\ y = a \sin \varphi \sin \theta \\ z = b \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi).$$

## 6.4. Retta normale e piano tangente a superfici, retta tangente e piano normale (o retta normale) a curve

Riassumiamo qui di seguito le equazioni parametriche o cartesiane (implicite o esplicite) di piano tangente e retta normale a superfici, a loro volta date in forma cartesiana (implicita o esplicita) o parametrica e per completezza riportiamo anche le equazioni parametriche o cartesiane della retta tangente e del piano normale a curve in  $\mathbb{R}^3$  (e della retta normale a curve in  $\mathbb{R}^2$ ), a loro volta date in forma parametrica.

### 6.4.1. Caso della superficie in $\mathbb{R}^3$

Sia data una superficie in forma implicita tramite l'equazione  $g(x, y, z) = 0$ . Allora ha senso dare la nozione di piano tangente e di retta normale in un punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . L'equazione cartesiana (o implicita) del piano tangente è:

$$(x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (6.4.1)$$

mentre l'equazione parametrica della retta normale è

$$\begin{cases} x = x_0 + t \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + t \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ z = z_0 + t \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{cases} \quad (6.4.2)$$

È facile dalla (6.4.1) ricavare l'equazione del piano in forma esplicita (basta isolare una delle tre variabili) oppure in forma parametrica (basta porre  $x = s$ ,  $y = t$  da cui segue  $z$  come funzione di  $s$  e  $t$ ). Invece dalla (6.4.2) si può eliminare il parametro ottenendo l'equazione della retta in forma cartesiana o implicita

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Ovviamente si tratta di due equazioni perché una retta nello spazio è descritta da due equazioni. Se la superficie è data in forma esplicita, ad esempio  $z = f(x, y)$  allora ponendo  $g(x, y, z) := f(x, y) - z$  si possono applicare le formule precedenti per ricavare in questo specifico caso l'equazione del piano tangente e della retta normale.

Infine sia la superficie data in forma parametrica, cioè sia

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(t, s) = (r_1(t, s), r_2(t, s), r_3(t, s))$$

una parametrizzazione della superficie. Allora l'equazione parametrica del piano tangente in un punto  $(t_0, s_0)$  è

$$\begin{cases} x = x_0 + t \frac{\partial r_1}{\partial t}(t_0, s_0) + s \frac{\partial r_1}{\partial s}(t_0, s_0) \\ y = y_0 + t \frac{\partial r_2}{\partial t}(t_0, s_0) + s \frac{\partial r_2}{\partial s}(t_0, s_0) \\ z = z_0 + t \frac{\partial r_3}{\partial t}(t_0, s_0) + s \frac{\partial r_3}{\partial s}(t_0, s_0) \end{cases} \quad \text{dove } (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Un'equazione cartesiana del piano tangente si ottiene poi eliminando i parametri  $t$  e  $s$ .

Invece l'equazione cartesiana della retta normale è data da

$$\begin{cases} (x - x_0) \frac{\partial r_1}{\partial t}(t_0, s_0) + (y - y_0) \frac{\partial r_2}{\partial t}(t_0, s_0) + (z - z_0) \frac{\partial r_3}{\partial t}(t_0, s_0) = 0 \\ (x - x_0) \frac{\partial r_1}{\partial s}(t_0, s_0) + (y - y_0) \frac{\partial r_2}{\partial s}(t_0, s_0) + (z - z_0) \frac{\partial r_3}{\partial s}(t_0, s_0) = 0. \end{cases}$$

6.4.2. Caso della curva in  $\mathbb{R}^2$ 

Sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  una parametrizzazione della curva piana e sia  $g(x, y) = 0$  la sua equazione cartesiana (o implicita). Allora le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta tangente sono rispettivamente

$$\begin{cases} x = x_0 + t \gamma'_1(t_0) \\ y = y_0 + t \gamma'_2(t_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$(x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Invece le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta normale sono

$$\begin{cases} x = x_0 + t \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ y = y_0 + t \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$(x - x_0) \gamma'_1(t_0) + (y - y_0) \gamma'_2(t_0) = 0.$$

6.4.3. Caso della curva in  $\mathbb{R}^3$ 

Sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  una parametrizzazione di una curva nello spazio e siano  $g_1(x, y, z) = 0$  e  $g_2(x, y, z) = 0$  le equazioni cartesiane locali. Allora le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane della retta tangente sono rispettivamente le seguenti

$$\begin{cases} x = x_0 + t \gamma'_1(t_0) \\ y = y_0 + t \gamma'_2(t_0) \\ z = z_0 + t \gamma'_3(t_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$\begin{cases} (x - x_0) \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial g_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ (x - x_0) \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial g_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

mentre le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del piano normale sono

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + t_2 \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + t_1 \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + t_2 \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ z = z_0 + t_1 \frac{\partial g_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + t_2 \frac{\partial g_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

e

$$(x - x_0) \gamma'_1(t_0) + (y - y_0) \gamma'_2(t_0) + (z - z_0) \gamma'_3(t_0) = 0.$$

✎ **Esercizio 6.4.1.** Data la superficie  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^3$  di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(u, v) = (uv + 1, u^2 - v^2, 3uv), \quad u^2 + v^2 \leq 1,$$

scrivere le equazioni cartesiane e parametriche della retta perpendicolare e del piano tangente a  $\Sigma$  in  $(2, 0, 3)$ .

Sia la superficie data in forma parametrica, cioè sia

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$$

una parametrizzazione della superficie. Allora l'equazione parametrica del piano tangente in un punto  $(u_0, v_0)$  è

$$\begin{cases} x = x_0 + u \frac{\partial r_1}{\partial u}(u_0, v_0) + v \frac{\partial r_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y = y_0 + u \frac{\partial r_2}{\partial u}(u_0, v_0) + v \frac{\partial r_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z = z_0 + u \frac{\partial r_3}{\partial u}(u_0, v_0) + v \frac{\partial r_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{cases} \quad \text{dove } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Invece l'equazione cartesiana della retta normale è data da

$$\begin{cases} (x - x_0) \frac{\partial r_1}{\partial u}(u_0, v_0) + (y - y_0) \frac{\partial r_2}{\partial u}(u_0, v_0) + (z - z_0) \frac{\partial r_3}{\partial u}(u_0, v_0) = 0 \\ (x - x_0) \frac{\partial r_1}{\partial v}(u_0, v_0) + (y - y_0) \frac{\partial r_2}{\partial v}(u_0, v_0) + (z - z_0) \frac{\partial r_3}{\partial v}(u_0, v_0) = 0. \end{cases}$$

Nel nostro caso si vede che  $(u_0, v_0) = (1, 1)$  corrisponde a  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 3)$ . In tal caso si ha

$$\begin{array}{lll} r_1(u, v) = uv + 1 & \frac{\partial r_1}{\partial u} = v & \frac{\partial r_1}{\partial v} = u \\ r_2(u, v) = u^2 - v^2 & \frac{\partial r_2}{\partial u} = 2u & \frac{\partial r_2}{\partial v} = -2v \\ r_3(u, v) = 3uv & \frac{\partial r_3}{\partial u} = 3v & \frac{\partial r_3}{\partial v} = 3u \end{array}$$

Allora l'equazione parametrica del piano tangente nel punto  $(1, 1)$  è

$$\begin{cases} x = 2 + u + v \\ y = 2u - 2v \\ z = 3 + 3u + 3v \end{cases} \quad \text{dove } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Invece l'equazione cartesiana della retta normale è data da

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 11. \end{cases}$$

✎ **Esercizio 6.4.2.** Si scrivano, sia in forma parametrica che in forma implicita, l'equazione della retta normale e l'equazione del piano tangente alla superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \sin(x + y) + 2z^2 = 2\}$$

nel punto  $P = (0, 0, 1)$ .

Questo esercizio si può risolvere in tre modi.

Primo modo. Si possono usare le formule del piano tangente e della retta normale (nel punto generico  $(x_0, y_0, z_0)$ ) a una superficie data nella forma  $f(x, y, z) = 0$  che sono rispettivamente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

e

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} = 0.$$

Quindi si ha

$$f(x, y, z) = x^2 + \sin(x + y) + 2z^2 - 2 \quad (x_0, y_0, z_0) = P = (0, 0, 1)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x + \cos(x + y) & \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \cos(x + y) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 1) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 4z & \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) &= 4 \end{aligned}$$

quindi l'equazione del piano tangente (in forma implicita) alla superficie  $S$  nel punto  $P$  è

$$1(x - 0) + 1(y - 0) + 4(z - 1) = 0$$

cioè

$$x + y + 4z = 4.$$

L'equazione del piano tangente (in forma parametrica) alla superficie  $S$  nel punto  $P$  è ad esempio

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 1 - \frac{t + s}{4}. \end{cases}$$

L'equazione della retta normale (in forma implicita) alla superficie  $S$  nel punto  $P$  è

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{4}$$

e dunque

$$\begin{cases} x = y \\ 4y = z - 1. \end{cases}$$

L'equazione della retta normale (in forma parametrica) alla superficie  $S$  nel punto  $P$  è, ad esempio

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 4t + 1. \end{cases}$$

Secondo modo. Scriviamo la superficie  $S$  in forma esplicita  $z = g(x, y)$  (esplicitando la variabile  $z$ ). Si ha

$$z^2 = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + \sin(x+y))$$

da cui

$$z = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}(x^2 + \sin(x+y))}.$$

Siccome vado ad analizzare le cose nell'intorno del punto  $P$ , scelgo

$$z = \sqrt{1 - \frac{1}{2}(x^2 + \sin(x+y))}.$$

In tal caso, le equazioni (in forma implicita) del piano tangente e della retta normale alla superficie  $S$  (data nella forma  $z = g(x, y)$ ) nel punto  $Q = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$  sono rispettivamente

$$z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

e

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - g(x_0, y_0)}{-1}.$$

Dunque, essendo  $Q = (0, 0, 1)$ , si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{-x - \frac{1}{2} \cos(x+y)}{2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}(x^2 + \sin(x+y))}} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = -\frac{1}{4}$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{1}{2} \cos(x+y)}{2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}(x^2 + \sin(x+y))}} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = -\frac{1}{4}$$

quindi l'equazione del piano tangente in forma esplicita alla superficie  $S$  nel punto  $Q$  viene ad essere

$$z = 1 - \frac{1}{4}(x + y)$$

mentre quella della retta normale è

$$\frac{x - 0}{-\frac{1}{4}} = \frac{y - 0}{-\frac{1}{4}} = \frac{z - 1}{-1};$$

lavorando come al punto precedente possiamo di nuovo ricavare le equazioni in forma parametrica.

Terzo modo. Visto che l'equazione della superficie è data in forma implicita, se non vogliamo esplicitarla rispetto ad una variabile, possiamo ad esempio servirci del teorema del Dini. Verifichiamo che questo teorema è applicabile nell'intorno del punto  $P = (0, 0, 1)$ . Si ha  $f(x, y, z) := x^2 + \sin(x + y) + 2z^2 - 2$ . Abbiamo  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $f(0, 0, 1) = 0$  e dal primo punto dell'esercizio  $f_z(0, 0, 1) = 4 \neq 0$ . Allora può applicare il teorema del Dini; indicando con  $g$  la funzione implicita, si può dedurre che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1)} = -\frac{1}{4}$$

mentre

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1)} = -\frac{1}{4}.$$

Tenendo conto che  $g(0, 0) = 1$ , l'equazione del piano tangente e della retta normale in forma implicita si leggono rispettivamente

$$z = g(0, 0) + \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)(y - 0)$$

e

$$\frac{x - 0}{\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)} = \frac{y - 0}{\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)} = \frac{z - g(0, 0)}{-1}.$$

Inserendo i nostri dati si ottengono le stesse equazioni dedotte nei punti precedenti.

## 6.5. Teorema della funzione inversa e trasformazioni di coordinate

□ **Definizione 6.5.1.** Una funzione  $\mathbf{f} : A \rightarrow B$  con  $A, B$  aperti di  $\mathbb{R}^n$  si dice **INVERTIBILE** in  $A$  se è iniettiva ossia

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2.$$

$\mathbf{f}$  si dice **SURIETTIVA** su  $B$  se

$$\forall \mathbf{y} \in B, \exists \mathbf{x} \in A \text{ tale che } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

Infine  $\mathbf{f}$  si dice **BIETTIVA** O **BIUNIVOCA** se è iniettiva e suriettiva, ossia

$$\forall \mathbf{y} \in B, \exists! \mathbf{x} \in A \text{ tale che } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

In tal caso la corrispondenza che associa ad ogni  $\mathbf{y} \in B$  questo elemento  $\mathbf{x} \in A$  univocamente determinato si dice **FUNZIONE INVERSA** di  $\mathbf{f}$ .

Si ha il seguente risultato.

**Teorema 6.5.2.** (INVERSIONE LOCALE) *Sia  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $A$  aperto tale che  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(A)$ . Supponiamo che per un certo punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  si abbia  $\det \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Allora esistono un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  e un intorno  $V$  di  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  tra i quali la funzione  $\mathbf{f}$  è biunivoca. Inoltre detta  $\mathbf{g} : V \rightarrow U$  la corrispondenza inversa si ha che  $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(V)$  e*

$$\mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

Osserviamo che le corrispondenze di questo tipo risultano invertibili *solo localmente* anche se le ipotesi sono verificate in ogni punto del dominio. Questo è diverso dal caso unidimensionale per cui se  $f'(x) \neq 0$  allora  $f'$  ha segno costante e quindi  $f$  è strettamente monotona da cui  $f$  invertibile (globalmente).

□ **Definizione 6.5.3.** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una trasformazione di coordinate  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **DIFFEOMORFISMO** (O **DIFFEOMORFISMO GLOBALE**) se  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(A)$ ,  $\mathbf{f}$  globalmente invertibile in  $A$  e la sua inversa  $\mathbf{g} : \mathbf{f}(A) \rightarrow A$  è di classe  $\mathcal{C}^1(A)$  nel suo dominio  $\mathbf{f}(A)$ .  $\mathbf{f}$  si dice **DIFFEOMORFISMO LOCALE** se  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(A)$  e per ogni  $\mathbf{x}_0 \in A$  ha un intorno  $U \subset A$  in cui  $\mathbf{f}$  è invertibile con inversa di classe  $\mathcal{C}^1$ .

Il teorema di inversione locale garantisce che una trasformazione di coordinate  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(A)$  e  $\det \mathbf{Jf}(\mathbf{x}) \neq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in A$  sia un diffeomorfismo locale in  $A$ . Se queste condizioni sono soddisfatte con l'eccezione di qualche punto di  $A$ , allora questi punti si diranno PUNTI SINGOLARI della trasformazione.

 **Esempio 6.5.4.** (COORDINATE POLARI NEL PIANO) Consideriamo la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta & \rho \in [0, +\infty) \\ y = \rho \sin \theta & \theta \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

con determinante  $\rho$ . Quindi la trasformazione è regolare con l'eccezione di  $\rho = 0$ . Se restringiamo dunque la trasformazione a

$$\mathbf{T}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \quad \text{in} \quad A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$$

otteniamo un diffeomorfismo globale tra  $A$  e il piano di  $\mathbb{R}^2$  privato della semiretta  $x \geq 0$  e  $y = 0$ .

 **Esempio 6.5.5.** (COORDINATE CILINDRICHE IN  $\mathbb{R}^3$ ) Consideriamo la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta & \rho \in [0, +\infty) \\ y = \rho \sin \theta & \theta \in [0, 2\pi) \\ z = t & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante  $\rho$ . Quindi la trasformazione è regolare con l'eccezione di  $\rho = 0$ . Se restringiamo dunque la trasformazione all'aperto

$$A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

otteniamo un diffeomorfismo globale tra  $A$  e  $\mathbb{R}^3$  privato della semiretta  $x \geq 0$  e  $y = 0$ .

 **Esempio 6.5.6.** (COORDINATE SFERICHE IN  $\mathbb{R}^3$ ) Consideriamo la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \in [0, +\infty) \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta & \theta \in [0, 2\pi) \\ z = \rho \cos \varphi & \varphi \in [0, \pi]. \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante  $\rho^2 \sin \varphi$ . Quindi la trasformazione è regolare con l'eccezione di  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$  e  $\rho = 0$ . Se restringiamo dunque la trasformazione all'aperto

$$A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$$

otteniamo un diffeomorfismo globale.

## 6.6. Ottimizzazione vincolata. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

---

In molti problemi di ottimizzazione le variabili indipendenti sono soggette a vincoli di vario tipo, per esempio problemi con ostacolo, dove ad esempio il minimo di certe energie deve stare sopra una funzione data, detta appunto ostacolo. L'importanza di questi problemi dunque è molto rilevante nel contesto delle applicazioni e merita grande attenzione. Come sopra distinguiamo il caso  $n = 2$  dal caso generale.

### 6.6.1. Caso $n = 2$ : vincolo esplicitabile

Formalizziamo prima di tutto il problema di estremo vincolato nel caso in cui la funzione obiettivo da ottimizzare dipende da due variabili legate da un'equazione di vincolo. Per semplicità lavoriamo con funzioni definite su tutto il piano. Il problema dunque che ci poniamo è quello di minimizzare (o massimizzare) una funzione  $f(x, y)$  di classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  sotto la condizione di vincolo  $g(x, y) = b$ . Nello spazio  $f(x, y)$  rappresenta il grafico di una superficie, il vincolo rappresenta (in generale) una curva. È chiaro che un punto di massimo o minimo per  $f$  soggetta al vincolo  $g$  non necessariamente è punto di massimo o minimo (nemmeno locale!) per la funzione  $f$  in generale. Quindi non si tratta di andare a calcolare gli estremi liberi di  $f$  e vedere se qualcuno di questi cade nel vincolo imposto ma proprio di ottimizzare (e quindi massimizzare o minimizzare) la *restrizione di  $f$  al vincolo  $g$*  che in generale è appunto una funzione diversa da  $f$ .

La situazione più favorevole la si ha quando il vincolo definisce *esplicitamente* una funzione  $y = y(x)$  o  $x = x(y)$  oppure quando la curva si esprime in forma parametrica  $t \mapsto (x(t), y(t))$ .

Allora in tal caso il problema è ricondotto a cercare gli estremi della funzione

$$h(x) = f(x, y(x)) \quad \text{oppure} \quad r(y) = f(x(y), y) \quad \text{oppure} \quad \phi(t) = f(x(t), y(t)).$$

In tutti questi casi comunque lo studio di un problema di ottimizzazione in più variabili si riduce a un problema di ottimizzazione in una variabile. I prossimi esempi chiariranno alcune situazioni tipiche di VINCOLI ESPLICITABILI. Si noti che un ruolo fondamentale è spesso giocato dal teorema di Weierstrass.

▣ **Esercizio 6.6.1.** *Sia data la funzione*

$$f(x, y) = 3x^2y - y^3 + x^2.$$

(i) *Si determinino i suoi punti stazionari in  $\mathbb{R}^2$ , e se ne studi la natura.*

(ii) *Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se essa ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\},$$

*e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.*

(i) I punti stazionari della funzione sono quelli che annullano il gradiente. Si ha dunque

$$\nabla f(x, y) = (6xy + 2x, 3x^2 - 3y^2) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(3y + 1) = 0 \\ 3(x - y)(x + y) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema leggiamo  $x = 0$  e  $y = -1/3$  e non ci sono altre possibilità. Se  $x = 0$ , sostituendo nella seconda equazione del sistema si ottiene  $y = 0$ , mentre sostituendo  $y = -1/3$  si ottiene  $x = \pm 1/3$ . Quindi i punti stazionari sono

$$(0, 0) \quad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \quad \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Proviamo a studiare la natura di questi punti con il test della matrice Hessiana. Si ha

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6y + 2 & 6x \\ 6x & -6y \end{pmatrix}$$

quindi

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi non riesco a stabilire la natura dell'origine con il test della matrice Hessiana. Proviamo a studiare il segno dell'incremento di  $f$  nel punto. Si ha

$$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = 3x^2y - y^3 + x^2.$$

Ora se  $x = 0$  si ha  $\Delta f(0,0) = -y^3$  che ha segno positivo per  $y < 0$  e negativo per  $y > 0$ . Questo basta a dire che l'origine è un punto di sella per  $f$ .

D'altra parte

$$Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui  $\det Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$  e quindi  $(-1/3, -1/3)$  è un punto di sella. Infine

$$Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui  $\det Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$  e quindi  $(1/3, -1/3)$  è un punto di sella.

(ii) La funzione data è continua, il rettangolo dato (che d'ora in avanti chiameremo  $R$ ) è chiuso e limitato, quindi il teorema di Weierstrass ci assicura che esistono  $\max_R f$  e  $\min_R f$ . Osserviamo che la funzione data è di classe  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  quindi non ci sono punti singolari. Inoltre non ci sono punti stazionari che stanno in  $R$ . Quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto di  $f$  su  $R$  si troveranno sul bordo di  $R$ .

Parametizziamo il bordo di  $R$ . Si ha  $\partial R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$  dove

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 1\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2 \wedge 0 \leq x \leq 1\}$$

$$R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge 0 \leq y \leq 2\}.$$

Si ha poi

$$f_{R_1}(x, y) = x^2$$

che è una funzione sempre crescente per  $0 \leq x \leq 1$ . Dunque eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ .

D'altra parte

$$f_{R_2}(x, y) = 3y - y^3 + 1 =: g_2(y)$$

da cui  $g'_2(y) = 3 - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$ . Dunque eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluti sono  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(1, 2)$ .

Poi si ha

$$f_{R_3}(x, y) = 6x^2 - 8 + x^2 = 7x^2 - 8 =: g_3(x)$$

che è sempre crescente nell'intervallo considerato, allora candidati punti di massimo o minimo assoluto sono  $(0, 2)$  e  $(1, 2)$ .

