Michela Eleuteri

ESERCIZIARIO DI ANALISI MATEMATICA I

Università degli Studi di Verona, Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica

a.a. 2011/2012

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Numeri

1.1. Equazioni e disequazioni: esercizi proposti

✍ **Esercizio 1.1.1**

Risolvete le seguenti disequazioni

1) $x^2 - 15x + 16 > 0$

2) $(x+2)(x-2)(x-3) < 0$

3) $(x-1)(x+2)(x^2 - x - 6) \geq 0$

4) $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1} < 2$

5) $3x + 5 \leq 8$

6) $\dfrac{6-x}{4} \geq \dfrac{3x-4}{2}$

7) $3(2-x) < 2(3+x)$

8) $\dfrac{x+1}{x} \geq 2$

9) $\dfrac{x}{2} \geq 1 + \dfrac{4}{x}$

10) $\dfrac{3}{x-1} < \dfrac{2}{x+1}$

11) $|3x - 7| < 2$

12) $|2x + 5| < 1$

13) $\left|\dfrac{x}{2} - 1\right| \leq 1$

14) $\left|2 - \dfrac{x}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$

15) $|x+1| > |x-3|$

16) $|x-3| < 2\,|x|$

17) $(e^x - 5)^2 + 5(e^x - 5) + 2 > -2$

18) $|x(x-3)| \leq 2$

19) $\big||x| + \sqrt{x-1}\big| \leq 2$

20) $\big|x|x-1| + 1\big| \geq 2$

21) $|x(x-3)| > x^2 - 1$

➾ R.

1) $x < \dfrac{15-\sqrt{161}}{2} \quad \vee \quad x > \dfrac{15+\sqrt{161}}{2}$	2) $x < -2 \quad \vee \quad 2 < x < 3$
3)	4)$x < -1-\sqrt{2} \quad \vee \quad -1 < x < -1+\sqrt{2} \quad \vee \quad x > 1$
5)	6)
7)	8)
9)	10)
11)$\dfrac{5}{3} < x < 3$	12) $-3 < x < -2$
13)	14)
15)$x > 1$	16)$x < -3 \quad \vee \quad x > 1$
17)	18)
19)	20)
21)	

15) La soluzione è $x > 1$. Infatti si distinguono tre casi: $x < -1$, $-1 \leq x \leq 3$, $x > 3$. Si ha:

$$\begin{cases} x < -1 \\ -x-1 > -x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x+1 > -x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 3 \\ x+1 > x-3 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} x < -1 \\ \text{impossibile} \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x > 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 3 \\ \text{qualunque } x \end{cases}$$

Mettendo assieme i risultati dei vari sistemi si ottiene la soluzione data.

16) La soluzione è $x < -3 \quad \vee \quad x > 1$. Infatti si distinguono tre casi: $x < 0$, $0 \leq x \leq 3$, $x > 3$. Si ha:

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x+3 < -2x \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ -x+3 < 2x \end{cases} \cup \begin{cases} x > 3 \\ x-3 < 2x \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} x < 0 \\ x < -3 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x > 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 3 \\ x > -1 \end{cases}$$

Mettendo assieme i risultati dei vari sistemi si ottiene la soluzione data.

✍ **Esercizio 1.1.2**

Risolvete le seguenti equazioni

22)$\sqrt{x^2-4}\sqrt{x-2}=(x-2)\sqrt{x+2}$

23)$2\sqrt{x-2}=4-x$

24)$\sqrt{3x-2\sqrt{x}}=\sqrt{2-x}$

25)$|x+1|=|x-3|$

26)$10^x=100$

27)$7^x=1$

28)$4^x=3$

29)$4^x=2\,3^x$

30)$10^x=3^{x+1}$

31)$3^{2x}-3^x-5=0$

32) $\log_3 x=3$

33) $\log_3 x=\log_3 2-\log_3(x+1)$

34) $\log_2 x+\log_4 x=3$

35)$4\log_4 x-\log_2(1+x)=0$

36) $\log_x e+\log x-2=0$

37) $\log_\pi x=1$

R.

22)$x\geq 2$

23)$x=6-2\sqrt{3}$

24)$x=1$

25)$x=1$

26)

27)

28)$x=\log_4 3$ oppure equivalentemente $x=\dfrac{\log 3}{\log 4}$

29)

30)$x=\dfrac{\log 3}{\log 10-\log 3}$

31)$x=\dfrac{\log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)}{\log 3}$

32)$x=27$

33)$x=2$

34)$x=4$

35)

36)$x=e$

37)

22) La soluzione è $x\geq 2$. Infatti innanzitutto bisogna porre l'esistenza delle radici, quindi bisogna mettere a sistema $x^2-4\geq 0$, $x-2\geq 0$ e $x+2\geq 0$ che dà $x\geq 2$. A questo punto si semplificano ambo i membri per cui l'equazione data diventa un'identità, ragion per cui ogni x che soddisfa le condizioni di esistenza delle radici va bene.
23) La soluzione è $x=6-2\sqrt{3}$. Infatti innanzitutto bisogna porre l'esistenza della radice, quindi $x\geq 2$. D'altra parte, siccome sto uguagliando un secondo membro a una radice, che è sempre positiva (o nulla), devo porre l'ulteriore condizione che anche il secondo membro sia non negativo, altrimenti avrei un assurdo, quindi pongo anche $4-x\geq 0$ cioè $x\leq 4$. Le condizioni

sono dunque $2 \leq x \leq 4$. A questo punto elevo a quadrato ambo i membri e ottengo, dopo semplici calcoli, le soluzioni $x = 6 \pm 2\sqrt{3}$; scarto la soluzione $x = 6 + 2\sqrt{3}$ perché non rientra nell'intervallo individuato prima e ho la soluzione proposta.

24) La soluzione è $x = 1$. Infatti innanzitutto bisogna porre l'esistenza della radice a destra cioè $x \leq 2$; poi devo porre l'esistenza della radice a sinistra, cioè $3x - 2\sqrt{x} \geq 0$. Per risolvere quest'ultima prima pongo $x \geq 0$ poi elevo a quadrato e ottengo $9x^2 - 4x \geq 0$ che risolta dà $x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 4/9$. Mettendo a sistema le tre condizioni $x \leq 2$, $x \geq 0$ e $x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 4/9$ si ottiene la condizione $4/9 \leq x \leq 2$. Ora posso elevare a quadrato nella mia equazione di partenza e ottengo $3x-2\sqrt{x} = 2-x$ che porta a $\sqrt{x} = 2x-1$. A questo punto, prima di elevare di nuovo al quadrato, occorre porre una *nuova condizione* di compatibilità, cioè $2x - 1 \geq 0$ (il secondo membro deve essere non negativo perché uguagliato a una radice) che messa a sistema con la precedente porta a $1/2 \leq x \leq 2$. Ora posso elevare finalmente a quadrato ambo i membri e ottengo l'equazione $4x^2 - 5x + 1 = 0$ che risolta dà: $x = 1$ accettabile e $x = 1/4$ non accettabile per quanto detto sopra.

25) La soluzione è: $x = 1$. Infatti, si distinguono i tre casi: $x < -1$ che non dà soluzioni, $-1 \leq x \leq 3$ che dà come soluzione $x = 1$ e infine $x > 3$ che non dà soluzioni.

31) L'unica soluzione accettabile è: $x = \dfrac{\log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)}{\log 3}$. Infatti si pone $3^x = t$; notare che deve essere $t > 0$, quindi se troverò t non positivi dovrò scartarli. Allora si deve risolvere $t^2-t-5 = 0$ che fornisce le soluzioni $t_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ accettabile e $t_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ non accettabile perché negativa, da cui la soluzione proposta.

32) $x = 27$. Infatti basta ricordare che $1 = \log_3 3$ da cui $\log_3 x = 3 \log_3 3 = \log_3 3^3$ quindi $x = 27$.

33) $x = 2$. Infatti basta prendere i logaritmi di ambo i membri, si ottiene $x = \frac{2}{x+1}$ da cui $x = 2$ oppure $x = -1$; la soluzione $x = -1$ non è accettabile a causa delle condizioni di esistenza del logaritmo ($x > 0$ e $x > -1$, da cui deve necessariamente essere $x > 0$)

34) $x = 4$. Infatti basta ricordare la formula del cambiamento di base

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

e il fatto che $\log(ab) = \log a + \log b$; quindi l'equazione di partenza si riduce a

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 3 \qquad 2\log_2 x + \log_2 x = 6 \qquad \log_2(x^2\, x) = 6 \qquad 3\log_2 x = 6 \qquad x = 4$$

36) $x = e$. Infatti dalla formula del cambiamento di base si ottiene in particolare che

$$\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$$

quindi l'equazione di partenza si riduce a

$$\frac{1}{\log_e x} + \log_e x - 2 = 0$$

Si pone poi $\log_e x = t$ da cui $t^2 - 2t + 1 = 0$ quindi $t = 1$ e quindi $x = e$.

✍ **Esercizio 1.1.3**
Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni delle equazioni:

$$38) ||x^2 - 4| - 1| - 2 = k$$

$$39) \big||3x^2 - 2| - 1\big| + 2 = k$$

$$40) \big|x^2 - 4|x - 1|\big| = k$$

✍ **Esercizio 1.1.4**
Determinate i valori di x per cui si ha:

41) $\sin x = \sqrt{3}/2$ 42) $\cos x \leq 1/2$

43) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$ 44) $\sin x - \cos x = 1$

R.

$$41) x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ e } \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$42) \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

44) $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$. Infatti basta operare la sostituzione $\sin x = Y$ e $\cos x = Z$ mettendo a sistema l'equazione data che diventa $Y - Z = 1$ con la formula $Y^2 + Z^2 = 1$ e risolvere poi il sistema ottenuto. Alternativamente si può operare la sostituzione

$$t := \tan\frac{x}{2} \qquad \text{da cui} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

✍ **Esercizio 1.1.5**
Dite se le seguenti uguaglianze sono vere e motivare la risposta:

$$45) ((1+a^2)^{2/3})^{3/4} = \sqrt{1+a^2} \qquad 46) ((1+a)^{2/3})^{3/4} = \sqrt{1+a} \qquad 47) |-a| = a$$

1.2. Trigonometria: esercizi proposti

✍ **Esercizio 1.2.1**
Dite per quali valori ha senso calcolare le seguenti espressioni

$$50)\sqrt{\cos^2 x - 1} \qquad 51)\sin((2x - \log(1-x)) \qquad 52)\log(\sin x + \cos x)\, e^{3x}$$

➼ **R.**
52) $2k\pi - \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure equivalentemente $2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \cup 2k\pi + \frac{7}{4}\pi < x < 2\pi + 2k\pi$

✍ **Esercizio 1.2.2**
Determinate la tangente di x, dove x risolve l'equazione $\sin^2 x - 6\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$

✍ **Esercizio 1.2.3**
Determinate la tangente di $x/2$ dove x risolve l'equazione $\sin x + 7\cos x + 5 = 0$

1.3. Estremo superiore e inferiore/massimo e minimo: esercizi proposti

✍ **Esercizio 1.3.1**
Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

➼ **R.** Hint: n è crescente in n, quindi $1/n$ è decrescente in n, cioè $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Quindi $\sup A = 1$ raggiunto per $n = 1$ quindi è anche un massimo. Congetturo che l'$\inf A = 0$. Per dimostrarlo rigorosamente, devo far vedere che:
(i) $l = 0$ è minorante, cioè $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha $0 < \frac{1}{n}$ il che è sempre vero;
(ii) $l = 0$ è il massimo dei maggioranti. Come si dimostra: fissato $\varepsilon > 0$, devo determinare $\bar{n}$

tale che $0 + \varepsilon$ non sia più minorante, cioe' trovo un elemento di A più piccolo di ε, ossia

$$0 + \varepsilon > \frac{1}{\bar{n}} \Leftrightarrow \bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

che è sempre vero PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE. Allora $\inf A = 0$ e il minimo non esiste (0 non appartiene ad A).

✍ **Esercizio 1.3.2**
Sia

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$

Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

R. Hint: analogamente all'esercizio precedente, si dimostra che $\inf A = \min A = 0$; $\sup A = 1$ e $\max A$ non esiste.

✍ **Esercizio 1.3.3**
Sia

$$A = \left\{\frac{2n}{n^2+1} : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

R. Hint: A è limitato superiormente e inferiormente. Infatti è possibile dimostrare (risolvendo esplicitamente le disequazioni) che

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad -1 \le \frac{2n}{n^2+1} \le 1$$

Eventuali estremanti sono pertanto ± 1, che sono raggiunti rispettivamente per $n = \pm 1$. Quindi $\inf A = \min A = -1$; $\sup A = \max A = 1$.

✍ **Esercizio 1.3.4**
Sia

$$A = \left\{n + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$

Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

R. Hint: n cresce mentre $1/n$ decresce ma all'infinito n ha comportamento predominante (considerando le rispettive successioni associate, n è un infinito di ordine superiore a $1/n$; quindi $\sup A = +\infty$ e $\max A$ non esiste. D'altra parte, osservo che per $n = 1$ e $n = 2$ si ha

$n + 2/n = 3$; per $n > 2$ si ha $n + 2/n > n \geq 3$; quindi $\inf A = \min A = 3$.

✍ **Esercizio 1.3.5**
Sia
$$A = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \, : \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

R. Hint: Voglio far vedere che la successione $\frac{n-1}{n+1}$ è crescente. Per fare questo, devo mostrare che
$$\frac{n-1}{n+1} < \frac{n+1-1}{n+1+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} < \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow n^2 + 2n - n - 2 < n^2 + n \Leftrightarrow -2 < 0$$
dove ho potuto eliminare i denominatori perché stiamo lavorando in $\mathbb{N}$ e quindi $n \geq 0$. Allora l'estremo inferiore è quello raggiunto per $n = 0$, quindi $\inf A = \min A = -1$. Ora dimostriamo che $\sup A = 1$ (e quindi $\max A$ non esiste). Dobbiamo prima di tutto mostrare che 1 è un maggiorante, quindi occorre far vedere che
$$\frac{n-1}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n - 1 < n + 1 \Leftrightarrow -1 < 1$$
che è sempre vero. Ora bisogna far vedere che 1 è il minimo dei maggioranti, cioè che per ogni ε, $1 - \varepsilon$ non è un maggiorante, ossia
$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : 1 - \varepsilon < \frac{\bar{n}-1}{\bar{n}+1}.$$
D'altra parte
$$1 - \varepsilon < \frac{\bar{n}-1}{\bar{n}+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{n}+1-\bar{n}+1}{\bar{n}+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\bar{n}+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \bar{n} > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$
che di nuovo è vero per la proprietà di Archimede. Da cui la tesi.

✍ **Esercizio 1.3.6**
Sia
$$A = \left\{ \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2} \, : \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$
Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

R. Hint: innanzitutto possiamo riscrivere l'insieme A nel seguente modo:
$$A = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n} & n \text{ pari} \\ 1 - \dfrac{1}{n} & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Quindi ragiono separatamente nei due casi, che sono analoghi ai primi esempi trattati. In modo semplice si può far vedere che se n è pari, $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$ mentre $\inf A = 1$ e il minimo non esiste; se n è dispari si fa vedere che $\sup A = 1$ ma il massimo non esiste, mentre $\inf A = \min A = 0$. A questo punto ci si ricorda delle seguenti formule (di immediata dimostrazione):

$$\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\} \qquad \inf(E \cup F) = \min\{\inf E, \inf F\}$$

quindi possiamo concludere che qualunque sia n,

$$\inf A = \min A = 0 \qquad \sup A = \max A = \frac{3}{2}$$

✍ **Esercizio 1.3.7**
Sia

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 9^x + 3^{x+1} - 4 \geq 0\right\}.$$

Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

➻ **R.** Hint: basta risolvere la disequazione

$$3^{2x} + 3\,3^x - 4 \geq 0$$

da cui sostituendo $t = 3^x$ si ha

$$t^2 + 3t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -4 \ \vee \ t \geq 1 \Leftrightarrow 3^x \leq -4 \ \vee \ 3^x \geq 1 \Leftrightarrow 3^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Quindi $\inf A = \min A = 0$; $\sup A = +\infty$ e ovviamente il massimo non esiste.

✍ **Esercizio 1.3.8**
Sia

$$A = \left\{x > 0 : \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0\right\}.$$

Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

➻ **R.** Hint: si osserva che

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{N}$$

perché si chiede che $x > 0$. Quindi

$$x = \frac{2}{\pi(1+2k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Allora $\sup A = \max A = \frac{2}{\pi}$ raggiunto per $k = 0$. Mostriamo che $\inf A = 0$ e che $\min A$ non esiste. Prima di tutto 0 è banalmente minorante. Inoltre 0 è il massimo dei minoranti perché fissato $\varepsilon > 0$, ε non è più un minorante, infatti

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N}:\ \varepsilon > \frac{2}{\pi(1+k)} \Leftrightarrow k > \frac{1}{\pi\,\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

che è possibile.

✍ **Esercizio 1.3.9**
Sia
$$A = \left\{ [-1 + (-1)^n]n + \frac{1}{n^2+2}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Determinare $\inf A$ e $\sup A$ e dite se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.3.10**
Sia
$$A = \left\{ \frac{n-2}{n+2} :\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.3.11**
Sia
$$A = \left\{ \frac{n^2 + 2[n + (-1)^n]}{n^2+1} :\ n \geq 2 \right\}.$$
Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.3.12**
Sia
$$A = \left\{ \frac{n - n\cos(n\pi) + 1}{n + n\cos(n\pi) + 1} :\ n \geq 1 \right\}.$$
Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.3.13**
Sia
$$A = \left\{ \frac{2}{n+1} : \; n \geq 1 \right\} \cup [1, 2).$$
Determinate $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.

R.

1.4. Numeri complessi

1.4.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 1.4.1**
Calcolate
$(2-i)\,(1+3i)$

Si ha
$$(2-i)\,(1+3i) = 2+6i-i+(-i)(3i) = 2-5i+3 = 5+5i.$$

✍ **Esercizio 1.4.2**
Calcolate
$(2-i)+(1+3i)$

Si ha
$$(2-i)+(1+3i) = 2-i+1+3i = 3+2i.$$

✍ **Esercizio 1.4.3**
Calcolate
$-i(2-i)+(3-i)(i+2)$

Si ha
$$-i(2-i)+(3-i)(i+2) = -2i-1+3i+6+1-2i = 6-i.$$

✍ **Esercizio 1.4.4**
Calcolate parte reale, parte immaginaria e il coniugato del numero
$i(2i-3)+(i-1)\overline{(3+4i)}$

Si ha

$$i(2i-3)+(i-1)\overline{(3+4i)} = -2-3i+(i-1)(3-4i) = -2-3i+3i+4-3+4i = -1+4i$$

da cui

$$\Re(z) = -1, \qquad \Im(z) = 4, \qquad \overline{z} = -1-4i.$$

N.B. $\Im(z) = 4 \neq 4i$!!!

✍ **Esercizio 1.4.5**
Calcolate

$$\frac{2-i}{3+i}$$

Si ha

$$\frac{2-i}{3+i} = \frac{6-2i-3i-1}{9+1} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1-i}{2}.$$

✍ **Esercizio 1.4.6**
Calcolate

$$\frac{1}{2-3i}$$

Si ha

$$\frac{1}{2-3i}\,\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{13}.$$

✍ **Esercizio 1.4.7**
Calcolate

$$\frac{2+i-\overline{(3-i)}}{3i+1}$$

Si ha

$$\frac{2+i-\overline{(3-i)}}{3i+1} = \frac{2+i-3-i}{3i+1}\,\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{3i-1}{10}.$$

N.B. un errore molto comune sarebbe stato moltiplicare ambo i membri per $3i-1$ e non per $1-3i$. Infatti il complesso coniugato del numero $3i+1$ è $1-3i$ e non $3i-1$.

✍ **Esercizio 1.4.8**
Calcolate

$$\frac{iz-2\overline{z}}{i+z} \qquad \text{se} \qquad z = 3+i$$

Si ha

$$\frac{i(3+i)-2(3-i)}{3+2i}\,\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(-7+5i)(3-2i)}{13} = \frac{-11+29i}{13}.$$

✍ **Esercizio 1.4.9**
Calcolate

$$\frac{3z-i|z|^2-(2-i)\overline{z}}{2\Re(z)-\Im(z)} \qquad \text{se} \qquad z = 2+i$$

Si ha

$$\frac{3(2+i)-i(4+1)-(2-i)(2-i)}{4-1} = \frac{6+3i-4i-i-4+4i+1}{3} = 1+\frac{2i}{3}.$$

✍ **Esercizio 1.4.10**
Calcolate

$$\Im\left(iz\,\overline{z}+\frac{|z|^2}{z}\right) \qquad \text{se} \qquad z = 1+3i$$

Si ha

$$iz\,\overline{z}+\frac{|z|^2}{z} = i10+\frac{10}{1+3i}\,\frac{1-3i}{1-3i} = 10i+\frac{10-30i}{10} = 1+7i$$

da cui

$$\Im\left(iz\,\overline{z}+\frac{|z|^2}{z}\right) = 7.$$

✍ **Esercizio 1.4.11**
Calcolate

$$\Re\left(\frac{|z|^2 - 2\overline{z}}{iz}\right) \qquad \text{se} \qquad z = 2 + i$$

Si ha innanzitutto

$$z = 2 + i, \qquad \overline{z} = 2 - i \qquad |z|^2 = 5 \qquad iz = 2i - 1$$

da cui

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{|z|^2 - 2\overline{z}}{iz}\right) &= \Re\left(\frac{5 - 4 + 2i}{2i - 1}\,\frac{-1 - 2i}{-1 - 2i}\right) = \Re\left(\frac{1 + 2i}{-1 + 2i}\,\frac{-1 - 2i}{-1 - 2i}\right) = \Re\left(\frac{-1 - 4i + 4}{5}\right) \\ &= \Re\left(\frac{3 - 4i}{5}\right) = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

N.B. Di nuovo osserviamo che

$$\overline{2i - 1} = -1 - 2i \neq 2i + 1!!!$$

✍ **Esercizio 1.4.12**
Trovare le soluzioni (z, w) con $z, w \in \mathbb{C}$ del seguente sistema

$$\begin{cases} z\overline{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1. \end{cases}$$

Prima di tutto osserviamo che $z \neq 0$, altrimenti si avrebbe l'assurdo $0 = i$. Quindi passando ai coniugati nella seconda riga del sistema e ricordando le proprietà del coniugio, si ottiene

$$\overline{|z|^2 w + z} = \overline{|z|^2}\,\overline{w} + \overline{z} = |z|^2\,\overline{w} + \overline{z} = 1$$

visto che $|z|^2$ è un numero reale. Sostituendo dalla prima equazione (ok, visto che abbiamo visto che $z \neq 0$)

$$|z|^2\,\frac{i}{z} + \overline{z} = 1.$$

A questo punto, so che $|z|^2 = z\,\bar{z}$ quindi

$$\frac{z\overline{z}i}{z} + \overline{z} = 1$$

da cui

$$\overline{z}i + \overline{z} = 1.$$

A questo punto poniamo $z = a + ib$ da cui $\overline{z} = a - ib$ e quindi l'equazione da risolvere diventa

$$(a - ib)(i + 1) = 1$$

da cui

$$ai + a + b - ib = 1.$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria si ottiene

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1. \end{cases}$$

Quindi $a = b = \frac{1}{2}$ da cui

$$z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{i+1}{2}, \qquad \overline{w} = \frac{i}{z} = \frac{2i}{1+i}\,\frac{1-i}{1-i} = \frac{2i+2}{2} = i + 1, \qquad w = 1 - i.$$

Per curiosità, facciamo la prova per verificare che effettivamente la soluzione trovata soddisfa il sistema di partenza. Si ha

$$z\,\overline{w} = \frac{1+i}{2}(i+1) = \frac{1}{2}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1 + (-1) + 2i) = i$$

e inoltre

$$|z|^2 w + z = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)(1 - i) + \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}(1 - i + 1 + i) = 1.$$

✍ **Esercizio 1.4.13**

Trovare le soluzioni (z, w) con $z, w \in \mathbb{C}$ del seguente sistema

$$\begin{cases} z + w = 1 + i \\ |w|^2 + \overline{z} = 1 - i. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava

$$z = 1 + i - w, \qquad \text{da cui} \qquad \overline{z} = 1 - i - \overline{w}$$

quindi sostituendo nella seconda equazione si ottiene

$$|w|^2 + 1 - i\overline{w} = 1 - i$$

da cui

$$\overline{w}(w - 1) = 0$$

che porta a due casi: $\overline{w} = 0$ da cui si deduce $w = 0$ e $w = 1$. Allora le soluzioni del sistema sono $(1 + i, 0)$ e $(i, 1)$.

✍ **Esercizio 1.4.14**
Trovare le soluzioni (z, w) con $z, w \in \mathbb{C}$ del seguente sistema

$$\begin{cases} z^2 - \overline{z}^2 = 4i \\ (1+i)z = (1-i)\overline{z}. \end{cases}$$

Ponendo $z = a + ib$ si ha $\overline{z} = a - ib$ e $z^2 = (a + ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ e dunque $\overline{z} = a^2 - 2abi - b^2$. Quindi il sistema dato si riduce al seguente sistema (dove a e b stavolta sono numeri reali!!!)

$$\begin{cases} 4abi = 4i \\ (1+i)(a+ib) = (1-i)(a-ib) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ 2(a+b)i = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si deduce $a = -b$ che inserito nella prima non dà alcuna soluzione (visto che a, b per definizione sono numeri reali).

1.4.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 1.4.15**
Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi e scrivere z nella forma trigonometrica

$$\begin{aligned} &1) z = -1 + i \\ &2) z = \sqrt{3}i + 1 \\ &3) z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.4.16**

Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z che soddisfano

$$4)|z| = 2$$
$$5)|z| \leq 2$$
$$6)\arg(z) = \frac{\pi}{3}$$
$$7)|z - 2i| \leq 3$$
$$8)|z - 3 + 4i| \leq 5$$
$$9)\pi \leq \arg(z) \leq \frac{7}{4}\pi.$$

✍ **Esercizio 1.4.17**

Disegnare nel piano complesso il luogo dei punti z tali che

$$10)|z| = |z+i|$$

$$11)\Re(z) > 2$$

$$12)\Im(z) = -4$$

$$13)z = \sqrt{8+i}$$

$$14)z = \sqrt[3]{2-2i}$$

$$15)|z| < 1 \text{ e } |z-1-i| < 1$$

$$16)|z-i| = |z-1| \text{ e } |z-1-i| \leq 1$$

$$17)|z| < |z+1| \text{ e } |z+1-i| < 1$$

$$18)|z| > |z+1| \text{ e } |z+1-i| < 1$$

$$19)|z| < |z+1| \text{ e } |z+1-i| > 1$$

$$20)|z+1| < 1 \text{ e } \Re z = \Im z$$

$$21)|z+1| < 1 \text{ e } \Re z > \Im z$$

$$22)|z+1| = 1 \text{ e } \Re z < \Im z$$

$$23)|z+1| < 1 \text{ e } \Re z < \Im z$$

$$24)|z| > 1 \text{ e } |z-1-i| < 1$$

$$25)|z| < 1 \text{ e } |z-1-i| > 1$$

$$26)|z+2| < |z+i|$$

$$27)|z+1| = |z+i|$$

$$28)|z| > |z+i|$$

$$29)|z+1| > |z+i|$$

$$30)|z-i| < |z+1-2i| \text{ e } |z+1-i| < 1$$

$$31)|z-i| > |z+1-2i| \text{ e } |z+1-i| < 1$$

$$32)|z+1-i| > |z| \text{ e } |z+1| < 1$$

$$33)|z+1-i| < |z| \text{ e } |z+1| < 1$$

$$34)|z+1-i| > |z| \text{ e } |z+1| > 1$$

$$35)|z+1-i| < |z| \text{ e } |z+1| > 1$$

✍ **Esercizio 1.4.18**
Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni

$$36) z^2 + z\,\bar{z} - 4 + 4i = 0$$

$$37) \left(\frac{\bar{z} - i}{1 - i}\right)^3 = 2\sqrt{2}i$$

$$38) z^2 + i\sqrt{3}z + i = 0$$

$$39) 5\bar{z} - z = z\,\bar{z} + 6i$$

$$40) (\bar{z} - 2z + 6i)\Im z = 1 - 9i$$

$$41) (2z + \bar{z} - 3)\Re z = 6 - i$$

$$42) 5z + \bar{z} = z\,\bar{z} + 4i$$

$$43) (2z - \bar{z} + 2)\Re z = 3 - 3i$$

$$44) (z + 2)\bar{z} = iz$$

$$45) (\bar{z} - 2)z = iz$$

$$46) (z - 2)\bar{z} = i\bar{z}$$

$$47) (\bar{z} + 2)z = i\bar{z}$$

$$48) z + \tfrac{1-i}{z} = -2 + i$$

$$49) z - \tfrac{1-i}{z} = 1 + 2i$$

$$50) z - \tfrac{1+i}{z} = 1 - 2i$$

$$51) z + \tfrac{1+i}{z} = 2 + i$$

$$52) z(4 - \bar{z}) = 4\sqrt{3}i$$

$$53) i\bar{z}\,\Im z = z$$

$$54) |z|^2 + \bar{z} = 2 + i$$

$$55) |z + 2|\,z = -i$$

$$56) (z + 1)^3 = i$$

✍ **Esercizio 1.4.19**
Disegnare nel piano di Gauss i seguenti insiemi:
(a) $\{z + i : z \in E\}$
(b) $\{z - 2i : z \in E\}$
(c) $\{-iz : z \in E\}$
(d) $\{iz : z \in E\}$
(e) $\{-z : z \in E\}$
(f) $\{-z + i : z \in E\}$
(g) $\{z^2 : z \in E\}$
(h) $\{z^3 : z \in E\}$
(i) $\{\sqrt{z} : z \in E\}$

dove E di volta in volta è l'insieme
1) $E = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq 1,\ \ 0 \leq \arg(z) \leq \pi\}$
2) $E = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z| \leq 3,\ \ \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3}{2}\pi\}$
3) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\ \ 0 \leq \arg(z) \leq \pi\}$
4) $E = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \pi\}$

✍ **Esercizio 1.4.20**
Trovare modulo e argomento del numero complesso $-3 + i\sqrt{3}$ ed esprimere poi in forma algebrica il numero complesso di modulo 5 ed argomento $7\pi/4$.