Infine

$$f_{R_4}(x, y) = -y^3$$

che è una funzione decrescente nell'intervallo considerato, quindi candidati punti di massimo o minimo assoluto sono  $(0, 0)$  e  $(0, 2)$ .

Adesso confrontiamo i valori della funzione su tali punti. Si ha

$$f(0, 0) = 0 \quad f(1, 0) = 1 \quad f(1, 1) = 3 \quad f(1, 2) = -1 \quad f(0, 2) = -8.$$

Dunque  $\min_R f = -8$  e  $(0, 2)$  è il punto di minimo assoluto;  $\max_R f = 3$  e  $(1, 1)$  è il punto di massimo assoluto.

▣ **Esercizio 6.6.2.** *Sia data la funzione*

$$f(x, y) = \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

(i) *Si determinino i suoi punti stazionari in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .*

(ii) *È possibile stabilire la natura di questi punti stazionari tramite il metodo dell'Hessiano? In caso negativo, studiare comunque la natura di tali punti in altro modo*

(iii) *Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se essa ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

*e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.*

(i) I punti stazionari sono quelli che annullano il gradiente di  $f$ . Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{6x(x^2 + y^2) - 2x(3x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{6x^3 + 6xy^2 - 6x^3 + 4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{10xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-4y(x^2 + y^2) - 2y(3x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4yx^2 - 4y^3 - 6yx^2 + 4y^3}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{10x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \left( \frac{10xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{10x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = (0, 0) \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

Quindi i punti stazionari sono tutti i punti degli assi cartesiani (tranne l'origine dove tra l'altro la funzione non è nemmeno definita).

(ii) Proviamo a vedere se è possibile studiare la natura dei punti stazionari con il test della matrice Hessiana. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{10y^2(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(2x)(10xy^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{10x^2y^2 + 10y^4 - 40x^2y^2}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{10y^4 - 30x^2y^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{10y^2(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{20xy(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(2y)(10xy^2)}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{20xy(x^2 + y^2) - 40xy^3}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{20x^3y - 20xy^3}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{20xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-10x^2(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(2y)(-10x^2y)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-10x^4 - 10x^2y^2 + 40x^2y^2}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{-10x^4 + 30x^2y^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{-10x^2(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}.\end{aligned}$$

Si vede subito che, al variare di  $h, k \in \mathbb{R}$

$$H_f(h, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{h^2} \end{pmatrix} \quad H_f(0, k) = \begin{pmatrix} \frac{10}{k^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi non riesco a studiare la natura di tali punti con il test della matrice Hessiana.

Studio dunque la natura dei punti stazionari attraverso lo studio del segno dell'incremento della funzione. Al variare di  $h \in \mathbb{R}$ , si ha

$$\Delta f(h, 0) = f(x, y) - f(h, 0) = \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} - 3 = \frac{3x^2 - 2y^2 - 3x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2} = -\frac{5y^2}{x^2 + y^2}.$$

Siccome  $y \neq 0$  si ottiene  $\Delta f(x, y) < 0$  e quindi tutti i punti  $(h, 0)$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$  sono di massimo locale. Invece per  $k \in \mathbb{R}$  si ha

$$\Delta f(0, k) = f(x, y) - f(0, k) = \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} + 2 = \frac{3x^2 - 2y^2 + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{5x^2}{x^2 + y^2} > 0.$$

Quindi tutti i punti  $(0, k)$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$  sono punti di minimo locale.

(iii) Poniamo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Esso rappresenta una corona circolare; le circonferenze che la delimitano hanno raggio rispettivamente 1 e 2.

$A$  è un insieme chiuso e limitato, la funzione  $f$  è continua su  $A$ , per il teorema di Weierstrass esistono il massimo e il minimo assoluto di  $f$  su  $A$ .

Non ci sono punti singolari per  $f$ , dunque gli eventuali punti candidati ad essere massimo e minimo vanno ricercati tra i punti che annullano il gradiente di  $f$  o tra i punti del bordo di  $A$ . Si ha che

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (h, 0) \vee (x, y) = (0, k) \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

In  $A$  i punti che annullano il gradiente sono

$$(x, y) = (h, 0) \vee (x, y) = (0, k) \text{ con } -2 \leq h \leq -1 \vee 1 \leq h \leq 2 \text{ e } -2 \leq k \leq -1 \vee 1 \leq k \leq 2.$$

Si ha

$$f(k, 0) = 3 \quad f(0, h) = -2.$$

D'altra parte  $\partial A = A_1 \cup A_2$  dove

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \text{ e } A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Parametizziamo  $A_1$ . Si ha

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

da cui

$$f_{A_1}(x, y) = 3 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta =: \tilde{f}(\theta)$$

e quindi

$$\tilde{f}'(\theta) = -6 \cos \theta \sin \theta - 4 \sin \theta \cos \theta = -10 \sin \theta \cos \theta.$$

Allora

$$\tilde{f}'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \vee \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \frac{\pi}{2} \vee \theta = \pi \vee \theta = \frac{3}{2}\pi.$$

Si ha

$$\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\pi) = 3 \quad \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tilde{f}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2.$$

Ora parametrizziamo  $A_2$ . Si ha

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta. \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

da cui

$$f_{A_2}(x, y) = \frac{1}{4} (12 \cos^2 \theta - 8 \sin^2 \theta) = 3 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta$$

il cui studio si riconduce al caso precedente. In ultima analisi dunque

$$\max_A f = 3 \text{ e i punti di massimo assoluto sono i punti } (h, 0) \text{ con } -2 \leq h \leq -1 \text{ e } 1 \leq h \leq 2$$

e

$$\min_A f = -2 \text{ e i punti di minimo assoluto sono i punti } (0, k) \text{ con } -2 \leq k \leq -1 \text{ e } 1 \leq k \leq 2.$$

▣ **Esercizio 6.6.3.** *Sia data la funzione*

$$f(x, y) = e^{2xy} xy.$$

(i) *Si determinino i punti stazionari di  $f(x, y)$  in  $\mathbf{R}^2$  e se ne studi la natura.*

(ii) *Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se  $f(x, y)$  ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$$

e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

(i) I punti stazionari di  $f$  sono quelli che annullano il gradiente. Si ha

$$f_x(x, y) = e^{2xy} y (2xy + 1) \quad f_y(x, y) = e^{2xy} x (2xy + 1)$$

quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \vee 2xy = -1.$$

Proviamo a studiare la natura dei punti stazionari attraverso il test della matrice Hessiana. Si ha

$$f_{xx}(x, y) = e^{2xy} 2y^2(2xy + 1) + e^{2xy} 2y^2 = e^{2xy} 2y^2(2xy + 2)$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = e^{2xy} 2xy(2xy + 1) + e^{2xy} (2xy + 1) + e^{2xy} 2xy = e^{2xy} (4x^2 y^2 + 6xy + 1)$$

$$f_{yy}(x, y) = e^{2xy} 2x^2(2xy + 1) + e^{2xy} 2x^2 = e^{2xy} 2x^2(2xy + 2)$$

da cui

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

essendo  $\det Hf(0, 0) = -1 < 0$ , si ha che  $(0, 0)$  è un punto di sella. D'altra parte

$$Hf\left(h, -\frac{1}{2h}\right) = \begin{pmatrix} e^{-1} 2 \frac{1}{4h^2} & e^{-1} (-1) \\ e^{-1} (-1) & e^{-1} 2h^2 \end{pmatrix}$$

quindi  $\det H_f \left( h, -\frac{1}{2h} \right) = 0$  e questo ci dice che non siamo in grado di studiare la natura dei punti  $(x, y)$  tali che  $2xy = -1$  con il test della matrice Hessiana.

Proviamo a studiare il segno dell'incremento di  $f$ . Per ogni  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  si ha

$$\Delta f \left( h, -\frac{1}{2h} \right) = f(x, y) - f \left( h, -\frac{1}{2h} \right) = e^{2xy} xy + \frac{1}{2} e^{-1}.$$

Si vede facilmente che la funzione  $g(t) = t e^{2t}$  ha minimo uguale a  $g(-1/2) = -\frac{1}{2} e^{-1}$  per  $t = -1/2$  per cui  $\Delta f \left( h, -\frac{1}{2h} \right) \geq 0$ . Questo significa che tutti i punti  $(x, y)$  tali che  $2xy = -1$  sono punti di minimo.

(ii) La funzione  $f$  è continua, l'insieme  $A$  è chiuso e limitato dunque il teorema di Weierstrass ci assicura che esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto di  $f$  su  $A$ .

Non ci sono punti stazionari interni ad  $A$ , non ci sono punti singolari dunque il massimo e il minimo assoluti di  $f$  su  $A$  si trovano sul bordo di  $A$ . Si ha  $\partial A = A_1 \cup A_2$ , dove

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 2, y \geq 0\} \quad A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, -1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}\}.$$

Parametizziamo  $A_1$ . Si ha

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi]$$

da cui

$$f(x, y) = \exp(2 \cos \theta \sin \theta) \cos \theta \sin \theta = \exp(\sin(2\theta)) \frac{\sin(2\theta)}{2} =: \tilde{f}(\theta)$$

e quindi allora

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(\theta) &= \exp(\sin(2\theta)) \cos(2\theta) \sin(2\theta) + \exp(\sin(2\theta)) \cos(2\theta) \\ &= \exp(\sin(2\theta)) \cos(2\theta) [\sin(2\theta) + 1] \end{aligned}$$

da cui

$$\tilde{f}'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta) = 0 \vee \sin(2\theta) = -1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \vee \theta = \frac{3}{4}\pi.$$

Quindi

$$\tilde{f} \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} e \quad \tilde{f} \left( \frac{3}{4}\pi \right) = -\frac{1}{2} e^{-1}.$$

D'altra parte  $f_{A_2} \equiv 0$  quindi

$$\max_A f = \frac{1}{2} e \quad \min_A f = -\frac{1}{2} e^{-1};$$

il punto di massimo assoluto è  $\left( \frac{1}{2}, 1 \right)$  mentre il punto di minimo assoluto è  $\left( -\frac{1}{2}, 1 \right)$ .

✎ **Esercizio 6.6.4.** Sia data la funzione

$$f(x, y) = \arctan(x^2 + 2y^2).$$

(i) Si determinino i punti stazionari di  $f(x, y)$  in  $\mathbb{R}^2$  e se ne studi la natura.

(ii) Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se  $f(x, y)$  ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 2 - x\}$$

e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

(i) Innanzitutto osserviamo che la funzione  $f$  è definita su tutto  $\mathbb{R}^2$  ed essendo la funzione  $\arctan$  sempre crescente, la funzione data è sempre positiva o nulla; d'altra parte  $f(0, 0) = 0$  dunque possiamo dire subito che l'origine è punto di minimo assoluto su tutto  $\mathbb{R}^2$ .

Studiamo la natura dei punti stazionari di  $f$ . Si ha

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{2x}{1 + (x^2 + 2y^2)^2}, \frac{4y}{1 + (x^2 + 2y^2)^2} \right)$$

dunque

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Dunque l'origine è l'unico punto stazionario e dalle considerazioni precedenti sappiamo già che è punto di minimo assoluto.

Se uno non se ne fosse accorto e volesse studiare la natura dell'origine attraverso il test della matrice Hessiana otterrebbe

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2(1 + (x^2 + 2y^2)^2) - 2x \cdot 2(x^2 + 2y^2) \cdot 2x}{[1 + (x^2 + 2y^2)^2]^2} = \frac{2[1 + (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2(x^2 + 2y^2)]}{[1 + (x^2 + 2y^2)^2]^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{-2x \cdot 2(x^2 + 2y^2) \cdot 4y}{[1 + (x^2 + 2y^2)^2]^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{4(1 + (x^2 + 2y^2)^2) - 4y \cdot 2(x^2 + 2y^2) \cdot 4y}{[1 + (x^2 + 2y^2)^2]^2} = \frac{4[1 + (x^2 + 2y^2)^2 - 8y^2(x^2 + 2y^2)]}{[1 + (x^2 + 2y^2)^2]^2},$$

da cui  $f_{xx}(0, 0) = 2$ ,  $f_{xy}(0, 0) = 0$ ,  $f_{yy}(0, 0) = 4$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ed essendo  $\det Hf(0, 0) = 8 > 0$  si ha rapidamente che  $(0, 0)$  è punto di minimo locale. Il fatto che sia anche minimo assoluto discende da un'ulteriore analisi fatta sulla funzione  $f$ .

Osserviamo tuttavia che i calcoli potevano essere notevolmente ridotti se si osservava che la funzione arctan è crescente, dunque i punti stazionari di  $f$  sono tutti e soli i punti stazionari della funzione  $g(x, y) = x^2 + 2y^2$ ; per cui

$$\nabla g(x, y) = (2x, 4y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

mentre

$$g_{xx} = 2 \quad g_{xy} = g_{yx} = 0 \quad g_{yy} = 4$$

e di nuovo si ha che  $(0, 0)$  è punto di minimo locale.

(ii) La funzione  $f$  è continua, l'insieme  $A$  è chiuso e limitato quindi esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto di  $f$  per il teorema di Weierstrass.

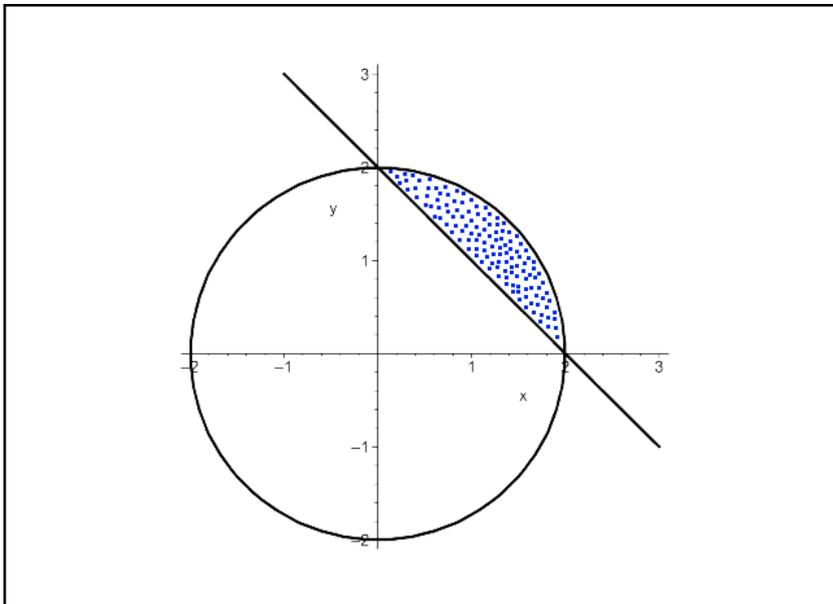


Figura 6.1: Insieme  $A$ .

Osserviamo che l'origine non appartiene all'insieme  $A$  dunque non è detto che il minimo assoluto di  $f$  su  $A$  sia di nuovo 0.

L'unico punto stazionario, come si evince dall'analisi al punto (i), è l'origine, che non appartiene alla parte interna di  $A$ . Non ci sono punti singolari dunque i punti di massimo e di minimo assoluto di  $f$  si trovano sul bordo di  $A$ . Si ha  $\partial A = A_1 \cup A_2$  dove

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \wedge y \geq 2 - x\}$$

e

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2 - x \wedge 0 \leq x \leq 2\}.$$

L'insieme  $A_1$  è un arco di circonferenza, lo parametrizzo usando le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Quindi

$$f(x, y)|_{A_1} = f(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = \tilde{f}(\theta) = \arctan(4 \cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta) = \arctan(4 + 4 \sin^2 \theta)$$

da cui

$$\tilde{f}'(\theta) = \frac{8 \sin \theta \cos \theta}{1 + (4 + 4 \sin^2 \theta)^2} = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \vee \cos \theta = 0,$$

quindi i punti di estremo si hanno per  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/2$  che corrispondono ai punti  $(2, 0)$  e  $(0, 2)$ . Si ha

$$f(2, 0) = \arctan 4 \quad f(0, 2) = \arctan 8.$$

D'altra parte

$$f(x, y)|_{A_2} = f(x, 2 - x) = \bar{f}(x) = \arctan(x^2 + 2(2 - x)^2) = \arctan(3x^2 - 8x + 8)$$

da cui

$$\bar{f}'(x) = \frac{6x - 8}{1 + (3x^2 - 8x + 8)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

Si ha

$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \arctan \frac{8}{3}.$$

Siccome la funzione  $\arctan$  è crescente, si ha che

$$\min_A f(x, y) = \arctan \frac{8}{3} \quad \max_A f(x, y) = \arctan 8$$

raggiunti rispettivamente nei punti  $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$  e  $(0, 2)$ .

### 6.6.2. Caso $n = 2$ : metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange funziona quando il vincolo è rappresentato da una curva regolare assegnata in qualsiasi forma: parametrica o cartesiana (implicita o esplicita).

Cerchiamo di illustrare il metodo cercando di stabilire, in analogia con il caso di estremi liberi, una condizione necessaria del primo ordine. Nel caso degli estremi liberi, il teorema di Fermat

indica che se un punto è di estremo, il suo gradiente si deve annullare e questo è abbastanza ragionevole perché il punto non ha vincoli e potendosi muovere in tutte le direzioni, il teorema di Fermat ci dice che tutte le derivate lungo ogni direzione ammissibile si devono annullare. Nel caso di un vincolo, ovviamente non sarà più così e ci saranno delle direzioni ammissibili e la derivata direzionale lungo queste direzioni si deve annullare. Per capire chi siano queste direzioni ammissibili, supponiamo che in vincolo descriva un arco di curva regolare con retta tangente nella direzione del versore  $\mathbf{v}$ . In tal caso la derivata direzionale di  $f$  nella direzione di  $\mathbf{v}$  si deve annullare, cioè se  $(x^*, y^*)$  è il nostro punto di estremo vincolato si dovrà avere

$$D_{\mathbf{v}}f(x^*, y^*) = 0$$

e per la formula del gradiente, questo significa

$$\nabla f(x^*, y^*) \cdot \mathbf{v} = 0$$

che esprime l'ortogonalità tra i vettori  $\nabla f$  e  $\mathbf{v}$ . Ma ricordando che il gradiente di una funzione in ogni punto è ortogonale alla direzione della retta tangente alle sue curve di livello, se anche il vincolo è sufficientemente regolare anche

$$\nabla g(x^*, y^*) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Ma questo significa che  $\nabla f(x^*, y^*)$  e  $\nabla g(x^*, y^*)$  devono essere paralleli, cioè deve esistere un numero  $\lambda$  per cui uno dei due è multiplo dell'altro, cioè

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*).$$

Formalmente si ha dunque

**Teorema 6.6.5.** (MULTIPLICATORI DI LAGRANGE) *Siano  $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  e  $(x^*, y^*)$  punto di estremo vincolato per  $f$  sotto il vincolo  $g(x, y) = b$ . Allora se  $(x^*, y^*)$  è regolare per il vincolo, cioè se  $\nabla g(x^*, y^*) \neq (0, 0)$ , allora esiste  $\lambda^* \in \mathbb{R}$  (detto MULTIPLICATORE DI LAGRANGE) tale che*

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*).$$

Ribadiamo dunque che la relazione di parallelismo tra i gradienti di  $f$  e  $g$  esprime il fatto che se  $(x^*, y^*)$  verifica le ipotesi del teorema, allora la derivata di  $f$  lungo la tangente al vincolo si deve annullare, e in tal caso diremo che  $(x^*, y^*)$  è PUNTO CRITICO VINCOLATO. Questa è la corretta generalizzazione del teorema di Fermat nel caso degli estremi vincolati.

Introducendo la funzione  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \lambda)$  detta LAGRANGIANA definita da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - b),$$

il teorema afferma che se  $(x^*, y^*)$  è punto di estremo vincolato, allora esiste  $\lambda^*$  tale che il punto  $(x^*, y^*, \lambda)$  sia critico libero per  $\mathcal{L}$  cioè che sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = b - g = 0 \end{cases}$$

Le prime due equazioni coincidono con la condizione di parallelismo dei gradienti, mentre la terza esprime esattamente la condizione di vincolo. La teoria sviluppata indica il seguente modo di procedere, noto come METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE:

- 1) si isolano eventuali punti non regolari dell'insieme  $g(x, y) = b$  che vanno esaminati a parte;
- 2) si cercano i punti critici liberi della Lagrangiana, cioè le soluzioni del precedente sistema;
- 3) si determina la natura dei punti critici; a questo proposito spesso risulta utile il teorema di Weierstrass, come mostra il seguente esempio.

✎ **Esercizio 6.6.6.** Sia data la funzione  $f(x, y) = 4xy + 4x$ .

- (i) Si determinino i suoi punti stazionari in  $\mathbb{R}^2$ , e se ne studi la natura.
- (ii) Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se essa ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme (ellisse)

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 6x + 10y + 4 \leq 0\},$$

e in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

- (i) I punti stazionari per una funzione sono quelli che annullano il gradiente della funzione stessa. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (4y + 4, 4x)$$

da cui

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, -1).$$

Quindi  $(0, -1)$  è l'unico punto stazionario per  $f$ .

Proviamo a studiarne la natura con il test della matrice Hessiana. Si ha

$$f_{xx}(x, y) = 0 \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 4 \quad f_{yy}(x, y) = 0$$

da cui

$$Hf(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo il determinante della matrice Hessiana uguale a  $-16 < 0$  si può senz'altro dire che  $(0, -1)$  è un punto di sella per  $f$ .

(ii) La funzione data è continua, l'insieme dato (che è un'ellisse e che chiameremo d'ora in avanti  $E$ ) è chiuso e limitato, il massimo e il minimo assoluto della funzione su  $E$  esistono per il teorema di Weierstrass.

$(0, -1)$  è l'unico punto che annulla il gradiente di  $f$  come visto al punto i); la funzione è di classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  e dunque non ci sono punti singolari; resta quindi da studiare il comportamento lungo il bordo dell'ellisse.

Per studiare il comportamento della funzione lungo il bordo dell'ellisse utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Abbiamo il vincolo

$$g(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 6x + 10y + 4 = 0.$$

La funzione Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 4xy + 4x + \lambda(5x^2 + 5y^2 - 6xy - 6x + 10y + 4).$$

A questo punto troviamo i punti critici per  $\mathcal{L}$ . Si ha

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 4 + 10\lambda x - 6\lambda y - 6\lambda = 0 \\ 4x + 10\lambda y - 6x\lambda + 10\lambda = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 6x + 10y + 4 = 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2 + 5\lambda x - 3\lambda y - 3\lambda = 0 \\ 2x + 5\lambda y - 3x\lambda + 5\lambda = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 6x + 10y + 4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Seguiamo la seguente strategia: ricaviamo  $\lambda$  dalla prima equazione e inseriamo quanto ottenuto nella seconda equazione. Poi confronteremo quello che otterremo con la terza equazione.

Notiamo subito che se  $5x = 3y + 3$  allora  $y = -1$  da cui si dedurrebbe  $x = 0$  assurdo. Allora sia  $5x \neq 3y + 3$ . Dalla prima equazione si ha

$$\lambda = \frac{2y + 2}{3y + 3 - 5x}$$

che inserito nella seconda equazione ci dà

$$2x + (5y - 3x + 5) \frac{2y + 2}{3y + 3 - 5x} = 0$$

da cui

$$6xy + 6x - 10x^2 + 10y^2 - 6xy + 10y + 10y - 6x + 10 = 0$$

e quindi

$$x = \pm(y + 1).$$

Distinguiamo due casi. Primo caso  $x = y + 1$ . Allora inserendo nella terza equazione si ha

$$5(y^2 + 2y + 1) + 5y^2 - 6y(y + 1) - 6(y + 1) + 10y + 4 = 0$$

da cui

$$4y^2 + 8y + 3 = 0$$

da cui otteniamo come soluzioni i punti

$$A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad B = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

D'altra parte nel caso  $x = -y - 1$  si ottiene invece

$$5(y^2 + 2y + 1) + 5y^2 + 6y(y + 1) + 6(y + 1) + 10y + 4 = 0$$

da cui

$$16y^2 + 32y + 15 = 0$$

da cui otteniamo come soluzioni i punti

$$C = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right) \quad D = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right).$$

Quindi osservando che

$$f(A) = f(B) = 1 \quad f(C) = f(D) = -\frac{1}{4}$$

si ha che

$$\max_E f = 1 \quad \min_E f = -\frac{1}{4}$$

e i punti di massimo assoluti sono  $A$  e  $B$  mentre i punti di minimo assoluti sono i punti  $C$  e  $D$ .

### 6.6.3. Un esercizio con un punto singolare sul vincolo

✎ **Esercizio 6.6.7.** *Sia*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + x^4(x^4 - 1) = 0\}$$

e sia  $f(x, y) = y - x^2$ . Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se  $f$  ammette massimo assoluto e minimo assoluto in  $S$  e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

Innanzitutto  $S$  è chiuso; poi è limitato, visto che

$$y^2 = -x^4(x^4 - 1)$$

quindi essendo  $y^2 \geq 0$  deve per forza essere anche  $x^4(x^4 - 1) \geq 0$  da cui  $x^4 \leq 1$  cioè  $|x| \leq 1$  che comporta  $|y| \leq 2$ .

A questo punto sia  $g(x, y) = y^2 + x^4(x^4 - 1)$ . Si ha

$$\nabla g(x, y) = (8x^7 - 4x^3, 2y) = (0, 0)$$

quindi deve per forza essere  $y = 0$  e  $2x^7 - x^4 = 0$  da cui  $x = 0$  e  $x^4 = 1/2$ . Quindi ho il punto  $(0, 0) \in S$  che è dunque un punto singolare per il vincolo e i punti  $(\pm \sqrt[4]{1/2}, 0) \notin S$ .

A questo punto la funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = y - x^2 + \lambda(y^2 + x^4(x^4 - 1));$$

troviamo i punti critici per  $\mathcal{L}$ : tenendo conto che

$$\nabla f(x, y) = (-2x, 1),$$

si ha quindi

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \lambda(8x^7 - 4x^3) \\ 1 = 2\lambda y = 0 \\ y^2 + x^4(x^4 - 1) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione vedo immediatamente che  $\lambda, y \neq 0$  da cui posso scrivere  $\lambda = \frac{1}{2y}$  e anche  $y = \frac{1}{2\lambda}$  quindi sostituendo nella terza equazione si ha

$$\frac{1}{4\lambda^2} + x^4(x^4 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{1}{4x^4(1 - x^4)} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{2x^2\sqrt{1 - x^4}};$$

d'altra parte dalla prima equazione si ottiene

$$\lambda = -\frac{1}{4x^6 - 2x^2}$$

quindi uguagliando

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} = -\frac{1}{2x^4 - 1} \quad \Rightarrow \quad \pm(2x^4 - 1) = -\sqrt{1 - x^4}$$

da cui

$$4x^8 + 1 - 4x^4 = 1 - x^4 \quad \Rightarrow \quad 4x^8 - 3x^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4(4x^4 - 3) = 0$$

siccome devo scartare  $x = 0$  avrò  $x^4 = \frac{3}{4}$  da cui  $x = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$  e corrispondentemente

$$y^2 = -\frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} - 1 \right) = \frac{3}{16} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Quindi i punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono:

$$A = \left( \sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \quad B = \left( -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \quad C = \left( \sqrt[4]{\frac{3}{4}}, -\frac{\sqrt{3}}{4} \right), \quad D = \left( -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, -\frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

Osservo che

$$f(A) = f(B) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

mentre

$$f(C) = f(D) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}\sqrt{3};$$

d'altra parte, tenendo conto del punto singolare sul vincolo, si ha  $f(0,0) = 0$  quindi

$$\max_S f = 0 = f(0,0) \quad \min_S f = -\frac{3}{4}\sqrt{3} = f(C) = f(D).$$

#### 6.6.4. Il caso generale

Enunciamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso generale.

**Teorema 6.6.8.** (MULTIPLICATORI DI LAGRANGE - CASO GENERALE) *Siano  $f, g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$  con  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$  e  $\mathbf{x}^*$  punto di estremo vincolato per  $f$  sotto il vincolo  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ . Allora se  $\mathbf{x}^*$  è regolare per il vincolo, cioè se il rango di  $\mathbf{Jg}(\mathbf{x}^*)$  è  $m$  allora esistono  $m$  numeri reali  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$  (detti MULTIPLICATORI DI LAGRANGE) tali che*

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*).$$

✎ **Esercizio 6.6.9.** *Data la funzione*

$$f(x, y, z) = e^{x+y^2+z},$$

*determinarne massimo e minimo assoluti sull'insieme chiuso e limitato*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - x - z - 1 = 0\}.$$

La funzione data è continua, l'insieme dato  $S$  è chiuso e limitato, quindi il massimo e il minimo assoluto della funzione su  $S$  esistono per il teorema di Weierstrass.

L'idea è quella di utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Abbiamo il vincolo

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x - z - 1 = 0.$$

La funzione Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = e^{x+y^2+z} + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - x - z - 1).$$

A questo punto troviamo i punti critici per  $\mathcal{L}$ . Si ha

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y^2+z} + \lambda(2x-1) = 0 \\ e^{x+y^2+z} 2y + \lambda 2y = 0 \\ e^{x+y^2+z} + \lambda(2z-1) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Il confronto tra la prima equazione e la terza porta immediatamente a  $x = z$ . Dalla seconda invece ricaviamo  $y = 0$  oppure  $\lambda = -e^{x+y^2+z}$ . Se  $y = 0$ , sostituendo nella quarta equazione abbiamo

$$2x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

quindi candidati punti di estremo assoluto sono

$$A = \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \quad B = \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right).$$

D'altra parte, se  $\lambda = -e^{x+y^2+z}$  allora la prima e la terza equazione danno  $x = z = 1$ , informazioni che inserite nella quarta equazione danno  $y = \pm 1$ . Dunque altri candidati punti di estremo assoluto sono

$$C = (1, 1, 1) \quad D = (1, -1, 1).$$

A questo punto

$$f(A) = e^{1+\sqrt{3}} \quad f(B) = e^{1-\sqrt{3}} \quad f(C) = e^3 = f(D).$$

Quindi  $\max_S f = e^3$  e  $C$  e  $D$  sono i punti di massimo assoluto;  $\min_S f = e^{1-\sqrt{3}}$  e il punto di minimo assoluto è  $B$ .

Il prossimo esercizio mostra un metodo alternativo all'uso dei moltiplicatori di Lagrange.

✎ **Esercizio 6.6.10.** *Determinare gli estremi della funzione*

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$$

SOLUZIONE. La funzione data è continua, l'insieme  $E$  è chiuso e limitato, dunque il massimo e il minimo assoluti di  $f$  su  $E$  esistono per il teorema di Weierstrass. Troviamo i punti stazionari di  $f$  interni ad  $E$ . Ma  $\nabla f(x, y, z) = (1, 1, -1) \neq (0, 0, 0)$  quindi non ci sono punti stazionari interni; inoltre  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  dunque gli unici punti di estremo saranno sul bordo di  $E$ .

Ora  $\partial E = E_1 \cup E_2$  con

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 9\}$$

ed

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Studiamo prima di tutto il comportamento di  $f$  ristretto a  $E_1$ . Si tratta di studiare gli estremi di  $g(x, y) := f(x, y, 0) = x + y$  con il vincolo  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

Non ci sono punti stazionari interni per  $g$  (il suo gradiente non si annulla mai),  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  quindi gli unici punti estremanti saranno sul bordo del cerchio. Uso le coordinate polari  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Quindi andiamo a studiare la funzione

$$\tilde{g}(t) = 3 \cos t + 3 \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

Si ha

$$\tilde{g}'(t) = -3 \sin t + 3 \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \pi/4 \vee t = 5/4\pi$$

Inoltre  $\tilde{g}(0) = \tilde{g}(\pi) = 3$ ; quindi i candidati punti di estremo sono

$$(3, 0) \quad \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \quad \left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right).$$

Studiamo ora  $f$  ristretta a  $E_2$ . Si ha  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  dove ho scelto il segno positivo perché ci troviamo nel semipiano  $z \geq 0$ . Da cui sostituendo nell'espressione della funzione abbiamo da studiare la funzione

$$h(x, y) = x + y - \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

con il vincolo  $x^2 + y^2 \leq 9$ . Di nuovo  $h$  continua su un insieme chiuso e limitato, max e min assoluti esistono per Weierstrass. Andiamo a cercare i punti stazionari che sono interni al

cerchio:

$$\begin{aligned}\nabla h(x, y) = (0, 0) &\Leftrightarrow \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, 1 + \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \right) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3});\end{aligned}$$

i punti di eventuale non differenziabilità sono quelli del bordo del cerchio quindi vado direttamente a studiare il comportamento di  $h$  sul bordo. Si ha che è come studiare  $g$  sul bordo del cerchio (abbiamo già fatto i conti al punto precedente).

Quindi alla fine

$$\max_E f = 3\sqrt{2} = f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \quad \min_E f = -3\sqrt{3} = f\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right).$$

### 6.6.5. Metodo dei minimi quadrati

Illustriamo ora un'interessante applicazione della teoria sviluppata fino ad ora. Supponiamo di avere  $n$  osservazioni sperimentali di due variabili su un certo insieme di individui (per esempio le coppie altezza/peso per  $n$  persone); esse possono essere rappresentate come  $n$  punti nel piano,  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Supponiamo di ritenere che tra le due variabili esista, nei limiti dell'errore sperimentale, una relazione lineare che vogliamo determinare; questo significa che, pur non essendo i punti esattamente allineati, noi cerchiamo la retta  $y = ax + b$  che "meno si discosta dal passare per gli  $n$  punti", ovvero che meglio ne approssima l'andamento.

Per determinare tale retta introduciamo l'errore quadratico medio. Se ci mettiamo nel punto  $P_i$ , l'errore che commettiamo nell'approssimare l'insieme di punti con la retta è dato da  $ax_i + b - y_i$ ; definiamo perciò l'*errore quadratico medio* come

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

Trovare la retta che meglio approssima i dati significa quindi minimizzare  $E(a, b)$  determinando  $a$  e  $b$  ottimali. Tale retta è detta *retta di regressione*.

Cerchiamo quindi i punti critici di  $E(a, b)$ . Essi sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2x_i (ax_i + b - y_i) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}.$$

Possiamo riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^n x_i^2) a + (\sum_{i=1}^n x_i) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^n x_i) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è quindi  $n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2$ .

Osservando che valgono le relazioni

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j,$$

$$(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2,$$

possiamo dire che il determinante è positivo se  $n > 2$  e  $x_1, \dots, x_n$  sono distinti (cosa che assumiamo).

Questo ci permette di dire che il sistema ha un'unica soluzione, dunque  $E(a, b)$  ha un unico punto critico, dato da

$$\bar{a} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n y_i) (\sum_{i=1}^n x_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad \bar{b} = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2) (\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i y_i) (\sum_{i=1}^n x_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}.$$

Resta da vedere che sia effettivamente un minimo. La matrice Hessiana di  $E$  è

$$HE(a, b) = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già visto che  $n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2 > 0$ , inoltre abbiamo  $\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ ; quindi la forma quadratica associata è definita positiva e  $(\bar{a}, \bar{b})$  è un punto di minimo.

**Esempio** Supponiamo di aver raccolto i seguenti dati su altezza e peso di 5 persone:

altezza	170	175	178	185	190
peso	72	73	74	81	83

Allora abbiamo

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 161534, \quad \sum_{i=1}^5 x_i = 898, \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 383, \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 68942.$$

Quindi

$$\bar{a} = \frac{5 \cdot 68942 - 898 \cdot 383}{5 \cdot 161534 - 898^2} = \frac{776}{1266} = 0.613$$

$$\bar{b} = \frac{161534 \cdot 383 - 68942 \cdot 898}{1266} = -\frac{42394}{1266} = -33.486,$$

dunque la retta cercata è  $y = 0.613x - 33.486$ . Questa equazione può essere utilizzata come relazione ottimale tra peso e altezza.

---

## CAPITOLO 7

---

# Calcolo integrale per funzioni di più variabili reali

## 7.1. Integrali doppi

---

### 7.1.1. Integrale di una funzione limitata definita su un rettangolo

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di una variabile continua. In Analisi I abbiamo introdotto l'integrale definito di  $f$  su  $[a, b]$  come limite delle somme di Cauchy-Riemann

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(\xi_k)$$

dove l'intervallo  $[a, b]$  è stato diviso in  $n$  intervallini della stessa ampiezza  $\frac{b-a}{n}$  attraverso una partizione equispaziata e  $\xi_k$  è un qualunque punto appartenente al  $k$ -esimo intervallino; il limite viene poi fatto all'infittirsi della partizione (per  $n \rightarrow \infty$ )

La definizione di integrale attraverso le somme di Cauchy-Riemann si può dare anche per funzioni limitate. Se tale limite esiste finito, e non dipende dalla partizione e dai punti  $\xi_k$  scelti, allora si dice che  $f$  è integrabile su  $[a, b]$ .

L'idea di integrale doppio nasce come la naturale estensione di tali concetti.

Sia  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata definita su un rettangolo. Prendiamo una partizione equispaziata dell'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  intervallini di ampiezza  $\frac{b-a}{n}$  cioè sia

$$x_h = a + h \frac{b-a}{n} \quad h = 0, 1, 2, \dots, n$$

tale che

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

e allo stesso modo prendiamo una partizione equispaziata dell'intervallo  $[c, d]$  in  $n$  intervallini di ampiezza  $\frac{d-c}{n}$  cioè sia

$$y_k = c + k \frac{d-c}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

tale che

$$y_0 = c < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d.$$

Queste due partizioni inducono una partizione del rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  in  $n^2$  rettangolini che denomineremo

$$I_{hk} = [x_{h-1}, x_h] \times [y_{k-1}, y_k], \quad h, k = 1, 2, \dots, n$$

ciascuno di area

$$|I_{hk}| = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$$

Sia  $\mathbf{p}_{hk}(x_{hk}, y_{hk})$  un generico punto appartenente al generico  $I_{hk}$  e consideriamo la somma di Cauchy-Riemann

$$s_n = \sum_{h,k=1}^n |I_{hk}| f(\mathbf{p}_{hk}). \quad (7.1.1)$$

Nella somma precedente ogni addendo è il prodotto dell'area del rettangolo  $I_{hk}$  per il valore che la funzione  $f$  assume sul punto  $\mathbf{p}_{hk}$  scelto a caso in  $I_{hk}$  quindi rappresenta il volume del parallelepipedo di base  $I_{hk}$  e altezza  $f(\mathbf{p}_{hk})$ . La somma di Cauchy-Riemann rappresenta quindi il volume di una certa regione tridimensionale che all'infittirsi della partizione ci si aspetta approssimi sempre meglio la regione tridimensionale che sta tra il grafico di  $f$  e il piano  $xy$ .

**□ Definizione 7.1.1.** Si dice che la funzione  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata è INTEGRABILE nel rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d]$  se esiste finito  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  con  $s_n$  data da (7.1.1) e inoltre tale limite non dipende dalla scelta dei punti  $\mathbf{p}_{hk}$ . In tal caso tale limite si dice INTEGRALE DOPPIO di  $f$  su  $R$  e si indica con

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h,k=1}^n |I_{hk}| f(\mathbf{p}_{hk}).$$

**☞ Osservazione 7.1.2.** Naturalmente come nel caso unidimensionale le variabili dentro il segno di integrazione sono mute, cioè ad esempio

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(u, v) du dv$$

Come già accennato, dunque, il significato geometrico dell'integrale doppio è quello di volume della regione tridimensionale compresa tra il grafico di  $f$  e il piano  $xy$ . Il problema ora è, in analogia al caso unidimensionale, cercare di individuare opportune classi di funzioni integrabili e poi trovare metodi per calcolare gli integrali doppi. Infatti è facile vedere che non tutte le funzioni sono integrabili, come mostra il prossimo esempio, che estende il caso unidimensionale.

 **Esempio 7.1.3.** Consideriamo la funzione  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Se i punti  $\mathbf{p}_{hk}$  sono scelti con prima coordinata tra i razionali, allora presa una partizione equispaziata del rettangolo  $R := [0, 1] \times [0, 1]$  con rettangolini di area  $\frac{1}{n^2}$  si ha

$$s_n = \sum_{h,k=1}^n |I_{hk}| f(\mathbf{p}_{hk}) = \sum_{h,k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{h,k=1}^n 1 = \frac{1}{n^2} n^2 = 1$$

mentre se i punti  $\mathbf{p}_{hk}$  sono scelti con prima coordinata tra i reali non razionali allora  $s_n = 0$ . Quindi il limite dipende dalla scelta della partizione e perciò la funzione  $f$  non è integrabile.

Vale invece il seguente teorema.

**Teorema 7.1.4.** Se  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua allora è integrabile.

Quindi abbiamo individuato una classe di funzioni integrabili. Poniamoci ora il problema di calcolare in maniera effettiva l'integrale doppio. L'idea è quella di ridurlo a integrali iterati. Infatti, dal significato geometrico di volume di una regione tridimensionale, sia  $R = [a, b] \times [c, d]$ ; consideriamo un piano verticale parallelo all'asse delle  $x$  che taglierà questa regione tridimensionale in una regione piana (funzione della sola  $y$ !) di area data, supponiamo  $A(y)$ . A questo punto allora il volume totale della regione tridimensionale si ricostruirà integrando poi nella variabile  $y$ , per  $y \in [c, d]$ , cioè, indicando con  $V$  il volume di tale regione

$$V = \int_c^d A(y) dy.$$

Come si calcola l'area di  $A(y)$ ? Essa è un'area di una regione bidimensionale e quindi si calcola per mezzo dell'integrale unidimensionale della funzione  $x \mapsto f(x, y)$  con  $y$  fissato, cioè

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

e dunque riassumendo

$$V = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Si ha dunque il seguente teorema.

**Teorema 7.1.5.** (DI RIDUZIONE DELL'INTEGRALE DOPPIO SU UN RETTANGOLO A INTEGRALI ITERATI) *Sia  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora il suo integrale doppio su  $R := [a, b] \times [c, d]$  si può calcolare come integrale iterato nel modo seguente*

$$\int \int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Il significato del teorema precedente è che di fatto si può ridurre il calcolo di un integrale doppio su un rettangolo a quello di due integrali semplici, di una variabile, in sequenza. Mentre si fa il primo integrale naturalmente la variabile rispetto alla quale non si sta integrando va trattata come una costante.

✎ **Esempio 7.1.6.** *Si calcoli*

$$\int \int_{[0,1] \times [0,2]} y e^{xy} dx dy$$

Poniamo

$$I = \int \int_{[0,1] \times [0,2]} y e^{xy} dx dy.$$

Allora dal teorema di riduzione di un integrale doppio su un rettangolo a integrali iterati, si ha che

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^2 y e^{xy} dy \right) dx = \int_0^2 \left( \int_0^1 y e^{xy} dx \right) dy$$

Mostriamo attraverso questo semplice esempio come scegliere una strada oppure l'altra può non essere equivalente, in termini di semplicità di risoluzione dell'integrale stesso (rimane ovviamente equivalente ai fini del risultato finale).