✍ **Esercizio 1.4.21**
Calcolare $z^3 - iz^5 + z^7$ dove $z = (1 + i)/\sqrt{2}$ e calcolare poi $\dfrac{z^3 - i\bar{z}}{z - |z|}$ dove $z = (1 - i)/\sqrt{2}$.

✍ **Esercizio 1.4.22**
Sostituite $z = 1 - 2i$ nell'espressione

$$\frac{(\bar{z})^2 + iz - 2}{i|z|^2 - z}$$

ed esprimete il risultato in forma algebrica.

✍ **Esercizio 1.4.23**
Scrivete in forma algebrica il numero complesso

$$w = \frac{z - i\bar{z}}{z^2 - 2i|z|^2}$$

ove $z = 1 + 2i$.

✍ **Esercizio 1.4.24**
Sostituite $z = 1 - 2i$ nell'espressione

$$\frac{(\bar{z})^2 + iz - 2}{i|z|^2 - z}$$

ed esprimete il risultato in forma algebrica.

✍ **Esercizio 1.4.25**
Determinare le eventuali soluzioni $z, w \in \mathbb{C}$ del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} i + z + w = \pi \\ izw = \pi. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 1.4.26**
Sostituite $z = -3 - 4i$ nell'espressione

$$\frac{z|z| + i\bar{z}}{2i + \bar{z}},$$

ed esprimete il risultato in forma algebrica. Fate la stessa cosa con $z = 4 - 3i$

✍ **Esercizio 1.4.27**
Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} (z - |w|)(iz + \bar{z}) = 0 \\ 2|w| - z - 2i = 2 + i(w - \bar{w}) \\ |z| = |w|. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 1.4.28**
Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} (w + |z|)(i\bar{w} + w) = 0 \\ 2|z| + w + 3i = 3 + z + \bar{z} \\ |z| = |w|. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 1.4.29**
Ridurre nella forma $z = a + ib$ e disegnare nel piano di Gauss i seguenti numeri complessi

$$(a)(-1-i)^3 \qquad (b)(1+\sqrt{3}i)^3 \qquad (c)(-1+i)^3 \qquad (d)(\sqrt{3}+i)^3$$

✍ **Esercizio 1.4.30**
Trovare le radici cubiche dei seguenti numeri complessi e disegnarle nel piano di Gauss

$$(a) z = -5 - 5i$$
$$(b) z = 5 - 5i$$
$$(c) z = -5 + 5i$$
$$(d) z = 5 + 5i$$
$$(e) z = -1 + i$$
$$(f) z = 1 + i$$
$$(g) z = 1 - i$$
$$(h) z = -1 - i$$

✍ **Esercizio 1.4.31**
Ridurre nella forma $z = a + ib$ e disegnare nel piano di Gauss il numero complesso $(-1-i)^5$

✍ **Esercizio 1.4.32**
Calcolate le radici quarte di $z = \sqrt{3} + 3i$ e disegnatele nel piano complesso

✍ **Esercizio 1.4.33**
Trovate i tre numeri complessi soluzione dell'equazione $(z-1)^3 = 1$ (suggerimento: risolvete prima $w^3 = 1$)

✍ **Esercizio 1.4.34**
Sia E il sottoinsieme del piano complesso $\mathbb{C}$ definito da

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \, |z-2| < 1\}$$

Disegnate l'insieme E e anche l'insieme F definito da

$$F = \{z \in \mathbb{C} : \, iz \in E\}$$

1.4.3. Test a risposta multipla

✍ **Esercizio 1.4.35**
Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Allora $z^{-1} =$

$$(a)\frac{1+z}{1+\bar{z}} \qquad (b)\bar{z}\,|z| \qquad (c)\frac{\bar{z}}{|z|} \qquad (d)\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

✍ **Esercizio 1.4.36**
Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Le seguenti espressioni, tranne una, sono sempre numeri reali. Quale non è necessariamente reale?

$$(a)\frac{z}{\bar{z}} \qquad (b)|\bar{z}| \qquad (c)z+\bar{z} \qquad z\,\bar{z}$$

✍ **Esercizio 1.4.37**
$i^{501} =$

$$(a)-i \qquad (b)-1 \qquad (c)1 \qquad (d)i$$

✍ **Esercizio 1.4.38**
$i^{502} =$

$$(a) - i \qquad (b) - 1 \qquad (c) 1 \qquad (d) i$$

✍ **Esercizio 1.4.39**
Sia $E \in \mathbb{C}$ l'insieme definito da

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \; |z + i| = 1 \, |z - i| = 2\}$$

Allora:
(a) E contiene esattamente 4 punti
(b) $E = \emptyset$
(c) E contiene esattamente un solo punto
(d) E contiene esattamente due punti

✍ **Esercizio 1.4.40**
$\frac{2+3i}{1+3i} =$

$$(a) \frac{1}{5}(7 - i) \qquad (b) - \frac{1}{5}(1 + 7i) \qquad (c) \frac{1}{10}(11 - 3i) \qquad (d) \frac{1}{10}(7 - i)$$

✍ **Esercizio 1.4.41**
L'insieme dei numeri complessi z tali che $z + \bar{z} = 0$ è
(a) l'insieme vuoto
(b) un punto
(c) una retta
(d) una circonferenza

✍ **Esercizio 1.4.42**
Nel piano complesso, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $2z - 2\Re z + \bar{z} = -3i$ è:
(a) una circonferenza (b) una retta verticale (c) una retta orizzontale (d) un punto

✍ **Esercizio 1.4.43**
Nel piano complesso, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $3\bar{z} + 2\Im z + z = 2$ è:
(a) una circonferenza (b) una retta verticale (c) una retta orizzontale (d) un punto

✍ **Esercizio 1.4.44**
Nel piano complesso, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $3\bar{z} - 2\Re z - z = 2i$ è:
(a) una circonferenza (b) una retta verticale (c) una retta orizzontale (d) un punto

✍ **Esercizio 1.4.45**
Le soluzioni diverse da zero dell'equazione $z - \Im z = -\bar{z}$ sono
(a) infiniti numeri complessi (non reali e non immaginari puri)
(b) nessuna
(c) infiniti numeri immaginari
(d) infiniti numeri reali

✍ **Esercizio 1.4.46**
L'equazione $(z - \bar{z})\,\bar{z} = 2$ ha:
(a) due soluzioni reali distinte
(b) due soluzioni complesse coniugate
(c) una sola soluzione complessa
(d) nessuna soluzione

✍ **Esercizio 1.4.47**
Quale dei seguenti numeri è un reale per qualsiasi $z \in \mathbb{C}$?

$$(a) z - iz \qquad (b) z - \bar{z} \qquad (c) z\,\bar{z} \qquad (d) z + i\bar{z}$$

✍ **Esercizio 1.4.48**
Se θ è l'argomento del numero complesso z, allora l'argomento (a meno di multipli di 2π) di $\frac{1}{z}$ è:

$$(a) - 2\theta \qquad (b) - \theta + \frac{\pi}{2} \qquad (c)\theta \qquad (d) - \theta$$

✍ **Esercizio 1.4.49**
Se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 1$ allora

$$(a)|z-1| = 0 \qquad (b)0 \leq |z-1| \leq 2 \qquad (c)|z-1| < |z| \qquad (d)\mathrm{Im}\,(z-1) = 0$$

✍ **Esercizio 1.4.50**
Se $z = 2\sqrt{3} + 2i$ e $w = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$ allora $z\,w =$

$$(a)\frac{1}{2} \qquad (b)\frac{1}{2}\,e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad (c)2 \qquad (d)2\,e^{i\,\frac{\pi}{2}}$$

✍ **Esercizio 1.4.51**
Quale delle seguenti espressioni è un numero reale per ogni $z \in \mathbb{C}$?

$$(a)(z+i)^2 \qquad (b)i(z-\bar{z}) \qquad (c)\frac{z+\bar{z}}{2i} \qquad (d)i\,z\bar{z}$$

✍ **Esercizio 1.4.52**
L'insieme dei numeri complessi $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tale che $|z+2| < |z| < |z+4|$ è
(a) una corona circolare compresa tra due circonferenze di raggio 2 e 4
(b) $\{x + i : \ 1 < y < 2\}$
(c) $\{x + iy : -2 < x < -1\}$
(d) $\emptyset$

✍ **Esercizio 1.4.53**
Se $z = 1 + i$ allora $|z + 1|^2 =$

$$(a)5 \qquad (b)3 \qquad (c)25 \qquad (d)0$$

✍ **Esercizio 1.4.54**
L'insieme dei numeri complessi $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tali che $|z + 1| < |z - 1|$ è
(a) $\{a + ib : (a - 1)^2 + b^2 < 1\}$
(b) $\{a + ib : (a - 1)^2 + b^2 > 1\}$
(c) $\{a + ib : a < 0\}$
(d) $\{a + ib : a > 0\}$

✍ **Esercizio 1.4.55**
Se $z = 2 + i$ allora $z\,\bar{z} =$
(a) 5 (b) 3 (c) 25 (d) 0

✍ **Esercizio 1.4.56**
Se $z = 3 + 4i$ allora $z^{-1} =$

$$(a)\frac{-3-4i}{25} \qquad (b)\frac{-3+4i}{25} \qquad (c)\frac{3-4i}{25} \qquad (d)\frac{3+4i}{25}$$

✍ **Esercizio 1.4.57**
L'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| = |z + 1|$ è
(a) una circonferenza di raggio 1
(b) una coppia di rette ortogonali
(c) una retta parallela all'asse reale
(d) una retta parallela all'asse immaginario

✍ **Esercizio 1.4.58**
Se $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\sin\frac{\pi}{16}\right)$ allora $z^8 =$

$$(a)\sqrt[8]{2}\,i \qquad (b) - \sqrt[8]{2} \qquad (c)16i \qquad (d) - 16$$

✍ **Esercizio 1.4.59**
Le soluzioni dell'equazione $(z+1)^2+1=0$ sono

$$(a) z=\pm 1-1 \qquad (b) z=\pm 1+i \qquad (c) z=\pm i-1 \qquad (d) z=\pm i+1$$

✍ **Esercizio 1.4.60**
Le soluzioni dell'equazione $(z-1)^2+1=0$ sono

$$(a) z=\pm 1-1 \qquad (b) z=\pm 1+i \qquad (c) z=\pm i-1 \qquad (d) z=\pm i+1$$

✍ **Esercizio 1.4.61**
$\frac{3+i}{1+i}=$

$$(a) 1-2i \qquad (b) 2+2i \qquad (c) 2-i \qquad (d) 4+i$$

✍ **Esercizio 1.4.62**
$\frac{3-i}{1+i}=$

$$(a) 1-2i \qquad (b) 2+2i \qquad (c) 2-i \qquad (d) 4+i$$

✍ **Esercizio 1.4.63**
$\frac{3+5i}{1+i}=$

$$(a) 1-2i \qquad (b) 2+2i \qquad (c) 2-i \qquad (d) 4+i$$

✍ **Esercizio 1.4.64**
Se $z=a+ib$ soddisfa l'equazione $z\,|z|^2=8i$ allora $z=$

$$(a) 1+2i \qquad (b) 1-2i \qquad (c) 2i \qquad (d) -2i$$

✍ **Esercizio 1.4.65**
Se $z = a + ib$ soddisfa l'equazione $z\,|z|^2 = -8i$ allora $z =$

$$(a) 1 + 2i \qquad (b) 1 - 2i \qquad (c) 2i \qquad (d) - 2i$$

✍ **Esercizio 1.4.66**
Se $z = a + ib$ soddisfa l'equazione $z\,|z|^2 = -i$ allora $z =$

$$(a) i \qquad (b) - i \qquad (c) 1 + i \qquad (d) 1 - i$$

✍ **Esercizio 1.4.67**
Si denoti con $z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$ un generico numero complesso. Qual è l'insieme delle soluzioni di $|z + 1|\,z = \bar{z}$?

$$(a)\{0 \leq x \leq 2,\, y = 0\} \qquad (b)\{-2 \leq x \leq 0,\, y = 0\} \qquad (c)\{0\} \cup \{2\} \qquad (d)\{0\} \cup \{-2\}$$

✍ **Esercizio 1.4.68**
Si denoti con $z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$ un generico numero complesso. Qual è l'insieme delle soluzioni di $|z - 1|\,\bar{z} = z$?

$$(a)\{-2 \leq x \leq 0,\, y = 0\} \qquad (b)\{0 \leq x \leq 2,\, y = 0\} \qquad (c)\{0\} \cup \{2\} \qquad (d)\{0\} \cup \{-2\}$$

✍ **Esercizio 1.4.69**
L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z| - 1 > 0$ è
(a) una circonferenza (b) un semipiano (c) l'esterno di un disco (d) un disco

✍ **Esercizio 1.4.70**
L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z| - 1 < 0$ è
(a) una circonferenza (b) un semipiano (c) l'esterno di un disco (d) un disco

✍ **Esercizio 1.4.71**

L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z| - 1 = 0$ è

(a) una circonferenza (b) un semipiano (c) l'esterno di un disco (d) un disco

✍ **Esercizio 1.4.72**

Qual è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^2 = \bar{z}$?

$$(a)\{0\} \cup \{2\} \quad (b)\{0\} \cup \{1\} \quad (c)\{0\} \cup \{2\} \cup \{-1 + i\sqrt{3}\} \cup \{-1 - i\sqrt{3}\}$$
$$(d)\{0\} \cup \{1\} \cup \{(-1 + i\sqrt{3})/2\} \cup \{(-1 - i\sqrt{3})/2\}$$

✍ **Esercizio 1.4.73**

Qual è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^2 = 2\bar{z}$?

$$(a)\{0\} \cup \{2\} \quad (b)\{0\} \cup \{1\} \quad (c)\{0\} \cup \{2\} \cup \{-1 + i\sqrt{3}\} \cup \{-1 - i\sqrt{3}\}$$
$$(d)\{0\} \cup \{1\} \cup \{(-1 + i\sqrt{3})/2\} \cup \{(-1 - i\sqrt{3})/2\}$$

✍ **Esercizio 1.4.74**

Se $z = 3 + 4i$ allora $|z^{-2}| =$

$$(a)\frac{1}{13} \quad (b)\frac{1}{\sqrt{13}} \quad (c)\frac{1}{25} \quad (d)\frac{1}{5}$$

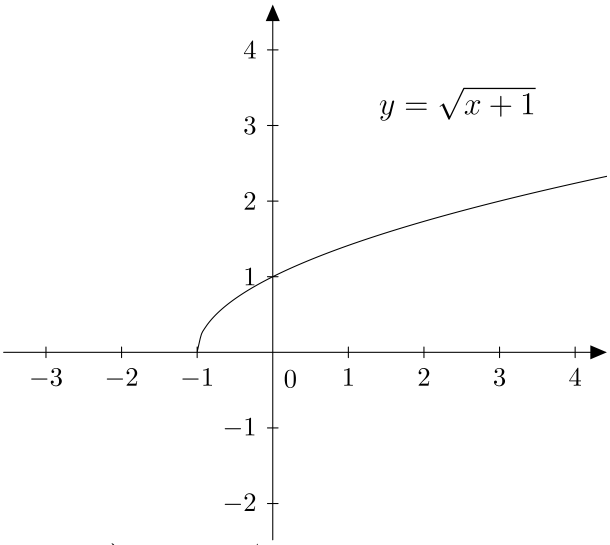
CAPITOLO 2

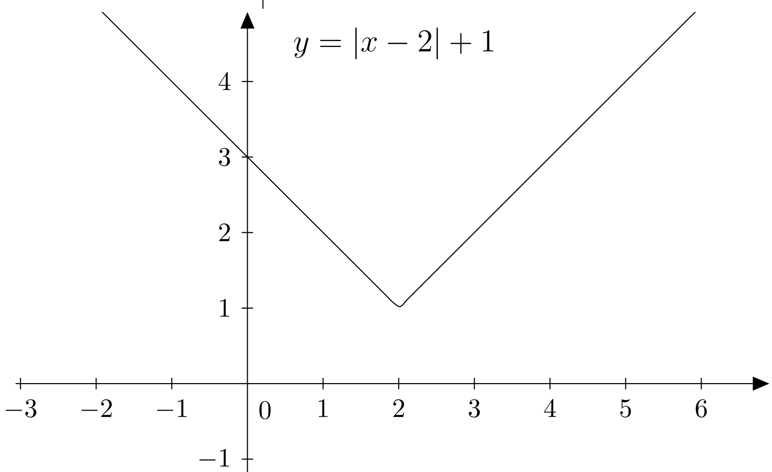
Esercizi riguardanti grafici di funzioni elementari

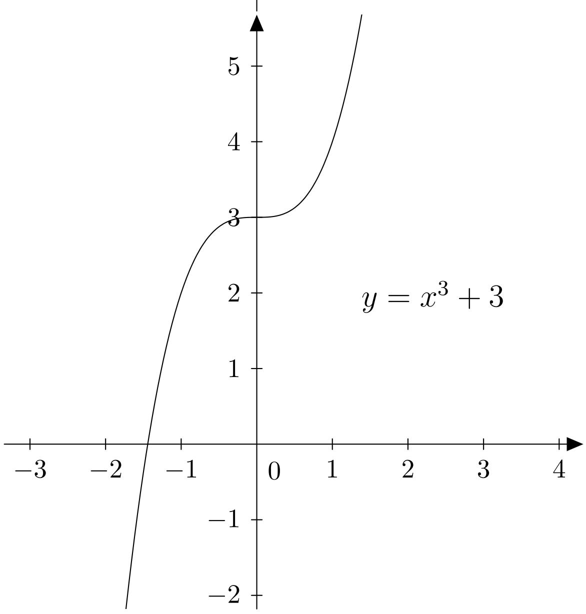
2.1. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 2.1.1.** Disegnare i grafici delle seguenti funzioni elementari:

$1) y=\sqrt{x+1}$	$2) y=\|x-2\|+1$
$3) y=x^3+3$	$4) y=\sin x+2$
$5) y=e^{x+2}$	$6) y=\log(x+5)$
$7) y=2\sqrt{x+2}$	$8) y=2\|x-2\|$
$9) y=-x^3+3$	$10) y=-(x+3)^3$
$11) y=e^{-x}+2$	$12) y=-\log(-x)$
$13) y=2\sqrt{\|x\|+2}-1$	$14) y=-(\|x\|+3)^3-5$
$15) y=\|3\sqrt{2-\|x\|}-2\|$	$16) y=\|e^{-x}-2\|$


$y = \sqrt{x+1}$


$y = |x-2| + 1$


$y = x^3 + 3$

CAPITOLO 3

Esercizi riguardanti domini di funzioni reali di variabile reale

3.1. Esercizi proposti di primo livello

✍ **Esercizio 3.1.1.** *Calcolare il dominio naturale (cioè il più grande insieme di* $\mathbb{R}$ *su cui hanno senso le espressioni analitiche di seguito elencate)*

1) $1 + x^2$	2) $1 - \sqrt{x}$
3) $\sqrt{8 - 2x}$	4) $\sqrt{x - 2}$
5) $\sqrt{\lvert x - 2\rvert}$	6) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$
7) $\sqrt{\lvert x\rvert - 2}$	8) $\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert - 2}}$
9) $\sqrt{\log x + 1}$	10) $\dfrac{1}{x-1}$
11) $\log(\sqrt{x^2 - 6x + 5})$	12) $\dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$
13) $\sin(x - \sqrt{1 - 2x})$	14) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{x-2}}$
15) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$	16) $\sqrt{x^2 - 2}$
17) $\log(x - x^3)$	18) $\dfrac{1}{e^x - 6}$
19) $\dfrac{1}{1 - \cos x}$	20) $\log(2x - \sqrt{x^2 - 1})$
21) $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$	22) $\sqrt{\log(2-x) - \log(x+1)}$
23) $\tan(2x - \sqrt{x+1})$	24) $\sqrt{1 - 2\log_4 x} - \dfrac{1}{\sqrt{\lvert x-1\rvert}}$

R.

1)$\mathbb{R}$	2)$\{x : x \geq 0\}$
3)$\{x : x \leq 4\}$	4)$\{x : x \geq 2\}$
5)$\mathbb{R}$	6)$\{x : x > 2\}$
7)$x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2$	8)$x < -2 \ \vee \ x > 2$
9)$x \geq 1/e$	10)$x \neq 1$
11)$x < 1 \ \vee \ x > 5$	12)$x < 2$
13)$x \leq 1/2$	14)$x \geq 2, \ x \neq 3$
15)$x > 1$	16)$x \leq -\sqrt{2} \ \vee \ x \geq \sqrt{2}$
17)$x < -1 \ \vee \ 0 < x < 1$	18)$x \neq \log 6$
19)$x \neq 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$	20)$x \geq 1$
21)$-1 \leq x \leq 1$	22)$-1 < x \leq 1/2$
23)$x \geq -1, \ 2x - \sqrt{x+1} \neq \pi/2 + k\,\pi, \ k \in \mathbb{Z}$	24)$0 < x \leq 2, \ x \neq 1$

9) Si ha $x \geq 1/e$. Infatti bisogna dare la condizione di esistenza del logaritmo $x > 0$ e la condizione di esistenza della radice $x \geq 1/e$ e quindi globalmente si ha $x \geq 1/e$.

11) Si ha $x < 1 \ \vee \ x > 5$. Infatti bisogna porre la condizione di esistenza del logaritmo, che è $x \neq 1$ e $x \neq 5$ perché la radice è sempre positiva o nulla; poi bisogna porre la condizione di esistenza della radice quindi $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ e quindi in definitiva si ha $x < 1 \ \vee \ x > 5$.

12) Si ha $x < 2$. Infatti bisogna porre la condizione di esistenza della radice, cioè $x \leq 2$ e la condizione di esistenza della frazione, quindi denominatore diverso da zero, da cui la soluzione.

13) $x \leq 1/2$, infatti basta porre la condizione di esistenza della radice.

14) $x \geq 2$ con $x \neq 3$. Infatti la prima viene dalla condizione di esistenza della radice, la seconda dalla condizione di esistenza della frazione (denminatore diverso da zero).

17) $x < -1 \ \vee \ 0 < x < 1$ Infatti basta porre la condizione di esistenza del logaritmo che è $x - x^3 > 0$

19) $x \neq 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Infatti basta porre la condizione di esistenza della frazione (denominatore diverso da zero).

20) $x \geq 1$. Infatti si parte dalla condizione di esistenza della radice, cioè $x^2 - 1 \geq 0$; poi si aggiunge la condizione di esistenza del logaritmo, cioè $2x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$. Prima di elevare a quadrato si deve porre ovviamente $x \geq 0$. Elevando a quadato ottengo $3x^2 + 1 > 0$ che è sempre verificata, da cui la soluzione proposta.

22) $-1 < x \leq 1/2$. Infatti bisogna porre l'esistenza dei logaritmi, cioè $2 - x > 0$ e $x + 1 > 0$, poi la condizione di esistenza della radice, che ci porta a $x \leq 1/2$. Mettendo insieme le tre condizioni si ottiene la soluzione proposta.

24) $0 < x \leq 2$ con $x \neq 1$. Infatti bisogna porre l'esistenza del logaritmo, cioè $x > 0$, l'esistenza della radice, cioè $1 - 2\log_4 x \geq 0$ che porta a $x \leq 2$ e infine l'esistenza della frazione (denominatore diverso da zero) che dà $x \neq 1$.

3.2. Esercizi proposti di secondo livello

✍ **Esercizio 3.2.1.** *Calcolare il dominio naturale (cioè il più grande insieme di $\mathbb{R}$ su cui hanno senso le espressioni analitiche di seguito elencate)*

1) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{4x+5}}$ | 2) $\sqrt{1 - \log(x - x^2)}$

3) $\dfrac{\log(1+x^2)}{\sin x - x}$ | 4) $\sqrt{\sin x + \dfrac{1}{2}}$

5) $\log(3 + 2\cos x - \cos^2 x)$ | 6) $\dfrac{|\log x - 2|}{x^2\sqrt[3]{1-x}}$

7) $\dfrac{\sqrt[4]{3 - \log(x^2+x)}}{|x+2| - 1}$ | 8) $\dfrac{\sqrt{\log(1 - \tan x)}}{\sin^2 x - \log x + \cos^2 x}$

9) $\dfrac{\sqrt{|x-1| - |x-3|}}{\log_2 x - 3}$ | 10) $e^{x^5 - \sin x}$

11) $\sqrt{x^2+x+1} - (x^4+x^2+1)^{5/3}$ | 12) $\log(x^2 - 2x - 3)$

13) $\sqrt{x^2 + 1 + \sqrt{x^2+1}}$ | 14) $\sin(x^2+x+1) - \arcsin\dfrac{1}{2+x^2}$

15) $(x^2+1)^{\log(x^2+1)}$ | 16) $\log(x^2)^{-2\sin(x^2)}$

17) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$ | 18) x^{x^x}

19) $\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^{1/\tan x}$ | 20) $\sqrt[3]{\log^2 x + 1 + \sqrt{1+x^2}}$

21) $\sin\log(1+\cos^2 x)$ | 22) $x^{\frac{x\log x}{x-1}}$

23) $\log\log\log(1+x^2)$ | 24) $(\log x)^{1/\log x}$

25) $(1+\log x)^{1/\log(\log^2 x)}$ | 26) $(2 - \sqrt{x^2+1})^{x\sqrt{x}}$

27) $2^{\frac{|x|}{|x+1|}}$ | 28) $(x^2 - 6x + 5)^{\frac{2\sqrt{x^2-x}}{2x-3}}$

29) $\log_3((x^2-3) - (x^2-3)^x)$ | 30) $\sqrt{1 + \log_{1/2}(|x| - 1)}$

➼ **R.**

1)$x \geq -2, \ \ \sqrt{x+2} \neq \sqrt[3]{4x+5}$

2)$0 < x < 1$

3)$x \neq 0$

4)$0 + 2k\pi \leq x \leq 7/6\pi + 2k\pi \ \ \vee \ \ 11/6\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$

5)$\emptyset$

6)$x > 0, \ \ x \neq 1$

7)$\dfrac{-1-\sqrt{1+4e^3}}{2} \leq x < -1 \ \ \vee \ \ 0 < x \leq \dfrac{-1+\sqrt{1+4e^3}}{2}$

8)$\pi/2 + k\pi < x \leq \pi + k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}^+, \ \ x \neq e$

9)$x \geq 2, \ \ x \neq 8$

10)$\mathbb{R}$

11)$\mathbb{R}$

12)$x < -1 \ \ \vee \ \ x > 3$

13)$\mathbb{R}$

14)$\mathbb{R}$

15)$\mathbb{R}$

16)$x < -\sqrt{e} \ \ x > \sqrt{e}$

17)$x > 0$

18)$x > 0$

19)$2k\pi < \frac{1}{x} < \pi + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}, \ \ x \neq k\pi, \ \ x \neq 0$

20)$\mathbb{R}$

21)$\mathbb{R}, \ \ x \neq \pi + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$

22)$x > 0, \ \ x \neq 1$

23)$x < -\sqrt{e-1} \ \ \vee \ \ x > \sqrt{e-1}$

24)$x > 1$

25)$x > 1/e, \ \ x \neq e$

26)$0 \leq x < \sqrt{3}$

27)$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

28)

29)$x < -2 \ \ \vee \ \ \sqrt{3} < x < 2$

30)

2) $0 < x < 1$. Infatti la condizione di esistenza del logaritmo porta a $x - x^2 > 0$ cioè $0 < x < 1$.