Scegliamo dunque la prima via. Una primitiva di  $y e^{xy}$  rispetto a  $y$  e tenendo  $x$  costante si può trovare integrando per parti, da cui

$$\int y e^{xy} dy = \frac{y e^{xy}}{x} - \frac{1}{x^2} e^{xy} + C$$

da cui

$$I = \int_0^1 \left[ \frac{y}{x} e^{xy} - \frac{1}{x^2} e^{xy} \right]_0^2 dx = \int_0^1 \left( \frac{2}{x} e^{2x} - \frac{1}{x^2} e^{2x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

Ora, saper calcolare  $\int \frac{2}{x} e^{2x} dx$  è purtroppo tutt'altro che banale. Allora possiamo osservare che (di nuovo per parti nel primo termine e integrando immediatamente i terzo termine)

$$\int \left( \frac{2}{x} e^{2x} - \frac{1}{x^2} e^{2x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{2}{x} \frac{e^{2x}}{2} + \int \left( \frac{2}{x^2} \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{x^2} e^{2x} \right) dx - \frac{1}{x} + C = \frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} + C$$

quindi (si tratta di un integrale generalizzato convergente)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \frac{2}{x} e^{2x} - \frac{1}{x^2} e^{2x} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{2}{x} e^{2x} - \frac{1}{x^2} e^{2x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{2x} - 1}{x} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^2 - 1}{1} - \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{2\varepsilon} = e^2 - 1 - 2 = e^2 - 3. \end{aligned}$$

Adesso calcoliamo l'integrale di partenza attraverso l'altra via. Si ha in maniera molto più immediata

$$I = \int_0^2 \left( \int_0^1 y e^{xy} dx \right) dy = \int_0^2 [e^{xy}]_0^1 dy = \int_0^2 (e^y - 1) dy = [e^y - y]_0^2 = e^2 - 1 - 2 = e^2 - 3$$

☞ **Osservazione 7.1.7.** (FUNZIONI A VARIABILI SEPARATE) Quando si integra su un rettangolo una funzione prodotto di due funzioni ciascuna in una sola delle 2 variabili, per esempio  $f(x)g(y)$  allora è facile vedere che l'integrale doppio si calcola come prodotto di due integrali unidimensionali, ossia

$$\begin{aligned} \int \int_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y) dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x)g(y) dy \right) dx = \int_a^b f(x) \left( \int_c^d g(y) dy \right) dx \\ &= \left( \int_c^d g(y) dy \right) \left( \int_a^b f(x) dx \right) \end{aligned}$$

e analogamente per l'altra integrazione.

☞ **Esempio 7.1.8.** Si calcoli

$$\int \int_{[0,1] \times [0,2]} y e^x dx dy$$

Si ha

$$\int \int_{[0,1] \times [0,2]} y e^x dx dy = \left( \int_0^1 e^x dx \right) \left( \int_0^2 y dy \right) = [e^x]_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 2(e - 1).$$

## 7.1.2. Funzioni integrabili su domini non rettangolari

Sia ora  $f$  definita non più su un rettangolo ma su  $\Omega$  insieme qualunque del piano. Ci poniamo il problema di capire come definire l'integrale doppio di  $f$  su  $\Omega$ .

Si potrebbe pensare di considerare un rettangolo  $R \supseteq \Omega$  e calcolare

$$\int \int_R \tilde{f} dx dy$$

dove  $\tilde{f}$  coincide con  $f$  in  $\Omega$  e vale 0 fuori da  $\Omega$ . Tuttavia, in generale, senza nessuna ipotesi di continuità su  $\Omega$ ,  $f$  non risulterà integrabile, nemmeno se continua e limitata, come mostra il prossimo esempio.

 **Esempio 7.1.9.** Sia

$$\Omega := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x \in \mathbb{Q}\}$$

e si consideri

$$\int \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy.$$

Allora estendendo la funzione integranda (che è costantemente uguale a 1) a zero fuori da  $\Omega$  otteniamo la stessa funzione del primo esempio del capitolo, che sappiamo già non essere integrabile.

Sulla base di questo semplice esempio (si noti che la funzione costante 1 è continua e limitata!) ci si convince che occorre individuare condizioni sul dominio  $\Omega$  che garantiscano l'integrabilità (almeno) di una funzione continua e limitata. In questo capitolo analizzeremo alcune classi di insiemi che soddisfano i nostri requisiti: insiemi semplici, regolari e misurabili.

### Insiemi semplici e regolari

$\square$  **Definizione 7.1.10.** Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice *y-SEMPLICE* se è del tipo

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue.

Geometricamente un insieme *y-semplICE* è tale che se si taglia  $E$  con una retta del tipo  $x = c$  con  $c \in [a, b]$ , si ottiene un segmento che varia con continuità al variare della retta.

$\square$  **Definizione 7.1.11.** Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice *x-SEMPLICE* se è del tipo

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

con  $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue.

Geometricamente un insieme *x-semplICE* è tale che se si taglia  $E$  con una retta del tipo  $y = k$  con  $k \in [c, d]$ , si ottiene un segmento che varia con continuità al variare della retta.

$\square$  **Definizione 7.1.12.** Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice *SEMPLICE* se è *y-semplICE* e *x-semplICE*; si dice *REGOLARE* se è unione di un numero finito di insiemi semplici.

 **Esempio 7.1.13.** I rettangoli e i quadrati sono domini sia *x-semplICE* che *y-semplICE*; i triangoli sono domini semplici (al massimo se nessuno dei lati è parallelo agli assi sono domini regolari). L'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$$

è sia  $x$ -semplice che  $y$ -semplice.

L'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |x| \leq y\}$$

non è un dominio né  $y$ -semplice né  $x$ -semplice, ma può essere decomposto in domini semplici (dunque è regolare).

☞ **Osservazione 7.1.14.** Un insieme semplice per definizione è anche chiuso e limitato, quindi lo stesso vale per un insieme regolare. In particolare una funzione definita su un insieme regolare, dal Teorema di Weierstrass, ha sempre massimo e minimo, dunque è limitata.

Vale il seguente importante teorema.

**Teorema 7.1.15.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un dominio regolare e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f$  è integrabile in  $\Omega$ .

### Insiemi misurabili

Abbiamo visto che il significato geometrico dell'integrale doppio è quello di rappresentare il volume del "sottografico" di una superficie cioè il volume della parte di spazio compresa tra il grafico di  $f$  e il piano  $xy$ . D'altra parte il concetto di integrale doppio permette anche di dare senso al concetto di AREA di una figura piana.

□ **Definizione 7.1.16.** (INSIEME MISURABILE) Un insieme limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice MISURABILE (SECONDO PEANO-JORDAN) se la funzione costante 1 è integrabile in  $\Omega$ . In tal caso chiameremo MISURA (O AREA) di  $\Omega$  (e la denoteremo con  $|\Omega|$ ) il numero

$$|\Omega| = \int \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy.$$

Per i risultati precedenti, ogni insieme regolare è misurabile (perché la funzione costante 1 è continua); tuttavia come mostrato in precedenza esistono anche insiemi non misurabili.

### 7.1.3. Proprietà dell'integrale doppio

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme limitato e misurabile. Siano  $f$  e  $g$  integrabili su  $\Omega$  e sia  $c \in \mathbb{R}$ . Allora valgono le seguenti proprietà dell'integrale doppio.

1) LINEARITÀ DELL'INTEGRALE

$$\int \int_{\Omega} [f(x, y) + g(x, y)] \, dx \, dy = \int \int_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy + \int \int_{\Omega} g(x, y) \, dx \, dy$$

$$\int \int_{\Omega} c f(x, y) dx dy = c \int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

$$\int \int_{\Omega} c dx dy = c|\Omega|$$

2) POSITIVITÀ E MONOTONIA

$$f \geq 0 \text{ in } \Omega \Rightarrow \int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy \geq 0$$

$$f \geq g \text{ in } \Omega \Rightarrow \int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy \geq \int \int_{\Omega} g(x, y) dx dy$$

$$|f(x, y)| \leq c \Rightarrow \left| \int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy \right| \leq \int \int_{\Omega} |f(x, y)| dx dy \leq c|\Omega|$$

Valgono altre proprietà di additività e monotonia dell'integrale rispetto al dominio di integrazione; valgono altresì diverse proprietà dell'integrale nel caso specifico di funzioni continue.

#### 7.1.4. Calcolo degli integrali doppi: metodo di riduzione

Vale il seguente importante teorema.

**Teorema 7.1.17.** (RIDUZIONE PER DOMINI SEMPLICI) *Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $\Omega$  un dominio  $x$ -semplice, cioè*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

*con  $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue. Allora l'integrale doppio*

$$\int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

*Analogamente se  $\Omega$  un dominio  $y$ -semplice, cioè*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

*con  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue. Allora l'integrale doppio*

$$\int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

*Se  $\Omega$  è sia  $x$ -semplice che  $y$ -semplice, valgono entrambe le formule.*

✎ **Esempio 7.1.18.** Si calcoli

$$\int \int_A 2x \, dx \, dy$$

con

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$$

Il dominio  $A$  è, per esempio,  $y$ -semplice. Allora possiamo riscriverlo come

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right\}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int \int_A 2x \, dx \, dy &= \int_0^1 2x \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} dy \, dx = \int_0^1 2x \, dx \left( \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \int_0^1 2x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \, dx - \sqrt{3} \int_0^1 x \, dx = - \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \Big|_0^1 - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 \Big|_0^1 \\ &= -\frac{8}{3} \left[ \left( \frac{3}{4} \right)^{3/2} - 1 \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \sqrt{3} + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

✎ **Esempio 7.1.19.** Calcolare l'area dell'insieme

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x \leq y \leq \frac{x}{3}, x \leq 0, y \geq -x - 3 \right\}$$

La figura descritta dall'insieme  $E$  è un triangolo delimitato dalle rette

$$r_1 : y = 3x \quad r_2 : y = \frac{x}{3} \quad r_3 : y = -x - 3$$

L'insieme non è né  $x$ -semplice né  $y$ -semplice ma è regolare, quindi può essere decomponibile in domini semplici. Per esempio: decomponiamolo in domini  $y$ -semplici. Ad esempio si ha  $E = E_1 \cup E_2$  con

$$E_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x - 3 \leq y \leq \frac{x}{3}, -\frac{9}{4} \leq x \leq -\frac{3}{4} \right\}$$

e

$$E_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x \leq y \leq \frac{x}{3}, -\frac{3}{4} \leq x \leq 0 \right\}$$

Allora

$$\begin{aligned} |E| &= \int \int_E 1 \, dx \, dy = \int_{-9/4}^{-3/4} \left( \int_{-x-3}^{x/3} dy \right) dx + \int_{-3/4}^0 \left( \int_{3x}^{x/3} dy \right) dx \\ &= \int_{-9/4}^{-3/4} \left( \frac{x}{3} + x + 3 \right) dx + \int_{-3/4}^0 \left( \frac{x}{3} - 3x \right) dx = \frac{4}{3} \frac{x^2}{2} \Big|_{-9/4}^{-3/4} + 3x \Big|_{-9/4}^{-3/4} - \frac{8}{3} \frac{x^2}{2} \Big|_{-3/4}^0 \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{9}{16} - \frac{81}{16} \right) + 3 \left( -\frac{3}{4} + \frac{9}{4} \right) - \frac{4}{3} \left( -\frac{9}{16} \right) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Supponiamo ora di volerlo decomporre in domini  $x$ -semplici. In tal caso si può vedere ad esempio  $E = E_3 \cup E_4$  con

$$E_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y - 3 \leq x \leq \frac{y}{3}, -\frac{9}{4} \leq y \leq -\frac{3}{4} \right\}$$

e

$$E_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y \leq x \leq \frac{y}{3}, -\frac{3}{4} \leq y \leq 0 \right\}$$

allora

$$|E| = \int \int_E 1 \, dx \, dy = \int_{-9/4}^{-3/4} \left( \int_{-y-3}^{y/3} dx \right) dy + \int_{-3/4}^0 \left( \int_{3y}^{y/3} dx \right) dy$$

che non è altro che l'integrale di prima con le variabili scambiate.

### 7.1.5. Calcolo degli integrali doppi: cambiamento di variabili

Abbiamo visto nel caso unidimensionale la formula di cambiamento di variabili per gli integrali

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt$$

con  $x = \phi(t)$  derivabile e monotona, da  $\phi^{-1}([a, b]) \rightarrow [a, b]$ .

Il procedimento analogo nel caso di due dimensioni consiste nell'effettuare una *trasformazione di coordinate* nel piano (più precisamente un diffeomorfismo globale, come abbiamo introdotto nel paragrafo relativo).

Sia dunque da calcolare

$$\int \int_D f(x, y) \, dx \, dy$$

e sia  $\mathbf{T} : D' \rightarrow D$  una trasformazione di coordinate tale che  $(x, y) = \mathbf{T}(u, v)$  cioè che trasforma le nuove coordinate nelle vecchie, dove

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

In questo modo  $f(x, y)$  diventa  $f(g(u, v), h(u, v))$ . Il problema è: come si trasforma l'integrale doppio? Qual è l'analogo bidimensionale per il termine  $\phi'(t)$ ?

La risposta è data dal seguente teorema.

**Teorema 7.1.20.** (FORMULA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILI) *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un dominio regolare,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, e  $\mathbf{T} : D' \rightarrow D$  una trasformazione di coordinate, più precisamente un diffeomorfismo globale tra  $D$  e  $D'$ , con  $(x, y) = \mathbf{T}(u, v)$  e*

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

Allora

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D'} f(g(u, v), h(u, v)) |\det \mathbf{JT}(u, v)| du dv$$

dove

$$\mathbf{JT}(u, v) = \begin{pmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$$

indica la matrice Jacobiana della trasformazione.

🔗 **Esempio 7.1.21.** *Si calcoli l'integrale doppio*

$$\int \int_D (y^2 + 1) dx dy,$$

ove  $D$  è la parte dell'ellisse  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$  contenuta nel secondo quadrante.

Descriviamo l'ellisse attraverso il seguente cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \frac{1}{2} \rho \sin \theta \end{cases}$$

con le seguenti limitazioni per le variabili  $\rho$  e  $\theta$

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad \theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Calcoliamo il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione. Si ha

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta & \frac{1}{2} \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det J = \frac{1}{2} \rho \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \rho \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \rho.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \int_D (y^2 + 1) dx dy &= \int_0^1 d\rho \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \frac{1}{2} \rho \left( \frac{1}{4} \rho^2 \sin^2 \theta + 1 \right) = \frac{1}{8} \left( \int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left( \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \rho d\rho \right) \left( \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \right) = \frac{1}{8} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 \left( \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 \theta \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{128} + \frac{\pi}{8} = \frac{17}{128} \pi. \end{aligned}$$

 **Esempio 7.1.22.** (TRASFORMAZIONE PIÙ GENERALE) Si calcoli

$$\int \int_E x y dx dy$$

dove  $E$  è l'insieme delimitato dalle curve

$$y = \frac{1}{x} \quad y = \frac{2}{x} \quad y = \frac{1}{x^2} \quad y = \frac{2}{x^2}$$

L'insieme  $E$  può essere convenientemente descritto nel seguente modo

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2, 1 < x^2 y < 2\}$$

È dunque naturale pensare di operare il seguente cambiamento di coordinate per ridurre l'insieme  $E$  (che non è semplice anche se a fatica può essere descritto come unione di insiemi semplici) ad un rettangolo

$$\begin{cases} xy = u \\ x^2 y = v \end{cases}$$

da cui si deduce

$$\begin{cases} x = \frac{v}{u} \\ y = \frac{u^2}{v} \end{cases}$$

A questo punto la matrice Jacobiana della trasformazione diventa

$$\mathbf{JT}(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \end{pmatrix}$$

quindi

$$\det \mathbf{JT} = -\frac{1}{v}$$

e quindi il modulo del determinante della matrice Jacobiana è

$$|\det \mathbf{JT}| = \frac{1}{v}$$

(essendo  $v \geq 0$  visto che siamo in  $E$  e dunque si ha  $1 < v < 2$ ).

Concludendo dunque

$$\int \int_E x y dx dy = \int_1^2 u du \int_1^2 \frac{1}{v} dv = \frac{u^2}{2} \Big|_1^2 \log v \Big|_1^2 = \frac{3}{2} \log 2$$

## 7.2. Integrali tripli

Tutto quanto detto finora si generalizza anche a dimensioni superiori. Vediamo alcuni casi particolari in 3 dimensioni. Diversi esercizi svolti saranno proposti nell'eserciziario.

### 7.2.1. Integrazione "per fili"

Sia

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

con  $D$  dominio regolare e  $g_1, g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Allora se anche  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua e integrabile su  $\Omega$  allora l'integrale triplo si può calcolare mediante la formula

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int_D \left( \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

### 7.2.2. Integrazione "per strati"

Sia ora

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h_1 \leq z \leq h_2, (x, y) \in \Omega(z)\}$$

con  $z \in [h_1, h_2]$  e  $\Omega(z)$  un dominio regolare nel piano. Allora se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua e integrabile su  $\Omega$  allora l'integrale triplo si può calcolare tramite la formula

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{h_1}^{h_2} \left( \int \int_{\Omega(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

### 7.2.3. Formula di cambiamento di variabili

**Teorema 7.2.1.** (FORMULA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI TRIPLI)

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  un dominio regolare,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, e  $\mathbf{T} : D' \rightarrow D$  una trasformazione di coordinate, più precisamente un diffeomorfismo globale tra  $D$  e  $D'$ , con  $(x, y, z) = \mathbf{T}(u, v, w)$  e

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} & \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int \int \int_{D'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |\det \mathbf{JT}(u, v, w)| du dv dw \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{JT}(u, v, w)$  indica la matrice Jacobiana della trasformazione.

 **Esempio 7.2.2.** Si calcoli il volume della regione

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Si può ad esempio calcolare questo volume integrando per “fili” da cui

$$\int \int \int_V 1 dx dy dz = \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left( \int_0^{3\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dx dy = \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} 3\sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

a questo punto si può utilizzare nell’ultimo integrale (che diventa un integrale doppio) un cambio di coordinate, per esempio le coordinate polari, dunque

$$\int \int \int_V 1 dx dy dz = \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} 3\sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^2 d\rho d\theta = 2\pi$$

Si può giungere allo stesso risultato usando direttamente le coordinate cilindriche come cambio di coordinate nell’integrale triplo di partenza, per cui usando la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = t \end{cases}$$

che ha determinante della matrice Jacobiana uguale a  $\rho$ , si riscrive

$$V = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3\rho\}$$

per cui

$$\int \int \int_V 1 dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3\rho} \rho dz d\rho d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^2 d\rho d\theta = 2\pi$$

---

## CAPITOLO 8

---

# Campi vettoriali

### 8.1. Campi vettoriali

---

□ **Definizione 8.1.1.** Un CAMPO VETTORIALE è una funzione  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . In quest'ottica, una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  viene anche detta CAMPO SCALARE.

Nella definizione di CAMPO VETTORIALE il dominio  $\mathbb{R}^n$  e il codominio  $\mathbb{R}^m$  sono “pensati” in maniera differente: il primo come “insieme di punti” (dello spazio o dello spazio-tempo), il secondo come “insieme di vettori”.

Se  $n = m = 3$  un campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dunque associa ad ogni punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  un vettore  $\mathbf{F}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ; nel seguito useremo una delle due notazioni:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}F_1(x, y, z) + \mathbf{j}F_2(x, y, z) + \mathbf{k}F_3(x, y, z)$$

oppure

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

dove le componenti  $F_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sono campi scalari.

Possiamo elencare alcuni esempi di campi vettoriali:

- il CAMPO GRAVITAZIONALE  $\mathbf{F}(x, y, z)$  causato da un corpo, che è la forza di attrazione che il corpo esercita su una massa unitaria posta nel punto  $(x, y, z)$ ;
- il CAMPO ELETTROSTATICO  $\mathbf{E}(x, y, z)$  causato da un corpo elettricamente carico, è la forza elettrica che il corpo esercita su una carica unitaria posta in  $(x, y, z)$ , forza che può essere attrattiva o repulsiva;
- il CAMPO DELLE VELOCITÀ  $\mathbf{v}(x, y, z)$  di un fluido (o di un solido) in moto è la velocità con cui si muove la particella che si trova nel punto  $(x, y, z)$ . Se il moto non è stazionario, allora il campo delle velocità dipenderà anche dal tempo  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ ;

d) il GRADIENTE  $\nabla f(x, y, z)$  di un qualsiasi campo scalare  $f$  fornisce la direzione e l'intensità della massima rapidità di variazione di  $f$  in  $(x, y, z)$ . In particolare il GRADIENTE DELLA TEMPERATURA  $\nabla T(x, y, z)$  è un campo vettoriale, la cui direzione e la cui intensità sono uguali a quelle della massima rapidità di variazione della temperatura nel punto  $(x, y, z)$  di un materiale che conduce il calore. Il GRADIENTE DELLA PRESSIONE  $\nabla P(x, y, z, t)$  fornisce un'informazione analoga relativamente alla pressione in un fluido in moto, che può essere un liquido o un gas.

✎ **Esempio 8.1.2.** (CAMPO GRAVITAZIONALE DI UNA MASSA PUNTUALE)

Il campo gravitazionale causato da una massa puntiforme  $m$  che si trova nel punto  $P_0$  di vettore posizione  $\mathbf{r}_0$  è

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{-km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -km \frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}$$

Si osservi che  $\mathbf{F}$  è diretto verso il punto  $\mathbf{r}_0$  e che il suo modulo è dato da

$$|\mathbf{F}| = \frac{km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}.$$

✎ **Esempio 8.1.3.** (CAMPO ELETTROSTATICO DOVUTO A UNA CARICA PUNTUALE)

Il campo elettrostatico  $\mathbf{F}$  dovuto a una carica puntuale  $q$  in  $P_0$  è espresso dalla stessa formula del campo gravitazionale precedente tranne che  $-m$  è sostituito da  $q$ . La ragione del segno opposto è che cariche simili si respingono mentre le masse si attirano.

✎ **Esempio 8.1.4.** (CAMPO DELLE VELOCITÀ DI UN SOLIDO IN ROTAZIONE)

Il campo della velocità di un solido, in rotazione attorno all'asse  $z$  con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$  è

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\Omega y\mathbf{i} + \Omega x\mathbf{j}.$$

Essendo lo stesso in tutti i piani normali all'asse  $z$ , il campo  $\mathbf{v}$  può essere considerato un campo vettoriale piano.

## 8.2. Linee integrali

□ **Definizione 8.2.1.** Dato un campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  chiameremo LINEA INTEGRALE DEL CAMPO una qualsiasi curva regolare tangente in ogni punto al campo vettoriale. Se il campo ha significato fisico di forza, le linee integrali si dicono anche LINEE DI FORZA; se invece si tratta di un campo di velocità, si diranno LINEE DI FLUSSO.

Supponiamo di avere una linea integrale del campo  $\mathbf{F}$  cioè  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Se in ogni punto  $\mathbf{r}(t)$  si impone che il campo  $\mathbf{F}$  sia tangente alla linea, questo significa che il vettore  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  è parallelo al vettore  $\mathbf{r}'(t)$  cioè esiste una funzione scalare  $\lambda(t)$  tale che

$$\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)). \quad (8.2.1)$$

Volendo esprimere la (8.2.1) componente per componente si ottiene

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda(t)F_1(x, y, z) \\ y'(t) = \lambda(t)F_2(x, y, z) \\ z'(t) = \lambda(t)F_3(x, y, z) \end{cases}$$

che è anche equivalente a

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}.$$

Pertanto se si è interessati a determinare le linee integrali, occorre dunque risolvere il precedente sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Se in più si impone che la curva passi per un punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , tale sistema avrà un'unica soluzione locale (a patto di avere le necessarie ipotesi sul campo  $\mathbf{F}$ , ossia che  $\mathbf{F}$  sia ben definito, regolare e non nullo). Questo ci permette di asserire che le curve integrali del campo costituiscono una famiglia di linee a due a due prive di intersezioni, cioè per ogni fissato punto dello spazio passa una e una sola linea integrale del campo.

## 8.3. Operatore rotore e operatore divergenza

Introduciamo in questa sezione due importanti operatori che agiscono sui campi vettoriali.

### 8.3.1. L'operatore rotore

**□ Definizione 8.3.1.** Sia  $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ . Si definisce **ROTORE** di  $\mathbf{F}$  il campo

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Il simbolo  $\nabla \times \mathbf{F}$  rappresenta il prodotto vettoriale formale tra l'operatore  $\nabla$  e il campo  $\mathbf{F}$ . Se  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  il campo  $\mathbf{F}$  si dice **IRROTAZIONALE**.

Nel caso particolare di un campo piano  $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i}F_1(x, y) + \mathbf{j}F_2(x, y)$  si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k};$$

in questo caso dunque il vettore  $\nabla \times \mathbf{F}$  è perpendicolare al piano in cui si trova  $\mathbf{F}$ ; è sempre bene notare che la nozione di rotore ha senso solo se ambientata in  $\mathbb{R}^3$ .

### 8.3.2. L'operatore divergenza

**□ Definizione 8.3.2.** Sia  $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ . Si definisce DIVERGENZA di  $\mathbf{F}$  il campo scalare

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Per esempio se  $\mathbf{F} = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$  è un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Si ha inoltre che  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  è un campo scalare, cioè una funzione reale di 3 variabili. Il simbolo  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  denota il prodotto scalare formale dell'operatore  $\nabla$  e del campo  $\mathbf{F}$ .

## 8.4. Campi vettoriali conservativi

---

Sappiamo che il gradiente di un campo scalare è un campo vettoriale. È naturale chiedersi se tutti i campi vettoriali sono a loro volta gradienti di un campo scalare, ovvero ci si può domandare se, dato un campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  esista  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  campo scalare tale che

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla U(x, y, z) = \left( \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

La risposta in generale è no, come mostra il prossimo esempio.

Si può dunque introdurre la seguente definizione che diamo in generale per  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

**□ Definizione 8.4.1.** Un campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice CONSERVATIVO in un aperto  $A$  se  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(A)$  ed esiste una funzione  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  detta POTENZIALE tale che  $U \in \mathcal{C}^2(A)$  e  $\mathbf{F} = \nabla U$  in tutto  $A$ .

**✎ Esempio 8.4.2.** Dimostrare che il seguente campo vettoriale non è conservativo

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2, xy^2).$$

SOLUZIONE. Se il campo  $\mathbf{F}$  fosse conservativo dovrebbe esistere  $U$  funzione potenziale tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 \quad \frac{\partial U}{\partial y} = xy^2.$$

Dalla prima relazione, integrando rispetto alla variabile  $x$  seguirebbe che  $U(x, y) = x^3 + g(y)$  con  $g$  funzione derivabile della sola variabile  $y$ . Ma allora, derivando questa relazione rispetto alla variabile  $y$  si otterrebbe  $U_y(x, y) = g'(y)$  costante rispetto a  $x$ , assurdo perché  $U_y(x, y) = xy^2$ .

Sarebbe dunque interessante possedere dei criteri che permettono di decidere se un campo è conservativo oppure no e in caso affermativo calcolarne il potenziale. L'esempio precedente suggerisce l'idea di utilizzare il teorema di Schwarz per ricavare una *condizione necessaria* che deve essere soddisfatta affinché un qualunque campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sia conservativo:

**Teorema 8.4.3.** (CONDIZIONE DELLE DERIVATE IN CROCE) *Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un campo di classe  $\mathcal{C}^1(A)$  conservativo in  $A$ , allora soddisfa le relazioni:*

$$\begin{cases} \partial_y F_1 = \partial_x F_2 \\ \partial_z F_1 = \partial_x F_3 \\ \partial_z F_2 = \partial_y F_3 \end{cases} \quad (8.4.1)$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  è un campo conservativo in un aperto  $A$ , allora esiste  $U(x, y, z)$  tale che

$$\begin{cases} U_x = F_1 \\ U_y = F_2 \\ U_z = F_3 \end{cases}$$

Derivando la prima equazione rispetto a  $y$  e la seconda rispetto a  $x$  otteniamo:

$$U_{xy} = \partial_y F_1 \quad U_{yx} = \partial_x F_2.$$

Se  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1$  e dunque  $U_{xy}, U_{yx}$  sono continue, per il teorema di Schwarz ne segue

$$\partial_y F_1 = \partial_x F_2.$$

Analogamente si deducono le relazioni

$$\partial_z F_1 = \partial_x F_3 \quad \partial_z F_2 = \partial_y F_3.$$

□

Per un campo bidimensionale le relazioni precedenti si riducono a una sola:

$$\partial_y F_1 = \partial_x F_2.$$

☞ **Osservazione 8.4.4.** Ricordando la definizione dell'operatore rotore appena introdotto, ci si accorge che la condizione delle derivate in croce altro non è che richiedere che  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  cioè che

il campo  $\mathbf{F}$  sia irrotazionale. In tal caso il teorema precedente si enuncia dicendo che un campo conservativo è irrotazionale. Ciò si vede anche osservando che se un campo è conservativo, allora è il gradiente di un certo potenziale  $U$  e si ha la seguente identità

$$\nabla \times (\nabla U) = \text{rotgrad}U = \mathbf{0}.$$

 **Esempio 8.4.5.** *Vedere se il campo*

$$F(x, y, z) = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

*è conservativo e in caso affermativo determinare una funzione potenziale.*

SOLUZIONE. Proviamo a vedere se sono soddisfatte le condizioni delle derivate in croce. Si ha

$$\partial_y F_1 = 0 = \partial_x F_2 \quad \partial_z F_1 = 0 = \partial_x F_3 \quad \partial_x F_2 = 0 = \partial_y F_3.$$

Quindi il campo potrebbe essere conservativo. Cerchiamo di determinare una funzione potenziale  $U(x, y, z)$ . Se esistesse una tale  $U$  si avrebbe:

$$U_x = x \Rightarrow U = \int x + c(y, z) = \frac{x^2}{2} + c(y, z)$$

$$U_y = -2y \Rightarrow U = \int (-2y) + c(x, z) = -y^2 + c(x, z)$$

$$U_z = 3z \Rightarrow U = \int 3z + c(x, y) = \frac{3}{2}z^2 + c(x, y)$$

quindi il campo è effettivamente conservativo e una funzione potenziale è data da

$$U(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{3}{2}z^2.$$

 **Esempio 8.4.6.** *Vedere se il campo*

$$F(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

*è conservativo e in caso affermativo determinare una funzione potenziale.*

SOLUZIONE. Si ha

$$\partial_x F_2 = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \neq -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_y F_1$$

e dunque, dalla condizione necessaria, si ha che il campo considerato non è conservativo.

 **Esempio 8.4.7.** (IL TEOREMA 8.4.3 È SOLO UNA CONDIZIONE NECESSARIA)

Per  $(x, y) \neq (0, 0)$  definiamo il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y)$  e un campo vettoriale  $\theta(x, y)$  nel modo seguente:

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j}$$

$$\theta(x, y) = \text{angolo polare } \theta \text{ di } (x, y) \text{ tale che } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Quindi  $x = r \cos \theta(x, y)$  e  $y = r \sin \theta(x, y)$  dove  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Verificare le seguenti proposizioni:

(a)  $\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)$  per  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(b)  $\nabla \theta(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$  per tutti i punti  $(x, y) \neq (0, 0)$  tali che  $0 < \theta < 2\pi$ .

(c)  $\mathbf{F}$  non è conservativo nell'intero piano  $xy$  privato dell'origine.

SOLUZIONE. Abbiamo

$$F_1 = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad F_2 = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Quindi

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)$$

per tutti i punti  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(b) Deriviamo implicitamente le equazioni  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  rispetto a  $x$  per ottenere

$$1 = \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Eliminando  $\frac{\partial r}{\partial x}$  da questa coppia di equazioni e risolvendo rispetto a  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  si ricava

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{r \sin \theta}{r^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = F_1.$$

Analogamente derivando rispetto a  $y$  si ottiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = F_2.$$

Queste formule valgono solo se  $0 < \theta < 2\pi$ ; la funzione  $\theta(x, y)$  non è nemmeno continua sull'asse  $x$  positivo: infatti se  $x > 0$  allora

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \theta(x, y) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \theta(x, y) = 2\pi.$$

Quindi  $\nabla\theta = \mathbf{F}$  vale ovunque nel piano, tranne che nei punti  $(x, 0)$  con  $x \geq 0$ .

(c) Supponiamo che  $\mathbf{F}$  sia conservativo in tutto il piano privato dell'origine. Allora  $\mathbf{F} = \nabla U$  in esso, per qualche funzione scalare  $U(x, y)$ . Ne segue che  $\nabla(\theta - U) = 0$  per  $0 < \theta < 2\pi$  e  $\theta - U = C$  con  $C$  costante ossia  $\theta = U + C$ . Il membro di sinistra di tale equazione è discontinuo lungo l'asse  $x$  positivo mentre il membro di destra non lo è. Pertanto i due membri non possono essere uguali. Questa contraddizione mostra che  $\mathbf{F}$  non può essere conservativo in tutto il piano privato dell'origine.

Nell'esempio preso in esame l'origine è un *buco* del dominio di  $\mathbf{F}$ . Anche se  $\mathbf{F}$  soddisfa la condizione necessaria per essere conservativa ovunque tranne in questo buco, per poter avere una funzione potenziale di  $\mathbf{F}$  si deve eliminare dal dominio di  $\mathbf{F}$  una semiretta (raggio) o più in generale una curva uscente dall'origine e che vada all'infinito. Il campo  $\mathbf{F}$  non è conservativo in qualunque dominio contenente una curva che circonda l'origine.

## 8.5. Domini connessi o semplicemente connessi

---

L'esempio precedente mostra che la condizione di irrotazionalità non è sufficiente a garantire che  $\mathbf{F}$  sia conservativo. La ragione di questo fatto è legata alle proprietà topologiche dell'aperto in cui il campo è irrotazionale.

La nozione chiave è quella di APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO, di cui daremo solo una nozione intuitiva.

□ **Definizione 8.5.1.** Un insieme  $\Omega$  si dice CONNESSO se presi comunque due punti di  $\Omega$  esiste un arco di curva continuo che congiunge questi due punti ed è interamente contenuto in  $\Omega$ .

□ **Definizione 8.5.2.** Un aperto  $\Omega$  si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se è connesso e inoltre soddisfa la seguente condizione: ogni curva semplice, chiusa, interamente contenuta in  $\Omega$  può essere ridotta, mediante una trasformazione continua, a un unico punto senza uscire da  $\Omega$ .

**Nel piano** sono semplicemente connessi: cerchi, ellissi, poligoni, semipiani, il piano stesso o il piano privato di una retta; non sono semplicemente connessi il piano (o il cerchio ecc...) privati di un punto; una corona circolare, più in generale ogni insieme che presenta un "buco".

**Nello spazio** sono semplicemente connessi: sfere, ellipsoidi, poliedri convessi, una corona sferica, un semispazio, tutto lo spazio privato di un numero finito di punti; non sono semplicemente connessi il toro, la sfera privata di un diametro, lo spazio privato di una retta.

Chiarita questa nozione possiamo enunciare il seguente importante risultato:

**Teorema 8.5.3.** *Sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale di classe  $C^1(A)$  che soddisfa le condizioni necessarie (8.4.1) in  $A$ . Sia inoltre  $A$  un aperto semplicemente connesso. Allora  $\mathbf{F}$  è conservativo in  $A$ . In particolare, qualunque sia  $A$ , il campo  $\mathbf{F}$  è LOCALMENTE CONSERVATIVO.*

L'ultima affermazione sta a significare che, visto che  $A$  è aperto, ogni suo punto ammette un intorno sferico  $B$  (che perciò è semplicemente connesso) tutto contenuto in  $A$ ; è dunque possibile applicare la prima parte del teorema all'intorno  $B$  e dedurre che il campo  $\mathbf{F}$  è conservativo in questo intorno (e quindi localmente).

☞ **Osservazione 8.5.4.** Esistono campi che sono conservativi definiti su domini che non sono semplicemente connessi, come mostra il prossimo esempio.

📎 **Esempio 8.5.5.** *Vedere se il campo*

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

*è conservativo e in caso affermativo determinare una funzione potenziale.*

SOLUZIONE. Si ha

$$\partial_x F_2 = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_y F_1$$

e dunque la condizione necessaria è verificata; il campo dunque potrebbe essere conservativo. Tuttavia  $\mathbf{F}$  è definito su un dominio (il piano privato dell'origine) che non è semplicemente connesso, quindi non si può applicare il teorema precedente per concludere che il campo è conservativo. Tuttavia se si va alla ricerca di una funzione potenziale, con semplici calcoli si verifica che  $\mathbf{F} = \nabla U$  dove  $U(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$  quindi il campo assegnato è conservativo.

## 8.6. Lavoro o integrale di linea di un campo vettoriale

Il concetto di LAVORO è fortemente connesso ai campi vettoriali, soprattutto quando essi vengono interpretati come campi di forza.

□ **Definizione 8.6.1.** *Il LAVORO ELEMENTARE di una forza  $\mathbf{F}$  che sposta un punto materiale di uno spostamento infinitesimo  $d\mathbf{s} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$  è per definizione*

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Il LAVORO DEL CAMPO  $\mathbf{F}$  LUNGO UN ARCO DI CURVA  $\gamma$  parametrizzata da  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$  per  $t \in (a, b)$  è, per definizione, l'integrale di linea del lavoro elementare:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} dL = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

La quantità  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  si può anche riscrivere nella forma  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds$  dove  $\mathbf{t}$  è il versore tangente alla curva e  $ds$  è l'elemento di arco.

L'integrale  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  rappresenta pertanto il lavoro totale compiuto da  $\mathbf{F}$  per spostare il suo punto di applicazione da  $\mathbf{r}(a)$  a  $\mathbf{r}(b)$  lungo  $\gamma$ . Altre interpretazioni sono possibili, a seconda della natura del campo  $\mathbf{F}$ . Se la curva è semplice e chiusa, si usa il simbolo  $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  e si chiama CIRCUITAZIONE DEL CAMPO.

 **Esempio 8.6.2.** Calcoliamo il lavoro del seguente campo vettoriale

$$F(x, y) = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$$

lungo un percorso che parte dal punto  $(0, 0)$  e arriva al punto  $(1, 1)$

- a) lungo la retta  $y = x$ ;
- b) lungo la curva  $y = x^2$ ;
- c) lungo la curva continua costituita, nell'ordine, prima dal segmento che congiunge  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  e poi dal segmento che unisce i punti  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$ .

SOLUZIONE. a) Possiamo parametrizzare la retta nel seguente modo:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

da cui

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 1).$$

Allora

$$L = \int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 [F_1(x(t), y(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t))y'(t)] dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

b) Possiamo parametrizzare la curva nel seguente modo:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

da cui

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2t).$$

Allora

$$L = \int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 [(t^2)^2 + 2tt^2] dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1.$$

c) Possiamo parametrizzare il percorso nel seguente modo:

$$\mathbf{r}_1(t) = 0\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + 1\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

da cui

$$\mathbf{r}'_1(t) = (0, 1) \quad \mathbf{r}'_2(t) = (1, 0).$$

Allora

$$L = \int_{\mathbf{r}_1(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{r}_2(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 [t^2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot t] dt + \int_0^1 [1 + 0] dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Quindi in questo caso il lavoro del campo vettoriale  $\mathbf{F}$  ha lo stesso valore su qualunque percorso da  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .

 **Esempio 8.6.3.** Sia  $\mathbf{F}$  il campo vettoriale dato da

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}.$$

Determinare il lavoro del campo vettoriale  $\mathbf{F}$  lungo i seguenti due percorsi che connettono i punti  $(1, 0)$  e  $(0, -1)$

a) segmento di retta;

b) parte di circonferenza centrata nell'origine percorsa in senso antiorario.

SOLUZIONE. a) Possiamo parametrizzare la retta nel seguente modo:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} - t\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

da cui

$$\mathbf{r}'(t) = (-1, -1).$$

Allora

$$L = \int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 [(-t)(-1) + (-1)(1 - t)(-1)] dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

b) Possiamo parametrizzare la curva nel seguente modo:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$$

da cui

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Allora

$$L = \int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{3/2\pi} [\sin t(-\sin t) + (-\cos t)\cos t] dt = \int_0^{3/2\pi} (-1) dt = -\frac{3}{2}\pi.$$

In questo caso l'integrale dipende dal percorso. Tra l'altro il campo non è conservativo, come si può facilmente mostrare (non vale la condizione necessaria  $\partial_y y = 1 \neq \partial_x(-x) = -1$ ). Ci si può domandare se c'è un legame tra questi due fatti. In seguito si vedrà che la risposta è affermativa.

Il lavoro di un campo vettoriale risulta essere un integrale di linea di tipo diverso rispetto a quelli visti fino a questo momento; per distinguerli gli integrali studiati fino a questo momento vengono detti INTEGRALI DI LINEA DI PRIMA SPECIE mentre gli altri vengono anche chiamati INTEGRALE DI LINEA DI SECONDA SPECIE. Nei due casi il vettore tangente alla curva è coinvolto in modo diverso all'interno dell'integrale e questo ha come conseguenza il fatto che gli integrali di linea considerati fino ad ora sono invarianti per cambiamenti di parametrizzazione della curva, in particolare se la nuova parametrizzazione cambia l'orientazione, cambiando il verso di percorrenza della curva il risultato rimane il medesimo. Negli integrali di linea di seconda specie, invece, se si cambia l'orientazione di una curva, il risultato cambia di segno, quindi il lavoro dipende dal verso di percorrenza della curva. L'integrale di linea di seconda specie continua ad essere invariante per cambiamenti di parametro che non alterino l'orientazione.

## 8.7. Lavoro di un campo conservativo

---

Per i campi conservativi vale il seguente risultato:

**Proposizione 8.7.1.** (INDIPENDENZA DAL PERCORSO)

*Sia  $D$  un dominio aperto connesso e sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale definito su  $D$ . Allora le tre proposizioni seguenti sono equivalenti:*

- a)  $\mathbf{F}$  è conservativo in  $D$ .
- b)

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

*per qualunque curva chiusa  $C$  liscia e continua a tratti contenuta in  $D$ .*

- c) *Dati due punti qualsiasi  $P_0$  e  $P_1$  in  $D$ , l'integrale  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  ha lo stesso valore per tutte le curve lisce continue a tratti in  $D$  che iniziano in  $P_0$  e terminano in  $P_1$ .*

Vale dunque il seguente

**Teorema 8.7.2.** *Se un campo è conservativo in un aperto  $A$  e  $U$  è un suo potenziale in  $A$ , il lavoro del campo lungo un qualunque cammino contenuto in  $A$  che congiunge i punti  $P_1$  e  $P_2$  è dato semplicemente da*

$$L = U(P_2) - U(P_1).$$

*Il lavoro dunque dipende solo dagli estremi del cammino e non dalla forma del medesimo. In particolare, il lavoro di un campo conservativo lungo un cammino chiuso (cioè tale che  $P_1 = P_2$ ) è nullo.*

✎ **Esempio 8.7.3.** *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x, y) = \left( \frac{y^2 g(x)}{x} + 2y^2, -y \sin x + 4xy \right),$$

*si stabilisca se  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$  può essere scelta in modo tale che  $F$  ammetta un potenziale in tutto il suo dominio di definizione, e nel caso calcolarlo.*

È chiaro che l'insieme di definizione del campo vettoriale  $F$  dipende dalla scelta della funzione  $g$ . Una condizione necessaria affinché il campo  $F$  ammetta potenziale è che valga la condizione delle derivate in croce. Imponiamo questa condizione e vediamo cosa implica su  $g$ . Si dovrebbe avere

$$D_x(-y \sin x + 4xy) = D_y \left( \frac{y^2 g(x)}{x} + 2y^2 \right)$$

da cui

$$-y \cos x + 4y = \frac{g(x)}{x} 2y + 4y$$

e questo implica allora che  $g(x) = -\frac{1}{2}x \cos x$ .