Poi bisogna porre la condizione di esistenza della radice, cioè $1-\log(x-x^2)\geq 0$ che porta a $x-x^2\leq e$ che è sempre verificata.
3) $x\neq 0$. Infatti la condizione di esistenza del logaritmo è sempre verificata. Basta quindi porre $\sin x\neq x$.
4) $0+2k\pi\leq x\leq 7/6\pi+2k\pi \ \vee \ 11/6\pi+2k\pi\leq x\leq 2\pi+2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$. Infatti la condizione di esistenza della radice porta a $\sin x\geq -1/2$.
5) Dominio uguale all'insieme vuoto. Infatti la condizione di esistenza del logaritmo porta a $3+2\cos x-\cos^2 x>0$. Con la sostituzione $\cos x=t$ si risolve facilmente in termini di t e si giunge a $(\cos x+1)(\cos x-3)<0$. Ora di sicuro $\cos x<3$ e anche $\cos x+1\leq 0$ per ogni x quindi la condizione di esistenza del logaritmo non è mai verificata.
6) $x>0$ con $x\neq 1$. Infatti la condizione di esistenza del logaritmo porta a $x>0$. Poi basta porre denominatore diverso da zero che porta alla soluzione proposta.
7) $\dfrac{-1-\sqrt{1+4e^3}}{2}\leq x<-1 \ \vee \ 0<x\leq\dfrac{-1+\sqrt{1+4e^3}}{2}$, con $x\neq -3$. Infatti la condizione di esistenza del logaritmo porta a $x<-1 \ \vee \ x>0$. Poi la condizione di esistenza della radice porta a $3-\log(x^2+x)\geq 0$ cioè $x^2+x-e^3\leq 0$. Questa si risolve facilmente e dà come soluzione $\dfrac{-1-\sqrt{1+4e^3}}{2}\leq x\leq\dfrac{-1+\sqrt{1+4e^3}}{2}$. Infine dalla condizione di esistenza della frazione (denominatore diverso da zero) si ottiene $x\neq -1$ e $x\neq -3$ da cui la soluzione proposta (dopo aver verificato che $\frac{-1-\sqrt{1+4e^3}}{2}<-3$).
8) $\pi/2+k\pi<x\leq\pi+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}^+$, $x\neq e$. Infatti prima di tutto analizziamo il numeratore. Esistenza del logaritmo: $1-\tan x>0$. Esistenza radice $\log(1-\tan x)\geq 0$ che equivale a $\tan x\leq 0$. Riassumendo dunque si ha $\tan x\leq 0$, cioè $\pi/2+k\pi<x\leq\pi+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Al denominatore: siccome $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, basta porre $1-\log x\neq 0$ con $x>0$ (esistenza logaritmo) cioè $x>0$ con $x\neq e$.
9) $x\geq 2$, $x\neq 8$. Infatti basta porre le seguenti condizioni: $|x-1|-|x-3|\geq 0$ (esistenza della radice) che porta a $x\geq 2$; $\log_2 x-3\neq 0$ (denominatore diverso da zero) che porta a $x\neq 8$ e infine $x>0$ (esistenza logaritmo) che viene conglobata dalla prima condizione, da cui la soluzione proposta.
12) $x<-1 \ \vee \ x>3$. Infatti basta porre la condizione di esistenza del logaritmo, che porta a $x^2-2x+3>0$
14) $\mathbb{R}$. Infatti basta porre le seguenti condizioni:

$$-1\leq\frac{1}{2+x^2}\leq 1$$

(esistenza della funzione arcoseno) che viene verificata per ogni x e $x^2+2\neq 0$ (denominatore diverso da zero), anch'essa verificata per ogni x.
16) $x<-\sqrt{e}\ \ x>\sqrt{e}$. Infatti scrivendo

$$\log(x^2)^{-2\sin x^2}=\exp(-2\sin x^2\log(\log x^2))$$

si ha che basta porre $x^2 > 0$ cioè $x \neq 0$ e $\log(x^2) > 0$ cioè $x^2 > e$, da cui la soluzione proposta.
17) $x > 0$. Infatti scrivendo

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\log\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$$

si ha che basta porre $\frac{x^2+1}{x} > 0$ (condizione di esistenza del logaritmo) e $x \neq 0$ (esistenza della frazione), da cui la soluzione proposta.
18) $x > 0$. Infatti, pensando di intendere convenzionalmente $x^{x^x} = (x^x)^x$, si ha:

$$(x^x)^x = (e^{x\log x})^x = \exp(x\log(\exp(x\log x))) = \exp(x^2\log x)$$

da cui la soluzione proposta.
19) $2k\pi < \frac{1}{x} < \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ e $x \neq k\pi$, $x \neq 0$. Infatti scrivendo

$$\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{1/\tan x} = \exp\left(\frac{1}{\tan x}\log\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)$$

si ha che basta porre $\sin\frac{1}{x} > 0$ (condizione di esistenza del logaritmo) con $x \neq 0$ e $\tan x \neq 0$ (esistenza delle frazioni), da cui la soluzione proposta.
21) $\mathbb{R}$, con $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Infatti basta la condizione di esistenza del logaritmo ($\cos x + 1 > 0$).
22) $x > 0$ con $x \neq 1$. Infatti scrivendo

$$x^{\frac{x\log x}{x-1}} = \exp\left(\frac{x\log^2 x}{x-1}\right)$$

si ha che basta porre $x > 0$ (condizione di esistenza del logaritmo) e $x \neq 1$ (esistenza della frazione), da cui la soluzione proposta.
23) $x < -\sqrt{e-1} \;\vee\; x > \sqrt{e-1}$. Infatti le condizioni da porre sono: $1 + x^2 > 0$ che viene verificata da ogni x, $\log(1+x^2) > 0$ che porta a $x^2 > 0$, vera per ogni $x \neq 0$ e infine $\log\log(1+x^2) > 0$ che porta a $\log(1+x^2) > 1$ da cui $1 + x^2 > e$ e quindi si ha la soluzione proposta.
24) $x > 1$. Infatti scrivendo

$$\log(x)^{1/\log x} = \exp\left(\frac{1}{\log x}\log(\log(x))\right)$$

si ha che basta porre $x > 0$, $\log x > 0$ e $\log x \neq 0$, da cui la soluzione proposta.
25) $x > 1/e$ con $x \neq e$. Infatti se riscriviamo come

$$(1 + \log x)^{1/\log(\log^2 x)} = \exp\left(\frac{1}{\log\log^2 x}\log(1 + \log x)\right)$$

allora le condizioni da porre sono: *esistenza logaritmi*: $x > 0$, $1 + \log x > 0$ e $\log^2 x > 0$. La terza viene verificata da ogni x, la seconda per $x > 1/e$, la prima viene conglobata dalla seconda; *denominatore diverso da zero*: $\log \log^2 x \neq 0$ che porta a $\log^2 x \neq 1$ se e soltanto se $\log x \neq \pm 1$ quindi $\log x \neq 1$ che porta a $x \neq e$ e $\log x \neq -1$ che porta a $x \neq 1/e$, da cui la soluzione proposta.

26) $0 \leq x < \sqrt{3}$. Infatti scrivendo

$$(2 - \sqrt{x^2 + 1})^{x\sqrt{x}} = \exp(x\sqrt{x} \log(2 - \sqrt{x^2 + 1})$$

si ha che basta porre $x \geq 0$ e $2 - \sqrt{x^2 + 1} > 0$ cioè $x^2 < 3$, da cui la soluzione proposta.

27) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, infatti basta porre $|x + 1| \neq 0$.

29) $x < -2 \ \vee \ \sqrt{3} < x < 2$.

Prima di tutto infatti scriviamo

$$(x^2 - 3)^x = \exp(x \log(x^2 - 3))$$

da cui si vede immediatamente che deve essere $x^2 - 3 > 0$ quindi $x < -\sqrt{3} \ \vee \ x > \sqrt{3}$. D'altra parte la condizione di esistenza del logaritmo in base 3 porta a

$$(x^2 - 3) - (x^2 - 3)^x > 0 \ \Leftrightarrow \ (x^2 - 3)[1 - (x^2 - 3)^x] > 0 \ \Leftrightarrow \ (x^2 - 3)^{x-1} < 1$$

visto che dalla prima condizione avevamo $x^2 - 3 > 0$. A questo punto

$$(x^2 - 3)^{x-1} < 1 \ \Leftrightarrow \ \exp((x - 1) \log(x^2 - 3)) < e^0 \ \Leftrightarrow \ (x - 1) \log(x^2 - 3) < 0$$

Quindi si hanno due casi possibili:

$$x - 1 > 0 \ \wedge \ \log(x^2 - 3) < 0$$

e

$$x - 1 < 0 \ \wedge \ \log(x^2 - 3) > 0$$

Il primo sottocaso porta a $x < 1 \ \wedge \ x^2 > 4$ mentre il secondo a $x > 1 \ \wedge x^2 < 4$, quindi insieme portano a $x < -2 \ \vee \ 1 < x < 2$. Mettendo insieme questa condizione con la prima si ottiene la soluzione proposta.

✍ **Esercizio 3.2.2.** *Calcolare il dominio naturale (cioè il più grande insieme di $\mathbb{R}$ su cui hanno senso le espressioni analitiche di seguito elencate)*

31) $\log(\sin(3x)) + e^{1/x}$

32) $\log|\log|x||$

33) $\dfrac{\sqrt{1-4\sin^2 x}}{|x|-1} + \log(x-2)$

34) $\dfrac{\log(e^{2x}-3e^x+2)+\log|x-1|}{3+\cos\sqrt{5-e^x}}$

35) $\dfrac{\arctan\sqrt{e^x-2}+\log|x-1|}{\sqrt{5e^x-4-e^{2x}}}$

36) $\dfrac{\sqrt{3\log x-\log^2 x}}{|x|-1}$

37) $\dfrac{(\sin(2x))^{1+x}}{(|x-1|-1)^3}$

38) $\sqrt{|4-x^2|}-2x$

39) $\dfrac{\log(4^x-2)}{\sqrt{|x-1|+e^{-1}-1}}$

40) $\arctan\left(\log_{1/2}\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^x+3\right)\right)$

41) $(\sqrt{\log_3(x^2-1)}-\sqrt{\log_3(2x+1)})^x$

42) $(7^{x+1}+7^{x-1}-5^x)^{\log_{10} x}$

43) $\log\sqrt[3]{\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-2}}$

44) $\sqrt[4]{e^{2x}-e^x}$

45) $\sqrt{e^{2x}-3e^x-5}$

46) $(x-\sqrt{5x-6})^{1/(x-4)}$

47) $\sqrt[5]{x(x-1)(x-2)}$

48) $\sqrt{-x^2(x+1)}$

49) $\log\left(1+\dfrac{x^2}{(x-1)^2}\right)$

50) $\sqrt[3]{5^{2x}+5^x+1}$

➻ **R.**

CAPITOLO 4

Esercizi riguardanti funzioni composte e inverse

4.1. Funzioni inverse: esercizi proposti

✍ **Esercizio 4.1.1.** *Mostrare che le funzioni f nei seguenti esercizi sono biunivoche e calcolare le loro funzioni inverse f^{-1}. Specificare il dominio e l'immagine di f e f^{-1}*

$$\begin{array}{ll}
1) f(x) = x - 1 & 2) f(x) = 3x - 1 \\
3) f(x) = \sqrt{x-2} & 4) f(x) = -\sqrt{x-1} \\
5) f(x) = x^3 + 1 & 6) f(x) = (1-3x)^3 \\
9) f(x) = \dfrac{1}{x+1} & 10) f(x) = \dfrac{2x}{2+x} \\
11) f(x) = \dfrac{1-3x}{x+1} & 12) f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{array}$$

➻ **R.**

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f è iniettiva: infatti presi $x_1 \neq x_2$ allora $x_1 - 1 \neq x_2 - 1$

f è suriettiva: infatti $y = x - 1$ implica $x = y + 1$.

Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f^{-1}(y) = y + 1$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f è iniettiva: infatti presi $x_1 \neq x_2$ allora $3x_1 \neq 3x_2$ e quindi $3x_1 - 1 \neq 3x_2 - 1$

f è suriettiva: infatti $y = 3x - 1$ implica $x = \dfrac{y+1}{3}$.
Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{3}$.
3) $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}^+$.
f è iniettiva: infatti presi $x_1 \neq x_2$ allora $x_1 - 2 \neq x_2 - 2$ e quindi $\sqrt{x_1 - 2} \neq \sqrt{x_2 - 2}$
f è suriettiva: infatti $y = \sqrt{x-2}$ (nota che da qui deve essere $y \geq 0$!!!) implica $x = y^2 + 2$ (nota che da qui risulta $x \geq 2$!!!)
Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to [2, +\infty)$ definita da $f^{-1}(y) = y^2 + 2$.
4) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^-$.
f è iniettiva: infatti presi $x_1 \neq x_2$ allora $x_1 - 1 \neq x_2 - 1$ e quindi $\sqrt{x_1 - 1} \neq \sqrt{x_2 - 1}$ da cui la tesi
f è suriettiva: infatti $y = -\sqrt{x-1}$ (nota che da qui deve essere $y \leq 0$!!!) implica $x = y^2 + 1$ (nota che da qui risulta $x \geq 1$!!!)
Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^- \to [1, +\infty)$ definita da $f^{-1}(y) = y^2 + 1$.
5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f è iniettiva: infatti presi $x_1 \neq x_2$ allora $x_1^3 \neq x_2^3$ e quindi $x_1^3 \neq x_2^3$
f è suriettiva: infatti $y = x^3 - 1$ implica $x = \sqrt[3]{y-1}$
Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$.
6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f è iniettiva: infatti presi $x_1 \neq x_2$ allora $3x_1 \neq 3x_2$ e quindi $1 - 3x_1 \neq 1 - 3x_2$ da cui $(1 - 3x_1)^3 \neq (1 - 3x_2)^3$
f è suriettiva: infatti $y = (1 - 3x)^3$ implica $x = \dfrac{1 - \sqrt[3]{y}}{3}$
Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f^{-1}(y) = \dfrac{1 - \sqrt[3]{y}}{3}$.
7) $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$.
f è iniettiva: infatti presi $x_1 \neq x_2$ allora $x_1^2 \neq x_2^2$ perché $x_1, x_2 \leq 0$
f è suriettiva: infatti $y = x^2$ implica $x = -\sqrt{y}$
Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$ definita da $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.
8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f è iniettiva: infatti presi $x_1 \neq x_2$ allora $\sqrt[3]{x_1} \neq \sqrt[3]{x_2}$ e quindi $1 + \sqrt[3]{x_1} \neq 1 + \sqrt[3]{x_2}$
f è suriettiva: infatti $y = 1 + \sqrt[3]{x}$ implica $x = (y-1)^3$
Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f^{-1}(y) = (y-1)^3$.
9) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Infatti non esiste nessuna x tale che $f(x) = 0$
f è iniettiva: infatti presi $x_1 \neq x_2$ allora $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$ da cui $\frac{1}{x_1+1} \neq \frac{1}{x_2+1}$
f è suriettiva: infatti $y = \dfrac{1}{x-1}$ implica $x = \dfrac{1-y}{y}$

Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (infatti non esiste nessuna x tale che $f^{-1}(x) = 0$) definita da $f^{-1}(y) = \dfrac{1-y}{y}$.
10) $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Infatti non esiste nessuna x tale che $f(x) = 2$
f è iniettiva: infatti $f(x)$ si può anche scrivere come

$$\frac{2x}{2+x} = \frac{1}{\frac{2+x}{2x}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}$$

Allora presi $x_1 \neq x_2$ si ha $\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$ da cui $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{x_2} + \frac{1}{2}$ e quindi la tesi
f è suriettiva: infatti $y = \dfrac{2x}{2+x}$ implica $x = \dfrac{2y}{2-y}$
Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (infatti non esiste nessuna x tale che $f^{-1}(x) = -2$) definita da $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{2-y}$.
11) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Infatti non esiste nessuna x tale che $f(x) = -3$
f è iniettiva: infatti $f(x)$ si può anche scrivere come

$$\frac{1-3x}{x+1} = -3 + \frac{4}{x+1}$$

Allora presi $x_1 \neq x_2$ si ha $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$ da cui $\frac{1}{x_1+1} \neq \frac{1}{x_2+1}$ e quindi $\frac{4}{x_1+1} \neq \frac{4}{x_2+1}$ da cui la tesi
f è suriettiva: infatti $y = \dfrac{1-3x}{x+1}$ implica $x = \dfrac{1-y}{y+3}$
Allora f è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (infatti non esiste nessuna x tale che $f^{-1}(x) = -1$) definita da $f^{-1}(y) = \dfrac{1-y}{y+3}$.
12) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f è iniettiva ma la dimostrazione non è banale.
Il seguente modo non è corretto per mostrare l'iniettività:

$$\begin{aligned} x_1 \neq x_2 \qquad & \Rightarrow \; x_1^2 \neq x_2^2 \;\Rightarrow \sqrt{x_1^2} \neq \sqrt{x_2^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{x_1^2+1} \neq \sqrt{x_2^2+1} \\ & \Rightarrow \; \frac{1}{\sqrt{x_1^2+1}} \neq \frac{1}{\sqrt{x_2^2+1}} \;\Rightarrow\; x_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2+1}} \neq x_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x_2^2+1}} \end{aligned}$$

In particolare la prima implicazione è falsa, perché x^2 non è iniettiva su tutto $\mathbb{R}$ e l'ultima implicazione è falsa perché se si hanno due quantità diverse e si moltiplicano per due quantità diverse, a priori si potrebbe ottenere lo stesso risultato, esempio $2 \neq 3$ ma moltiplicando il primo membro per $1/2$ e il secondo per $1/3$ si ottiene $1 = 1$.
Per agire correttamente si osserva che per $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

quindi supponiamo di prendere $x_1 \neq x_2$; non è restrittivo supporre $x_1 < x_2$ (l'altro caso si tratta in maniera analoga. Allora distinguiamo i casi:

1) $x_1 < x_2 < 0$ in tal caso si ha la seguente catena di implicazioni:

$$\begin{aligned} x_1 \neq x_2 \quad & \Rightarrow \; x_1^2 \neq x_2^2 \; \Rightarrow \; \frac{1}{x_1^2} \neq \frac{1}{x_2^2} \; \Rightarrow \; 1+\frac{1}{x_1^2} \neq 1+\frac{1}{x_2^2} \; \Rightarrow \; \sqrt{1+\frac{1}{x_1^2}} \neq \sqrt{1+\frac{1}{x_2^2}} \\ & \Rightarrow \; \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x_1^2}}} \neq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x_2^2}}} \; \Rightarrow \; -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x_1^2}}} \neq -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x_2^2}}} \; \Rightarrow \; h(x_1) \neq h(x_2) \end{aligned}$$

perché stavolta x^2 è iniettiva su $\mathbb{R}^-$.
2) $0 < x_1 < x_2$ la dimostrazione è la stessa, ci si ferma al terzultimo passaggio (non c'è il segno meno in $h(x)$)
3) $x_1 = 0 < x_2$ oppure $x_1 < x_2 = 0$ si ha banalmente $0 < h(x_2)$ o rispettivamente $h(x_1) < 0$ quindi la tesi è immediata
4) $x_1 < 0 < x_2$ si ha immediatamente $h(x_1) < 0 < h(x_2)$ da cui la tesi.

f è suriettiva: infatti posto $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ si vede subito che y e x hanno lo stesso segno. Elevando a quadrato si ha

$$y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

da cui

$$\frac{1}{x^2+1} = 1 - y^2$$

e da qui si legge che deve essere $y \in [-1, 1]$ perché il primo membro è non negativo. A questo punto, operando le necessarie semplificazioni, si arriva a

$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$$

e visto che x e y devono avere lo stesso segno si ha

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Quindi $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ è biunivoca e perciò invertibile con inversa $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definita da $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$.

✍ **Esercizio 4.1.2.** *Nei seguenti esercizi sia f una funzione biunivoca con inversa f^{-1}. Esprimere le inverse delle funzioni indicate in funzione di f^{-1}*

$$
\begin{array}{ll}
13) g(x) = f(x) - 3 & 14) g(x) = f(3x) \\
15) g(x) = -3f(x) & 16) g(x) = f(x-3) \\
17) g(x) = \dfrac{1}{3+f(x)} & 18) g(x) = \dfrac{f(x)-3}{3} \\
19) g(x) = 1 - 3f(3-3x) & 20) g(x) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}
\end{array}
$$

R.

✍ **Esercizio 4.1.3.** *Dire quali tra le seguenti funzioni sono iniettive, surgettive o biunivoche, e in caso, trovatene la funzione inversa*

$$
\begin{array}{ll}
21) f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} & f(x) = x + \dfrac{1}{x} \\
22) f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f(x) = 2 + \sin x \\
23) f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} & f(x) = x - \dfrac{1}{x} \\
24) f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} & f(x) = x^3 - 2
\end{array}
$$

R.

21) Non è iniettiva. Infatti basta prendere i valori $x = 3 \pm \sqrt{5}$ per avere $f(x) = 3$ in entrambi i casi
Non è surgettiva. Infatti non esiste alcun valore di x tale che ad esempio $f(x) = 1$

22) Non è iniettiva. Infatti ad esempio per $x = 0$ o $x = \pi$ si ha $f(x) = 2$
Non è surgettiva. Infatti non esiste alcun valore di x tale che ad esempio $f(x) = 0$

23) Non è iniettiva su $\mathbb{R}$, lo è su $\mathbb{R}^+$. Infatti $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ quindi la funzione è strettamente monotona e perciò iniettiva.
È surgettiva su $\mathbb{R}$. Infatti per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha che l'equazione $x - \frac{1}{x} = k$ ha almeno una soluzione (in generale ha due soluzioni, una positiva e una negativa). Quindi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è biunivoca e perciò invertibile, con inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ data da $x = \dfrac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}$

24) È iniettiva e surgettiva come funzione da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ma come dice il testo, visto che il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la funzione è iniettiva (lo si dimostra anche direttamente, se $x_1 \neq x_2$ allora $x_1^3 \neq x_2^3$ da cui la tesi) ma non è surgettiva come funzione da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ infatti non esiste $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $f(x) = -2$.

✍ **Esercizio 4.1.4.** *Delle seguenti funzioni determinatene l'immagine, dite se sono iniettive, se sono surgettive, se sono biunivoche e in tal caso calcolarne l'inversa*

$$25) f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 2+2x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$26) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x-1 & -1 < x < 0 \\ 2x+1 & x \leq -1 \end{cases}$$

$$27) f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$

$$28) f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ x^{1/3} & x < 0 \end{cases}$$

$$29) f(x) = x\,|x| + 1$$

➻ **R.**

25) Non è iniettiva: basta prendere $x = 1$ e $x = 0$ che danno entrambe $f(x) = 2$.
È surgettiva. Infatti se $y > 1$ posso prendere ad esempio $x = y - 1$, se $y \leq 1$ invece $x = \frac{y-2}{2}$

26) È iniettiva e surgettiva. Iniettiva perché lo sono le singole componenti nei vari intervalli e inoltre se x_1, x_2 appartengono a due intervalli diversi, i corrispondenti valori di $f(x)$ sono distinti. È surgettiva perché lo sono le singole componenti nei diversi intervalli e quindi viene coperto tutto l'asse reale. Quindi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile con inversa

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & y \geq 0 \\ -y-1 & -1 < y < 0 \\ \dfrac{y-1}{2} & y \geq -1 \end{cases}$$

27) È iniettiva e surgettiva perché lo sono le singole funzioni nei rispettivi intervalli di definizione

e perché se $x \geq 0$, $f(x) \geq 1$, se $x < 0$, $f(x) < 1$. Quindi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile con inversa

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-1} & y \geq 1 \\ y - 1 & y < 1 \end{cases}$$

28) È iniettiva e surgettiva perché lo sono le singole funzioni nei rispettivi intervalli di definizione e perché se $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, se $x < 0$, $f(x) < 0$. Quindi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile con inversa

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & y \geq 0 \\ y^3 & y < 0 \end{cases}$$

29) Dalla definizione di valore assoluto si ha che

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$$

La funzione data dunque è iniettiva e surgettiva perché lo sono le singole funzioni nei rispettivi intervalli di definizione e perché se $x \geq 0$, $f(x) \geq 1$, se $x < 0$, $f(x) < 1$. Quindi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile con inversa

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-1} & y \geq 1 \\ -\sqrt{1-y} & y < 1 \end{cases}$$

4.2. Funzioni composte: esercizi proposti

✍ **Esercizio 4.2.1.** *Nel caso in cui* $f(x) = x + 3$ *e* $g(x) = x^2 - 4$ *trovare:*

$$\begin{array}{ll} 1) f \circ g(0) & 2) g(f(0)) \\ 3) f(g(x)) & 4) g \circ f(x) \\ 5) f \circ f(-5) & 6) g(g(2)) \\ 7) f(f(x)) & 8) g \circ g(x) \end{array}$$

➼ **R.**

$$
\begin{aligned}
&1) f \circ g(0) = f(g(0)) = f(-4) = -1\\
&2) g \circ f(0) = g(f(0)) = g(3) = 5\\
&3) f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2-4) = x^2-1\\
&4) g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+3) = x^2+6x+5\\
&5) f \circ f(-5) = f(f(-5)) = f(-2) = 1\\
&6) g \circ g(2) = g(g(2)) = g(0) = -4\\
&7) f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+3) = x+6\\
&8) g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x^2-4) = x^4-8x^2+12
\end{aligned}
$$

✍ **Esercizio 4.2.2.** *Nel caso in cui* $f(x) = \sqrt{x+1}$ *e* $g(x) = x^2 - 4$ *trovare (se possibile) le seguenti (ove si possa, specificare il dominio della composta):*

$$
\begin{array}{ll}
9) f \circ g(0) & 10) g(f(0))\\
11) f(g(x)) & 12) g \circ f(x)\\
13) f \circ f(-5) & 14) g(g(2))\\
15) f(f(x)) & 16) g \circ g(x)
\end{array}
$$

➼ **R.**

$$
\begin{array}{ll}
9) f \circ g(0) = f(g(0)) = f(-4) & \text{impossibile}\\
10) g \circ f(0) = g(f(0)) = g(1) = -3 & \text{Dominio } g \circ f : x \geq -1\\
11) f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2-4) = \sqrt{x^2-3} & \text{Dominio } f \circ g : x \leq -\sqrt{3} \ \vee \ x \geq \sqrt{3}\\
12) g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = x-3 & \text{Dominio } g \circ f : x \geq -1\\
13) f \circ f(-5) = f(f(-5)) & \text{impossibile}\\
14) g \circ g(2) = g(g(2)) = g(0) = -4 & \text{Dominio } g \circ g : \mathbb{R}\\
15) f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \sqrt{\sqrt{x+1}+1} & \text{Dominio } f \circ f : x \geq -1\\
16) g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x^2-4) = x^4-8x^2+12 & \text{Dominio } g \circ g : \mathbb{R}
\end{array}
$$

✍ **Esercizio 4.2.3.** *Nel caso in cui* $f(x) = \dfrac{2}{x}$ *e* $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$ *trovare (se possibile) le seguenti (ove si possa, specificare il dominio della composta):*

$$17) f \circ f(x) \qquad 18) g \circ g(x)$$
$$19) f \circ g(x) \qquad 20) g \circ f(x)$$

➻ **R.**

$$\begin{array}{ll} 17) f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\frac{2}{x}) = x & \text{Dominio } f \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 18) g \circ g(x) = g(g(x)) = g(\frac{x}{1-x}) = \frac{x}{1-2x} & \text{Dominio } g \circ g : \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{1}{2}\} \\ 19) f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\frac{x}{1-x}) = \frac{2(1-x)}{x} & \text{Dominio } f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ 20) g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\frac{2}{x}) = \frac{2}{2-x} & \text{Dominio } g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \end{array}$$

✍ **Esercizio 4.2.4.** *Nel caso in cui* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *e* $g(x) = \sqrt{x-1}$ *trovare (se possibile) le seguenti (ove si possa, specificare il dominio della composta):*

$$21) f \circ f(x) \qquad 22) g \circ g(x)$$
$$23) f \circ g(x) \qquad 24) g \circ f(x)$$

➻ **R.**

$$\begin{array}{ll} 21) f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\frac{1}{1-x}) = \frac{x-1}{x} & \text{Dominio } f \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ 22) g \circ g(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x-1}) = \sqrt{\sqrt{x-1}-1} & \text{Dominio } g \circ g : x \geq 2 \\ 23) f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = \frac{1}{1-\sqrt{x-1}} & \text{Dominio } f \circ g : [1, +\infty) \setminus \{2\} \\ 24) g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\frac{1}{1-x}) = \sqrt{\frac{x}{1-x}} & \text{Dominio } g \circ f : 0 \leq x < 1 \end{array}$$

✍ **Esercizio 4.2.5.** *Nel caso in cui* $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ *e* $g(x) = \text{sign}(x)$ *trovare (se possibile) le seguenti (ove si possa, specificare il dominio della composta):*

$$25) f \circ f(x) \qquad 26) g \circ g(x)$$
$$27) f \circ g(x) \qquad 28) g \circ f(x)$$

Si ricorda che la funzione $\text{sign}(x)$ vale 1 per $x > 0$, -1 per $x < 0$ e non è definita per $x = 0$.