Con questa scelta di  $g$  vale la condizione delle derivate in croce e si ha

$$F(x, y) = \left( -\frac{1}{2} \cos x y^2 + 2y^2, -y \sin x + 4xy \right)$$

da cui si vede immediatamente che  $F$  è definito su tutto  $\mathbb{R}^2$  che è un dominio semplicemente connesso. Quindi la teoria ci assicura che il campo dato è conservativo. Calcolo un potenziale  $U$ . Si deve avere

$$U_x = -\frac{1}{2} \cos x y^2 + 2y^2 \quad U_y = -y \sin x + 4xy$$

da cui

$$U = \int \left( -\frac{1}{2} \cos x y^2 + 2y^2 \right) dx = \frac{1}{2} y^2 (-\sin x) + 2xy^2 + C_1(y)$$

ma anche

$$U = \int (-y \sin x + 4xy) dy = -\frac{y^2}{2} \sin x + 2xy^2 + C_2(x).$$

A questo punto posso senz'altro scegliere  $C_1(y) = C_2(x) = 0$  e

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 \sin x + 2xy^2.$$

 **Esempio 8.7.4.** Si calcoli l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma} G \cdot d\gamma$ , dove

$$G(x, y) = (-\cos y, x \sin y)e^{x(\cos y)}, \quad \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t\pi) + t^2, 1 + t^2).$$

Si tratta di calcolare un integrale curvilineo di seconda specie, cioè un integrale di un campo vettoriale. Vediamo se il campo  $G$  è conservativo. Il suo dominio di definizione è  $\mathbb{R}^2$  che è semplicemente connesso; vediamo se vale la condizione delle derivate in croce. Dovrebbe essere

$$D_x(x \sin y e^{x(\cos y)}) = D_y(-\cos y e^{x(\cos y)})$$

da cui

$$\sin y e^{x(\cos y)} + x \sin y e^{x(\cos y)} \cos y = \sin y e^{x(\cos y)} + \cos y e^{x(\cos y)} x \sin y.$$

Quindi la teoria ci assicura che il campo  $G$  è conservativo. Troviamo un potenziale  $U$ . Deve essere

$$U_x = -\cos y e^{x(\cos y)} \quad U_y = x \sin y e^{x(\cos y)}$$

da cui

$$U = \int (-\cos y e^{x(\cos y)}) dx = -e^{x(\cos y)} + C_1(y)$$

e anche

$$U = \int (x \sin y e^{x(\cos y)}) dy = -e^{x(\cos y)} + C_2(x)$$

quindi posso senz'altro scegliere  $C_1(y) = C_2(x) = 0$  e  $U(x, y) = -e^{x(\cos y)}$ .

A questo punto

$$\int_{\gamma} G \cdot d\gamma = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0))$$

da cui

$$\gamma(1) = (0, 2) \quad \gamma(0) = (1, 1)$$

e

$$\int_{\gamma} G \cdot d\gamma = -1 + e^{\cos 1}.$$

## 8.8. Il linguaggio delle forme differenziali

I concetti di LAVORO DI UN CAMPO VETTORIALE, CAMPO CONSERVATIVO, CAMPO IRROTazionale possono essere espressi equivalentemente usando un linguaggio diverso che è quello delle FORME DIFFERENZIALI. La teoria delle forme differenziali è in realtà una teoria matematica profonda e complessa che permette di dimostrare risultati molto generali; qui ci interessa soltanto segnalare una terminologia alternativa per concetti che già conosce. Il motivo è che entrambi i linguaggi sono molto usati nella letteratura scientifica e vanno pertanto conosciuti.

Linguaggio dei campi vettoriali	Linguaggio delle forme differenziali
Sia $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3$	Sia $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3$
Lavoro elementare di $\mathbf{F}$ $dL = F_1dx + F_2dy + F_3dz$	Forma differenziale $\omega = F_1dx + F_2dy + F_3dz$
Lavoro del campo $\mathbf{F}$ sul cammino $\gamma$ $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$	Integrale della forma $\omega$ sul cammino $\gamma$ $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$
$\mathbf{F}$ è conservativo $\exists U : \mathbf{F} = \nabla U$	$\omega$ è esatta $\exists \mathbf{f} : \omega = d\mathbf{f} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$
$\mathbf{F}$ è irrotazionale $\text{rot } \mathbf{F} = 0$	$\omega$ è chiusa $\text{rot } \mathbf{F} = 0$
Un campo conservativo è irrotazionale	una forma differenziale esatta è chiusa
Un campo irrotazionale in un aperto semplicemente connesso è conservativo	una forma differenziale chiusa in un dominio semplicemente connesso è esatta.

## 8.9. Formula di Gauss-Green nel piano

In questo paragrafo ci occupiamo della relazione tra integrali doppi e integrali di linea. I risultati che andremo a presentare sono casi particolari di teoremi della divergenza e del rotore che presenteremo in seguito.

Sia  $D$  un dominio semplice rispetto a entrambi gli assi, cioè  $x$ -semplice e  $y$ -semplice; sia

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(D)$ .

□ **Definizione 8.9.1.** Diciamo che il bordo di  $D$ ,  $\partial D$  è ORIENTATO POSITIVAMENTE quando su di esso è fissato il verso di percorrenza ANTIORARIO; in caso contrario diremo che è ORIENTATO NEGATIVAMENTE. Per sottolineare l'orientazione useremo i simboli  $\partial^+ D$  e  $\partial^- D$  rispettivamente.

Premettiamo il seguente risultato.

**Proposizione 8.9.2.** *Sia  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(D)$ .*

(a) *Se*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

*con  $g_1, g_2$  funzioni continue su  $[a, b]$  allora*

$$\int \int_D P_y dx dy = - \int_{\partial^+ D} P dx$$

(b) *Se*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

*con  $h_1, h_2$  funzioni continue su  $[c, d]$  allora*

$$\int \int_D Q_x dx dy = \int_{\partial^+ D} Q dy$$

Vale il seguente teorema.

**Teorema 8.9.3.** *Sia  $D$  un dominio limitato di  $\mathbb{R}^2$  semplice rispetto a entrambi gli assi. Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$  è un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(D)$  allora vale la formula*

$$\int \int_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy$$

☞ **Osservazione 8.9.4.** La formula precedente vale anche per domini più generali, per esempio domini esprimibili come unione di un numero finito di domini semplici rispetto a entrambi gli assi, a due a due disgiunti.

📎 **Esempio 8.9.5.** *Si calcoli l'integrale curvilineo (il lavoro) del campo vettoriale*

$$v(x, y) = (\cos(y + x), \sin(y - x))$$

*lungo la curva data dai lati del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(0, 1)$ , percorsi in senso antiorario.*

Questo esercizio può essere risolto in due modi.

PRIMO MODO. Siano

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1 \wedge 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 0\}$$

$$\gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$$

Troviamo una parametrizzazione di questi tre segmenti. Si ha

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \gamma_1'(t) = (-1, -1).$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2 \quad \gamma_2'(t) = (1, 0).$$

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = t - 2 \end{cases} \quad 2 \leq t \leq 3 \quad \gamma_3'(t) = (0, 1).$$

A questo punto

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} v(x, y) \cdot dS = \int_{\gamma_1} v + \int_{\gamma_2} v + \int_{\gamma_3} v = \int_0^1 \{\cos[1 - t - t](-1) + \sin[1 - t + t](-1)\} dt \\ &+ \int_1^2 \{\cos[0 + (t - 2)]1 + \sin(t + 2 - 0)0\} dt \\ &+ \int_2^3 \{\cos[t - 2 + 0]0 + \sin(t - 2 - 0)1\} dt = \int_0^1 [-\cos(1 - 2t) - \sin 1] dt \\ &+ \int_1^2 \cos(t - 2) dt + \int_2^3 \sin(t - 2) dt \\ &= \frac{1}{2} \sin(1 - 2t) \Big|_0^1 - \sin 1 + \sin(t - 2) \Big|_1^2 - \cos(t - 2) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \sin(-1) - \frac{1}{2} \sin 1 - \sin 1 \\ &- \sin(-1) - \cos 1 + 1 = 1 - \cos 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

SECONDO MODO. Utilizzo la formula di Gauss-Green nel piano: sia  $D$  un dominio limitato in  $\mathbb{R}^2$  che sia semplice rispetto ad entrambi gli assi. Se  $v = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} \in \mathcal{C}^1(D)$ , allora vale la formula

$$\int \int_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy,$$

dove  $\partial^+ D$  è il bordo di  $D$  orientato in senso antiorario. Nel nostro caso  $P = \cos(y + x)$ ,

$Q = \sin(y - x)$ ,  $D$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(0, 1)$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v \cdot dS &= \int \int_D [-\cos(y - x) + \sin(y + x)] dx dy = \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} -\cos(y - x) dx dy \\ &\quad + \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} \sin(y + x) dy dx = \int_{-1}^0 [-\sin(y - x)] \Big|_0^{x+1} dx + \int_{-1}^0 [-\cos(y + x)] \Big|_0^{x+1} dx \\ &= \int_{-1}^0 (-\sin 1 + \sin(-x)) dx + \int_{-1}^0 (-\cos(2x + 1) + \cos x) dx \\ &= -\sin 1 + 1 - \cos 1 - \frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{2} \sin(-1) - \sin(-1) = 1 - \cos 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

## 8.10. Calcolo di aree mediante integrali curvilinei

I risultati della sezione precedente possono essere usati per calcolare l'area di un dominio  $D$  ammissibile per il teorema di Gauss-Green nel piano mediante un integrale curvilineo esteso su tutto  $\partial D$ . Infatti scegliendo  $P(x, y) = y$  nella Proposizione 8.9.2 si ha

$$\text{area}(D) = \int \int_D 1 dx dy = - \int_{\partial^+ D} y dx$$

mentre scegliendo  $Q(x, y) = x$  nella Proposizione 8.9.2 si ha

$$\text{area}(D) = \int \int_D 1 dx dy = \int_{\partial^+ D} x dy$$

Quindi sommando e dividendo per 2 si ottiene

$$\text{area}(D) = \int \int_D 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} (x dy - y dx)$$

**Esempio 8.10.1.** Sia  $E \subset \{(x, y) : x > 1, y > 1\}$  insieme con frontiera regolare. Quale dei seguenti integrali è uguale all'area di  $E$ ?

$$\begin{array}{ll} \boxed{\text{(a)}} \int_{\partial^+ E} \frac{1-x}{x} y dx & \boxed{\text{(b)}} \int_{\partial^+ E} y^2 dx + x^2 dy \\ \boxed{\text{(c)}} \int_{\partial^+ E} \frac{1-x}{x} y dx + \log(xy) dy & \boxed{\text{(d)}} \int_{\partial^+ E} \log(xy) dy \end{array}$$

Se  $F = (F_1, F_2)$ , allora la formula di Gauss-Green nel piano dice che (sotto opportune ipotesi del dominio  $D$ )

$$\int \int_D (F_1)_y dx dy = - \int_{\partial^+ D} F_1 dx$$

$$\int \int_D (F_2)_x dx dy = \int_{\partial^+ D} F_2 dy$$

da cui

$$\int \int_D ((F_1)_y + (F_2)_x) dx dy = \int_{\partial^+ D} (F_2 dy - F_1 dx).$$

L'area di  $D$  è  $\int \int_D dx dy$  quindi va bene un qualunque campo tale che

$$(F_1)_y + (F_2)_x = 1$$

Nel nostro caso dunque l'unica che funziona è quella del caso (c); infatti, ponendo  $F_1 = -\frac{1-x}{x}y = (1 - \frac{1}{x})y$  e  $F_2 = \log(xy)$ , si ha

$$(F_1)_y + (F_2)_x = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1.$$

## 8.11. Area e integrali di superficie

### 8.11.1. Area di una superficie

L'idea di questo paragrafo è quella di estendere il concetto di integrale doppio andando a integrare non più solo su un dominio bidimensionale piano ma anche su oggetti più generali, per esempio su superfici. Questo permette anche di poter calcolare, ad esempio, l'area di una superficie. Le applicazioni sono evidenti, soprattutto in fisica (calcolo di massa o carica elettrica dislocata su superfici).

Sia dunque  $\Sigma$  una superficie *regolare* descritta da equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$$

che si può sintetizzare nell'equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in A \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Sappiamo che il vettore  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  è un vettore normale al piano tangente alla superficie; d'altra parte, dalle proprietà del prodotto vettoriale, si può affermare che il modulo del vettore  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  rappresenta l'area del parallelogramma individuato dai due vettori, che in prima approssimazione uguaglia l'area del "parallelogramma curvilineo" disegnato sulla superficie e compreso tra le linee coordinate. È ragionevole allora dare le seguenti definizioni.

□ **Definizione 8.11.1.** Si dice ELEMENTO D'AREA SULLA SUPERFICIE la quantità

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

L'AREA DELLA SUPERFICIE è data dalla formula

$$a(\Sigma) = \int \int_{\Sigma} dS = \int \int_A |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

☞ **Osservazione 8.11.2.** Il valore di  $a(\Sigma)$  non dipende dalla parametrizzazione scelta. Inoltre per definizione di superficie regolare parametrizzata l'elemento d'area non si annulla mai.

📎 **Esempio 8.11.3.** (AREA DI UNA SUPERFICIE CARTESIANA) Sia  $\Sigma$  una superficie cartesiana, che si può esprimere come grafico di una funzione  $z = f(x, y)$ , con  $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ . Si ha dunque

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

da cui

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Allora

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$$

da cui la formula dell'area diventa

$$a(\Sigma) = \int \int_A \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy$$

📎 **Esempio 8.11.4.** (AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE) Sia  $\Sigma$  una superficie di rotazione espressa attraverso le seguenti equazioni parametriche (per esempio ottenute mediante rotazione attorno all'asse  $x$ )

$$\begin{cases} x = x(t) \cos \theta \\ y = y(t) \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)$$

da cui

$$\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'(t) \cos \theta & x'(t) \sin \theta & z'(t) \\ -x(t) \sin \theta & x(t) \cos \theta & \theta \end{vmatrix} = -x(t) z'(t) \cos \theta \mathbf{i} - x(t) z'(t) \sin \theta \mathbf{j} + x(t) x'(t) \mathbf{k}$$

Quindi l'elemento d'area diventa

$$dS = |x(t)| \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt d\theta$$

da cui la formula dell'area diventa

$$a(\Sigma) = \int \int_{I \times [0, 2\pi)} |x(t)| \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt d\theta$$

✎ **Esempio 8.11.5.** Calcolare l'area della superficie  $\mathcal{S}$  intersezione della "sella  $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = xy\}$  con il solido cilindrico  $C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

Si tratta di un calcolare l'area di una superficie. Prima di tutto occorre determinare una parametrizzazione della superficie  $\Sigma$ . Scegliamo ad esempio

$$r : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad r(\rho, \theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta))$$

dove

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \rho^2 \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

Il fatto che la sella  $\Sigma$  si interseca con il solido cilindrico ci dà la variabilità dei parametri  $\rho$  e  $\theta$ : si ha infatti  $0 \leq \rho \leq 2$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Allora si ha

$$r_\rho(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$r_\theta(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 2\rho \sin \theta \cos \theta)$$

$$r_{\theta\theta}(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))$$

e

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 2\rho \sin \theta \cos \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{vmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned} r_\rho \wedge r_\theta &= \mathbf{i} \rho^2 (\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta - 2 \sin \theta \cos^2 \theta) + \mathbf{j} (-\rho^2) (2 \sin^2 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta) \\ &\quad + \mathbf{k} (\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) = (-\rho^2 \sin \theta) \mathbf{i} + (-\rho^2 \cos \theta) \mathbf{j} + \rho \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Da questo si deduce che

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{\rho^4 + \rho^2} = \rho \sqrt{\rho^2 + 1}.$$

Quindi

$$\int \int_{\Sigma} 1 dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{\rho^2 + 1} d\theta d\rho = \pi \frac{(\rho^2 + 1)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3} [8 - 1] = \frac{14}{3} \pi.$$

## 8.11.2. Integrale di superficie di una funzione continua

Sia  $F$  una funzione continua, definita in una regione dello spazio contenente la superficie  $\Sigma$ . La sua restrizione sulla superficie è

$$\tilde{F}(u, v) = F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

ed è naturale definire l'integrale di  $F$  su  $\Sigma$  tramite la formula

$$\int \int_{\Sigma} F dS = \int \int_A \tilde{F}(u, v) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

Quindi l'integrale di superficie di  $F$  si esprime per mezzo di un integrale doppio in un dominio piano.

 **Esempio 8.11.6.** Calcolare l'integrale superficiale  $\int_{\Sigma} (3z - 1) dS$ , dove  $\Sigma$  è la porzione di ellissoide di equazione  $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$  racchiusa nel cilindro  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$  e situata nel semispazio  $\{z \geq 0\}$ .

Dobbiamo innanzitutto determinare una parametrizzazione della superficie considerata. Risolveremo l'esercizio in due modi, lavorando con due diverse parametrizzazioni della superficie. PRIMO MODO. Poniamo

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \pm \sqrt{2(1 - \rho^2)}. \end{cases}$$

Siccome la superficie sta nel semispazio  $\{z \geq 0\}$  si prenderà la seguente parametrizzazione per  $\Sigma$

$$r : (\rho, \theta) \mapsto (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta)) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{2(1 - \rho^2)}) \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi].$$

Imponendo che la superficie sia racchiusa dal cilindro, si ottiene la seguente restrizione su  $\rho$

$$\rho^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}.$$

Sia allora

$$A := \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] : 0 \leq \rho \leq 1/2, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Si ha

$$r_{\rho} = \left( \cos \theta, \sin \theta, \sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{1 - \rho^2}} (-2\rho) \right) = \left( \cos \theta, \sin \theta, -\frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right)$$

e

$$r_{\theta} = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

quindi

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & \frac{-\sqrt{2}\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{\sqrt{2}\rho^2 \cos \theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{\sqrt{2}\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \rho \right).$$

Allora

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{\frac{2\rho^4}{1-\rho^2} + \rho^2} = \sqrt{\frac{2\rho^4 + \rho^2 - \rho^4}{1-\rho^2}} = \sqrt{\frac{\rho^4 + \rho^2}{1-\rho^2}} = \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1-\rho^2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (3z - 1) dS &= \int \int_A (3\sqrt{2} \sqrt{1-\rho^2} - 1) \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1-\rho^2}} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} 3\sqrt{2} \rho \sqrt{\rho^2 + 1} d\theta d\rho - \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1-\rho^2}} d\theta d\rho. \end{aligned}$$

Osserviamo che si ha

$$\int 2\rho \sqrt{\rho^2 + 1} d\rho = \frac{2}{3} (\rho^2 + 1)^{3/2} + C;$$

ora troviamo la seguente primitiva

$$\int \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1-\rho^2}} d\rho.$$

Prima di tutto effettuiamo il seguente cambio di variabile

$$z = \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1-\rho^2}} \quad \rho = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{1+z^2}} \quad d\rho = \frac{2z}{(z^2 + 1)^2} \sqrt{\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}}$$

da cui

$$\int \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1-\rho^2}} d\rho = \int \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}} z \frac{2z}{(z^2 + 1)^2} \sqrt{\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}} dz = \int \frac{2z^2}{(z^2 + 1)^2} dz.$$

Adesso integrando per parti si ottiene

$$\int \frac{2z^2}{(z^2 + 1)^2} dz = \int \frac{2z}{(z^2 + 1)^2} z dz = -\frac{z}{z^2 + 1} + \arctan z.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (3z - 1) dS &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \rho \sqrt{\rho^2 + 1} d\theta d\rho - \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1 - \rho^2}} d\theta d\rho \\ &= 2\sqrt{2} \pi (\rho^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^{1/2} - 2\pi \left( -\frac{z}{z^2 + 1} + \arctan z \right) \Big|_1^{\sqrt{5/3}} \\ &= 2\pi \left[ \sqrt{2} \left( \left( \frac{5}{4} \right)^{3/2} - 1 \right) + \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{3}{8} - \arctan \sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} + \arctan 1 \right]. \end{aligned}$$

Si può anche procedere con parametrizzazioni diverse per la superficie; il risultato non cambia.

## 8.12. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie

Consideriamo un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  e una superficie  $\Sigma$  trasversale alle linee di campo. L'integrale su  $\Sigma$  della componente di  $\mathbf{F}$  normale a  $\Sigma$  rappresenta il FLUSSO DI  $\mathbf{F}$  ATTRAVERSO  $\Sigma$  e gioca un ruolo fondamentale nella formulazione di molte leggi fisiche e in svariate applicazioni. Obiettivo di questo paragrafo sarà quello di definire correttamente questo concetto.

### 8.12.1. Superfici orientate. Bordo di una superficie.

Sia  $\Sigma$  una superficie regolare parametrizzata da

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$$

dove  $T$  è un dominio decomponibile in un numero finito di insiemi semplici. Allora i versori

$$\mathbf{n} = \text{vers}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \quad - \mathbf{n} = -\text{vers}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$$

sono entrambi normali alla superficie  $\Sigma$  e la scelta di uno dei due corrisponde a privilegiare uno dei due “lati” della superficie (per esempio il “lato interno” o il “lato esterno” di un guscio sferico); quindi la scelta di uno dei due versori può essere legata al concetto di *orientazione* della superficie stessa.

**□ Definizione 8.12.1.** Una superficie regolare  $\Sigma$  si dice **ORIENTABILE** se, per ogni curva continua chiusa che giace sulla superficie, parametrizzata da  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \Sigma$  si ha che  $\mathbf{n}(\mathbf{r}(b)) = \mathbf{n}(\mathbf{r}(a))$ . Detto altrimenti, se si segue il versore normale alla superficie lungo una curva chiusa che giace sulla superficie stessa, dopo un giro completo il versore normale deve avere di nuovo lo stesso verso.

□ **Definizione 8.12.2.** L'ORIENTAZIONE su una superficie è dunque determinata da una scelta del versore,  $\mathbf{n}$  o  $-\mathbf{n}$ . Una superficie si dice ORIENTATA se su di essa è stata scelta una delle due possibili orientazioni.

✎ **Esempio 8.12.3.** Esempi di superfici orientabili sono le superfici cartesiane. Per una superficie di equazione  $z = f(x, y)$  si ha infatti

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$$

e questo versore normale risulta essere sempre rivolto verso l'alto. Invece per una sfera o un toro, il versore  $\mathbf{n}$  risulta sempre interno o esterno a seconda della scelta dei parametri  $u$  e  $v$ .

☞ **Osservazione 8.12.4.** Non tutte le superfici sono orientabili. La più famosa è il cosiddetto NASTRO DI MOEBIUS: esso consiste in una striscia di carta con gli estremi uniti in modo da formare un anello ma avendo fatto compiere un mezzo giro a uno dei due estremi prima di unirli. In questo caso infatti la superficie ha un solo lato e non può essere orientata.

Per quanto riguarda la nozione di BORDO DI UNA SUPERFICIE, essendo una questione piuttosto delicata, ci limitiamo a considerare solamente il caso in cui  $T$  sia un dominio decomponibile in un numero finito di domini semplici (quindi  $T$  chiuso) e tale che la parametrizzazione della superficie realizza una corrispondenza biunivoca tra  $T$  e  $\Sigma$ . In tal caso non ci sono autointersezioni, e visto che  $T$  si può decomporre in un numero finito di domini semplici, il bordo di  $T$  è un'unione finita di curve che vengono trasportate tramite la parametrizzazione in un numero finito di immagini  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  di tali curve. Allora l'orientazione di  $\Sigma$ , ottenuta scegliendo uno dei due lati della superficie, induce un'orientazione *positiva* di ciascuna delle curve che compongono il bordo: allora si sceglie il verso di percorrenza di ogni curva in modo tale che percorrendole rimanendo sul lato di  $\Sigma$  che si è scelto come positivo, si lasciano i punti di  $\Sigma$  alla sinistra. Quando il bordo della superficie è orientato positivamente si usa il simbolo  $\partial^+ \Sigma$ .

## 8.12.2. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata

Siamo pronti per dare la seguente definizione.

□ **Definizione 8.12.5.** Dati una superficie regolare orientata  $\Sigma$  con un versore normale  $\mathbf{n}$  e un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  in un intorno di  $\Sigma$ , si definisce FLUSSO DEL VETTORE  $\mathbf{F}$  ATTRAVERSO  $\Sigma$  nella direzione e verso di  $\mathbf{n}$  l'integrale

$$\Phi(\mathbf{F}; \Sigma) = \int \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (8.12.1)$$

Cerchiamo di calcolare operativamente l'integrale (8.12.1). Se

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$$

è la parametrizzazione usata per  $\Sigma$  allora visto che

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

si ha

$$\Phi(\mathbf{F}; \Sigma) = \int \int_T \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv$$

dove

$$\tilde{\mathbf{F}}(u, v) = \mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

☞ **Osservazione 8.12.6.** Il segno del flusso dipende dall'orientazione scelta sulla superficie. Se si cambia orientazione (quindi se si cambia segno al vettore  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ ) allora anche il flusso cambia segno.

📎 **Esempio 8.12.7.** Sia  $V(x, y, z) = (zx, zy, x^2 + y^2)$  un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ . Calcolate, usando la definizione, il flusso uscente di  $V$  attraverso la superficie laterale  $S$  del cono  $C$  di vertice  $P = (0, 0, 4)$  e base il cerchio sul piano  $\{z = 0\}$  di equazione  $x^2 + y^2 = 16$  (si calcoli cioè  $\int \int_S V \cdot \mathbf{n} dS$ ,  $\mathbf{n}$  versore normale uscente). Si noti che in questo caso la superficie laterale  $S$  del cono è il grafico della funzione  $c(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Sia

$$r : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u))$$

una parametrizzazione della nostra superficie. Allora il flusso  $\Phi_S$  di  $V$  uscente dalla superficie  $S$  è dato dalla formula

$$\Phi_S = \int \int_A V(x(t, u), y(t, u), z(t, u)) (r_t \wedge r_u)(t, u) dt du.$$

Risolviamo l'esercizio in due modi diversi, utilizzando due diverse parametrizzazioni della superficie  $S$ .

PRIMO MODO. Sia

$$r : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(\rho, \theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta))$$

dove

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 4 - \rho. \end{cases}$$

L'equazione di  $z$  è stata ricavata tramite  $x$  e  $y$  da  $c(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ . Essendo  $C$  un cono di vertice  $P$  e base il cerchio sul piano  $\{z = 0\}$  di equazione  $x^2 + y^2 = 16$ , si deduce che deve essere  $0 \leq \rho \leq 4$  mentre  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

A questo punto

$$r_\rho(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, -1) \quad r_\theta(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

e

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & -1 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho)$$

che è un vettore uscente.

Ora

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} ((4 - \rho) \rho \cos \theta \rho \cos \theta + (4 - \rho) \rho \sin \theta \rho \sin \theta + \rho^2 \rho) d\theta d\rho \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} ((4 - \rho) \rho^2 + \rho^3) d\theta d\rho = 8\pi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^4 = \frac{512}{3} \pi. \end{aligned}$$

SECONDO MODO. Sia

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

dove

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 4 - \sqrt{s^2 + t^2} \end{cases}$$

con la limitazione  $\sqrt{s^2 + t^2} \leq 4$ .

A questo punto

$$r_s(s, t) = \left( 1, 0, -\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \right) \quad r_t(s, t) = \left( 0, 1, -\frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \right)$$

e

$$r_s \wedge r_t = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \end{vmatrix} = \left( \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}, \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}, 1 \right)$$

che è un vettore uscente.

Ora

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \int_{s^2+t^2 \leq 16} \left( (4 - \sqrt{s^2+t^2}) \frac{ss}{\sqrt{s^2+t^2}} + (4 - \sqrt{s^2+t^2}) \frac{tt}{\sqrt{s^2+t^2}} + (s^2+t^2) \right) 1 \, ds \, dt \\ &= \int \int_{s^2+t^2 \leq 16} (4 - \sqrt{s^2+t^2}) \sqrt{s^2+t^2} + s^2 + t^2 \, ds \, dt\end{aligned}$$

che per mezzo di un cambio di coordinate (da cartesiane a polari) dà lo stesso risultato del passo precedente.

### 8.13. Teorema della divergenza

Siamo dunque pronti per enunciare uno dei risultati più importanti del nostro percorso, sia perché riassume (dal punto di vista matematico) molti dei concetti su cui abbiamo lavorato fino ad ora, sia perché dal punto di vista applicativo si ritrova in moltissime branche della fisica matematica ed è impiegato in uno svariato numero di applicazioni.

**Teorema 8.13.1.** (TEOREMA DELLA DIVERGENZA O DI GAUSS) *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  un dominio limitato, semplice rispetto a tutti e tre gli assi cartesiani, la cui frontiera è una superficie regolare e orientabile; indichiamo con  $\mathbf{n}_e$  il versore normale esterno a  $\partial D$  e sia  $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(D)$ . Allora vale la formula*

$$\int \int \int_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \int \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS$$

dove ricordiamo che

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Il teorema della divergenza si può dunque riassumere come: *il flusso di un campo vettoriale uscente da una superficie chiusa uguaglia l'integrale della divergenza del campo nella regione racchiusa dalla superficie stessa.* Il teorema rappresenta un'equazione di bilancio tra le due quantità.

 **Esempio 8.13.2.** *Con riferimento all'Esempio 8.12.7, provare a risolverlo usando il teorema della divergenza e commentare i risultati ottenuti.*

Proviamo dunque a risolvere il precedente esercizio utilizzando il teorema della divergenza. Dovremmo calcolare l'integrale triplo sul cono  $C$  della divergenza del campo vettoriale  $V$ . Sia

$\Phi_C$  il risultato di tale integrale. Ci si aspetterebbe  $\Phi_C = \Phi_S$ . Si ha

$$\operatorname{div} V(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(zx) + \frac{\partial}{\partial y}(zy) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2) = z + z + 0 = 2z.$$

Parametrizzo il cono con coordinate cilindriche, quindi si ha

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z. \end{cases}$$

con le limitazioni

$$0 \leq \rho \leq 4 \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad 0 \leq z \leq \rho.$$

Da cui

$$\begin{aligned} \Phi_C &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-\rho} 2z\rho \, dz \, d\theta \, d\rho = 2\pi \int_0^4 \rho [4-\rho]^2 \, d\rho = 2\pi \int_0^4 [16\rho - 8\rho^2 + \rho^3] \, d\rho \\ &= 2\pi \left[ 16 \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^4 - 8 \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^4 + \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^4 \right] = 2\pi \left[ 16 \cdot 8 - \frac{8}{3} \cdot 64 + 64 \right] = 2\pi \left[ 192 - \frac{512}{3} \right] = \frac{128}{3} \pi \end{aligned}$$

e quindi chiaramente  $\Phi_C \neq \Phi_S$ .

Il problema è che se vogliamo applicare il teorema della divergenza, il bordo del cono non è solo dato dalla sua superficie laterale  $S$  ma anche dalla superficie di base, quindi l'integrale triplo di  $\operatorname{div} V$  è uguale al flusso attraverso la superficie  $S$  e il cerchio di base del cono. Il flusso attraverso la superficie  $S$  è stato calcolato nella prima parte dell'esercizio, ora calcoliamo il flusso attraverso la superficie di base. Parametizziamo il cerchio di base

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

con la condizione  $s^2 + t^2 \leq 16$ . Stavolta però il versore normale è rivolto verso l'interno (entrante). Facciamo un cambiamento di variabili (che non cambia l'orientazione del versore normale)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi il cerchio di base del cono può essere parametrizzata nel seguente modo

$$r(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0).$$

A questo punto

$$r_\rho(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad r_\theta(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

e

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \rho)$$

che è un vettore entrante. Quindi

$$\Phi = - \int_0^4 \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho d\rho = -2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^4 = -128\pi.$$

Sommando i due contributi, ciascuno col proprio segno si ha

$$\frac{512}{3}\pi - 128\pi = \frac{128}{3}\pi$$

e in questo modo il teorema della divergenza è stato applicato correttamente.

 **Esempio 8.13.3.** (EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA MASSA) Sia  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  il campo di velocità di un fluido, sia  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  la sua densità e  $D$  l'elemento di volume occupato dal fluido. Sia  $dS$  un elemento infinitesimo di superficie e  $\mathbf{n}$  il suo versore normale. La massa di fluido che attraversa tale superficie nell'unità di tempo è  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ ; integrando su  $\partial D$  si ottiene il flusso uscente di  $\rho \mathbf{v}$  attraverso  $\partial D$ . Per il teorema della divergenza si ha

$$\int \int \int_D \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dx dy dz = \int \int_{\partial D} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e dS$$

D'altra parte la quantità di fluido uscita da  $D$  nell'unità di tempo è anche uguale alla variazione della massa rispetto al tempo (con segno cambiato! perché la massa si conserva) e visto che

$$m = \int \int \int_D \rho dx dy dz$$

assumendo di poter derivare sotto il segno di integrale si ha

$$-\frac{dm}{dt} = - \int \int \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

Riassumendo abbiamo dunque

$$\int \int \int_D \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dx dy dz = 0$$

e per l'arbitrarietà di  $D$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Questa equazione prende il nome di EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA MASSA ed esprime il principio di conservazione della massa. Si noti che se un fluido è incomprimibile allora la sua densità  $\rho$  è una costante per cui l'equazione di continuità della massa si riduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

## 8.14. Il teorema di Stokes o del rotore

Concludiamo con questo altrettanto importante risultato.

**Teorema 8.14.1.** (TEOREMA DEL ROTORE O DI STOKES) *Sia  $\Sigma$  una superficie regolare orientata con versore normale  $\mathbf{n}$ , dotata di bordo  $\partial^+\Sigma$  orientato positivamente. Supponiamo inoltre che  $\partial^+\Sigma$  sia una curva regolare (o l'unione di più curve regolari); sia  $\mathbf{T}$  il versore tangente a  $\partial^+\Sigma$ . Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  è un campo vettoriale regolare definito in un intorno di  $\Sigma$  allora vale la formula*

$$\int \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \quad (8.14.1)$$

Il precedente teorema si può riassumere dicendo: *il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie  $\Sigma$  uguaglia la circuitazione del campo lungo il bordo della superficie stessa, se orientato positivamente.*

☞ **Osservazione 8.14.2.** Il teorema di Stokes vale anche nel caso particolare di una superficie orientabile chiusa, quindi priva di bordo; in questo caso il secondo membro dell'integrale (8.14.1) sarà nullo.

☞ **Osservazione 8.14.3.** Se scriviamo

$$\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})\mathbf{i} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})\mathbf{j} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})\mathbf{k}$$

e osservando che

$$\mathbf{T} \, ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

la (8.14.1) diventa in forma esplicita

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Sigma} [(R_y - Q_z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + (P_z - R_x) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + (Q_x - P_y) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})] dS \\ &= \oint_{\partial^+ \Sigma} P dx + Q dy + R dz \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui la superficie  $\Sigma$  coincide con un dominio  $D$  del piano  $xy$  (con frontiera regolare) e  $\mathbf{F}$  sia un campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

allora si ha  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  e  $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (Q_x - P_y)$  quindi la precedente formula si riduce a

$$\int \int_D (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{\partial^+ D} P dx + Q dy$$

che altro non è che il TEOREMA DI GAUSS-GREEN nel piano. In questo senso il teorema di Stokes risulta essere una generalizzazione del teorema di Gauss-Green.

---

## CAPITOLO 9

---

# Serie di Fourier

### 9.1. Cenni sulle serie di funzioni

---

Sia data una successione di funzioni

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R} \quad n \geq 1$$

definite su un intervallo  $I$ . A partire dalla successione dei numeri reali  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  per ogni  $x \in I$  si può considerare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{9.1.1}$$

che, per ciascun  $x$  fissato, può essere una serie convergente, divergente o irregolare.

□ **Definizione 9.1.1.** La (9.1.1) si dice **SERIE DI FUNZIONI**. Se per un certo  $x \in I$  la (9.1.1) è, rispettivamente, una serie numerica convergente, divergente o irregolare, diremo che **LA SERIE DI FUNZIONI È CONVERGENTE, DIVERGENTE O IRREGOLARE** rispettivamente. Se si ha convergenza della serie di funzioni per tutti gli  $x \in I^* \subseteq I$  allora diremo che la serie di funzioni **CONVERGE PUNTUALMENTE** in  $I^*$ .

□ **Definizione 9.1.2.** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e siano  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Diremo che la serie di funzioni (9.1.1) **CONVERGE TOTALMENTE** in  $I$  se esiste una successione  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  di numeri reali positivi tali che

- (i)  $|f_n(x)| \leq a_n$  per ogni  $x \in I$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

☞ **Osservazione 9.1.3.** Osserviamo che la convergenza totale di una serie di funzioni in  $I$  implica la convergenza assoluta e quindi la convergenza semplice (e quindi puntuale) della serie, per ogni

$x \in I$ . Pertanto risulta ben definita la funzione, somma della serie

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

La convergenza totale è un'ipotesi piuttosto forte; allo stesso modo la convergenza puntuale è un'ipotesi piuttosto debole. Ci sono altri tipi di convergenza che possono essere considerati come intermedi ai due, ma il loro studio esula dagli scopi di questo corso.

## 9.2. Serie di potenze

---

### 9.2.1. Definizione e proprietà

I primi esempi di serie di funzioni che abbiamo incontrato nel nostro percorso sono tutte le serie di Taylor di funzioni derivabili infinite volte, per esempio la *serie esponenziale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

Si tratta in tutti i casi di serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Anche la *serie geometrica* ha questa forma, con  $a_n = 1$  ed è ben definita (converge puntualmente) se  $-1 < x < 1$ . Diamo pertanto la seguente definizione.

**□ Definizione 9.2.1.** Si dice **SERIE DI POTENZE** di centro  $x_0 \in \mathbb{R}$  una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{9.2.1}$$

dove  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  è una successione a valori reali e  $x \in \mathbb{R}$ . Gli  $a_n$  si dicono **COEFFICIENTI DELLA SERIE DI POTENZE**.

Per le serie di potenze, l'insieme degli  $x$  per cui si ha convergenza è sempre un intervallo, detto **INTERVALLO DI CONVERGENZA**; la metà della lunghezza di questo intervallo si dice **RAGGIO DI CONVERGENZA**. Precisamente si ha:

**Teorema 9.2.2.** (RAGGIO DI CONVERGENZA) *Si consideri la serie (9.2.1) e supponiamo che esista il limite*

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

e poniamo

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \ell \neq 0, \infty \\ +\infty & \ell = 0 \\ 0 & \ell = \infty \end{cases}$$

Allora:

se  $|x - x_0| < R$  la serie (9.2.1) converge (assolutamente);

se  $|x - x_0| > R$  la serie (9.2.1) non converge.

Il numero  $R$  si dice RAGGIO DI CONVERGENZA della serie di potenze.

☞ **Osservazione 9.2.3.** Nel caso  $|x - x_0| > R$  si ha non convergenza, quindi la serie di potenze può essere o divergente o irregolare. Se  $R = 0$  si ha convergenza solo per  $x = x_0$ ; se  $R = \infty$  si ha convergenza su tutto  $\mathbb{R}$ . Se  $x = x_0 \pm R$  (gli estremi dell'intervallo di convergenza), nulla si può dire e in effetti la serie può convergere, divergere o essere irregolare a seconda dei casi, quindi questi casi vanno analizzati a parte.

☞ **Osservazione 9.2.4.** Si può dimostrare che per una serie di potenze il numero

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

esiste sempre, anche se questo non è a priori ovvio (il limite potrebbe a priori non esistere, ma per una serie di potenze esiste sempre).

Alternativamente, si può usare il seguente criterio per il calcolo del raggio di convergenza.

**Teorema 9.2.5.** (CRITERIO DEL RAPPORTO PER LE SERIE DI POTENZE) *Si consideri la serie (9.2.1) e supponiamo che esista finito o infinito il limite*

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Allora il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \ell \neq 0, \infty \\ +\infty & \ell = 0 \\ 0 & \ell = \infty \end{cases}$$

✎ **Esempio 9.2.6.** *Calcoliamo il raggio di convergenza della serie geometrica (serie di potenze di centro  $x_0 = 0$ )*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Si ha  $a_n = 1$  dunque  $\ell = 1$  e infatti si ha convergenza per  $x \in (-1, 1)$ . Cosa succede agli estremi dell'intervallo? Se  $x = 1$  allora si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1$$

che diverge mentre se  $x = -1$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

che è irregolare.

✎ **Esempio 9.2.7.** *Calcoliamo il raggio di convergenza della serie di Taylor di  $e^x$  e  $\log(1+x)$*

Sono entrambe serie di potenze centrate nell'origine. La serie esponenziale ha espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

quindi  $a_n = 1/n!$  e per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

quindi la serie di Taylor di  $e^x$  converge su tutto  $\mathbb{R}$ .

Invece la serie di Taylor di  $\log(1+x)$  è

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

quindi

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad |a_n| = \frac{1}{n}$$

quindi il raggio di convergenza è uguale a 1. Se  $x = 1$  allora la serie di potenze diverge (serie armonica) mentre se  $x = -1$  converge (per il criterio di Leibniz).

✎ **Esempio 9.2.8.** *Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

Si tratta di nuovo di una serie di potenze centrata nell'origine. È facile vedere che in questo caso, posto  $a_n = n!$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

quindi il raggio di convergenza è  $R = 0$ . Quindi questa serie di potenze converge solo per  $x = 0$  (e fa 0).

**Teorema 9.2.9.** (PROPRIETÀ DELLE SERIE DI POTENZE) *Consideriamo la serie (9.2.1) e supponiamo che il suo raggio di convergenza  $R$  sia positivo (finito o infinito). Allora:*

(1) *Per ogni numero  $r \in (0, R)$  la serie (9.2.1) converge totalmente nell'intervallo  $[x_0 - r, x_0 + r]$ ;*

(2) *La somma della serie (9.2.1), cioè la funzione*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (9.2.2)$$

*è una funzione continua nell'intervallo  $(x_0 - R, x_0 + R)$ ; inoltre essa è derivabile nello stesso intervallo e la serie può essere derivata termine a termine infinite volte, per esempio per la derivata prima si ha*

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

*Per altro la serie derivata è anch'essa una serie di potenze di centro  $x_0$  e con lo stesso raggio di convergenza  $R$  della serie di partenza.*

(3) *La somma della serie (9.2.1), cioè la funzione (9.2.2) ammette una primitiva nell'intervallo  $(x_0 - R, x_0 + R)$  che può essere calcolata termine a termine*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C$$

*e anche la primitiva è esprimibile come serie di potenze di centro  $x_0$  e con lo stesso raggio di convergenza  $R$  della serie di partenza.*

(4) *Infine per ogni intervallo  $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$  la somma della serie (9.2.1), cioè la funzione (9.2.2) è integrabile in  $[a, b]$  e si può integrare termine a termine*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x - x_0)^n$$

La possibilità di integrare o derivare termine a termine la serie è uno strumento potente per calcolare talvolta la somma di una serie o sviluppare in serie una funzione data senza ricorrere al polinomio di Taylor.