➾ **R.**

✍ **Esercizio 4.2.6.** *Completare mettendo al posto dei punti interrogativi la funzione mancante. Specificare il dominio della funzione composta*

$$\begin{array}{lll} 29) f(x) = x^2 & g(x) = x+1 & f \circ g(x) = ??? \\ 30) f(x) = ??? & g(x) = x+4 & f \circ g(x) = x \\ 31) f(x) = \sqrt{x} & g(x) = ??? & f \circ g(x) = |x| \\ 32) f(x) = ??? & g(x) = x^{1/3} & f \circ g(x) = 2x+3 \\ 33) f(x) = (x+1)/x & g(x) = ??? & f \circ g(x) = x \\ 34) f(x) = ??? & g(x) = x-1 & f \circ g(x) = 1/x^2 \end{array}$$

➾ **R.**

$$\begin{array}{ll} 29) f \circ g(x) = (x+1)^2 & \text{Dominio di } f \circ g\text{: } \mathbb{R} \\ 30) f(x) = x-4 & \text{Dominio di } f \circ g\text{: } \mathbb{R} \\ 31) g(x) = x^2 & \text{Dominio di } f \circ g\text{: } \mathbb{R} \\ 32) f(x) = 2x^3+3 & \text{Dominio di } f \circ g\text{: } \mathbb{R} \\ 33) g(x) = \dfrac{1}{x-1} & \text{Dominio di } f \circ g\text{: } \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ 34) f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{Dominio di } f \circ g\text{: } \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{array}$$

✍ **Esercizio 4.2.7.** *Scrivere, se è possibile farlo, la composizione $g \circ f$ e la composizione $f \circ g$, con i rispettivi domini, nei seguenti casi:*

$$\begin{array}{ll} 35) f(x) = x-2 & g(x) = 4-3x \\ 36) f(x) = \sqrt{x^2-2x+3}-1 & g(x) = \log x \\ 37) f(x) = \sin x + \cos x & g(x) = \sqrt{2x-2} \\ 38) f(x) = \begin{cases} x+1 & x>0 \\ 2-2x & x \le 0 \end{cases} & g(x) = x^2 \\ 39) f(x) = \begin{cases} x+1 & x>0 \\ 2+2x & x \le 0 \end{cases} & g(x) = f(x) \end{array}$$

➠ **R.**

35) $f \circ g(x) = 2 - 3x$. Dominio di $f \circ g$: $\mathbb{R}$
$g \circ f(x) = 10 - 3x$. Dominio di $g \circ f$: $\mathbb{R}$

36) $f \circ g(x) = \sqrt{\log^2 x - 2\log x + 3} - 1$. Dominio di $f \circ g$: $\mathbb{R}^+$ (dominio logaritmo: $x > 0$)
$g \circ f(x) = \log(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 1)$. Dominio di $g \circ f$: $\mathbb{R}$ (infatti basta porre $x^2 - 2x + 3 \geq 0$ e $\sqrt{x^2 - 2x + 3} > 1$ che sono verificate per ogni $x \in \mathbb{R}$)

37) $f \circ g(x) = \sin(\sqrt{2x - 2}) + \cos(\sqrt{2x - 2})$. Dominio di $f \circ g$: $x \geq 1$
$g \circ f(x) = \sqrt{2\sin x + 2\cos x - 2}$. Dominio di $g \circ f$: $2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (infatti basta porre $\sin x + \cos x \geq 1$)

38)

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

Dominio di $f \circ g$: $\mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 & x > 0 \\ (2 - 2x)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Dominio di $g \circ f$: $\mathbb{R}$

4.3. Funzioni composte e inverse: test a risposta multipla

✍ **Esercizio 4.3.1.** *Sia $f(x) = x - x^2$ e $g(y) = y^2 - y$. Allora la funzione composta è data da:*

□ $x - 2x^3 + x^4$ □ $x - 3x^2 - 4x^3 + x^4$ □ $-x + 2x^2 - 2x^3 + x^4$ □ $-x + 3x^2 - 4x^3 + 2x^4$

➠ **R.**

✍ **Esercizio 4.3.2.** *Siano* $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ *e* $g(y) = \sqrt{y+2}$*. Qual è l'insieme dove è definita la funzione composta* $(g \circ f)(x)$*?*

□$(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ □$(-\infty, -1) \cup [-1/3, +\infty)$ □$(-1, -1/3]$ □$[-3, -1)$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 4.3.3.** *Qual è l'insieme dei valori* β *per cui la funzione* $g(x) = x^2 + \beta x$ *è invertibile nell'intervallo* $[0, 1]$*?*

□$[-2, 0)$ □$(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ □$(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$ □$[0, +\infty)$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 4.3.4.** *Per quali valori del parametro reale* γ *la funzione* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$g(x) = x\, e^x + \gamma x$$

è suriettiva?

□$\gamma \geq 0$ □$\gamma > 0$ □$\gamma \leq 0$ □$\gamma < 0$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 4.3.5.** *Per quali valori del parametro reale* β *la funzione* $g(x) = e^x + \beta x$ *è invertibile sull'intervallo* $[0, 1]$*?*

□$(-\infty, -e] \cup [-e^{-1}, +\infty)$ □$(-\infty, e^{-1}] \cup [e, +\infty)$ □$(-\infty, -e] \cup [-1, +\infty)$ □$(-\infty, 1] \cup [e, +\infty)$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 4.3.6.** *Sia* $f(x) = 1 - |x|$ *e* $g(x) = \arcsin x$. *Allora il dominio della funzione composta* $g \circ f$ *è*

$\square[-1, 1]$ $\square[-\pi/2, \pi/2]$ $\square[-2, 2]$ $\square\mathbb{R}$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 4.3.7.** *Siano* $g(y) = \dfrac{y^2}{1-y}$ *e* $f(x) = e^{-x}$. *Allora l'insieme dove la funzione* $(g \circ f)(x)$ *definita da* $x \neq 0$ *è crescente è l'insieme dato da*

$\square x \leq \log \dfrac{1}{2}$ $\square x \leq \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1}{2}$ $\square x \geq \log 2$ $\square x \geq 2 \log 2$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 4.3.8.** *Date le funzioni* $f(x) = e^{-x}$ *e* $g(y) = \sqrt{y+3}$, *l'insieme dove la funzione* $(g \circ f)(x)$ *è crescente è*

$\square[0, +\infty)$ $\square(-\infty, 0]$ $\square\emptyset$ $\square\mathbb{R}$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 4.3.9.** *Se* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, *allora la funzione* $(f \circ f)(x)$ *è data da*

$\square\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2+1}}$ $\square\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x^2+2}}$ $\square\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$ $\square\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}}$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 4.3.10.** *Se* $f(x) = \frac{3x}{2x+1}$ *e* $g(x) = \log(2x+1)$. *Allora la funzione* $(g \circ f)(x)$ *nel punto* $x = 1$ *vale:*

$\square \log 3 \qquad \square \dfrac{2\log 3 + 1}{3\log 3} \qquad \square \dfrac{3\log 3}{2\log 3 + 1} \qquad \square 0$

➻ **R.**

CAPITOLO 5

Esercizi riguardanti limiti di successioni e funzioni

5.1. Limiti di successioni: esercizi proposti

✍ **Esercizio 5.1.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n^2+\sin n}{n+\log n}$ 2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\log n+n}{\log(3n)}$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!-(n-1)!}{n+(n-2)!}$ 4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n}-n$ 6) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^4+1}-n^2)n$

7) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \log(n+1)-\log n$ 8) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n}$

9) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ 10) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

11) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^7}\right)^{n^9}$ 12) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+9n^2}-\sqrt{n^4+1}}{n^2+2}$

13) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+9n}-\sqrt{n^4+1}}{n^2+2n}$ 14) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^4+1}$

15) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{7^n(1-n)}{1+n^2}$ 16) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-n+\sin n}$

17) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\, e^{-\sqrt{n}}$ 18) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n}$

➻ **R.**

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}$	2)
3)	4)
5)	6)
7)	8)$\dfrac{1}{e^{15}}$
9)	10)
11)	12) -1
13)0	14)1
15) $-\infty$	16) $-\infty$
17)0	18)1

✍ **Esercizio 5.1.2.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

19) $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+n}-n)$

20) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$

21) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{n^3-1}{n^2}\right)$

22) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n\sin n}{1+n^2+n}$

23) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3n+2}{n^2}}$

24) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2(\log n)^2}{\sqrt{n^5}+1}$

25) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{2^n}{3^n}$

26) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n}$

27) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n-2\sin n}}{n+\cos n^2}$

28) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-n+3}}{n-1}$

29) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\cos n}{n^\pi}$

30) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n}$

31) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{2n!}$

32) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

33) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{(-1)^n}{7^n}\right)$

34) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+4^n}{3^n}$

35) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(3+(-1)^n)^n}$

36) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(2n)^{2n}}$

R.

19) $+\infty$	20)3
21)0	22)1
23)1	24)0
25)0	26)$\frac{4}{e}$
27)	28)
29)	30)
31)	32)
33)	34)
35)	36)

Esercizio 5.1.3. *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

37) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(3+\sin n)^n + n^4}{(n-3)! - 5^n}$

38) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+1}$

39) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+n}$

40) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$

41) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2-2\cos n}$

42) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}-\frac{n}{7^n}}$

43) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{2^n+1}}$

44) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{n!-(n+1)^3}{n^3-2(n+1)!}\right)$

45) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3-2n^2}{n+\pi}$

46) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{3-n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3(n+1)}\right)$

47) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{n^2}$

48) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{1+n^n4^{n^2}}}$

49) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n})^3-2(\sqrt{n})^5}{1+3(\sqrt[3]{n})^7}$

50) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right)$

51) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

52) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}-\frac{n}{\sqrt{n-1}}\right)$

53) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n-2}}-\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)\right]$

54) $\lim\limits_{n\to+\infty} [\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})]$

55) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}+\sqrt[4]{2n}}{\sqrt[3]{n^4-n}+3\sqrt{n-1}}$

56) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\frac{n^2-5n+\sin n}{n+1-1/n^2}\right]$

R.

37)	38)
39)	40)
41)	42)
43)	44)
45)	46)
47)	48)
49)	50)
51)	52)
53)	54)
55)	56)

5.2. Definizione di limite di funzioni: test a risposta multipla

Esercizio 5.2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La condizione:*

$$\forall a > 0,\ \exists b > 0 \text{ tale che } x > b \Rightarrow |f(x) - 5| < a$$

definisce

□ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$ □ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 5$ □ $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 3$ □ $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = +\infty$

Esercizio 5.2.2. *Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora l'espressione:*

$$\forall a > 0,\ \exists b > 0 \text{ tale che } 0 < |x - 5| < b \Rightarrow g(x) > a$$

è la definizione di

□ $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 5$ □ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 5$ □ $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = +\infty$ □ $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = -\infty$

✍ **Esercizio 5.2.3.** *Sia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Allora l'espressione:*

$$\forall a > 0,\ \exists b > 0 \text{ tale che } x > b \Rightarrow g(x) > a$$

è la definizione di

□ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ □ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = a$ □ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pi$ □ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \pi$

✍ **Esercizio 5.2.4.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Allora l'espressione:*

$$\forall \alpha > 0,\ \exists \beta > 0 \text{ tale che } 0 < |x| < \beta \Rightarrow |f(x) + 5| < \alpha$$

è la definizione di

□ $\lim_{x\to 0} f(x) = -5$ □ $\lim_{x\to 0} f(x) = 5$ □ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -5$ □ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$

✍ **Esercizio 5.2.5.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Se* $\forall M > 0$ *e* $\forall \alpha > 0$ *esiste* $x \in (\alpha, +\infty)$ *tale che* $f(x) > M$*, allora necessariamente*

□ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ □non esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ □ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ □$f(x)$ non è limitata

✍ **Esercizio 5.2.6.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Allora l'espressione:*

$$\forall a > 0,\ \exists b > 0 \text{ tale che } x > b \Rightarrow |f(x) - 4| < a$$

è la definizione di

□ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$ □ $\lim_{x\to 4} f(x) = 4$ □ $\lim_{x\to-4} f(x) = 4$ □ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$

✍ **Esercizio 5.2.7.** *La definizione dell'espressione*

$$\lim_{x\to 5} f(x) = 4$$

è

- ☐ $\forall a > 0,\ \exists b > 0$ tale che $b < x \Rightarrow |f(x) - 5| < a$
- ☐ $\forall a > 0,\ \exists b > 0$ tale che $0 < |x - 4| < b \Rightarrow f(x) > a$
- ☐ $\forall a > 0,\ \exists b > 0$ tale che $0 < |x - 5| < b \Rightarrow |f(x) - 4| < a$
- ☐ $\forall a > 0,\ \exists b > 0$ tale che $0 < |x - 4| < b \Rightarrow |f(x) - 5| < a$

✍ **Esercizio 5.2.8.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Allora l'espressione:*

$$\forall B > 0,\ \exists A > 0 \text{ tale che } 0 < |x - 2| < A \Rightarrow f(x) > B$$

significa

☐ $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$ ☐ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$ ☐ $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$ ☐ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

✍ **Esercizio 5.2.9.** *La definizione dell'espressione*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

è

- ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0$ tale che $|x| < M \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$
- ☐ $\forall M > 0,\ \exists \delta > 0$ tale che $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$
- ☐ $\forall M > 0,\ \exists \delta > 0$ tale che $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$
- ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0$ tale che $x < -M \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

5.3. Limiti di funzioni: esercizi svolti

✍ **Esercizio 5.3.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-7\sin x)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2+\cos x}{3-x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to0}e^x(\cos x-2\sin x)$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^x)\sin x$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+\sin e^x}{2x}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+3\sqrt{x}}{2x-5\sqrt{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3\sqrt{x}}{2x-5\sqrt{x}}$

10) $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{1-x^2}\right)$

11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

12) $\lim\limits_{x\to-2}|x-2|$

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x-2|}{x-2}$

14) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$

15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$

16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$

17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}$

18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

19) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x+\sqrt{3x}}$

20) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

21) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan(5x)}{\arctan(3x)}$

22) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\sin(x-1)}{x^2-1}\,\dfrac{e^{x^2-1}-1}{x-1}$

23) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-\cos(x+1)}{x+1}\,\dfrac{3(x-1)}{e^{x^2-1}-1}$

24) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\log(1+x)}$

25) $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x$

26) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-2\log(1+x)}{x+\sin x}$

27) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{2x+x^3}$

28) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x+x^2-\sin x}{x^3+\log(1+x)}$

29) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{\sqrt{x}-1}$

30) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{6x}+e^x+2}{e^{4x}+1}$

31) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^4 x+\tan^3 x+\arctan^2 x+x^2}{\sin^2 x}$

32) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^3 x}{x(1-\cos x)}$

33) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

34) $\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x+2\cos x-3}{\tan x\,\log(1+\sin x)}$

35) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-\cos x}{x}$

36) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{2x}$

➾ **R.**

$$1)\lim_{x\to+\infty}(x^2-7\sin x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-7\underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{\downarrow\atop 0}\right)$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso del fatto che il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima tende a zero.

$$2)\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2+\cos x}{3-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\downarrow\atop 0}+\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\downarrow\atop 0}\right)}{x\left(\underbrace{\frac{3}{x}}_{\downarrow\atop 0}-1\right)}=-1$$

dove di nuovo nell'ultimo passaggio si è fatto uso del fatto che il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima tende a zero.

$$3)\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$$

$$4)\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

non esiste. Infatti si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty;\qquad\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty.$$

$$5)\lim_{x\to0}e^x(\cos x-2\sin x)=1$$

Prodotto di funzioni continue: il limite si valuta calcolando il valore della funzione nel punto.

$$6)\lim_{x\to-\infty}(1+e^x)\sin x$$

non esiste.

$$7)\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\sin e^x}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\underbrace{\frac{\sin e^x}{x^2}}_{\downarrow\atop 0}\right)}{2x}=-\infty$$

$$8)\lim_{x\to0}\frac{x+3\sqrt{x}}{2x-5\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(-5+2\sqrt{x})}=-\frac{3}{5}$$

$$9) \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3\sqrt{x}}{2x-5\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\underbrace{\frac{3}{\sqrt{x}}}_{\downarrow \atop 0}\right)}{x\left(2+\underbrace{\frac{5}{\sqrt{x}}}_{\downarrow \atop 0}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$10) \qquad \lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{x}{1-x^2}\right) \overset{x-1=y}{=} \lim_{y\to0^-}\left(\frac{1}{y}+\frac{y+1}{(-y)(y+2)}\right)$$

$$= \lim_{y\to0^-}\left(\frac{1}{y(y+2)}\right) = -\infty$$

$$11) \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \overset{x-\frac{\pi}{2}=y}{=} \lim_{y\to0} \frac{\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-1}{y^2}$$

$$= \lim_{y\to0} \frac{\sin y\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cos y-1}{y^2} = \lim_{y\to0}\frac{\cos y-1}{y^2} = -\frac{1}{2}$$

$$12) \lim_{x\to-2}|x-2| = \lim_{x\to-2}\begin{cases} x-2 & x\geq 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases} = \lim_{x\to-2} 2-x = 4$$

$$13) \lim_{x\to0}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to-2}\begin{cases} 1 & x\geq 2 \\ -1 & x<2 \end{cases} = -1$$

$$14) \lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x-2} \qquad \text{non esiste}$$

$$15) \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$16) \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x} = 1$$

$$17) \lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x} \overset{\arctan x=y}{=} \lim_{y\to0}\frac{y}{\tan y} = 1$$

$$18) \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$19) \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x+\sqrt{3x}} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{3x}\left(1+\frac{x}{\sqrt{3x}}\right)} = \lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow \atop 1}\,\underbrace{\frac{x}{\sqrt{3x}}}_{\downarrow \atop 0}\,\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{3}}} = 0$$

$$20)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\overset{\arcsin x=y}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$$

$$21)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(5x)}{\arctan(3x)}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\arctan(5x)}{5x}}_{\downarrow\atop 1}\underbrace{\frac{5x}{3x}}_{\downarrow\atop 5/3}\underbrace{\frac{3x}{\arctan(3x)}}_{\downarrow\atop 1}=\frac{5}{3}$$

$$22)\ \lim_{x\to 1}\frac{2\sin(x-1)}{x^2-1}\frac{e^{x^2-1}-1}{x-1}\overset{x-1=t}{=}\lim_{t\to 0}2\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\downarrow\atop 1}\underbrace{\frac{e^{t(t+2)}-1}{t(t+2)}}_{\downarrow\atop 1}=2$$

$$23)\qquad \lim_{x\to -1}\frac{1-\cos(x+1)}{x+1}\frac{3(x-1)}{e^{x^2-1}-1}\overset{x+1=t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\frac{3(t-2)}{e^{t(t-2)}-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{1-\cos t}{t^2}}_{\downarrow\atop 1/2}\underbrace{\frac{3t(t-2)}{e^{t(t-2)}-1}}_{\downarrow\atop 3}=\frac{3}{2}$$

$$24)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\downarrow\atop 1}\underbrace{\frac{x}{\log(1+x)}}_{\downarrow\atop 1}=1$$

$$25)\ \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\log(\sin x)}=1$$

$$26)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-2\log(1+x)}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{\sin x}{x}-2\frac{\log(1+x)}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=-\frac{1}{2}$$

$$27)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{2x+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\right)}{x(2+x^2)}=1$$

$$28)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x+x^2-\sin x}{x^3+\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{\tan x}{x}+x-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(x^2+\frac{\log(1+x)}{x}\right)}=0$$

$$29)\ \lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\sqrt{x}-1}\overset{x-1=t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{e^{t+1}-e}{\sqrt{t+1}-1}=\lim_{t\to 0}e\underbrace{\frac{t}{\sqrt{t+1}-1}}_{\downarrow\atop 2}\underbrace{\frac{e^t-1}{t}}_{\downarrow\atop 1}=2e$$

dove abbiamo usato il seguente fatto

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{t+1}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t(\sqrt{t+1}+1}{(\sqrt{t+1}-1)(\sqrt{t+1}+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{t(\sqrt{t+1}+1)}{t}=2$$

$$30)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{6x}+e^x+2}{e^{4x}+1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{6x}\left(1+e^{-5x}+\frac{2}{e^{6x}}\right)}{e^{4x}\left(1+\frac{1}{e^{4x}}\right)}=+\infty$$

$$31)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^4 x+\tan^3 x+\arctan^2 x+x^2}{\sin^2 x}=2$$

$$32)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 x}{x^3\left(1-\frac{\cos x}{x^2}\right)} = 2$$

$$33)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}34)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x+2\cos x-3}{\tan x\,\log(1+\sin x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x+3)(\cos x-1)}{\tan x\,\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}}\,\frac{\sin x}{x}\,x \\ &= \lim_{x\to 0}(\cos x+3)\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)\frac{x^2}{\tan x\, x}\,\frac{\sin x}{\log(1+\sin x)}\,\frac{x}{\sin x} = -2\end{aligned}$$

$$35)\ \lim_{x\to 0}\frac{2^x-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}\,x = \log 2$$

dove abbiamo usato il fatto

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\,\log 2 = \log 2$$

$$\begin{aligned}36)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to+\infty}\exp\left[2x\log\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\exp\left[2x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\frac{\log(1+\frac{1}{x^2+1})}{\frac{1}{x^2+1}}\right] = 1\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 5.3.2.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to+\infty}(3x+x^2)\left(e^{-2/x^2}-e^{-3/x^2}\right)$$

➼ **R.** 1. Hint:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}(3x+x^2)\left(e^{-2/x^2}-e^{-3/x^2}\right) \\ =\ &\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}+1\right)x^2\left(e^{-2/x^2}-1+1-e^{-3/x^2}\right) \\ =\ &\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}+1\right)\left(-2\left[\frac{e^{-2/x^2}-1}{-\frac{2}{x^2}}\right]+3\left[\frac{1-e^{-3/x^2}}{\frac{3}{x^2}}\right]\right) = 1\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 5.3.3.** *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-2x)\left[\log(2x^3+3x)-\log(2x^3)-\frac{2}{x^2}\right]$$

➻ **R.** -3/2. Hint:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to+\infty}(3x^2-2x)\left[\log(2x^3+3x)-\log(2x^3)-\frac{2}{x^2}\right] \\
= & \lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)x^2\left[\log\left(1+\frac{3}{2x^2}\right)-\frac{2}{x^2}\right] \\
= & \lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)\left[\left(\frac{\log\left(1+\frac{3}{2x^2}\right)}{\frac{3}{2x^2}}\frac{3}{2}-2\right)\right]=-\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

5.4. Limiti di funzioni: test a risposta multipla

✍ **Esercizio 5.4.1.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3e^x}{2x+e^x}=$$

□0 □3 □1/2 □∞

➻ **R.** 3

✍ **Esercizio 5.4.2.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3\log x}{2x+\log x}=$$

□0 □3 □1/2 □∞

➻ **R.** 1/2

✍ **Esercizio 5.4.3.**

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^x}{\sin 2x}=$$

□$e/2$ □ $-e/2$ □1/2 □ $-1/2$

➻ **R.** -1/2

✍ **Esercizio 5.4.4.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x^2}-1}{3x\sin x}=$$

□4/3 □1/12 □1 □0

➽ **R.** $4/3$

✍ **Esercizio 5.4.5.**

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+\pi^2x^4}{e^{2x}+x^4}=$$

□ $+\infty$ □0 □1 □π^2

➽ **R.** 0

✍ **Esercizio 5.4.6.**

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2e^{-x}-x^2-1}{1-2x^2+e^{-x}}=$$

□ -2 □ -1 □1/2 □2

➽ **R.** $1/2$

✍ **Esercizio 5.4.7.**

$$\lim_{x\to 0^+}(1+2x^2)^{1/x}=$$

□0 □$1/e^2$ □e^3 □1

➽ **R.** 1

✍ **Esercizio 5.4.8.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/3}-1}{e^{2x}-1}=$$

□1/12 □1 □1/6 □1/8

➾ **R.** $1/6$

✍ **Esercizio 5.4.9.**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{2x+1}=$$

$\square e^2$ $\square e^{-2}$ $\square 1$ $\square \infty$

➾ **R.** e^{-2}

✍ **Esercizio 5.4.10.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x-2x^2+e^{-x}}{2x-x^2+2e^{-x}}=$$

$\square -\infty$ $\square -1$ $\square 2$ $\square 1/2$

➾ **R.** 2

✍ **Esercizio 5.4.11.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x-x^2+2e^{-x}}{2x-2x^2+e^{-x}}=$$

$\square -\infty$ $\square -1$ $\square 2$ $\square 1/2$

➾ **R.** $1/2$

✍ **Esercizio 5.4.12.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-1}{e^{4x}-1}=$$

$\square 1$ $\square 1/6$ $\square 1/8$ $\square 1/12$

➾ **R.** $1/8$

✍ **Esercizio 5.4.13.**
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+1}=$$

□e^3 □e^{-3} □1 □∞

➼ **R.** e^3

✍ **Esercizio 5.4.14.**
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{1-\cos(4x)}=$$

□$2/3$ □1 □$1/6$ □$1/4$

➼ **R.** $1/4$

✍ **Esercizio 5.4.15.**
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2x^2+e^{-x}}{2x-x^2+2e^{-x}}=$$

□$+\infty$ □-1 □2 □$1/2$

➼ **R.** 2

✍ **Esercizio 5.4.16.** *Sia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Se*
$$\lim_{x\to+\infty}f(2^x)=3$$
allora

□ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3}{\log 2}$ □ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ □ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\log_2 3$ □ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$

➼ **R.** Basta prendere
$$f(x)=\frac{3x}{x-1}$$

e questa esclude automaticamente le prime tre ipotesi.

✍ **Esercizio 5.4.17.**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+4}\right)^{3x}=$$

□e^3 □e^{-3} □1 □0

➾ **R.** 1

✍ **Esercizio 5.4.18.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2\sin x}{2x+\cos x}=$$

□non esiste □0 □ -2 □1/2

➾ **R.** 1/2

✍ **Esercizio 5.4.19.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+e^{-x}}{x-3}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=$$

□ $+\infty$ □ $-\infty$ □0 □1

➾ **R.** 1

✍ **Esercizio 5.4.20.**

$$\lim_{x\to 0^+} x\log\sqrt{x}=$$

□ $+\infty$ □ $-\infty$ □0 □1

➾ **R.** 0

✍ **Esercizio 5.4.21.** *Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos(2\sqrt{x})}{\sin(x^\alpha)}$$

è finito?

$\square \alpha \geq 2$ $\square \alpha \geq 1$ $\square \alpha \leq 2$ $\square \alpha \leq 1$

➻ **R.** $\alpha \leq 1$

✍ **Esercizio 5.4.22.** *Il limite*

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + x^2)^{1/x}$$

è uguale a:

$\square 0$ $\square e$ $\square 1$ $\square +\infty$

➻ **R.** 1

✍ **Esercizio 5.4.23.** *Il limite*

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \sin x)^{1/(2x)}$$

è uguale a:

$\square 1/e$ $\square e$ $\square \sqrt{e}$ $\square e^2$

➻ **R.** $\sqrt{e}$

✍ **Esercizio 5.4.24.** *Il limite*

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x}$$

è uguale a:

$\square 1$ $\square +\infty$ $\square \sqrt{e}$ $\square e^2$

➻ **R.** e^2

✍ **Esercizio 5.4.25.** *Qual è l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(e^x-1)\sin^2 x}{1-\cos(x^\alpha)}$$

è finito?

$$\square \alpha \le \frac{3}{2} \qquad \square \alpha \le \frac{1}{2} \qquad \square \alpha \le 2 \qquad \square \alpha \le 1$$

➼ **R.** $\alpha \le 2$

✍ **Esercizio 5.4.26.** *Il limite*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{10^x + (x+1)^{10}}{100^x + x^{10}}$$

è uguale a:

$$\square 10 \qquad \square \frac{1}{10} \qquad \square +\infty \qquad \square 0$$

➼ **R.** 0

✍ **Esercizio 5.4.27.** *Dato il parametro $a \in \mathbb{R}$, allora*

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+a}{x+1}\right)^{2x} =$$

$$\square e^{3a-3} \qquad \square e^{6a-2} \qquad \square e^{3a-1} \qquad \square e^{2a-2}$$

➼ **R.** e^{2a-2}

✍ **Esercizio 5.4.28.** *Il limite*

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{\pi - 2x}$$

è uguale a:

$$\square 1/2 \qquad \square 0 \qquad \square 2 \qquad \square 1$$

➼ **R.** 0. Hint: usare un cambio di variabile $x - \pi/2 = t$.

✍ **Esercizio 5.4.29.**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x + e^{2x}}{2e^x + x^3} =$$

$\square 2 \qquad \square \frac{1}{2} \qquad \square +\infty \qquad \square 0$

➻ **R.** $+\infty$

✍ **Esercizio 5.4.30.** *Per quale valore del parametro $a \neq 0$ si ha che*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x^2}$$

$\square a = -2 \qquad \square a = 1 \qquad \square a = 2 \qquad \square a = -1$

➻ **R.** $a = 2$

✍ **Esercizio 5.4.31.** *Per quali valori dei parametri a e b si ha che*

$$\lim_{x\to 0} \left(a\frac{1-\cos x}{2x^2} + 3bx \sin\frac{1}{x} \right) = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \left(a\frac{1-\cos x}{2x^2} + 3bx \sin\frac{1}{x} \right) = 1$$

$\square a = 4, b = -1/3 \qquad \square a = 6, b = 1/2 \qquad \square a = 4, b = 1/3 \qquad \square a = 6, b = -1/2$

➻ **R.** $a = 4, b = 1/3$

✍ **Esercizio 5.4.32.**

$$\lim_{x\to 0^+} (1-x)^{1/x^2} =$$

$\square e \qquad \square +\infty \qquad \square 0 \qquad \square 1$

➻ **R.** 0

✍ **Esercizio 5.4.33.**
$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)^2 \, \log(1-3\sqrt{x})}{\sqrt{2x}\,\sin^4(\sqrt{x})} =$$
$\square -4$ $\quad\square\sqrt{2}$ $\quad\square -6\sqrt{2}$ $\quad\square 3/4$

➡ **R.** $-6\sqrt{2}$

✍ **Esercizio 5.4.34.**
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\,\sin(3x^2)}{[1-\cos(2x)]\,\sin(2\sqrt{x})} =$$
$\square\sqrt{2}$ $\quad\square -6\sqrt{2}$ $\quad\square 3/4$ $\quad\square -4$

➡ **R.** $3/4$

✍ **Esercizio 5.4.35.**
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\sqrt{e^{2x^3}-1}}{\sqrt{x}\,[1-\cos(2x)]} =$$
$\square 3/4$ $\quad\square -4$ $\quad\square\sqrt{2}$ $\quad\square -6\sqrt{2}$

➡ **R.** $\sqrt{2}$

✍ **Esercizio 5.4.36.**
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{(e^{2x^5}-1)}}{\log(1-x^2\sqrt{x})} =$$
$\square 3/4$ $\quad\square -4$ $\quad\square -\sqrt{2}$ $\quad\square -6\sqrt{2}$

➡ **R.** $-\sqrt{2}$

✍ **Esercizio 5.4.37.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(2x)}{(1-\cos x)\sin x} =$$

□1 □4 □1/2 □2

➽ **R.** 4

✍ **Esercizio 5.4.38.** *Per quale valore del parametro $a \neq 0$ si ha che*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x\sin(ax)}$$

□$a=-2$ □$a=1$ □$a=2$ □$a=-1$

➽ **R.** $a=-1$

✍ **Esercizio 5.4.39.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)\sin x}{x(1-\cos(2x))}$$

□4 □1/2 □2 □1

➽ **R.** 1/2

✍ **Esercizio 5.4.40.** *Per quale valore del parametro $a \neq 0$ si ha che*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x\sin(ax)}$$

□$a=-2$ □$a=1$ □$a=2$ □$a=-1$

➽ **R.** $a=-2$

5.5. Attenzione!

Osservando la risoluzione di limiti, da parte vostra, noto frequentemente il seguente errore: si arriva a un limite notevole e al passaggio successivo si semplifica!!! Questo è un errato modo di procedere come mostra il seguente controesempio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

Procedendo nel modo sbagliato si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \overset{ERRORE!!!}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

Infatti dagli sviluppi di Taylor o dal teorema di De l'Hopital si deduce che il limite dato esiste ed è uguale a $-1/6$. Quindi attenzione!!! Una volta individuato un limite notevole, non semplificate al passaggio successivo, ma tenetelo per ogni passaggio e semplificate SOLO al passaggio finale.

CAPITOLO 6

Applicazioni del teorema dei valori intermedi

6.1. Il problema del monaco buddista

Dal diario di un monaco buddista.
"**9 Novembre**: ho deciso, domani salirò sulla montagna per andare a pregare nel tempio di cui mi hanno tanto parlato. Deve essere meraviglioso!
10 Novembre: sono nel tempio. Sono partito stamattina alle 08.00 e sono arrivato alle 20.00 precise. Il viaggio è stato un pò faticoso ma piacevole nel complesso; mi sono fermato diverse volte per chiedere ai passanti notizie sul tempio. Tutti mi hanno risposto che era stupendo e infatti ora lo posso confermare! Qui è tutto meraviglioso e c'è una grandissima pace.
11 Novembre: oggi ho deciso di ritornare a casa, ripercorrendo il sentiero che porta alla montagna in senso inverso. Sono ripartito dal tempio alle 08.00 e sono arrivato a destinazione di nuovo alle 20.00 precise. Che coincidenza! Il viaggio di ritorno è stato meno faticoso di quello dell'andata, molte persone mi hanno fermato per chiedermi notizie del tempio e con grande gioia e pace nel cuore ho raccontato loro la mia esperienza.

Chissà se esiste un punto del sentiero per salire e scendere la montagna in cui mi sono fermato alla stessa ora all'andata e al ritorno...Visto che in entrambi i casi sono partito alle 08.00 e sono arrivato alle 20.00 magari c'è un punto in cui ci sono passato alla stessa ora nei due giorni...E' difficile da dire perché sia all'andata che al ritorno mi sono fermato per parlare con tante persone, alle ore più diverse...non riesco proprio a trovare un nesso...meglio dormire!"

E voi, che avete studiato il teorema dei valori intermedi, sapete aiutare il povero monaco a risolvere il suo dilemma?

6.2. Test a risposta multipla

✍ **Esercizio 6.2.1.** *Quante soluzioni ha l'equazione* $3xe^{-x} = 1$*?*

□2 □3 □0 □1

✍ **Esercizio 6.2.2.** *Quante soluzioni ha l'equazione* $\log x = 2 - x^2$*?*

□2 □infinite □0 □1

✍ **Esercizio 6.2.3.** *Se* f *è continua e derivabile in* $[0, 3]$*, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?*

□Esiste $c \in [0, 3]$ tale che $f'(c) = 3$
□Se $f(0)f(3) = 0$ allora esiste $c \in [0, 3]$ tale che $f'(c) = 0$
□Se $f(0)f(3) = -1$ allora l'equazione $f(x) = 0$ ha soluzione in $[0, 3]$
□Se $f(0)f(3) = 2$ allora l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni in $[0, 3]$

✍ **Esercizio 6.2.4.** *Quante soluzioni ha l'equazione* $e^x - 3 = \arctan x$*?*

□2 □infinite □0 □1

✍ **Esercizio 6.2.5.** *Qual è l'insieme dei valori* m *per cui l'equazione* $\log x = mx$ *ha due soluzioni distinte?*

□$0 < m < 2$ □$0 < m < 1$ □$0 < m < 2/e$ □$0 < m < 1/e$

✍ **Esercizio 6.2.6.** *Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = -2$ e $f(1) = -1$. Allora esiste una soluzione $x_0 \in (0,1)$ dell'equazione seguente:*

□$f(x) + 1 - x = 0$
□$f(x) - x^2 - 2 = 0$
□$f(x) + x + 1 = 0$
□$f(x) + x^2 - 2 = 0$

✍ **Esercizio 6.2.7.** *Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = 1$ e $f(1) = 2$. Allora esiste una soluzione $x_0 \in (0,1)$ dell'equazione seguente:*

□$f(x) + 1 - x = 0$
□$f(x) - x^2 - 2 = 0$
□$f(x) + x + 1 = 0$
□$f(x) + x^2 - 2 = 0$

✍ **Esercizio 6.2.8.** *Quanti sono i punti di intersezione dei grafici $f(x) = 2\log x$ e di $g(x) = x - 2$?*

□3 □2 □1 □0

✍ **Esercizio 6.2.9.** *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, strettamente monotona e tale che $f(0)f(1) = -2$ e sia $x_0 \in (0,1)$ il valore per cui $f(x_0) = 0$. Usando il metodo di bisezione, qual è il numero minimo n di passi necessario per approssimare x_0 con un errore che sia sicuramente minore di 10^{-6}?*

□$n = 60$ □$n = 5$ □$n = 12$ □$n = 20$

✍ **Esercizio 6.2.10.** *Quanti sono i punti di intersezione dei grafici $f(x) = \log(2x)$ e di $g(x) = 3 - x$?*

□3 □2 □1 □0

✍ **Esercizio 6.2.11.** *Sia* $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, strettamente monotona e tale che* $f(-2)f(2) = -1$ *e sia* $x_0 \in (-2, 2)$ *il valore per cui* $f(x_0) = 0$*. Usando il metodo di bisezione, qual è il numero minimo* n *di passi necessario per approssimare* x_0 *con un errore che sia sicuramente minore di* 10^{-3}*?*

□$n = 60$ □$n = 5$ □$n = 12$ □$n = 20$

✍ **Esercizio 6.2.12.** *Quante intersezioni hanno i grafici* $f(x) = x^2 - 3x + 1$ *e* $g(x) = 3x^2 + x - 1$*?*

□3 □2 □1 □0

✍ **Esercizio 6.2.13.** *Quante soluzioni ha* $\log x = x^2 + 2x$*?*

□3 □2 □1 □0

✍ **Esercizio 6.2.14.** *Quante soluzioni* $x > 0$ *ha* $x \sin(2x) = 20$*?*

□1 □20 □nessuna □infinite

✍ **Esercizio 6.2.15.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, e valga* $0 \le f(x) \le 10$ *per* $x \in [0, 10]$*. Allora è sempre vero che:*

□per $x \in [0, 10)$ si ha $0 \le f(x) < 10$
□per $x \in (0, 10]$ si ha $0 < f(x) \le 10$
□esiste $x^* \in [0, 10]$ tale che $f(x^*) = x^*$
□per $x \in (0, 10)$ si ha $0 < f(x) < 10$

✍ **Esercizio 6.2.16.** *Per quale valore del parametro* α *l'equazione* $e^x = 2x + \alpha$ *ha due soluzioni distinte?*

□$\alpha > 2 - 2 \log 2$ □$\alpha > -2$ □$\alpha < -2 \log 2$ □$\alpha < 2 + 2 \log 2$

✍ **Esercizio 6.2.17.** *Quanti punti di annullamento (distinti) ha la funzione* $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$*?*

□2 □nessuno □3 □1

CAPITOLO 7

Derivate di funzioni reali di una variabile reale e applicazioni

7.1. Derivate: test a risposta multipla

✍ **Esercizio 7.1.1.** *Supponiamo che f sia derivabile e che $g(x) = f(\cos(2x))$ allora $g'(x) =$*

□$2\cos(2x)f'(\sin 2x)$ □$2\cos(2x)f'(\cos 2x)$ □$-2\sin(2x)f'(\cos 2x)$ □$2\sin(2x)f'(\sin 2x)$

✍ **Esercizio 7.1.2.** *Sia $f(x) = x^4 e^{2x-1}$ per $x \geq 0$. Se g è la funzione inversa di f allora $g'(e) =$*

□$1/4e$ □1 □$1/6e$ □$\dfrac{1}{2e^{2e+2}(2+e)}$

✍ **Esercizio 7.1.3.** *Sia $f(x) = x^{1/x}$ per $x > 0$ allora $f'(1/2) =$*

□$\sqrt{2}(1-\log 2)/4$ □$(1-\log 2)/4$ □$1+\log 2$ □4

✍ **Esercizio 7.1.4.** *Sia $f(x) = x^2 e^{2x-1}$ per $x \geq 0$. Se g è la funzione inversa di f allora $g'(e) =$*

□1 □$\dfrac{2e}{2e+1}$ □$1/4e$ □$\dfrac{1}{2e^{2e}(1+e)}$

✍ **Esercizio 7.1.5.** *Sia* $f(x) = x^x$ *per* $x > 0$ *allora* $f'(1/2) =$

$\square(1-\log 2)/\sqrt{2}$ $\quad\square\sqrt{2}(1+\log 2)$ $\quad\square 4(1+\log 2)$ $\quad\square 4$

✍ **Esercizio 7.1.6.** *Sia* $f(x) = x|x| + 2x$ *allora* $f'(0) =$

$\square 4$ $\quad\square 2$ $\quad\square$non esiste $\quad\square 0$

✍ **Esercizio 7.1.7.** *Sia* $f(x) = (\sin x)^x$ *per* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$*. Allora* $f'(\pi/3) =$

$$\square \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi/3}\left(\log\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) \qquad \square \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\pi/3}\left(-\log 2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)$$

$$\square \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi/3}\left(-\log 2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right) \qquad \square \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\pi/3}\left(\log\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

✍ **Esercizio 7.1.8.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabile e sia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $g(x) = \sin(f(x^4))$*. Allora* $g'(x) =$

$\square 4\sin^3(f(x))\cos(f(x))\, f'(x)$ $\quad\square 4x^3\sin(f(x^4))f'(x^4)$

$\square 4x^3\cos(f(x^4))f'(x^4)$ $\quad\square 4f(x)^3\cos(f(x)^4)\, f'(x)$

✍ **Esercizio 7.1.9.** *Sia* $f(x) = 2x + \log x$ *e sia* g *la funzione inversa di* f*. Allora* $g'(2) =$

$\square 1/5$ $\quad\square 1/2$ $\quad\square 1/3$ $\quad\square 1/4$

✍ **Esercizio 7.1.10.** *Sia* $f(x) = 3x + \sin x$ *e sia* g *la funzione inversa di* f. *Allora* $g'(3\pi) =$

□1/5 □1/2 □1/3 □1/4

✍ **Esercizio 7.1.11.** *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione derivabile tale che* $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2$, *quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?*

□$f(x)$ ha un asintoto obliquo per x tendente a $+\infty$
□$f(x) = 2x + c$
□ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$
□ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

✍ **Esercizio 7.1.12.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione derivabile che si annulla in soli 3 punti dell'intervallo* $[0, 1]$. *Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?*

□$f'(x)$ si annulla in almeno 2 punti di $[0, 1]$
□f cambia segno nell'intervallo $[0, 1]$
□f è un polinomio di terzo grado
□$f'(x)$ si annulla in 2 soli punti di $[0, 1]$

✍ **Esercizio 7.1.13.** *Se* $g(x) = x^3 + e^x$ *e* g^{-1} *è la funzione inversa di* g. *Allora* $(g^{-1})'(1+e) =$

□$\dfrac{1}{3+e}$ □$\dfrac{1}{3+3e}$ □1 □$3+e$

✍ **Esercizio 7.1.14.** *Date* $f(x) = \sqrt{x} - x^2$ *e* $g(y) = \cos(\pi y)$, *allora* $(g \circ f)'(1) =$

□$\frac{3}{2}\pi$
□$\frac{3}{2}$
□0
□$\frac{3}{2\pi}$

✍ **Esercizio 7.1.15.** *Date* $f(x) > 0$ *una funzione derivabile. Allora la derivata di* $\sin(\sqrt{f(x)})$ *è*

□$\frac{1}{2}(\cos\sqrt{f})f'$
□$-\frac{1}{2}(\sin\sqrt{f})f'$
□$\frac{1}{2\sqrt{f}}(\cos\sqrt{f})f'$
□$-\frac{1}{2\sqrt{f}}(\sin\sqrt{f})f'$

✍ **Esercizio 7.1.16.** *Cosa significa il seguente enunciato?*

$$\forall\epsilon > 0\,\exists\delta > 0 \text{ tale che se } 0 < |h| < \delta \text{ allora } \left|\frac{f(2+h) - f(2) - 5h}{h}\right| < \epsilon$$

□ $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ □ $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ □$f'(2) = 5$ □$f'(5) = 2$

✍ **Esercizio 7.1.17.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile che si annulla in* $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ *(e solo in questi tre punti). Allora*

□$f(x)$ cambia segno tre volte
□$f'(x)$ si annulla almeno due volte
□$f(x)$ è un polinomio di terzo grado
□$f'(x)$ si annulla esattamente due volte

✍ **Esercizio 7.1.18.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile tale che* $f(x) > 0$. *Se* f *è strettamente crescente, allora è sempre vero che:*

□$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
□$\frac{1}{f(x)}$ è strettamente decrescente
□$f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
□$f'(x)$ è strettamente crescente

✍ **Esercizio 7.1.19.** *L'equazione della retta tangente al grafico di* $y = 2x^3 + x - 1$ *nel punto* $(1, 2)$ *è:*

□$y = 10x - 7$ □$y = 7x - 7$ □$y = 7x - 5$ □$y = 7x - 4$

✍ **Esercizio 7.1.20.** *Se* $g(x) = x - 2x^3$ *e* g^{-1} *è la funzione inversa di* g*, allora la pendenza della retta tangente al grafico di* g^{-1} *nel punto* $(g(1), 1)$ *è:*

□ $-1/9$ □ $-1/3$ □ $-1/5$ □ $-1/7$

✍ **Esercizio 7.1.21.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera:*

□Se f è due volte derivabile e $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ allora x_0 non è nè massimo nè minimo relativo
□Se, per ogni x, $f(x) > 0$ e se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ allora f ha massimo in $\mathbb{R}$
□Se f è due volte derivabile e x_0 è un punto di massimo relativo per f allora $f''(x_0) < 0$
□Se f è due volte derivabile e $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo

✍ **Esercizio 7.1.22.** *Sia* $f(x) = \sqrt{x^2+1}(x + \sin(\pi x))$*. Allora* $f'(1) =$

□ $-\dfrac{\pi}{2}$ □$\dfrac{3+2\pi}{\sqrt{2}}$ □$\dfrac{3-2\pi}{\sqrt{2}}$ □$12 - 4\pi$

✍ **Esercizio 7.1.23.** *Sia* $g(x) = |\tan(1 + x)|$*. Allora la derivata di* $g(x)$*, nel punto* $x = 2$*,*

□$= -(\frac{1}{\cos 3})^2$
□$= \log|\sin 3|$
□$= \frac{\sin 3}{\cos 3}$
□non esiste

✍ **Esercizio 7.1.24.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione due volte derviabile e sia* $g(x) := f(\cos x)$*. Allora* $g''(x) =$

□$-\cos(x)f'(\cos x) - \sin(x)f''(\cos x)$
□$-\cos(x)f'(\cos x)$
□$-\cos(x)f'(\cos(x)) + \sin^2(x)f''(\cos x)$
□$\sin^2(x)f''(\cos x)$

✍ **Esercizio 7.1.25.** *Sia* $f(x) = x^2 + 3x$ *e* $g(x) = x^3 - 2x$. *Allora* $(f \circ g)'(1) =$

□10 □230 □1 □5

✍ **Esercizio 7.1.26.** *Se* f *è una funzione derivabile e se* $f(1) = 2$, $f'(1) = 1$ *allora la derivata di* $\arctan(f(x^2))$ *calcolata in* $x = 1$ *è*

□4/17 □2/17 □2/5 □1/5

7.2. Retta tangente: test a risposta multipla

✍ **Esercizio 7.2.1.** *Se* $f = xe^x$ *e* g *è la funzione inversa di* f, *allora l'equazione della retta tangente al grafico di* g *nel punto di coordinate* $(e, 1)$ *è:*

□$y = 2e(x - e) + 1$ □$y = \dfrac{1}{2e}(x - 1) + e$ □$y = \dfrac{1}{2e}(x - e) + 1$ □$y = \dfrac{e}{2}(x - e) + 1$

✍ **Esercizio 7.2.2.** *Sia* $f(t) = \sin \pi t + t^2$ *per* $t \in \mathbb{R}$. *L'equazione della retta tangente al grafico di* f *nel punto di ascissa* $x = 1$ *è*

□$y = (2 - \pi)x + 1$ □$y = \pi(x - 1) + 1$ □$y = \pi x + \pi - 1$ □$y = (2 - \pi)x + \pi - 1$

✍ **Esercizio 7.2.3.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = x + e^x$. *Sia* f^{-1} *la sua funzione inversa di* f. *La retta tangente al grafico di* f^{-1} *nel punto* $(1, 0)$ *è:*

□$y = \dfrac{1}{1 + e}(x - 1)$ □$y = \dfrac{1}{1 + e}x$ □$y = \dfrac{1}{2}(x - 1)$ □$y = \dfrac{1}{2}x$

✍ **Esercizio 7.2.4.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(t) = e^{t^3}$. *Se* g *è la funzione inversa di* f, *allora l'equazione della retta tangente al grafico di* g *nel punto di ascissa* $x = e$ *è:*

$\square y = x/3 + 1$ $\square y = x/3 + e$ $\square y = x/3e + 2/3$ $\square y = x/3e + 1$

✍ **Esercizio 7.2.5.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(t) = e^{-t^2} + t$ *e sia* g *la funzione inversa di* f. *La retta tangente al grafico di* g *nel punto di ascissa* $x = 1 + e^{-1}$ *è:*

$$\square t = \frac{1}{1-2e^{-1}}(x - 1 - e^{-1}) + 1 \qquad \square t = (1 - 2e^{-1})(x - 1 - e^{-1})$$
$$\square t = \frac{1}{1-2e^{-1}}(x - 1 - e^{-1}) \qquad \square t = (1 - 2e^{-1})x + 1$$

✍ **Esercizio 7.2.6.** *L'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = \log(1+x^2)$ *nel punto* $x = 2$ *è:*

$\square y = 1/5t + 2/5 + \log 5$
$\square y = -1/5t + 2/5 + \log 5$
$\square y = 4/5t - 8/5 + \log 5$
$\square y = -4/5t - 8/5 + \log 5$

✍ **Esercizio 7.2.7.** *L'equazione della retta tangente al grafico di* $y = 5^x$ *nel punto di ascissa* $x = 1$ *è:*

$\square y = 5x - \log 5$
$\square y = 5(x \log 5 - \log 5 + 1)$
$\square y = 5(x \log 5 + 1)$
$\square y = 5\left(\frac{1}{\log 5}x - \frac{1}{\log 5} + 1\right)$

✍ **Esercizio 7.2.8.** *Se* $f(t) = t^2$ *e* $g(s) = e^s$ *allora l'equazione della retta tangente al grafico della funzione composta* $f \circ g$ *nel punto di ascissa* $s_0 = 1$ *è:*

□$y = 2ex - e^2$
□$y = 2e^2x - e$
□$y = 2ex - e$
□$y = 2e^2x - e^2$

✍ **Esercizio 7.2.9.** *L'equazione della retta tangente al grafico di* $y = x\cos(x^2)$ *nel punto* $\sqrt{\pi}$ *è:*

□$y = -x$
□$y = -x + 2\sqrt{\pi}$
□$y = -2\pi x + 2\pi\sqrt{\pi}$
□$y = -2\pi x - 2\pi\sqrt{\pi}$

✍ **Esercizio 7.2.10.** *Se* $f(x) = x + \log(x+1)$ *allora l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa* f^{-1} *nel punto* $(1 + \log 2, 1)$ *è:*

□$y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$
□$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
□$y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\log 2$
□$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log 2$

✍ **Esercizio 7.2.11.** *Se* $f(t) = \frac{t-1}{t+3}$*. Allora l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa* f^{-1} *nel punto* $(2, f^{-1}(2)$ *è:*

□$-5 + x$
□$10 - 3x$
□$-15 + 4x$
□$5 - 2x$

✍ **Esercizio 7.2.12.** *Siano* $f(x) = \sqrt{2x^2-1}$ *e* $g(x) = x+2$. *L'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x)g(x)$ *nel punto di ascissa* $x_0 = 1$ *è:*

$\square y = \frac{3}{2\sqrt{3}}(7x-1)$
$\square y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+3)$
$\square y = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x+5)$
$\square y = 7x-4$

✍ **Esercizio 7.2.13.** *Per quali valori del parametro* $\beta \in \mathbb{R}$ *la retta di equazione* $r(x) = x+\beta$ *è tangente al grafico della funzione* $f(x) = \log(2+x)$*?*

$$\square\beta = -\frac{1}{2} + \log 2 \qquad \square\beta = -\frac{1}{3} + \log\frac{3}{2} \qquad \square\beta = 1 - \log 2 \qquad \square\beta = 1$$

✍ **Esercizio 7.2.14.** *La retta tangente al grafico di* $f(x) = -e^{x^2}$ *in* $(1, f(1))$ *è data da:*

$\square y = 2e^2x - e^2$
$\square y = -2ex + e$
$\square y = -\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}$
$\square y = 2ex - e$

✍ **Esercizio 7.2.15.** *Sia* $f(w) = 2w^3 + w + 2$. *Allora la retta tangente al grafico di* $f^{-1}(x)$ *in* $(2, f^{-1}(2))$ *è data da:*

$\square y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
$\square y = x+2$
$\square y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
$\square y = x-2$

✍ **Esercizio 7.2.16.** *Sia* $f(y) = \log(1+y)$ *e* $g(x) = \frac{2x}{x+3}$*. L'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f \circ g$ *nel punto* $x = 1$

è:

$\square r(x) = \log \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{12}(x-1)$

$\square r(x) = \log \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3}(x-1)$

$\square r(x) = \log \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{6}(x-1)$

$\square r(x) = \log \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}(x-1)$

✍ **Esercizio 7.2.17.** *Sia* $f(w) = 2w + \log w$*. Allora la retta tangente al grafico di* $f^{-1}(x)$ *in* $(2, f^{-1}(2))$ *è data da:*

$\square y = (x-2)/3$

$\square y = x+1$

$\square y = x-1$

$\square y = (x+1)/3$

✍ **Esercizio 7.2.18.** *Sia* $f(x) = xe^x$ *e* $g(y) = y^2+1$*. La retta tangente al grafico della funzione* $g \circ f$ *nel punto* $(1, (g \circ f)(1))$ *è:*

$\square y = 2x-2$

$\square y = -2e^{-4}x + 3e^{-4} - 1$

$\square y = 4e^2x + 1 - 3e^2$

$\square y = 6e^2x - 4e^2$

✍ **Esercizio 7.2.19.** *Sia* $f(t) = t^3 + t^2 + 2$*. Allora la retta tangente al grafico di* $f^{-1}(x)$ *in* $(5, f^{-1}(5))$ *è data da:*

$\square y = (x+1)/6$

$\square y = (x+2)/7$

$\square y = (x-1)/4$

$\square y = x/5$

✍ **Esercizio 7.2.20.** *L'equazione della retta tangente al grafico di* $y = 2x^4 - 2x^3 + 3$ *nel punto di ascissa* $x_0 = 1$ *è:*

□$y = 2x + 1$
□$y = 5x + 1$
□$y = 2x + 3$
□$y = 2x - 2$

✍ **Esercizio 7.2.21.** *Se* $g(x) = x^5 + 4x + 2$ *e* g^{-1} *è la funzione inversa di* g*, allora l'equazione della retta tangente al grafico di* g^{-1} *nel punto di ascissa* $x_0 = 2$ *è:*

□$y = 4x - 2$ □$y = 4x - 1/2$ □$y = x/4 - 2$ □$y = x/4 - 1/2$

✍ **Esercizio 7.2.22.** *Se* $f(x) = x^5 + x^3 + 1$ *e sia* g *la funzione inversa di* f*. L'equazione della retta tangente al grafico di* g *nel punto di ascissa* $x = 3$ *è:*

□$y = \frac{1}{3}(x-3)+1$ □$y = \frac{1}{3}(x-3)+3$ □$y = \frac{1}{8}(x-3)+1$ □$y = \frac{1}{8}(x-1)+1$

7.3. Continuità e derivabilità: test a risposta multipla

✍ **Esercizio 7.3.1.** *Per quali valori di* h *e* k *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 4\arctan x & \text{per } x < 1 \\ 2hx + k & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile?

□$h = \pi, k = 2$ □$h = 2\pi, k = 2\pi + 2$ □$h = \pi, k = \pi + 2$ □$h = 1, k = \pi - 2$

✍ **Esercizio 7.3.2.** *Sia* f *definita da* $f(x) = 5^x$ *per* $x \leq 1$ *e da* $f(x) = ax + b$ *per* $x > 1$. *Per quali valori* $a, b \in \mathbb{R}$ f *è continua e derivabile in* $\mathbb{R}$*?*

$\square a = 5, b = 0$ $\square a = 5\log 5, b = 5$ $\square a = 5\log 5, b = 5 - 5\log 5$ $\square a = \log 5, b = 5 - \log 5$

✍ **Esercizio 7.3.3.** *Per quali valori di* h *e* k *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \geq 2 \\ kx + h & \text{per } x < 2 \end{cases}$$

è continua e derivabile?

$\square h = -8, k = 4$ $\square h = 4, k = -8$ $\square h = -4, k = 4$ $\square h = 4, k = -4$

✍ **Esercizio 7.3.4.** *Determinare i valori dei parametri reali* a *e* b *affinché la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{2-2x} - ax & \text{per } x < 1 \\ \log(3x - 2) - bx^2 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$

$\square a = -3, b = -4$ $\square a = -2, b = 3$ $\square a = 7, b = 6$ $\square a = -2, b = -1$

✍ **Esercizio 7.3.5.** *Determinare i valori dei parametri reali* a *e* b *affinché la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - e^{x-1} & \text{per } x < 1 \\ bx - \log(3x - 2) & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$

$\square a = 7, b = 6$ $\square a = -2, b = -1$ $\square a = -3, b = -4$ $\square a = -2, b = 3$

✍ **Esercizio 7.3.6.** *Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{per } x \geq 1 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$

□$a = -3, b = 2$ □$a = -1, b = 3$ □$a = -2, b = 2$ □$a = -1, b = 1$

✍ **Esercizio 7.3.7.** *Determinare i valori dei parametri α e β per i quali la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\alpha x) - \alpha & \text{per } x \geq 0 \\ \sin(x^2) - \beta x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 0$

□$\alpha = 1, \beta = -1$ □$\alpha = 0, \beta = -1$ □$\alpha = -1, \beta = 1$ □$\alpha = 1, \beta = 0$

✍ **Esercizio 7.3.8.** *Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con $f(0) = -1$ ed inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Allora l'equazione $f(x) = 0$:*

□ha almeno una soluzione
□ha un numero dispari di soluzioni diverse tra loro
□ha un numero pari di soluzioni diverse tra loro
□ha almeno due soluzioni

✍ **Esercizio 7.3.9.** *Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) & \text{per } x < -1 \\ |x| + \alpha & \text{per } x \geq -1 \end{cases}$$

è continua in $x_0 = -1$?

$\square \alpha = 0$ $\square \alpha = 1$ $\square \alpha = 2$ $\square \alpha = -2$

✍ **Esercizio 7.3.10.** *Determinare i valori dei parametri α e β per i quali la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x^2) - 1 & \text{per } x \geq 0 \\ \beta \cos x + \alpha x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 0$

$\square \alpha = 0, \beta = -1$ $\square \alpha = -1, \beta = 1$ $\square \alpha = 1, \beta = 0$ $\square \alpha = 1, \beta = -1$

✍ **Esercizio 7.3.11.** *Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{per } x < -1 \\ \alpha|x| - 1 & \text{per } x \geq -1 \end{cases}$$

è continua in $x_0 = -1$?