✎ **Esempio 9.2.10.** Si ricostruisca lo sviluppo in serie di potenze (centrato in 0) della funzione  $\arctan x$  e della funzione  $\log(1+x)$  senza usare la serie di Taylor

Sia  $f(x) = \arctan x$ ; si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

quindi usando la somma della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

per  $t = -x^2$  si trova

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

che naturalmente converge solo per  $|x| < 1$ . Integrando ora termine a termine in  $[0, x]$  si trova

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Allo stesso modo ricostruiamo lo sviluppo in serie di potenze del logaritmo. Di nuovo dalla serie geometrica si ha, per  $|t| < 1$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

quindi integrando termine a termine in  $[0, x]$  si ha, per  $|x| < 1$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

### 9.2.2. Serie di potenze e serie di Taylor. Funzioni analitiche

È facile osservare che *la classe delle funzioni sviluppabili in serie di Mac Laurin coincide con la classe della serie di potenze di centro nell'origine aventi raggio di convergenza positivo*. Quindi le due nozioni, di serie di potenze e serie di Mac Laurin, rappresentano due punti di vista diversi sullo stesso oggetto: dal primo punto di vista si parte da una funzione  $f(x)$  assegnata in qualche forma analitica e se ne calcola la serie di Mac Laurin; dal secondo punto di vista si

parte dalla serie di potenze e la si riconosce come serie di Mac Laurin di una certa funzione. In modo del tutto analogo, le funzioni sviluppabili in serie di Taylor di centro  $x_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

sono tutte e sole le serie di potenze centrate in  $x_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

con raggio di convergenza  $R > 0$ . Diamo allora la seguente definizione.

**□ Definizione 9.2.11.** Una funzione si dice ANALITICA in un intervallo  $[a, b]$  se per ogni  $x_0 \in (a, b)$  la funzione è sviluppabile in serie di potenze (ovvero in serie di Taylor) di centro  $x_0$ , con raggio di convergenza positivo.

**✎ Esempio 9.2.12.** Le funzioni trascendenti elementari  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  sono esempi di funzioni analitiche in tutto  $\mathbb{R}$ ; le funzioni  $\log(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$  sono invece analitiche per  $x \geq -1$  (l'insieme di convergenza sarà invece  $|x| < 1$ ).

Per comodità richiamiamo qui gli sviluppi delle principali funzioni elementari con centro  $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & x \in \mathbb{R} \\ \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} & |x| < 1 \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n & |x| < 1 \\ \text{con } \binom{\alpha}{n} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \end{aligned}$$

**✎ Osservazione 9.2.13.** Non tutte le funzioni derivabili infinite volte in un punto sono analitiche in un intorno di quel punto; detto altrimenti: una volta scritta formalmente la serie di Mac Laurin di una funzione, non è detto che questa serie di potenze abbia raggio di convergenza positivo (potrebbe essere nullo) e se anche fosse, non è detto che la sua somma coincida con la funzione di partenza.

**✎ Esempio 9.2.14.** Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Essa è derivabile infinite volte con derivate nell'origine tutte nulle. Quindi la serie di MacLaurin è identicamente nulla, che ovviamente converge ma non rappresenta la  $f$ . Dunque  $f$  è infinitamente derivabile su tutto  $\mathbb{R}$  ma non è analitica in nessun intorno dell'origine.

☞ **Osservazione 9.2.15.** (PREGI E DIFETTI DELLE SERIE DI POTENZE) **Pregi:** si può integrare e/o derivare termine a termine con molta facilità la serie di potenze e il raggio di convergenza non cambia.

**Difetti:** si possono approssimare solo funzioni estremamente regolari, in particolare non c'è speranza di approssimare mediante serie di potenze ad esempio una funzione discontinua o continua ma non derivabile; per questo andiamo alla ricerca di altri tipi di serie di funzioni, che hanno la proprietà di convergere "meno facilmente" delle serie di potenze ma tali da poter avere come somma anche funzioni meno regolari.

È il caso ad esempio delle SERIE DI FOURIER.

## 9.3. Serie trigonometriche e serie di Fourier

---

### 9.3.1. Polinomi trigonometrici e serie trigonometriche

□ **Definizione 9.3.1.** Si dice POLINOMIO TRIGONOMETRICO DI ORDINE  $n$  una funzione del tipo

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dove  $a_k, b_k$  sono numeri reali o complessi assegnati. Si dice SERIE TRIGONOMETRICA l'analogha espressione dove al posto della somma finita ci sia la serie

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Le serie trigonometriche sono di grandissima utilità in svariate applicazioni tra cui l'elaborazione o la compressione di segnali periodici di vario tipo o di immagini. La definizione data naturalmente è solo formale e come per ogni serie di funzioni non è detto che converga e, in caso affermativo, non è detto che la somma della serie abbia buone proprietà. Di sicuro per ora c'è solo che se una serie trigonometrica converge, la sua somma è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ . Questo fa pensare, rovesciando il discorso, che sia possibile rappresentare *ogni* funzione  $2\pi$ -periodica con una somma, anche infinita, di funzioni elementari del tipo

$$\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$$

È stata questa la straordinaria intuizione di Fourier. Cerchiamo allora alcune condizioni per la convergenza di serie trigonometriche. Innanzitutto se i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  non tendono a zero, la serie non converge, perché non è verificata la condizione necessaria. D'altra parte se gli  $a_n$  e  $b_n$  tendono a zero così velocemente che le serie  $\sum |a_n|$  e  $\sum |b_n|$  convergono, allora per il criterio del confronto si ha

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k|$$

e quindi la serie trigonometrica converge assolutamente (e perciò converge).

Nel caso intermedio in cui i coefficienti della serie trigonometrica tendono a zero ma troppo lentamente per avere convergenza assoluta, può essere utile il seguente criterio.

**Proposizione 9.3.2.** *Sia  $\{a_n\}$  una successione a valori reali positivi che tende a zero in maniera monotona. Allora le serie trigonometriche*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

convergono per ogni  $x \in (0, 2\pi)$ , mentre le serie trigonometriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos nx \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \sin nx$$

convergono per ogni  $x \in [0, 2\pi]$ , con  $x \neq \pi$ . Nei punti rimasti fuori, le serie di seni sono identicamente nulle, mentre le altre possono convergere oppure no.

 **Esempio 9.3.3.** *Dal criterio si deduce immediatamente che convergono per  $x \in (0, 2\pi)$  le seguenti serie trigonometriche*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

In questo caso, il criterio della convergenza assoluta non darebbe informazioni. Si noti che per  $x = 0$  le serie dei coseni stavolta convergono. Allo stesso modo si dimostra dal criterio che le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

convergono per  $x \in [0, 2\pi]$  con  $x \neq \pi$ ; anche in questo caso, per  $x = \pi$  le serie dei coseni divergono.

Facciamo il punto: abbiamo definito una serie trigonometrica e abbiamo dato condizioni per cui essa converga. Ora il tassello mancante è capire se questa serie trigonometrica, nel caso sia convergente, possa rappresentare una qualche funzione e se sì, quali classi di funzioni. L'idea è che

possa rappresentare funzioni regolari ma anche funzioni discontinue o continue ma non derivabili (cosa che non era possibile, come abbiamo osservato, con le serie di potenze). Ci induce a pensare questo il fatto che se noi andiamo a derivare termine a termine la serie trigonometrica, allora si ottiene di nuovo una serie trigonometrica ma con coefficienti più grandi in valore assoluto rispetto a quelli di partenza. Quindi ci si aspetta che possa essere più difficile provare la convergenza delle serie derivate. Quindi rispetto alle serie di potenze, le serie trigonometriche si prestano ad essere uno strumento più adatto per rappresentare anche funzioni meno regolari. Il prossimo paragrafo ci permetterà di stabilire sotto quali condizioni una funzione  $f$  definita su  $[0, 2\pi]$  (estesa in modo periodico fuori da questo intervallo) si possa vedere come somma di una serie trigonometrica ed eventualmente come possano essere determinati i suoi coefficienti.

### 9.3.2. Serie di Fourier di una funzione

Abbiamo detto che una serie trigonometrica, se converge, ha per somma una funzione periodica di periodo  $2\pi$ . Quindi le funzioni che pensiamo di sviluppare in serie trigonometriche saranno funzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$  e periodiche di periodo  $2\pi$ , o alternativamente (in modo del tutto equivalente) funzioni definite su  $[0, 2\pi]$  ed estese per periodicità su tutto  $\mathbb{R}$ .

Il problema che ci poniamo in questo paragrafo è dunque il seguente: data una funzione  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  (prolungata per periodicità a tutto l'asse reale), sotto quali condizioni si può vedere  $f$  come somma di una serie trigonometrica? Come si determinano i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  in questo caso?

Possiamo pensare di prendere  $f \in V$ , dove  $V$  è l'insieme costituito dalle funzioni  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabili (in senso proprio) e quindi limitate; esso costituisce uno spazio vettoriale. Inoltre su di esso possiamo introdurre un prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$$

con la relativa norma

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_0^{2\pi} f^2(t) dt \right)^{1/2}$$

che a sua volta induce la distanza

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left( \int_0^{2\pi} [f(t) - g(t)]^2 dt \right)^{1/2}.$$

Ricordiamo l'obiettivo: data  $f \in V$  vogliamo trovare sotto quali condizioni  $f$  si scrive come somma di una serie trigonometrica, che a sua volta è "limite" di un polinomio trigonometrico. Quindi, usando i risultati astratti contenuti nel paragrafo dei complementi, in particolare il teorema di proiezione, l'idea è quella di trovare un polinomio trigonometrico  $P_n$  di grado minore

o uguale a  $n$  (che sta in uno spazio di dimensione finita  $n$  e che sarà il nostro  $V_0$ ) tale che minimizza ovvero meglio approssima la distanza  $\|P_n - f\|$ ; questo sarà dato dalla proiezione ortogonale di  $P_n$  su  $V$ . Per fare ciò, occorre dotare il nostro  $V_0$  di una base ortonormale. A tal proposito vale la seguente proposizione.

**Proposizione 9.3.4.** *Le funzioni*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad k = 1, 2, \dots$$

*costituiscono un SISTEMA ORTONORMALE nello spazio vettoriale  $V$ , cioè valgono le seguenti relazioni integrali (dette RELAZIONI DI ORTOGONALITÀ), per ogni  $k, h = 1, 2, 3, \dots$*

$$\int_0^{2\pi} (\sin kx)^2 dx = \int_0^{2\pi} (\cos kx)^2 dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin hx dx = \int_0^{2\pi} \cos kx \cos hx dx = 0 \quad h \neq k$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos hx dx = \int_0^{2\pi} \sin kx dx = \int_0^{2\pi} \cos hx dx = 0$$

Quindi un polinomio trigonometrico di grado minore o uguale a  $n$  sarà una combinazione lineare dei primi  $2n + 1$  versori della base ortonormale di  $V$ , ovvero è un generico elemento del sottospazio vettoriale  $V_n$  (il nostro  $V_0$  del teorema astratto) generato da questi  $2n + 1$  vettori. A questo punto andiamo a costruire esplicitamente la proiezione ortogonale di  $f$  su  $V_n$  (secondo i risultati della Proposizione 9.4.3. Si ha

$$S_n f = \sum_{i=0}^{2n} \langle f, e_i \rangle e_i = \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \left[ \left( \int_0^{2\pi} \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} f(t) dt \right) \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \left( \int_0^{2\pi} \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} f(t) dt \right) \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right]$$

Se si pone

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.3.1)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.3.2)$$

si ottiene

$$S_n f = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (9.3.3)$$

□ **Definizione 9.3.5.** I coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  definiti dalle relazioni precedenti si dicono COEFFICIENTI DI FOURIER DI  $f$ ; il polinomio trigonometrico  $S_n f(x)$  si dice  $n$ -ESIMA SOMMA DI FOURIER DI  $f$  e la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

si dice SERIE DI FOURIER DI  $f$

Raccogliamo nella prossima proposizione tutte le proprietà, in base ai risultati astratti, di  $S_n f$ , oltre al fatto, già visto che  $S_n f$  è, tra i polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a  $n$  quello che rende minima la distanza da  $f$ , cioè la quantità  $\|f - P_n\|$ , al variare di  $P_n \in V_n$ )

**Proposizione 9.3.6.** Sia  $f \in V$  e siano  $a_k, b_k$  i suoi coefficienti di Fourier assegnati dalle relazioni (9.3.2), (9.3.2). Allora:

$$\|S_n f\|^2 = \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

$$\|S_n f\|^2 \leq \|f\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

per  $k \rightarrow \infty$ ,  $a_k \rightarrow 0$ ,  $b_k \rightarrow 0$  LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

☞ **Osservazione 9.3.7.** Naturalmente si possono considerare anche altri intervalli di periodicità invece che il classico  $[0, 2\pi]$ . Per esempio, per una funzione definita su  $[0, T]$  il sistema di funzioni trigonometriche con periodo (multiplo di  $T$ ) è

$$1, \quad \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) \quad \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

mentre i coefficienti di Fourier sono

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega kt) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega kt) dt \quad k = 1, 2, \dots$$

dove si è posto  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . I risultati delle corrispondenti proposizioni si adattano poi di conseguenza.

 **Esempio 9.3.8.** (ONDA QUADRA) *Determinare i coefficienti di Fourier della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata a una funzione  $2\pi$ -periodica su  $\mathbb{R}$

Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 1$$

e, per  $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0.$$

Invece si ha

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \left( -\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n}$$

da cui

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier associata a  $f$  è

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

 **Osservazione 9.3.9.** Non è difficile verificare che se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione periodica di periodo  $T > 0$  allora per ogni  $a \in \mathbb{R}$  si ha

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

quindi in particolare i coefficienti di Fourier si possono calcolare equivalentemente come

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt & k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt & k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Questo fatto verrà usato nell'osservazione successiva.

 **Osservazione 9.3.10.** Supponiamo che la funzione  $f(x)$  che vogliamo sviluppare in serie di Fourier sia  $2\pi$ -periodica e simmetrica (pari o dispari). In tal caso allora, visto che anche le funzioni

trigonometriche seno e coseno sono simmetriche, si semplifica il calcolo dei coefficienti di Fourier. Se  $f$  è dispari si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

Analogamente se  $f$  è pari si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = 0$$

A questo punto l'intuizione geometrica ci dice che al crescere di  $n$ , la somma parziale  $S_n f(x)$  della serie di Fourier approssima sempre meglio la funzione  $f$ , perché essa viene ricostruita attraverso un numero crescente di componenti ortogonali. Quindi la domanda che ci poniamo è la seguente: è vero che  $S_n f \rightarrow f$  in qualche senso per  $n \rightarrow \infty$ ?

### 9.3.3. Convergenza della serie di Fourier

#### Convergenza della serie di Fourier in norma quadratica

**Teorema 9.3.11.** *Sia  $f \in V$  e siano  $a_k, b_k$  i suoi coefficienti di Fourier assegnati dalle relazioni (9.3.2), (9.3.2); sia inoltre  $S_n f(x)$  l'ennesima somma di Fourier di  $f$  data da (9.3.3). Allora:*

$$\|f - S_n f\| \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty$$

*cioè, per  $n \rightarrow \infty$*

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx = \int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \rightarrow 0$$

*Inoltre vale l'IDENTITÀ DI PARSEVAL*

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx = \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

#### Convergenza puntuale della serie di Fourier

Premettiamo la seguente definizione.

□ **Definizione 9.3.12.** Si dice che  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  è **REGOLARE A TRATTI** se  $f$  è limitata in  $[0, T]$  e l'intervallo si può decomporre in un numero finito di intervallini su ciascuno dei quali la funzione è continua e derivabile; inoltre agli estremi di ciascun intervallino esistono finiti i limiti sia di  $f(x)$  che di  $f'(x)$ . Sia  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata; si dice che è **MONOTONA A TRATTI** se l'intervallo si può decomporre in un numero finito di intervallini su ciascuno dei quali la funzione è crescente o decrescente.

Vale allora il seguente teorema.

**Teorema 9.3.13.** *Sia  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  regolare a tratti (oppure limitata e monotona a tratti); allora la serie di Fourier converge in ogni punto  $x_0 \in (0, T)$  alla media dei due limiti destro e sinistro*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega k x_0) + b_k \sin(\omega k x_0)] = \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2}$$

con  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ; nei due estremi dell'intervallo invece la serie converge a  $\frac{f(0^+) - f(T^-)}{2}$ . In particolare: in ogni punto dove  $f$  è continua, la serie di Fourier converge a  $f(x)$ ; negli estremi questo è vero solo se  $f(0) = f(T)$ .

☞ **Osservazione 9.3.14.** Il risultato appena enunciato può essere raffinato in vari modi indebolendo le ipotesi; tuttavia è utile segnalare che la sola ipotesi di continuità della  $f$  (unita magari anche alla condizione di raccordo  $f(0) = f(T)$ ) è insufficiente a garantire la convergenza puntuale della serie di Fourier in tutto l'intervallo.

☞ **Osservazione 9.3.15.** La teoria appena esposta (e i risultati dei complementi) possono essere riformulati in spazi più generali degli spazi  $V$  con prodotto scalare: gli *spazi di Hilbert*; inoltre tra i tipi di convergenze della serie di Fourier, ci sono anche altre convergenze che si possono considerare (per esempio la *convergenza uniforme*). Entrambi questi argomenti, benché attinenti, esulano dagli scopi di questo corso.

📖 **Esempio 9.3.16.** *Sviluppare in serie di Fourier la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

*prolungata su  $\mathbb{R}$  per periodicità, e discutere la convergenza in norma quadratica, puntuale e totale.*

Calcoliamo i coefficienti di Fourier. Si ha

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 2 dx + \int_0^{\pi} dx \right) = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 2 \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} \cos kx \, dx \right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 2 \sin kx \, dx + \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \right) = \frac{(-1)^k}{k\pi} - \frac{1}{k\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -\frac{2}{k\pi} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

La serie di Fourier di  $f(x)$  è quindi

$$f(x) = \frac{3}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x$$

C'è convergenza in norma quadratica; c'è convergenza puntuale a  $f(x)$  se  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e a  $\frac{3}{2}$  nei punti  $x = k\pi$ . La serie non converge totalmente su  $\mathbb{R}$  (perché si comporta come la serie armonica).

Osserviamo che la funzione  $g(x) = f(x) - 3/2$  è una funzione dispari, quindi avremmo potuto calcolare la serie di Fourier della funzione  $g(x)$  (evitando il calcolo di  $a_0$  e  $a_n$ ) per ottenere poi quella di  $f$  aggiungendo la costante  $3/2$ .

**☞ Osservazione 9.3.17.** L'identità di Parseval enunciata nel paragrafo precedente può essere utile per calcolare la somma di alcune serie notevoli, come mostra il seguente esempio.

**📎 Esempio 9.3.18.** *Sviluppare in serie di Fourier la funzione  $f(x) = x$  definita su  $(-\pi, \pi)$  e prolungata per periodicità su  $\mathbb{R}$ ; discuterne la convergenza. Determinare inoltre la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

La funzione data è dispari quindi  $a_0 = 0$ ,  $a_n = 0$  mentre

$$b_n = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

per cui la serie di Fourier associata a  $f$  è

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$$

Questa serie converge in norma quadratica a  $f(x)$ , converge puntualmente a 0 nei punti  $(2n+1)\pi$  e a  $f(x)$  negli altri punti; non converge totalmente in  $\mathbb{R}$ .

Per calcolare la somma della serie utilizziamo l'identità di Parseval

$$\int_0^T f^2(x) \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi(a_n^2 + b_n^2)$$

da cui essendo

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{3}\pi^3$$

si ha

$$\frac{2}{3}\pi^3 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

## 9.4. Complementi: richiami sugli spazi vettoriali con prodotto scalare

---

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita o infinita. Diciamo che su  $V$  è definito un **PRODOTTO SCALARE** se esiste un'operazione che indicheremo con il simbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  che prende due elementi di  $V$  e vi associa uno scalare con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle u, v \rangle \\ \langle u + v, w \rangle &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \langle \lambda u, v \rangle &= \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \langle u, v \rangle &\geq 0 \\ \langle u, u \rangle &= 0 \Leftrightarrow u = 0. \end{aligned}$$

Se poniamo per ogni  $u \in V$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

si dimostra che  $\|\cdot\|$  risulta essere una norma, cioè un'operazione definita su  $V$  a valori in  $\mathbb{R}$  che ha le seguenti proprietà, valide per ogni  $u, v \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \|u\| &\geq 0, \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\ \|\lambda u\| &= |\lambda| \|u\| \\ \|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\| \end{aligned}$$

✎ **Esempio 9.4.1.** *L'esempio tipico è di spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è  $\mathbb{R}^n$  con il prodotto scalare definito da*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

e la norma che induce è il modulo del vettore

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} = |\mathbf{u}|$$

Vale la seguente proposizione.

**Proposizione 9.4.2.** *Se  $V_0$  è un sottospazio vettoriale di dimensione finita di  $V$ , allora  $V_0$  possiede sempre una BASE ORTONORMALE, cioè una base  $e_1, e_2, \dots, e_n$  tale che i vettori siano a due a due ortogonali e ciascuno di norma unitaria. In simboli si scrive*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & 0 \neq j \end{cases}$$

( $\delta_{ij}$  è il SIMBOLO DI KRONECKER)

Ora supponiamo di avere un sottospazio  $V_0 \subset V$  e di avere un elemento  $u \in V$ ; vogliamo trovare l'elemento  $u_0 \in V_0$  che meglio approssima  $u$  (in norma). È abbastanza intuitivo che l'elemento richiesto sia la proiezione ortogonale di  $u$  su  $V_0$ , cioè formalmente vale la seguente proposizione.

**Proposizione 9.4.3.** (PROIEZIONE) *Sia  $V_0$  un sottospazio di dimensione finita di  $V$  e sia  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base ortonormale di  $V_0$ . Allora la PROIEZIONE DI  $u$  SU  $V_0$  è il vettore*

$$u_0 = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i$$

che ha le seguenti proprietà:

- (1)  $u - u_0$  è ortogonale a ogni elemento di  $V_0$ ;
- (2)  $\|u_0\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, e_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2$
- (3)  $u_0$  è l'elemento che rende minima la quantità  $\|u - v\|$  al variare di  $v \in V_0$ .