$\square \alpha = 0$ $\square \alpha = 1$ $\square \alpha = 2$ $\square \alpha = -2$

✍ **Esercizio 7.3.12.** *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\cos(\alpha x)} & \text{per } x \leq 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{\sin^2(\alpha x)} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Si determini $\alpha > 0$ *affinché* f *sia continua.*

$\square \alpha = \sqrt{2}$ $\quad\square \alpha = 1/\sqrt{2e}$ $\quad\square \alpha = 1/2$ $\quad\square \alpha = 2e$

✍ **Esercizio 7.3.13.** *Sia*

$$g(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 1 & \text{per } x < 1 \\ \beta x + 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

Si determinino α *e* β *affinché* $g(x)$ *sia continua e derivabile.*

$\square \alpha = -1, \beta = 2$ $\quad\square \alpha = 4, \beta = -4$ $\quad\square \alpha = 4, \beta = 2$ $\quad\square \alpha = -2, \beta = -4$

✍ **Esercizio 7.3.14.** *Per quale valore del parametro* β *la funzione*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x & \text{per } x < 0 \\ \log(1+2x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x_0 = 0$*?*

$\square \beta = -1/2$ $\quad\square \beta = 1/2$ $\quad\square \beta = 2$ $\quad\square \beta = -3$

✍ **Esercizio 7.3.15.** *Per quali valori del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si ha che*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x)/x & \text{per } x < 0 \\ (x+1)/(x+2) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

è continua in $x_0 = 0$*?*

$\square \alpha = -2$ $\quad \square \alpha = 2$ $\quad \square \alpha = 1/2$ $\quad \square \alpha = -1/2$

✍ **Esercizio 7.3.16.** *Per quali* α *e* β *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ x^2 + \alpha x + \beta & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile?

$\square \alpha = -4, \beta = 12$ $\quad \square \alpha = -8, \beta = 3$ $\quad \square \alpha = -4, \beta = 3$ $\quad \square \alpha = -8, \beta = 12$

7.4. Derivate: esercizi di ricapitolazione proposti

✍ **Esercizio 7.4.1.** *Date le funzioni* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ *e* $g(y) = \sin(1-y)$*, calcolare la derivata di* $(g \circ f)(x)$*.*

✍ **Esercizio 7.4.2.** *Date le funzioni* $f(x) = x^2 + 1$ *e* $g(y) = 3\log(\sqrt{y})$*, calcolare la derivata di* $(g \circ f)(x)$*.*

✍ **Esercizio 7.4.3.** *Sia* $h(x)$ *una funzione derivabile. Calcolare la derivata di* $\log(h^2(x)+1)$*.*

CAPITOLO 8

Esercizi riguardanti estremi locali di funzioni reali di una variabile reale

8.1. Rapporti tra continuità, derivabilità, massimi e minimi: domande di tipo teorico

✍ **Esercizio 8.1.1.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quale delle seguenti implicazioni è sempre vera?*

□Se $|f|$ è continua allora f è continua;
□Se f è derivabile allora $|f|$ è continua;
□Se f è derivabile allora $|f|$ è derivabile;
□Se f è continua allora f ha massimo e minimo

✍ **Esercizio 8.1.2.** *Se f è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ tale che $f'(2) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ allora necessariamente:*

□f è continua in 2
□$f(2) < 0$
□2 è un punto di minimo
□2 è un punto di massimo

✍ **Esercizio 8.1.3.** *Scrivete l'equazione di una funzione f, continua e derivabile in $\mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

e, inoltre, tale che f abbia un massimo locale.

✍ **Esercizio 8.1.4.** *Scrivete l'equazione di una funzione f, continua e derivabile in $\mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,$$

e, inoltre, tale che il valore massimo di $f(x)$ per $x \in \mathbb{R}$ sia 3.

✍ **Esercizio 8.1.5.** *Se $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $f''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, allora necessariamente:*

□$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
□f non può avere massimi
□f è descrescente
□f non può avere minimi

✍ **Esercizio 8.1.6.** *Se $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $f''(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, allora necessariamente:*

□$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
□f non può avere massimi
□f è descrescente
□f non può avere minimi

✍ **Esercizio 8.1.7.** *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora necessariamente:*

□se f è derivabile in $[0,1]$ e se x_0 è un punto di massimo per f allora $f'(x_0) = 0$
□f ha massimo in $[0,1]$
□se x_0 è un punto di massimo per f allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$
□f ha massimo solo se esiste almeno un punto in cui f' è nulla

✍ **Esercizio 8.1.8.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile e sia f^{-1} la sua funzione inversa. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?*

□se f è continua allora f^{-1} è continua
□$f^2(x)$ è invertibile
□se f è monotona crescente allora f^{-1} è monotona decrescente
□se f è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$.

✍ **Esercizio 8.1.9.** *Se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?*

□$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
□$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
□f non ha punti di massimo in $\mathbb{R}$
□f non ha punti di minimo in $\mathbb{R}$

✍ **Esercizio 8.1.10.** *$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che $g'(x) \geq 1$. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?*

□$g(0) = 0$
□1 è il punto di massimo di g
□g non ha massimo e minimo in $[-1, 1]$
□esiste $c \in [-1, 1]$ tale che $g'(c) = 1$

✍ **Esercizio 8.1.11.** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $f'(1) = f''(1) = 0$ allora*

□1 è un punto di flesso
□nessuna delle altre risposte è necessariamente vera
□1 è un punto di massimo locale
□1 è un punto di minimo locale

✍ **Esercizio 8.1.12.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Quale delle seguenti implicazioni è sempre vera?*

□Se $|f|$ è continua allora f è continua;
□Se f è continua allora $|f|$ è continua;
□Se f è derivabile allora $|f|$ è derivabile;
□Se $f''(x) > 0$ allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

✍ **Esercizio 8.1.13.** *Sia* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continua, derivabile, tale che* $f'(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in [0, +\infty)$*. Allora:*

□$f(0) > f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$
□f non è limitata
□f ha un valore minimo in $[0, +\infty)$
□f ha un valore massimo in $[0, +\infty)$

✍ **Esercizio 8.1.14.** *Sia* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continua, derivabile, tale che* $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [0, +\infty)$*. Allora:*

□$f(0) > f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$
□f non è limitata
□f ha un valore minimo in $[0, +\infty)$
□f ha un valore massimo in $[0, +\infty)$

✍ **Esercizio 8.1.15.** *Sia* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$*. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?*

□Se, per ogni x, $f'(x) < 0$, allora f è invertibile in $[0, 1]$
□Se, per ogni x, $f'(x) < 0$ allora l'equazione $f(x) = 1/2$ ha una soluzione in $[0, 1]$
□Se f ha massimo e minimo in $[0, 1]$ allora f è continua in $[0, 1]$
□Se $f(0) = f(1) = 100$, allora l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni in $[0, 1]$

✍ **Esercizio 8.1.16.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione regolare. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?*

□Se $f(1) = 1$ e $f(-1) = -1$ allora f^2 ha un minimo assoluto
□Se f ha un punto di minimo allora f^2 ha un punto di minimo
□Se f è crescente allora f^2 è crescente
□Se f è convessa allora f^2 è convessa

✍ **Esercizio 8.1.17.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. L'espresssione*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tale che } |x-3| < \alpha \text{ implica } f(x) \leq f(3)$$

è la definizione di:

□$\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$
□f è discontinua per $x = 3$
□3 è un punto di massimo relativo per f
□$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

✍ **Esercizio 8.1.18.** *Sia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. La frase*

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che se } |x-x_0| < \delta \text{ allora } g(x) - g(x_0) \geq 0$$

è la definizione di:

□x_0 è un punto di minimo relativo di g
□x_0 è un punto di discontinuità eliminabile di g
□$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$
□x_0 è un punto di massimo relativo di g

✍ **Esercizio 8.1.19.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivable tale che* $f(n) = n$ *per ogni numero intero* $n \in \mathbb{Z}$*. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?*

□$f(x) > 0$ per $x \geq 1$
□il grafico di f è una retta
□esistono infiniti punti x per cui $f'(x) = 1$
□f è monotona crescente

✍ **Esercizio 8.1.20.** *Quale delle seguenti affermazioni è corretta?*

□le funzioni continue sono derivabili
□le funzion limitate hanno limite
□la funzione $x|x|$ è derivabile per $x = 0$
□le funzioni continue e limitate hanno massimo e minimo

✍ **Esercizio 8.1.21.** *Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e $f(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?*

□$f(x) = \sin(\pi x)$
□$f'(x) = 0$ ha infinite soluzioni
□$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste
□f è periodica

8.2. Estremo superiore e inferiore, massimi e minimi, asintoti obliqui

✍ **Esercizio 8.2.1.** *L'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ di $f(x) = \dfrac{2x^2 + e^{-x}}{4x + 5}$ è:*

□$y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{8}{5}$ □non esiste □$y = \dfrac{x}{2}$ □$y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{8}$

✍ **Esercizio 8.2.2.** *Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{2x^2 + \sin x^2}{|x-1|}$. L'asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$ è:*

□$y = 2x + \cos 1$ □non esiste asintoto obliquo □$y = 2x$ □$y = 2(x + 1)$

✍ **Esercizio 8.2.3.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(t) = \dfrac{1-e^t}{1+e^t}$. *Allora l'estremo superiore di* $f(t)$ *per* $t \in \mathbb{R}$ *è:*

$\square 2 \qquad \square 1 \qquad \square e \qquad \square 0$

✍ **Esercizio 8.2.4.** *Per* $\alpha > 0$ *considerate la funzione* $f_\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f_\alpha(x) = 1 + x^2 + \frac{\alpha^2}{1+x^2}$$

Di tale funzione trovate, in dipendenza dal parametro α, *il punto (o i punti) di massimo assoluto ed il valore massimo nell'intervallo* $[-1,1]$

✍ **Esercizio 8.2.5.** *Sia* $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = x + \log x$. *Allora per* $x \to +\infty$*:*

□l'asintoto obliquo di f è la retta $\{y = x + e\}$
□l'asintoto obliquo di f è la retta $\{y = x\}$
□l'asintoto obliquo di f non esiste
□l'asintoto obliquo di f è la retta $\{y = x + 1\}$

✍ **Esercizio 8.2.6.** *Sia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $g(x) = \arctan x + \dfrac{1}{x^2+1}$. *L'estremo superiore di* g *in* $[0,+\infty)$ *è:*

$\square +\infty \qquad \square \pi \qquad \square \dfrac{\pi}{2} \qquad \square \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$

✍ **Esercizio 8.2.7.** *L'estremo inferiore della funzione* $f(x) = \log\left(2 + \dfrac{1}{1+x^2}\right)$ *per* $x \in \mathbb{R}$ *è:*

$\square \log 4 \qquad \square -\infty \qquad \square \log 2 \qquad \square \log 3$

✍ **Esercizio 8.2.8.** *Se* $h(x) = x^3 - 3x + 5$*, quale è il valore massimo di* h *nell'intervallo* $(-\infty, 2]$*?*

□0 □il valore massimo non esiste □10 □7

✍ **Esercizio 8.2.9.** *Quali sono i valori minimo e massimo della funzione* $f(x) = e^{-x^2}$ *nell'intervallo* $[-1, 3]$*?*

□ $\min = e^{-1}, \max = 1$ □ $\min = -1, \max = 0$ □ $\min = e^{-9}, \max = 1$ □ $\min = e^{-9}, \max = e^{-1}$

✍ **Esercizio 8.2.10.** *Il valore massimo di* $g(x) = x - |x^2 - 1| + 2$ *nell'intervallo* $[0, 2]$ *è:*

□3 □1 □0 □2

✍ **Esercizio 8.2.11.** *Qual è l'area massima di un rettangolo con base sull'asse* x *ed inscritto nella parabola di equazione* $y = 1 - x^2$*?*

□ $\frac{4}{3\sqrt{6}}$ □ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ □ $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ □ $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

✍ **Esercizio 8.2.12.** *Sia* $g(x) = |x^2 - 100x|$*. Per quali valori di* $\beta > 0$ *il massimo assoluto di* g *sull'intervallo* $[0, \beta]$ *è strettamente maggiore di 2500?*

□per $\beta > 125$
□per $\beta > 50\sqrt{2}$
□per ogni β
□per $\beta > 50(1 + \sqrt{2})$

✍ **Esercizio 8.2.13.** *Sia* $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2+3x+1}$ *nell'intervallo* $[1, +\infty)$. *Allora:*

□il punto $x = 1$ è un minimo relativo, ma non assoluto
□il punto $x = 1$ è un minimo assoluto
□il punto $x = 1$ è un massimo relativo
□$f'(1) = 0$

✍ **Esercizio 8.2.14.** *Per quali valori del parametro* α *la funzione* $f(x) = x^4 + \alpha x^2$ *ha un massimo locale nel punto* $x = 0$*?*

□per nessun valore di α
□per tutti i valori di α
□per $\alpha > 0$
□per $\alpha < 0$

✍ **Esercizio 8.2.15.** *Il valore massimo di* $f(x) = x^2e^{-4x}$ *nell'intervallo* $[0, 1]$ *è:*

□$\dfrac{1}{2e}$ □$\dfrac{1}{e^2}$ □$\dfrac{1}{4e^2}$ □$\dfrac{1}{4e}$

✍ **Esercizio 8.2.16.** *Il valore minimo e il valore massimo della funzione* $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ *nell'intervallo* $[-2, 4]$ *sono:*

□ $\min = 5, \max = 9$ □ $\min = 0, \max = 16$ □ $\min = 7, \max = 16$ □ $\min = 0, \max = 9$

✍ **Esercizio 8.2.17.** *Il valore minimo e il valore massimo della funzione* $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 2$ *nell'intervallo* $[-1, 1]$ *sono:*

□ $\min = 18, \max = 31$ □ $\min = 2, \max = 31$ □ $\min = 2, \max = 11$ □ $\min = -2, \max = 11$

✍ **Esercizio 8.2.18.** *L'insieme dove la funzione* $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + x - 1$ *ha la concavità rivolta verso l'alto (cioè è strettamente convessa) è dato da:*

$\square(1,3)$ $\square(-2,1)$ $\square(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ $\square(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

✍ **Esercizio 8.2.19.** *Il massimo assoluto di* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ *in* $[0,2]$ *è?*

$\square 5$ $\square 6$ $\square 3$ $\square 1$

CAPITOLO 9

Studio del grafico di funzioni reali di una variabile reale

9.1. Studio di funzioni: esercizi proposti

✍ **Esercizio 9.1.1.** *Sia*

$$f_m(x) = \begin{cases} x(x+m) & x \leq 0 \\ \log(1+mx) & x > 0. \end{cases}$$

Disegnare il grafico di f_m nel suo campo di esistenza, per m positivo, nullo o negativo.

✍ **Esercizio 9.1.2.** *Dite per quali valori dei parametri a e b la funzione*

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

ha un massimo locale per $x = 2$ con valore $f(2) = 1$.

Per i valori trovati di a e b, disegnate il grafico della funzione f (non è richiesto lo studio della concavità)

✍ **Esercizio 9.1.3.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{\exp(x+3)}{2+3x^2}$$

e disegnarne il grafico. Giustificare i risultati sulla base dei teoremi sul segno delle derivate. Non è richiesto lo studio del segno della derivata seconda).

✍ **Esercizio 9.1.4.** *Disegnare il grafico della funzione inversa di* $\log(x+1)$

✍ **Esercizio 9.1.5.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da*

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-|x|}$$

Se ne disegni qualitativamente il grafico (in particolare, crescenza e decrescenza, convessità e concavità)

✍ **Esercizio 9.1.6.** *Considerate la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = \frac{x-1}{x}e^{-x}$$

(1) Disegnarne qualitativamente il grafico (non è richiesto calcolare la derivata seconda)
(2) Determinare se ha massimo e minimo assoluto in $[3/2, +\infty)$

✍ **Esercizio 9.1.7.** *Considerate la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = \frac{x}{x-2}e^{x}$$

(1) Disegnarne qualitativamente il grafico (non è richiesto calcolare la derivata seconda)
(2) Determinare se ha massimo e minimo assoluto in $(-\infty, -1/2]$

✍ **Esercizio 9.1.8.** *Considerate la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1} e^{-x}$$

(1) Disegnarne qualitativamente il grafico (non è richiesto calcolare la derivata seconda)
(2) Determinare se ha massimo e minimo assoluto in $[5/2, +\infty)$

✍ **Esercizio 9.1.9.** *Considerate la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = x - \sin(2x)$$

(1) Disegnarne qualitativamente il grafico per $x \in [0, 2\pi]$
(2) Trovare i punti e i valori di massimo e di minimo assoluto di f *in* $[0, 2\pi]$
(3) Trovare, se esistono, i punti e i valori di massimo e di minimo assoluto di f *in* $\mathbb{R}$.

✍ **Esercizio 9.1.10.** *Considerate la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = (4x - x^2)e^{-x}$$

(1) Disegnate il grafico di f
(2) Dite se f *ammette massimo assoluto e minimo assoluto in* $\mathbb{R}$ *e, eventualmente, trovateli.*
(3) Dite se f *ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'intervallo* $[-1, 10]$ *e, eventualmente, trovateli.*

✍ **Esercizio 9.1.11.** *Sia data la funzione*

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{1+x^2}\right)$$

Se ne disegni qualitativamente il grafico (in particolare, motivando le risposte: insieme di definizione, limiti a $+\infty$ *e a* $-\infty$ *e negli eventuali punti di non definizione, segno, crescenza e decrescenza; non è richiesto lo studio di convessità/concavità.*

✍ **Esercizio 9.1.12.** *Si determinino il massimo e il minimo assoluto della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2-2x} & \text{per } x < 0 \\ \log\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

e se ne disegni il grafico (in modo qualitativo: segno, crescenza/decrescenza; non è richiesto lo studio di convessità/concavità).

✍ **Esercizio 9.1.13.** *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da*

$$f(x) = \left|\frac{x^2-1}{x+2}\right|.$$

Se ne disegni qualitativamente il grafico (in particolare, motivando le risposte: insieme di definizione, limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ e negli eventuali punti di non definizione, asintoti verticali ed obliqui, crescenza e decrescenza, convessità/concavità. Suggerimento: cominciare studiando $\frac{x^2-1}{x+2}$).

✍ **Esercizio 9.1.14.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da*

$$f(x) = \begin{cases} x\log(3x^2) & \text{per } x > 0 \\ x^2 e^{2x} & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

Se ne determinino, se ci sono, il massimo assoluto, il minimo assoluto, i massimi relativi e i minimi relativi.

✍ **Esercizio 9.1.15.** *Si disegni qualitativamente il grafico della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} (3x+1)\log(3x+1) & \text{per } x \geq 0 \\ 4x^3 + 9x^2 + 6x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

In particolare, motivando le risposte: insieme di definizione, limiti a $+\infty$ e a $-\infty$, eventuali asintoti obliqui, crescenza e decrescenza, convessità e concavità, eventuale derivabilità in $x_0 = 0$, valore nei punti di massimo relativo e minimo relativo.

✍ **Esercizio 9.1.16.** *Sia data la funzione* $f(x) = e^{\frac{x^2}{x+1}}$. *Se ne disegni qualitativamente il grafico (in particolare, motivando le risposte: insieme di definizione, limiti a* $+\infty$ *e a* $-\infty$ *e negli eventuali punti di non definizione, segno, asintoti, crescenza e decrescenza, limiti della derivata a* $+\infty$ *e* $-\infty$ *e negli eventuali punti di non definizione; non è richiesto lo studio della convessità/concavità).*

✍ **Esercizio 9.1.17.** *Si disegni qualitativamente il grafico della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x^2+x} & \text{per } x \geq 0 \\ x^3 + 2x^2 + 1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

In particolare, se ne determinino i limiti a $+\infty$ *e a* $-\infty$*, gli eventuali asintoti obliqui, la crescenza e la decrescenza, la convessità e la concavità, e se è derivabile nel punto* $x_0 = 0$.

✍ **Esercizio 9.1.18.** *Sia* f *la funzione definita da*

$$f(x) = (2-x)\sqrt{x+1}e^{-x}.$$

Se ne disegni qualitativamente il grafico (in particolare crescenza/decrescenza e pendenza nel punto di ascissa $x = -1$*; non è invece richiesto lo studio della convessità/concavità).*

Calcolare il punto di massimo assoluto e il punto di minimo assoluto della funzione f.

✍ **Esercizio 9.1.19.** *Sia* f *la funzione definita da*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{2}{2x-1}.$$

Se ne disegni qualitativamente il grafico (in particolare, si studino il limite a $+\infty$*, a* $-\infty$ *e negli eventuali punti ove* $f(x)$ *non è definita; crescenza/decrescenza, convessità/concavità).*

✍ **Esercizio 9.1.20.** *Trovare il massimo assoluto, gli eventuali massimi relativi, il minimo assoluto e gli eventuali minimi relativi della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} (2x+1)e^x & \text{per } x < 0 \\ 1 - x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

✍ **Esercizio 9.1.21.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = \frac{3 - x}{2x^2 + 1}$$

Se ne disegni qualitativamente il grafico (in particolare, limite a $+\infty$ *e a* $-\infty$*, crescenza e decrescenza, convessità e concavità per* x *"vicino a* $-\infty$*", motivando le risposte, non è invece richiesta la convessità e concavità in generale).*

✍ **Esercizio 9.1.22.** *Trovate i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto della funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = |x - a|\, e^{-x^2}$$

dove a *è un numero fissato non negativo. Disegnate approssimativamente il grafico di* f *(non è richiesto lo studio della derivata seconda). Per quale valore di* $a \geq 0$ *la distanza fra i punti di massimo di* f *è la più piccola possibile?*

9.2. Andamento qualitativo del grafico di una funzione attorno all'origine: esercizi proposti

✍ **Esercizio 9.2.1.** *Sia* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$*. Se* $f(0) = f''(0) = 0$*,* $f'(0) = -1$ *e* $f'''(0) = 1$*, disegnare l'andamento qualitativo del grafico di* f *in un intorno di* $x = 0$

✍ **Esercizio 9.2.2.** *Sia* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$*. Se* $f(0) = f''(0) = 0$*,* $f'(0) = 1$ *e* $f'''(0) = 1$*, disegnare l'andamento qualitativo del grafico di* f *in un intorno di* $x = 0$

✍ **Esercizio 9.2.3.** *Il grafico di* $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ *in un intorno dell'origine è?*

✍ **Esercizio 9.2.4.** *Sia* g *una funzione regolare tale che* $g(0) = 1$ *e* $g'(0) = -1$*. Disegnare l'andamento qualitativo del grafico di* $\log g(x)$ *in un intorno di* $x = 0$

✍ **Esercizio 9.2.5.** *Il grafico di* $h(t) = \arctan(t + t^2) - t - t^2$ *in un intorno dell'origine è?*

✍ **Esercizio 9.2.6.** *Il grafico della funzione* $\dfrac{x}{|\sin x|}$ *in un intorno dell'origine è?*

✍ **Esercizio 9.2.7.** *Sia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *due volte derivabile tale che* $g(0) = 0$*,* $g'(0) = 1$ *e* $g''(0) = -4$*. Allora il grafico di* $\dfrac{1}{1+g(x)}$ *vicino a* $x = 0$ *è?*

✍ **Esercizio 9.2.8.** *Sia* f *una funzione derivabile tale che* $f(0) = 0$ *e* $f'(0) = 1$*. Sia* $g(x) = \dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$*. Quale può essere il grafico di* $g(x)$ *vicino a* $x = 0$*?*

✍ **Esercizio 9.2.9.** *La funzione* f *è derivabile,* $f(0) = f'(0) = 0$ *e la derivata* f' *è crescente. Quale può essere il grafico di* f *vicino all'origine?*

✍ **Esercizio 9.2.10.** *Il grafico di* $\dfrac{|\sin x|}{x}$ *vicino all'origine è?*

✍ **Esercizio 9.2.11.** *Il grafico di* $\dfrac{|\sin x|}{x^2}$ *vicino all'origine è?*

✍ **Esercizio 9.2.12.** *Il grafico di* $\dfrac{\sin x}{x^2}$ *vicino all'origine è?*

✍ **Esercizio 9.2.13.** *Supponete che* g *sia una funzione regolare in* $\mathbb{R}$. *Se* $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ *e* $g''(0) = -1$, *allora il grafico di* g *vicino all'origine è?*

✍ **Esercizio 9.2.14.** *Se* $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ *e* $f''(0) = 0$, *qual' è il grafico della funzione* $\log(f^2(x))$ *in un intorno di* $x = 0$*?*

✍ **Esercizio 9.2.15.** f *è una funzione due volte derivabile tale che* $f(0) = f'(0) = 0$ *e* $f''(0) > 0$. *Allora il grafico di* $e^{-f(x)}$ *vicino a 0 è?*

✍ **Esercizio 9.2.16.** *Il grafico di* $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^3}$ *vicino a 0 è?*

✍ **Esercizio 9.2.17.** *Sia* $f(x)$ *una funzione continua, con derivata prima e derivata seconda continue, e tale che* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ *e* $f''(0) = 2$. *Allora il grafico della funzione* $g(x) = \sqrt{2f(x)+1}$ *vicino all'origine è?*

✍ **Esercizio 9.2.18.** *Sia* $f(x) = x^2 + 2x$. *Allora il grafico di* $h(x) = e^{-f(x)} + f(x)$ *vicino all'origine è?*

✍ **Esercizio 9.2.19.** *Sia* $f(x)$ *una funzione derivabile con derivata continua tale che* $f(0) = 1$ *e* $f'(0) < 0$. *Il grafico di* $g(x) = 3f(x) - 2f(x)^2$ *vicino all'origine è?*

✍ **Esercizio 9.2.20.** *Sia $f(x)$ una funzione derivabile con derivata continua tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) > 0$. Il grafico di $g(x) = 3f(x)^2 + f(x) + 1$ vicino all'origine è?*

CAPITOLO 10

Esercizi riguardanti approssimazione e polinomi di Taylor

10.1. Algebra degli "o piccoli"

Elenchiamo qui di seguito le principali proprietà degli "o piccoli" con relativa dimostrazione. Qui α e β sono reali positivi.

Proprietà 1

$$ko(x^\alpha) = o(x^\alpha), \qquad k \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione proprietà 1. Sia $f = ko(x^\alpha)$. Allora $f/k = o(x^\alpha)$ cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{k\,x^\alpha} = 0. \tag{10.1.1}$$

Devo dimostrare che $f = o(x^\alpha)$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{k\,x^\alpha} k \overset{(10.1.1)}{=} 0.$$

Proprietà 2

$$o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

Dimostrazione proprietà 2. Sia $f = o(x^\alpha)$ e $g = o(x^\alpha)$. Questo significa che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 0 \tag{10.1.2}$$

Devo dimostrare che $f + g = o(x^\alpha)$. Si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} + \frac{g(x)}{x^\alpha} \overset{(10.1.2)}{=} 0.$$

Proprietà 3

$$o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$$

Dimostrazione proprietà 3. Sia $f = o(x^\alpha)$ e $g = o(x^{\alpha+\beta})$. Questo significa che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^{\alpha+\beta}} = 0 \tag{10.1.3}$$

Devo dimostrare che $f + g = o(x^\alpha)$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} + \frac{g(x)}{x^\alpha x^\beta} x^\beta \overset{(10.1.3)}{=} 0.$$

Proprietà 4

$$x^\alpha o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

Dimostrazione proprietà 4. Sia $f = o(x^\beta)$, cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\beta} = 0. \tag{10.1.4}$$

Devo dimostrare che $x^\alpha f = o(x^{\alpha+\beta})$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha f(x)}{x^{\alpha+\beta}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\beta} \overset{(10.1.4)}{=} 0.$$

Proprietà 5

$$o(x^\alpha) o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

Dimostrazione proprietà 5. Sia $f = o(x^\alpha)$ e $g = o(x^\beta)$. Questo significa che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^\beta} = 0 \tag{10.1.5}$$

Devo dimostrare che $fg = o(x^{\alpha+\beta})$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^{\alpha+\beta}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} \frac{g(x)}{x^\beta} \overset{(10.1.5)}{=} 0.$$

Proprietà 6

$$\frac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta} = o(x^\alpha)$$

Dimostrazione proprietà 6. Sia $f = o(x^{\alpha+\beta})$, cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{\alpha+\beta}} = 0. \tag{10.1.6}$$

Devo dimostrare che $f/x^\beta = o(x^\alpha)$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\beta x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{\alpha+\beta}} \overset{(10.1.6)}{=} 0.$$

10.2. Stima dell'errore

Si chiede di stimare $\log\left(\dfrac{3}{2}\right)$ con un errore inferiore a 10^{-3}.

Pensiamo innanzitutto di usare lo sviluppo di $\log(1+x)$ centrato nell'origine e di considerare poi $x = 1/2$. L'obiettivo è quello di capire a quale ordine arrestare lo sviluppo di Mac Laurin in modo tale che l'errore (resto di Lagrange) sia inferiore a 10^{-3}. A tal proposito scriviamo lo sviluppo richiesto. Si ha

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(z)$$

con $0 < z < x = 1/2$ e

$$R_n(z) = (-1)^n \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Andiamo quindi a determinare esplicitamente questo resto. Innanzitutto si ha

$$f(x) = \log(1+x) \quad f'(x) = (1+x)^{-1} \quad f''(x) = -(1+x)^{-2} \quad f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \quad f^{iv}(x) = -6(1+x)^4$$

da cui per induzione è possibile provare che

$$f^{n+1}(x) = (-1)^n\, n!\, (1+x)^{-n}$$

quindi il resto di Lagrange del nostro sviluppo sarà

$$R_n(z) = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{1+z}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Visto poi che $0 < z < 1/2$ allora $\left(\frac{1}{1+z}\right)^{n+1} < 1$ quindi basta chiedersi per quale n si abbia

$$\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} < \frac{1}{10^3}.$$

Visto che $10^3 \approx 2^{10}$ e tenendo conto del fattore $n+1$, ci si aspetta che $n=7$ sia il valore richiesto e infatti per $n=6$ si ha

$$\frac{1}{2^7\,7} = \frac{1}{896} > \frac{1}{1000}$$

mentre per $n=7$ si ha

$$\frac{1}{2^8\,8} = \frac{1}{2048} < \frac{1}{1000}$$

Quindi lo sviluppo richiesto sarà

$$\log\frac{3}{2} \approx 0,405465 \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} \approx 0,4058036$$

10.3. Limiti di funzioni risolti tramite l'uso di polinomi di Taylor

✍ **Esercizio 10.3.1.** *Indicate qual è l'insieme dei numeri reali α per cui*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sin x}{x^\alpha} > 0$$

$\square\alpha \geq 2$ $\square\alpha \geq 3$ $\square\alpha \leq 2$ $\square\emptyset$

➼ **R.** $\alpha \geq 3$

✍ **Esercizio 10.3.2.** *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x^2)+\cos(2x)-1}{x^4}$$

➼ **R.** -1/3. Hint:

$$\lim_{x\to 0}\left[2\left(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)-4\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right]\frac{1}{x^4}$$

✍ **Esercizio 10.3.3.** *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{2x^2}-2x\sin x\right)^{\frac{2x-1}{x^4}}$$

R. 1. Hint:

$$\exp\left(\frac{2x-1}{x^4}\log\left(1+2x^2+\frac{4x^2}{2}-2x\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\right)\right)\sim\exp\left(\frac{1}{x^3}\frac{7}{3}x^4\right)$$

Esercizio 10.3.4. *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0}(e^x-\sin x)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}}$$

R. $e^{1/9}$. Hint:

$$\exp\left(\frac{1}{1-\cos(3x)}\log\left(1+x+\frac{x^2}{2}-x+o(x^2)\right)\right)\sim\exp\left(\frac{x^2}{2}\frac{2}{9x^2}\right)$$

Esercizio 10.3.5. *Calcolate*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

Esercizio 10.3.6. *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-x^2}{(1-\cos x)^2}$$

Esercizio 10.3.7. *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^3\sin x}$$

Esercizio 10.3.8. *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(x^2)}{1-\frac{1}{2}x^2-\cos x}$$

Esercizio 10.3.9. *Calcolate il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-2x\cos x-x}{x^2\,\tan x}$$

✍ **Esercizio 10.3.10.** *Calcolate il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x) - 2x\,\cos x - 2x}{x^2\,\tan(2x)}$$

✍ **Esercizio 10.3.11.** *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{x^2} - \sin x}{x\sin(x^2)}$$

✍ **Esercizio 10.3.12.** *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x}{\sin x - x\cos x}$$

✍ **Esercizio 10.3.13.** *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \tan x}{\sin x - xe^{x^2}}$$

✍ **Esercizio 10.3.14.** *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \tan x}{x^2 \sin x}$$

✍ **Esercizio 10.3.15.** *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \tan x}$$

✍ **Esercizio 10.3.16.** *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x^2)}{\tan x - xe^{x^2}}$$

✍ **Esercizio 10.3.17.** *Calcolate*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^3)-x^3}{x^6}$$

calcolate, in funzione del parametro intero positivo $n \in \mathbb{N}$, il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^3+x^n)-x^3}{x^6}$$

✍ **Esercizio 10.3.18.** *Calcolate*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-e^x \sin x}{x^2 \cos 2x}$$

✍ **Esercizio 10.3.19.** *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - \sin(x^2)}{x+2x^2-\log(1+x)}$$

✍ **Esercizio 10.3.20.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\log(1+x)} =$$

$(a) - 1$ $\quad\square 1$ $\quad\square +\infty$ $\quad\square 0$

✍ **Esercizio 10.3.21.** *Se*

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha (x-\sin x) < +\infty$$

allora

$\square \alpha \geq 0$
$\square \alpha \geq 0$ ma non multiplo di 3
$\square \alpha \geq -1$
$\square \alpha \geq -3$

✍ **Esercizio 10.3.22.** *Calcolate il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x\, e^{x^2} - \sin(2x) - x}{x\, \sin(x^2)}$$

✍ **Esercizio 10.3.23.** *Calcolate il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{4xe^{x^2} - \sin(2x) - 2x}{x\, \sin(x^2)}$$

10.4. Polinomi di Taylor e approssimazione

✍ **Esercizio 10.4.1.** *Sia*

$$f(x) := x2^{1/x}.$$

Calcolate i polinomi di Taylor $T_1(x)$*,* $T_2(x)$ *e* $T_3(x)$ *di* f *con centro nel punto* $x = 1$*.*

Disegnate in un piano cartesiano, i grafici di f*,* T_1*,* T_2 *e* T_3*.*
Dite quante soluzioni ha, in funzione del parametro reale k*, l'equazione*

$$x2^{1/x} = k.$$

✍ **Esercizio 10.4.2.** *Il polinomio di Taylor di grado 2 con centro in* $x = 1$ *della funzione* $f(x) = \log(1 + 2x^2)$ *è:*

$$\Box \frac{4}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 \qquad \Box \log 3 + \frac{3}{4}(x-1) - \frac{4}{9}(x-1)^2$$
$$\Box \log 3 + \frac{4}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 \qquad \Box \log 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}x^2$$

✍ **Esercizio 10.4.3.** *Il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione* $f(x) = x\sin(\pi x)$ *con centro in* $x = 1$ *è:*

$$\square - x + \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 \qquad \square 1 - x + \pi^2(x-1)^2$$
$$\square 1 + x + 2\pi(x+1)^2 \qquad \square \pi - \pi x - \pi(x-1)^2$$

✍ **Esercizio 10.4.4.** *Calcolate il polinomio di Taylor di grado 3 di*

$$f(x) = e^{x^2+x-2} - 1$$

con centro nel punto $x = 1$.

✍ **Esercizio 10.4.5.** *Calcolate il polinomio di Mac Laurin di grado 6 della funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = \sqrt{1+2x^2}$$

✍ **Esercizio 10.4.6.** *Calcolate il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione* $f(x) = \log(1 + x\cos(2x))$ *in* $x = 0$

✍ **Esercizio 10.4.7.** *Calcolate il polinomio di Taylor di grado 5 della funzione* $f(x) = xe^{x^2-x^4}$ *in* $x = 0$

✍ **Esercizio 10.4.8.** *Sia* $f(t) = 2t + t^2 + o(t^2)$ *per* $t \to 0$. *Allora i primi quattro termini dello sviluppo di Mac Laurin di* $\cosh(f(t))$ *sono:*

$\square 1+2t^2+4t^3+t^4/2$ $\qquad$ $\square 1+4t^2+4t^3+7t^4/6$ $\qquad$ $\square 1+2t^2+2t^3+7t^4/6$ $\qquad$ $\square 1+2t^2+2t^3+t^4/2$

✍ **Esercizio 10.4.9.** *Sia* $f(t) = 2t + t^3 + o(t)$ *per* $t \to 0$. *Allora i primi due termini dello sviluppo di Mac Laurin di* $\sinh(f(t))$ *sono:*

$\square 2t + 7t^3/3$ $\square 2t + t^3/3$ $\square 2t + t^3$ $\square 2t + 8t^3/6$

✍ **Esercizio 10.4.10.** *Il polinomio di Mac Laurin di grado 3 della funzione* $\log(1 + x + x^2)$ *è:*

$\square x - x^2/2 + x^3/3$ $\square x + x^2 + x^3$
$\square x + x^2/2 + x^3$ $\square x + x^2/2 - 2x^3/3$

✍ **Esercizio 10.4.11.** *Il polinomio di Mac Laurin di grado 2 della funzione* $f(x) = e^{x^2+2x}$ *è:*

$\square 2x + 4x^2$ $\square 1 + 2x + 4x^2$
$\square 1 + 2x + 3x^2$ $\square 1 + 2x + x^2$

✍ **Esercizio 10.4.12.** *Il polinomio di Mac Laurin di grado 2 della funzione* $f(x) = \sqrt{1 + 2x + 2x^2}$ *è:*

$\square 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{15}{8}x^2$ $\square 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{8}x^2$
$\square 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ $\square 1 + 2x - \dfrac{3}{2}x^2$

✍ **Esercizio 10.4.13.** *Sia* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $h(x) = e^x - \lambda - \sin x$*. Per quale valore del parametro reale* λ *si ha che* $h(x) = o(x)$ *per* $x \to 0$*?*

□$\lambda = 0$ □per nessun valore di λ □$\lambda = 1$ □$\lambda = -1$

✍ **Esercizio 10.4.14.** *Sia* $g(x) := \cos x f(x)$*. Il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione* g *con centro in* $x = 0$ *è:*

□$f(0) + f'(0)x + 2f''(0)x^2$ □$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$

□$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}(f''(0) - f(0))x^2$ □$f(0) + (f(0) - f'(0))x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$

✍ **Esercizio 10.4.15.** *Il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione* $f(x) = x\sin(\pi x)$ *con centro in* $x = 1$ *è:*

□$2\pi x(x-1)$ □$2\pi(x-1) - \frac{\pi}{2}(x-1)^2$ □$\pi(x-1) + \frac{\pi}{2}(x-1)^2$ □$-\pi x(x-1)$

✍ **Esercizio 10.4.16.** *Il grafico del polinomio di Taylor del secondo ordine (centrato nel punto* $x_0 = 0$*) di* $f(x) = (x^2+1)e^{x^2}$ *è?*

✍ **Esercizio 10.4.17.** *Il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione* $y = \arctan(2x)$ *con centro in* $x = 1/2$ *è:*

□$(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2}) - (x - \frac{1}{2})^2$ □$\frac{\pi}{4} + (x - \frac{1}{2}) - 2(x - \frac{1}{2})^2$

□$\frac{\pi}{4} + (x - \frac{1}{2}) - (x - \frac{1}{2})^2$ □$\frac{\pi}{4} - (x - \frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2})^2$

✍ **Esercizio 10.4.18.** *I primi due termini dello sviluppo di Taylor di* $\sin^2 x$ *sono:*

$$\Box x^2 - x^3/6 \qquad \Box x - x^3/6 \qquad \Box x^2 - x^4/3 \qquad \Box x^2 + x^6/36$$

✍ **Esercizio 10.4.19.** *Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro* $x_0 = 0$*) della funzione* $f(x) = e^{x\cos x - x^2}$ *è:*

$$\Box 1 + 2x^2 \qquad \Box 1 - 3x^2 \qquad \Box 1 + x - \frac{1}{2}x^2 \qquad \Box 1 - x + \frac{5}{2}x^2$$

✍ **Esercizio 10.4.20.** *Data la funzione* $f(x) = \sin(2x)e^{-x}$*, se ne calcoli il polinomio di Taylor di terzo grado e di centro* $x_0 = 0$

✍ **Esercizio 10.4.21.** *Sia* $f(x)$ *una funzione derivabile due volte con* $f(0) = 1$*,* $f'(0) = 0$*,* $f''(0) = -1$*. Il grafico del polinomio di Taylor di secondo grado e di centro* $x_0 = 0$ *della funzione* f *è?*

✍ **Esercizio 10.4.22.** *Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro* $x_0 = 0$*) di* $\cos(\log(1 + 2x))$ *è:*

$$\Box 2x - 2x^2 \qquad \Box 1 + 2x + 2x^2 \qquad \Box 1 - 2x^2 \qquad \Box 2x - x^2$$

✍ **Esercizio 10.4.23.** *Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro* $x_0 = 0$*) della funzione* $f(x) = \log(\cos x)$ *è:*

$$\Box -\frac{x^2}{2} \qquad \Box -x - \frac{x^2}{2} \qquad \Box x + \frac{x^2}{2} \qquad \Box x - \frac{x^2}{2}$$

✍ **Esercizio 10.4.24.** *Date le funzioni* $f(x) = \sqrt{1-x}$ *e* $g(x) = log(1 + 2x) - x$*, calcolare il polinomio di Taylor di secondo grado e di centro* $x_0 = 0$ *della funzione prodotto* $f(x)g(x)$*.*

✍ **Esercizio 10.4.25.** *Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro* $x_0 = 0$*) della funzione* $f(x) = x + \log(1 + x^2)$ *è:*

$$\square 1 + x - x^2 \qquad \square x - x^2 \qquad \square 1 + x + x^2 \qquad \square x + x^2$$

✍ **Esercizio 10.4.26.** *Sia* $f(x) = \cos(2x)$ *e* $g(y) = e^{-y+1}$*. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro* $x_0 = 0$*) della funzione* $(g \circ f)(x)$ *è:*

$$\square 1 + 2x^2 \qquad \square 2x - 2x^2 \qquad \square 1 - \frac{9}{2}x^2 \qquad \square 2x + 2x^2$$

✍ **Esercizio 10.4.27.** *Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro* $x_0 = 0$*) della funzione* $f(x) = (x + 1)\sin x$ *è:*

$$\square P_2(x) = x + \frac{x^2}{2} \qquad \square P_2(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 \qquad \square P_2(x) = x + x^2 \qquad \square P_2(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$$

✍ **Esercizio 10.4.28.** *Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro* $t_0 = 1$*) della funzione* $f(t) = e^{-t^2}$ *è:*

$$\square \frac{1}{e}(t-1)^2 \qquad \square \frac{1}{e}(t-2)^2 \qquad \square \frac{1}{e}(10t^2 - 16t + 7) \qquad \square \frac{1}{e}(10t^2 - 5t + 3)$$

CAPITOLO 11

Esercizi riguardanti serie numeriche

11.1. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 11.1.1.** *Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:*

$$1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n+2} \qquad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n+1} \qquad 4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

$$5)\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad 6)\sum_{n=0}^{\infty}\tan\left(\frac{n}{1+n^3}\right)$$

$$7)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log n!} \qquad 8)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$$

$$9)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2} \qquad 10)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sin^2 n}$$

$$11)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n}{1-\sin n} \qquad 12)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

➾ **R.** Hint:

1)converge; criterio di Leibniz

2)converge; $\sim \sum \frac{1}{n^2}$

3)converge; $\sim \sum \frac{1}{n^2}$

4)converge; criterio del rapporto

5)converge; $\sim \sum \frac{1}{n^2}$

6)converge; $\sim \sum \frac{1}{n^2}$

7)diverge; $\log n! = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n < n \log n$;

$\sum \frac{1}{n \log n}$ diverge; criterio del confronto serie integrale

8)diverge; $\sim \sum \frac{1}{n}$

9)converge; $|\frac{\sin^2 n}{n^2}| \sum \frac{1}{n^2}$

10)diverge; $n+1 \geq n + \sin^2 n \geq n$; $\frac{1}{n+\sin^2 n} \geq \frac{1}{n+1}$

11)non converge; (condizione necessaria)

12)converge; (serie geometrica di ragione 3/5)

11.2. Test a risposta multipla

✍ **Esercizio 11.2.1.** *Quale delle seguenti serie converge?*

$$\square \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n!} \qquad \square \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^4} \qquad \square \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \qquad \square \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

✍ **Esercizio 11.2.2.** *Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?*

$\square$Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge;
$\square$Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
$\square$Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge
$\square$Se $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^2 = 0$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

✍ **Esercizio 11.2.3.** *Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?*

□Se $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} > 2b_n$, allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$;
□Se $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^2$ è convergente allora $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^4$ è convergente;
□Una successione limitata è convergente;
□Se $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ è convergente allora $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^2$ è convergente.

✍ **Esercizio 11.2.4.** *Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{\alpha+2}}$$

è convergente?

□$\alpha < 0$ □$\alpha > 0$ □$-1 < \alpha < 1$ □$-1 < \alpha < 3$

✍ **Esercizio 11.2.5.** *Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?*

□Se $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} > 2b_n$, allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$;
□Se $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_{n+1} > b_n + 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$;
□Una successione limitata è convergente;
□Se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

✍ **Esercizio 11.2.6.**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\log 3 - 1)^n =$$

□$\dfrac{\log 3}{\log 3 - 1}$ □$2\log 3$ □$\dfrac{\log 3 - 1}{2 - \log 3}$ □$+\infty$

✍ **Esercizio 11.2.7.** *Determinate per quali valori dei parametri reali β e γ la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\gamma}\left(e^{1/n^2} - 1 - \frac{\beta}{n^2}\right)$$

è convergente.

✍ **Esercizio 11.2.8.** *Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge allora necessariamente*

$\square \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(1+a_n)^2$ converge $\quad\square \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$ converge $\quad\square \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin a_n$ converge $\quad\square \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\, a_n = 0$

✍ **Esercizio 11.2.9.** *Se* $a_n > 0$ *e* $\sqrt[n]{a_n} \leq 1/2$ *per ogni* $n \geq 1$*, allora necessariamente*

$\square \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq 2 \quad \square \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\log a_n$ converge $\quad \square \displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^n a_n = 0 \quad \square \displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^n\, a_n = +\infty$

✍ **Esercizio 11.2.10.** *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Studiate, in funzione di* α*, la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha-1)n+\sqrt{n}}{n^\alpha+n^2+1}$$

✍ **Esercizio 11.2.11.** *La serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\beta^2+4\beta+4)^n$$

converge per

$\square 2 < \beta < 4 \qquad \square -1 < \beta < 1 \qquad \square -3 < \beta < -1 \qquad \square 1 < \beta < 3$

✍ **Esercizio 11.2.12.** *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è convergente, allora la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + \frac{1}{n})$

□è convergente solo se $a_n > 0$
□può essere convergente
□è sicuramente convergente
□è sicuramente divergente

✍ **Esercizio 11.2.13.** *Se* $a_n > 0$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ *è convergente, allora sicuramente*

$\square \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ è convergente $\quad \square \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \square \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ è convergente $\quad \square \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}^3}{a_n^3} < 1$

✍ **Esercizio 11.2.14.** *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2$*, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?*

$\square \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n+1) = 3 \quad \square \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1/2 \quad \square a_n \to 2$ per $n \to +\infty \quad \square a_n \to 0$ per $n \to +\infty$

✍ **Esercizio 11.2.15.** *Se* $2/3 < q < 1$ *allora*

$$\square \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \int_{2/3}^{+\infty} q^x \, dx \qquad \square \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \infty \qquad \square \sum_{n=0}^{+\infty} q^n > 3 \qquad \square \sum_{n=0}^{+\infty} q^n < 3$$

✍ **Esercizio 11.2.16.**

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n} =$$

$$\square + \infty \qquad \square \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x} \, dx \qquad \square \frac{1}{6} \qquad \square \frac{3}{2}$$

✍ **Esercizio 11.2.17.** *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2$*, quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?*

$$\square \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad \square \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad \square \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2 = 4 \qquad \square \lim_{n\to+\infty} a_n = 2$$

✍ **Esercizio 11.2.18.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+2)\, e^{1/n}}{1+2n^{\alpha}}$$

è convergente è dato da

$\square \alpha < 1$ $\square \alpha > 3$ $\square \alpha < 3$ $\square \alpha > 4$

✍ **Esercizio 11.2.19.** *Sia $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2$, quale delle seguenti serie è convergente?*

$\square \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ $\square \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{1+a_n}$ $\square \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+a_n}{a_n}$ $\square \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$

✍ **Esercizio 11.2.20.** *Sia $x > 0$. La somma della serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

è

$\square \frac{1}{x^2+3x+2}$ $\square \frac{1}{x^2+5x+6}$ $\square \frac{1}{x^2+x}$ $\square \frac{1}{4x^2+2x}$

✍ **Esercizio 11.2.21.** *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$ e $b_n = \frac{1}{n} + a_n$, allora è sempre vero che*

$\square \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3$

$\square$la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente

$\square$la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge a $+\infty$

$\square$la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge a $-\infty$

✍ **Esercizio 11.2.22.** *L'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

è convergente è dato da:

□$\alpha < 1$ □$\alpha > 0$ □$\alpha > 2$ □$\alpha > 1$

✍ **Esercizio 11.2.23.** *L'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + 2n^3)\left(e^{1/n} - 1\right)^{\alpha}$$

è convergente è dato da:

□$\alpha > 3$ □$\alpha < 1/2$ □$\alpha < 1$ □$\alpha > 4$

✍ **Esercizio 11.2.24.** *Quale delle seguenti affermazioni è vera?*

□Se $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ per ogni n allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente;
□Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente e $a_n > 0$ allora $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$;
□Se $a_n > 0$ per ogni n e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente;
□$a_n > 0$ per ogni n e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente.

✍ **Esercizio 11.2.25.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3 + n^{\alpha}\, 2^n}$$

è convergente è dato da:

□nessun valore □$\alpha > 1$ □$0 < \alpha < 1$ □$\alpha > 0$

✍ **Esercizio 11.2.26.** *La somma della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

è uguale a:

□1 □6 □3/2 □9

✍ **Esercizio 11.2.27.** *Sia $a_n \neq 0$ per ogni $n \geq 1$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?*

□Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ è convergente, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ è convergente;
□Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non è convergente;
□Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ è convergente;
□Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente;

✍ **Esercizio 11.2.28.** *Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n\, b_n}$ è convergente, allora:*

□$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2}$ è convergente
□$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_n^2}$ è convergente
□$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ è divergente □$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\, b_n^2$ ‘e convergente

✍ **Esercizio 11.2.29.** *Si consideri la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3(1+x)^n}.$$

Per $x = 2$ la somma vale:

□$\frac{1}{48}$ □$\frac{1}{144}$ □$\frac{1}{18}$ □$\frac{1}{40}$

✍ **Esercizio 11.2.30.** *L'insieme dei valori $a > 0$ per cui la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+a}{an+2} \right)^n$$

è convergente è dato da:

□$a < 3$ □$a > 3$ □$a > 2$ □$a < 2$

✍ **Esercizio 11.2.31.** *Si consideri la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

con $a_n > 0$. Allora è sempre vero che:

□se $a_n \leq 2^{-n}$ la serie è convergente;
□se $a_n \to 0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ è convergente;
□se $a_n \geq 2^{-n}$ la serie è divergente;
□se $a_n \to 0$ la serie è convergente;

✍ **Esercizio 11.2.32.**

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{-n} =$$

□$\frac{3}{2}$ □$\frac{4}{3}$ □$\frac{1}{6}$ □$\frac{1}{12}$

✍ **Esercizio 11.2.33.** *Quali sono i valori del parametro α per cui la serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 + e^{-n}}{\sqrt{n^\alpha} + \log n}$$

è convergente?

□per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ □$\alpha > 1$ □$\alpha > 2$ □$\alpha > 0$

✍ **Esercizio 11.2.34.**
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
è convergente e a termini positivi. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?

□$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ è convergente;
□$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-a_n}$ è convergente;
□$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$;
□$\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{a_n} - 1)$ è convergente;

11.3. Esercizi proposti (di secondo livello)

✍ **Esercizio 11.3.1.** *Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie geometrica*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x-2}{4}\right)^n$$
è convergente?

□$2 < x < 6$ □$-4 < x < 4$ □$-1 < x < 1$ □$-2 < x < 6$

✍ **Esercizio 11.3.2.** *L'insieme dei numeri x per cui la serie*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
converge è

□$x \geq 0$ □$0 \leq x < 1$ □$-1 \leq x < 1$ □$\mathbb{R}$

✍ **Esercizio 11.3.3.** *L'insieme dei valori del parametro reale x per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\,x^n}{n^3}$$

è convergente è:

$\square - 1 \leq x \leq 1$ $\square - 1 < x \leq 1$ $\square - 1 < x < 1$ $\square - 1 \leq x < 1$

✍ **Esercizio 11.3.4.** *L'insieme dei numeri reali x per cui la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+x^{2n}}{n^3+1}$$

è convergente è dato da:

□tutti i numeri reali
□nessun numero reale
$\square -1 < x < 1$
$\square -1 \leq x \leq 1$

✍ **Esercizio 11.3.5.** *Trovate per quali valori del parametro reale x la seguente serie è convergente*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^n$$

✍ **Esercizio 11.3.6.** *Si determinino tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k+1}{x^{2k}+2k}$$

è convergente.

✍ **Esercizio 11.3.7.** *Si determinino tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}+1}{2|x|^k + k^2}$$

è convergente.

✍ **Esercizio 11.3.8.** *Si determinino tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}+x^k}{k+2k^2}$$

è convergente.

✍ **Esercizio 11.3.9.** *Si determini per quali valori del parametro $x \geq 0$ la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^{nx}+n\log n}{2^n+n}$$

è convergente.

✍ **Esercizio 11.3.10.** *Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x^2-\frac{x}{2})^n}{n^2+1}$$

converge assolutamente? Converge semplicemente? Non converge?

✍ **Esercizio 11.3.11.** *Per quali valori di* $x \in \mathbb{R}$ *la seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^{n+2}}$$

è convergente?

$\square -9 < x < 9$ $\square 0 < x < 9$ $\square$nessun valore di α $\square -3 < x < 3$

✍ **Esercizio 11.3.12.** *Per quali valori di* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, *la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n+1} \left(\frac{2x}{x-1}\right)^n$$

converge assolutamente? Converge semplicemente? Non converge?

✍ **Esercizio 11.3.13.** *I valori del parametro reale* $x > 0$ *per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n \log n + 1)3^n}{(2x)^n}$$

è convergente sono:

$\square x > 3/2$ $\square 0 < x < 2/3$ $\square x > 2/3$ $\square 0 < x < 3/2$

CAPITOLO 12

Esercizi riguardanti integrali

12.1. Integrali indefiniti

12.1.1. Integrali immediati e per sostituzione

✍ **Esercizio 12.1.1.** *Calcolare i seguenti integrali:*

$$
\begin{array}{ll}
1) \displaystyle\int (4-5x)^3\,dx & 2) \displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\
3) \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx & 4) \displaystyle\int x\sin x\,dx \\
5) \displaystyle\int \cos x\ \sin x\,dx & 6) \displaystyle\int \frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^3}\,dx \\
7) \displaystyle\int \frac{x+\arctan x}{1+x^2}\,dx & 8) \displaystyle\int \tan x\,dx \\
9) \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 +1}\,dx & 10) \displaystyle\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx \\
11) \displaystyle\int \frac{\cos(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx & 12) \displaystyle\int \log(1-\sqrt{x})\,dx
\end{array}
$$

12.1.2. Integrali di funzioni razionali

✍ **Esercizio 12.1.2.** *Calcolare i seguenti integrali:*

$$
\begin{array}{ll}
1) \displaystyle\int \frac{5}{x^2+5x-6}\,dx & 2) \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx \\
3) \displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+1}\,dx & 4) \displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-1}\,dx \\
5) \displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}\,dx & 6) \displaystyle\int \frac{x^2-2x}{(2x-1)(x^2+1)}\,dx \\
7) \displaystyle\int \frac{2x}{3+5x^2}\,dx & 8) \displaystyle\int \frac{4}{(2x-1)^2}\,dx \\
9) \displaystyle\int \frac{4}{3-7x}\,dx & 10) \displaystyle\int \frac{5}{4x^2+3}\,dx \\
11) \displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2+2}\,dx & 12) \displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx \\
13) \displaystyle\int \frac{2x}{x^4+1}\,dx & 14) \displaystyle\int \frac{x}{x^2-6x+9}\,dx
\end{array}
$$

12.1.3. Integrali per parti

✍ **Esercizio 12.1.3.** *Calcolare i seguenti integrali:*

$$
\begin{array}{ll}
1) \displaystyle\int e^x(x^2-x)\,dx & 2) \displaystyle\int x^2 \sin x\,dx \\
3) \displaystyle\int x^2\,\cos(2x)\,dx & 4) \displaystyle\int e^x\,\cos x\,dx \\
5) \displaystyle\int x^2\,e^{3x}\,dx & 6) \displaystyle\int x^3 \log x\,dx \\
7) \displaystyle\int (\log x)^2\,dx & 8) \displaystyle\int x^3 \log(x+1)\,dx
\end{array}
$$

12.1.4. Esercizi di riepilogo

✍ **Esercizio 12.1.4.** *Calcolare i seguenti integrali:*

$$
\begin{array}{ll}
1)\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx & 2)\displaystyle\int x\,\arctan x\,dx \\
3)\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx & 4)\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx \\
5)\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^2}\,dx & 6)\displaystyle\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,dx \\
7)\displaystyle\int e^{2x}\log(1+e^{2x})\,dx & 8)\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx \\
9)\displaystyle\int \frac{4x\sin(3x+5)}{}dx & 10)\displaystyle\int \sin^2(3x+5)\,dx \\
11)\displaystyle\int x\sin(3x^2+5)\,dx & 12)\displaystyle\int x\sin^2(3x+5)\,dx
\end{array}
$$

12.2. Integrali definiti

✍ **Esercizio 12.2.1.**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^{2x}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\,dt =$$

$$(a)\pi \qquad (b)\pi/2 \qquad (c)0 \qquad (d)+\infty$$

✍ **Esercizio 12.2.2.** *Se g è una funzione continua in $\mathbb{R}$, allora* $\int_1^2 g(x)\,dx =$

$$(a)\int_2^4 g(x)\,dx \qquad (b)2\int_2^4 g(x)\,dx \qquad (c)\text{nessuna delle altre risposte} \qquad (d)\frac{1}{2}\int_2^4 g(x)\,dx$$

✍ **Esercizio 12.2.3.**

$$\int_{-1}^{1} f(t^2)\,dt =$$

$$(a)\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(s)/\sqrt{s}\,ds \qquad (b)0 \qquad (c)2\int_{-1}^{1} s\,f(s)\,ds \qquad (d)\int_{-1}^{1} \sqrt{s}\,f(s)\,ds$$

✍ **Esercizio 12.2.4.** *Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua, allora*

$$\int_{-1}^{1} f(x^2)\,dx =$$

$$(a)2\int_{0}^{1} f(x^2)\,dx \qquad (b)\int_{0}^{1} \frac{f(t)}{2t}\,dt \qquad (c)\int_{-1}^{1} f(t)\,2t\,dt \qquad (d)0$$

✍ **Esercizio 12.2.5.** *Se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione regolare, integrando per parti, si ottiene*

$$\int_{0}^{2} x\,g'(x)\,dx =$$

$$(a)g(2)-g(0) \qquad (b)2g(2)-\int_{0}^{2} g(x)\,dx \qquad (c)g(2)+g(0) \qquad (d)\int_{0}^{2} g(x)\,dx$$

✍ **Esercizio 12.2.6.** *Sia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora*

$$\int_{0}^{2} g(3t+2)\,dt =$$

$$(a)g(8)-g(2) \qquad (b)2g(5) \qquad (c)\frac{1}{3}\int_{2}^{8} g(t)\,dt \qquad (d)3\int_{2}^{8} g(t)\,dt$$

✍ **Esercizio 12.2.7.** *Sia $n\in\mathbb{Z}$. Calcolate, in funzione del parametro n,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\,dx.$$

✍ **Esercizio 12.2.8.** *Integrando per parti si ottiene:*

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx =$$

$(a)\dfrac{1}{e}+\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x^2}\,dx$ $\quad(b)\dfrac{1}{2e}+\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x^2}\,dx$ $\quad(c)\dfrac{1}{e}+2\displaystyle\int_0^1 x^2\,e^{-x^2}\,dx$ $\quad(d)\dfrac{2}{e}+4\displaystyle\int_0^1 x^2\,e^{-x^2}\,dx$

✍ **Esercizio 12.2.9.**

$$\int_0^1 f(2x)\,dx =$$

$2\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ $\quad(b)2\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ $\quad(c)\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ $\quad(d)\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$

✍ **Esercizio 12.2.10.**

$$\int_0^{3e} \log t\,dt =$$

$(a)6e+\log 3$ $\quad(b)3e\log 3$ $\quad(c)-\infty$ $\quad(d)(3+3\log 3)e$

✍ **Esercizio 12.2.11.**

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$(a)-2\log 2$ $\quad(b)2\arctan 1$ $\quad(c)0$ $\quad(d)2\log 2$

✍ **Esercizio 12.2.12.**

$$\int_0^1 \frac{f(\log x)}{x}\,dx =$$

$(a)\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{f(t)}{e^t}\,dt$ $\quad(b)\displaystyle\int_1^2 \frac{f(t)}{e^t}\,dt$ $\quad(c)\displaystyle\int_0^{\log 2} f(t)\,dt$ $\quad(d)\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt$

✍ **Esercizio 12.2.13.**
$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx =$$

$(a)\log 2\, f(2) - \int_1^2 f'(x)\ \log x\,dx$ $\qquad$ $(b)\log 2\, f'(2) - \int_1^2 f(x)\ \log x\,dx$

$(c)\dfrac{f(2)}{2} - \int_1^2 \dfrac{f'(x)}{x}\,dx$ $\qquad$ $(d)\dfrac{f(2)}{2} - f(1) - \int_1^2 \dfrac{f'(x)}{x}\,dx$

✍ **Esercizio 12.2.14.** *Sia f continua e con derivata continua. Allora, integrando per parti,* $\int_0^\pi f(x)\ \sin x\,dx =$

$(a) f(\pi) + f(0) - \int_0^\pi f'(x)\ \sin x\,dx$ $\qquad$ $(b)\int_0^\pi \sin x\,dx \int_0^\pi f(x)\,dx$

$(c) f(\pi) + f(0) + \int_0^\pi f'(x)\ \cos x\,dx$ $\qquad$ $(d)\int_0^\pi f'(x)\ \cos x\,dx$

✍ **Esercizio 12.2.15.**
$$\int_0^1 f(3x-1)\,dx =$$

$(a)\dfrac{1}{3}\int_{-2}^1 f(t)\,dt$ $\qquad$ $(b)3\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt$ $\qquad$ $(c)1/3\int_{-1}^2 f(t)\,dt$ $\qquad$ $(d)3\int_{-1}^2 f(t)\,dt$

✍ **Esercizio 12.2.16.**
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\ \sin x^2\,dx =$$

$(a)0$ $\qquad$ $(b)\dfrac{\sin\sqrt{\pi}}{2}$ $\qquad$ $(c)1$ $\qquad$ $(d)\dfrac{-\cos\sqrt{\pi}+1}{2}$

✍ **Esercizio 12.2.17.**
$$\int_0^2 x\, e^{2x}\, dx =$$
$(a) 3(e^4 + e^{-2})/4 \qquad (b) 3(e^4 - 1)/4 \qquad (c) (3e^4 + 1)/4 \qquad (d) (3e^4 - e^2)/4$

✍ **Esercizio 12.2.18.**
$$\int_1^4 f(2x)\, dx =$$
$(a) 2\int_2^8 f(x)\, dx \qquad (b) 2\int_{1/2}^2 f(x)\, dx \qquad (c) \frac{1}{2}\int_2^8 f(x)\, dx \qquad (d) \int_1^4 f(x)\, dx$

✍ **Esercizio 12.2.19.** *Si calcoli l'integrale*
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{3\sin x - 2}{(\sin x - 1)\ \tan x}\, dx$$

✍ **Esercizio 12.2.20.** *Si calcoli l'integrale*
$$\int_0^{\pi/4} \frac{(2\cos x - 3)\ \tan x}{\cos x + 1}\, dx$$

✍ **Esercizio 12.2.21.** *Si calcoli l'integrale*
$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin x - 1}{(2\sin x + 1)\ \tan x}\, dx$$

✍ **Esercizio 12.2.22.** *Si calcoli l'integrale*
$$\int_1^{16} \frac{1}{x^{3/4} + 4x^{1/2} + 3x^{1/4}}\, dx$$

✍ **Esercizio 12.2.23.** *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora* $\int_1^2 f(x^2)\,dx =$

$$(a)\int_1^4 2tf(t)\,dt \qquad (b)\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}f(t)\,dt \qquad (c)\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{t}}f(t)\,dt \qquad (d)\int_1^2 2tf(t)\,dt$$

✍ **Esercizio 12.2.24.** *Siano* $f(x)=\alpha x^2+2x$ *e* $g(x)=\frac{\beta}{(x+3)^2}$. *Per quali valori dei parametri* α *e* β *si ha* $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ *e* $f(0)=g(0)$*?*

$$(a)\alpha=-3,\beta=0 \qquad (b)\alpha=0,\beta=3 \qquad (c)\alpha=2/3,\beta=0 \qquad (d)\alpha=0,\beta=2/3$$

✍ **Esercizio 12.2.25.** *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora* $\int_0^1 x\,f(1+x^2)\,dx =$

$$(a)\int_0^2 f(t)\,dt \qquad (b)\frac{1}{2}\int_1^2 f(t)\,dt \qquad (c)\frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\,dt \qquad (d)2\int_1^2 f(t)\,dt$$

✍ **Esercizio 12.2.26.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_1^2 \frac{e^x+2e^{3x}}{e^{2x}-1}\,dx$$

✍ **Esercizio 12.2.27.** *Sia $f(x)$ una funzione derivabile con derivata continua, che soddisfa $f(\pi/2)=0$. Allora si ha*

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\cos(3x)\,dx =$$

$$(a)3\int_0^{\pi/2} f(x)\,\sin(3x)\,dx \qquad (b)\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} f'(x)\,\cos(3x)\,dx$$

$$(c)-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} f'(x)\sin(3x)\,dx \qquad (d)-3\int_0^{\pi/2} f(x)\,\cos(3x)\,dx$$

✍ **Esercizio 12.2.28.** *Sia $f(x)$ una funzione derivabile, con derivata continua, e tale che $f(0) = 0$. Allora* $\int_0^1 f'(2x)\, \cos(\frac{\pi}{2}x)\, dx =$

$$(a) -\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(2x)\, \sin(\frac{\pi}{2}x)\, dx \qquad (b)\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(2x)\, \sin(\frac{\pi}{2}x)\, dx$$
$$(c)\frac{\pi}{4}\int_0^1 f(2x)\, \sin(\frac{\pi}{2}x)\, dx \qquad (d)\pi\int_0^1 f(2x)\, \sin(\frac{\pi}{2}x)\, dx$$

✍ **Esercizio 12.2.29.** *Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché le funzioni $f(x) = b - 2ax$ e $g(x) = 2a - bx^3 - 1$ soddisfino $f(0) = g(0)$ e $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx$.*

$(a) a = -3/4, b = -1/2$ $\qquad (b) a = 2/3, b = -1/6$ $\qquad (c) a = -1/2, b = -2$ $\qquad (d) a = -1/2, b = 3/4$

✍ **Esercizio 12.2.30.** *Sia $f(x)$ una funzione tale che $2 \le f''(x) \le 3$ per ogni $x \in [0, 1]$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor della funzione $f(x)$ di centro $x_0 = 0$ e di grado 1. Allora:*

$$(a)\frac{1}{6} \le \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \le \frac{1}{3} \qquad (b)\frac{1}{2} \le \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \le \frac{2}{3}$$
$$(c)\frac{1}{12} \le \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \le \frac{1}{6} \qquad (d)\frac{1}{3} \le \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \le \frac{1}{2}$$

✍ **Esercizio 12.2.31.**

$$\int_0^1 x(x^2 + 3)\, e^{x^2+2}\, dx =$$

$$(a)\frac{1}{4}\int_1^3 (t+1)\, e^t\, dt \qquad (b)\frac{1}{8}\int_1^3 (t+1)\, e^t\, dt \qquad (c) -\frac{1}{2}\int_2^3 (t+1)\, e^t\, dt \qquad (d)\frac{1}{2}\int_2^3 (t+1)\, e^t\, dt$$

✍ **Esercizio 12.2.32.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_2^6 \frac{x+4}{\sqrt{x+3}} \log(\sqrt{x+3})\, dx$$

✍ **Esercizio 12.2.33.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che* $f(0) = 0$. *Allora*

$$\int_0^1 (1-x)\, f(2x)\, dx =$$

$(a) -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^2\, f'(2x)\, dx$ $\quad (b)\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^2\, f'(2x)\, dx$

$(c) \displaystyle\int_0^1 (1-x)^2\, f'(2x)\, dx$ $\quad (d) -\displaystyle\int_0^1 (1-x)^2\, f'(2x)\, dx$

✍ **Esercizio 12.2.34.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + 2}{\cos x - 2} \tan x\, dx$$

✍ **Esercizio 12.2.35.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile tale che* $f(1) = 0$. *Allora*

$$\int_0^2 f(2x+1)\, e^x\, dx =$$

$(a) f(5)e^2 - \displaystyle\int_0^2 e^x f'(2x+1)\, dx$ $\quad (b) f(5)e^2 - 2\displaystyle\int_0^2 e^x f(2x+1)\, dx$

$(c) f(5)e^2 - 2\displaystyle\int_0^2 e^x f'(2x+1)\, dx$ $\quad (d) f(2x+1)e^x - \displaystyle\int_0^2 e^x f'(2x+1)\, dx$

✍ **Esercizio 12.2.36.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\,dx$$

✍ **Esercizio 12.2.37.**

$$\int_0^1 x f(2x^2+3)\,dx =$$

$$(a)\frac{1}{4}\int_3^5 f(t)\sqrt{\frac{t-3}{2}}\,dt \qquad (b)4\int_3^5 f(t)\sqrt{\frac{t-3}{2}} \qquad (c)\frac{1}{4}\int_3^5 (t)\,dt \qquad (d)4\int_0^1 f(t+3)\,dt$$

✍ **Esercizio 12.2.38.**

$$\int_0^{\pi/4} f(\cos x)\ \tan x\,dx =$$

$$(a)\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{f(t)}{t}\,dt \qquad (b)\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{f(t)}{t}\,dt \qquad (c)\int_0^{\pi/4} f(t)\,t\,dt \qquad (d)\int_1^{\sqrt{2}/2} t\,f(t)\,dt$$

✍ **Esercizio 12.2.39.**

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\ \cos(2x)\,dx =$$

$$(a)2\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \int_0^{\pi/4} f'(x)\ \sin(2x)\,dx\right]$$

$$(b)2\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) - \int_0^{\pi/4} f'(x)\ \sin(2x)\,dx\right]$$

$$(c)\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) - \int_0^{\pi/4} f'(x)\ \sin(2x)\,dx\right]$$

$$(d)\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \int_0^{\pi/4} f'(x)\ \sin(2x)\,dx\right]$$

✍ **Esercizio 12.2.40.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_1^2 \frac{x^3+2}{x^2+2x}\,dx$$

✍ **Esercizio 12.2.41.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_{-1}^0 \frac{2x^3-1}{x^2-3x+2}\,dx$$

✍ **Esercizio 12.2.42.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_2^3 \frac{3-x^3}{x^2+2x-3}\,dx$$

✍ **Esercizio 12.2.43.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_1^2 \frac{4+x^3}{x^2+3x}\,dx$$

✍ **Esercizio 12.2.44.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^3-3}{x^2-2x-3}\,dx$$

✍ **Esercizio 12.2.45.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_2^3 \frac{3x^3+1}{x^2+x-2}\,dx$$

12.3. Integrali generalizzati e funzione integrale

✍ **Esercizio 12.3.1.** *Sia*

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t}{t^2+1} & \text{se } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{t+1} & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Definiamo

$$F(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x f(t)\,dt \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Studiate l'andamento della funzione F (limiti agli estremi del campo di esistenza, crescenza e decrescenza, massimi e minimi, asintoti obliqui) e disegnatene approssimativamente il grafico.

✍ **Esercizio 12.3.2.** *Sia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Allora il seguente enunciato $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tale che se $0 < x < \delta$ allora $\left|\int_x^1 f(t)\,dt - 5\right| < \varepsilon$, significa:*

$(a)\ \lim_{x\to 1^-} \int_x^1 f(t)\,dt = 5 \qquad (b)\ \lim_{x\to 0^+} \int_0^x f(t)\,dt = 5 \qquad (c)\ \int_0^1 f(t)\,dt = 5 \qquad (a)\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\,dt = 5$

✍ **Esercizio 12.3.3.** *Supponete che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?*

(a)Se $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx > 2$ allora esiste $x_0 \in [0,4]$ tale che $f(x_0) > 1$

(b)Se $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx > 4$ allora esiste $x_0 \in [0,4]$ tale che $f(x_0) > 1$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

(d)Se $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx < 0$ allora $f(x) < 100$ per ogni $x \in [0,1]$

✍ **Esercizio 12.3.4.** *Per $a \in \mathbb{R}$, definiamo*

$$g(a) := \int_{-\infty}^{a} (x+a)^2 \, e^x \, dx \qquad e \qquad h(a) := \left| \int_{-\infty}^{a} (x+a)^2 \, e^x \, dx \right|.$$

Calcolate $g(a)$ e calcolate il minimo di $g(a)$ per $a \in \mathbb{R}$.
Calcolate $h(a)$ e calcolate il minimo di $h(a)$ per $a \in \mathbb{R}$.

✍ **Esercizio 12.3.5.** *Calcolate*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)} \, dx.$$

✍ **Esercizio 12.3.6.**

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t(t-1)} \, dt =$$

$(a) \log(1/2) \qquad (b) +\infty \qquad (c) \log(3/2) \qquad (d) \log 2$

✍ **Esercizio 12.3.7.** *L'insieme dei numeri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale generalizzato*

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin t^2}{t^\alpha} \, dt$$

converge è:

$(a)\alpha > 0 \qquad (b)\alpha < 0 \qquad (c)\alpha < 3 \qquad (d)\alpha < 4$

✍ **Esercizio 12.3.8.**

$$\int_{0}^{+\infty} t \, e^{-2t} \, dt =$$

$(a)1/4 \qquad (b)1/4e^2 \qquad (c)1/2 \qquad (d)1/2e^2$

✍ **Esercizio 12.3.9.** *Calcolate*

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$$

✍ **Esercizio 12.3.10.** *Trovate l'insieme $E \subset \mathbb{R}$ dei numeri reali x per cui l'integrale*

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}(1+t^2)}\,dt,$$

eventualmente inteso in senso generalizzato, è convergente. Studiate l'andamento della funzione $F : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) := \frac{x}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}(1+t^2)}\,dt$$

(limiti agli estremi, crescenza e decrescenza, massimi e minimi, asintoti) e disegnatene approssimativamente il grafico.

✍ **Esercizio 12.3.11.**

$$\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt =$$

$$(a) 2e \qquad (b) 2/e \qquad (c) +\infty \qquad (d) 1$$

✍ **Esercizio 12.3.12.** *Enunciate il teorema del confronto per integrali generalizzati ed utilizzatelo per studiare la convergenza di*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{1+t^2}\,dt$$

in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

✍ **Esercizio 12.3.13.** *L'insieme dei numeri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale generalizzato*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{2\alpha}}\,dt$$

converge è:

$$(a) \alpha < 2 \qquad (b) \alpha < 1/2 \qquad (c) 0 < \alpha < 2 \qquad (d) 0 < \alpha < 1/2$$

✍ **Esercizio 12.3.14.**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_1^x \left(t+\frac{1}{t}\right)\, dt =$$

$$(a) 1/2 \qquad (b) 2 \qquad (c) 1 \qquad (d) +\infty$$

✍ **Esercizio 12.3.15.** *Trovate l'insieme D dei numeri $x \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale*

$$\int_1^x \frac{\log|t-3|}{1+t^2}\, dt$$

converge. Studiate quindi continuità, derivabilità, limiti agli estremi del campo di esistenza D, massimi e minimi e disegnate un grafico qualitativo della funzione $F : D \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x) = \int_1^x \frac{\log|t-3|}{1+t^2}\, dt.$$

✍ **Esercizio 12.3.16.** *L'insieme dei numeri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale generalizzato*

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$$

converge è:

$$(a) \alpha < 2 \qquad (b) \alpha > 2 \qquad (c) \alpha < 1 \qquad (d) \alpha > 1$$

✍ **Esercizio 12.3.17.** *Trovate l'insieme D dei numeri $x \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale*

$$\int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{2t+\sin t}}\, dt$$

converge. Studiate quindi continuità, derivabilità, limiti agli estremi del campo di esistenza D, massimi e minimi locali ed assoluti e disegnate un grafico qualitativo della funzione $F : D \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{2t+\sin t}}\, dt.$$

✍ **Esercizio 12.3.18.** *Per quali valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *il seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha}t}{t^{\alpha}}\, dt$$

è convergente?

$$(a)\alpha > 1 \qquad (b)\text{per nessun valore di } \alpha \qquad (c)\alpha < 0 \qquad (d) - 1 < \alpha < 1$$

✍ **Esercizio 12.3.19.** *Il grafico di*

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{|t|}}$$

in un intorno dell'origine è?

✍ **Esercizio 12.3.20.** *Studiate il comportamento e disegnate il grafico della funzione* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$F(x) = \int_0^x \frac{(t^2 - 4)\, e^t}{1 - t}\, dt$$

✍ **Esercizio 12.3.21.** *Per quali valori dei parametri reali* α *e* β *il seguente integrale generalizzato è convergente?*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|t|^{\beta}\, (1 + t^2)^{\alpha}}$$

✍ **Esercizio 12.3.22.** *L'integrale generalizzato*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha} + t^{2\alpha}}$$

converge per

$$(a)\frac{1}{2} < \alpha < 1 \qquad (b)\alpha > 1 \qquad (c)\text{nessun valore di } \alpha \qquad (d)\alpha < \frac{1}{2}$$

✍ **Esercizio 12.3.23.** *Studiate il comportamento e disegnate il grafico della funzione* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita daù*

$$F(x) := \int_0^x \frac{e^t - 8t^2}{1+t^4}\, dt$$

✍ **Esercizio 12.3.24.** *(a) Calcolate, in funzione del parametro reale* α*,*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x+2x^3) - x}{x^\alpha}$$

(b) Determinate per quali valori di α *converge il seguente integrale*

$$\int_0^1 \frac{\sin(x+2x^3) - x}{x^\alpha}\, dx$$

✍ **Esercizio 12.3.25.** *Sia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2 + \sin t}{t^2+1}\, dt$$

L'asintoto obliquo d F *per* $x \to +\infty$ *è*

$(a) y = x+1 \qquad (b) y = x + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t - 1}{t^2+1}\, dt \qquad (c) y = x + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2+1}\, dt \qquad (d) y = x + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + \sin t}{t^2+1}\, dt$

✍ **Esercizio 12.3.26.** *(a) Determinate, in funzione del parametro reale* α*, quanti sono e di che ordine sono gli zeri della funzione*

$$g(x) = \sinh x - \alpha x$$

nell'intervallo $[0, +\infty)$*.*

(b) Determinate per quali valori dei parametri reali α *e* β *converge l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} |\sinh x - \alpha x|^\beta\, dx$$

✍ **Esercizio 12.3.27.** *Sia* $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$F(x) = \int_0^x e^{-4t}(t^2 - 9)\, dt.$$

(1) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'equazione* $F(x) = \alpha$ *ha soluzione in* $[0, +\infty)$*?*
(2) Per quali valori di α *la soluzione in* $[0, +\infty)$ *è unica?*

✍ **Esercizio 12.3.28.** *Sia* f *continua e positiva in* $\mathbb{R}$. *Posto*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

segue che

$(a) \lim_{x\to+\infty} F(x)$ è finito $\quad (b) F(-1) < 0 \quad (c) F$ ha minimo in $\mathbb{R} \quad (d) \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

✍ **Esercizio 12.3.29.** *Sia* $a > 0$. *Allora*

$$\int_a^{+\infty} x^{-4/3}\, dx =$$

$$(a) 3\sqrt[3]{a} \qquad (b) -3\sqrt[3]{a} \qquad (c) +\infty \qquad (d) \frac{3}{\sqrt[3]{a}}$$

✍ **Esercizio 12.3.30.** *Determinate l'insieme* E *dei valori* $x \in \mathbb{R}$ *per cui l'integrale*

$$\int_1^x \frac{e^{-t} - 1}{\sqrt{t^3 + 1}}\, dt$$

è definito e converge. Considerate quindi la funzione $F : E \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t} - 1}{\sqrt{t^3 + 1}}\, dt$$

studiatene continuità, derivabilità, limiti agli estremi del dominio di definizione, eventuali massimi e minimi e disegnatene approssimativamente il grafico.

✍ **Esercizio 12.3.31.**
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{4x^2+1}\, dx =$$
$$(a)\frac{\pi}{8} \qquad (b)1 \qquad (c)0 \qquad (d)+\infty$$

✍ **Esercizio 12.3.32.** *Dite per quali $a \in \mathbb{R}$ converge l'integrale generalizzato*
$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{(\sin x)^\alpha}\, dx$$
Dite come si modifica la risposta se l'integrale in considerazione è
$$\int_0^\pi \frac{e^x-1}{(\sin x)^\alpha}$$

✍ **Esercizio 12.3.33.** *Sia E l'insieme dei numeri reali α per cui l'integrale*
$$\int_1^{+\infty} t^\alpha \arctan t\, dt$$
è convergente. Allora:
$$(a)E=(-2,\infty) \qquad (b)E=(-\infty,3) \qquad (c)E=(-\infty,-1) \qquad (d)E=(-\infty,\infty)$$

✍ **Esercizio 12.3.34.** *Sia $f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$. Allora il grafico di f vicino a $x=0$ è?*

✍ **Esercizio 12.3.35.** *Sia $I=\int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$. Allora l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $I=+\infty$ è:*
$$(a)\alpha \geq -1 \qquad (b)\alpha < -1 \qquad (c)\alpha < 2 \qquad (d)\alpha \geq 2$$

✍ **Esercizio 12.3.36.** *Il grafico di*

$$F(x) := \int_0^x |t|\, dt$$

vicino a $x = 0$ *è?*

✍ **Esercizio 12.3.37.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$(a)\pi \qquad (b)\pi/2 \qquad (c)+\infty \qquad (d)0$

✍ **Esercizio 12.3.38.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2}$$

✍ **Esercizio 12.3.39.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da*

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)\, e^{-|x|}$$

(1) Se ne disegni qualitativamente il grafico (in particolare, crescenza e decrescenza, convessità e concavità.
(2) Si dica inoltre, motivando la risposta, se l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ *è convergente, divergente o indeterminato.*

✍ **Esercizio 12.3.40.** *Qual è l'insieme dei valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *per cui l'integrale generalizzato*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

è convergente?

$(a)\alpha > 0 \qquad (b)\text{solo per } \alpha = 0 \qquad (c)\alpha > 1 \qquad (d)\alpha < 2$

✍ **Esercizio 12.3.41.** *Sia $a \geq 0$. Allora l'integrale generalizzato*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + ax^2}$$

converge per

(a)solo per $a > 0$ (b)per nessun $a \geq 0$ (c)per ogni $a \geq 0$ (d)solo per $a = 0$.

✍ **Esercizio 12.3.42.** *Qual è l'insieme dei parametri $\alpha > 0$ per i quali l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x} + 1}{x + e^{\alpha x}}\, dx$$

è convergente?

$(a) 0 < \alpha < 2$ $(b) \alpha > 2$ $(c) 0 < \alpha < 1$ $(d) \alpha > 1$

✍ **Esercizio 12.3.43.** *Considerate l'integrale*

$$\int_4^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{2x^2 - 3x + 1}\, dx$$

(1) Per quali valori del parametro reale β l'integrale è convergente?
(2) Calcolate il valore dell'integrale quando $\beta = 1$.

✍ **Esercizio 12.3.44.**

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4 + x + 1}\, dx.$$

Allora

$(a) I > \dfrac{1}{3}$ $(b) I = +\infty$ $(c) I = \dfrac{1}{3}$ $(d) I < \dfrac{1}{3}$

✍ **Esercizio 12.3.45.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x - \log(1+x)}{x^\alpha\,(e^x - 1)}$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da:

$$(a) 3 < \alpha < 4 \qquad (b) 0 < \alpha < 1 \qquad (c) 1 < \alpha < 2 \qquad (d) 2 < \alpha < 3$$

✍ **Esercizio 12.3.46.** *Considerare l'integrale*

$$\int_4^{+\infty} \frac{(x+1)^{3/2}}{(x^\alpha + 1)^{5/2}\,(x-3)}\,dx.$$

Per quali valori del parametro reale α l'integrale è convergente? Calcolare il valore dell'integrale quando $\alpha = 1$.

✍ **Esercizio 12.3.47.** *Sia $f(x) = \int_0^x \frac{2}{3t^4-2}\,dt$. Allora il grafico di $f(x)$ vicino all'origine è?*

✍ **Esercizio 12.3.48.** *Sia $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, g(x) = 1$. Allora è sempre vero che*

(a) $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx \leq 1$
(b) $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ è divergente
(c) $g(x) = 1$ ha soluzione per $x > 0$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ è convergente

✍ **Esercizio 12.3.49.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{\sin^2(2x)}{x^\alpha(2+x)}\,dx$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da:

$$(a) 1 < \alpha < 3/2 \qquad (b) 2 < \alpha < 3 \qquad (c) 3 < \alpha < 4 \qquad (d) \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

✍ **Esercizio 12.3.50.** *Sia* $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{2t^2+1}\,dt$. *Allora il grafico di* $f(x)$ *per* x *vicino a 0 è dato da?*

✍ **Esercizio 12.3.51.** *L'insieme dei valori del parametro* $\alpha > 0$ *per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^2\, e^x}{1 - \cos(x^\alpha)}$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da:

$$(a) 1 < \alpha < 2 \qquad (b) \frac{1}{2} < \alpha < 1 \qquad (c) 2 < \alpha < 3 \qquad (d) 1 < \alpha < \frac{3}{2}$$

✍ **Esercizio 12.3.52.** *L'insieme dei valori del parametro* $\alpha > 0$ *per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2} - 1}{2x^{2\alpha} + x^{3\alpha}}$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da:

$$(a) \frac{1}{2} < \alpha < 1 \qquad (b) 2 < \alpha < 3 \qquad (c) 1 < \alpha < 2 \qquad (d) 1 < \alpha < \frac{3}{2}$$

✍ **Esercizio 12.3.53.** *Il grafico di* $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t-1}\,dt$ *vicino a* $x = 0$ *è?*

✍ **Esercizio 12.3.54.** *L'insieme dei valori del parametro* $\alpha > 0$ *per cui l'integrale*

$$\int_1^\infty \frac{1 - e^{1/x}}{x^\alpha}$$

è convergente è:

$$(a) \alpha > 1 \qquad (b) \alpha > 2 \qquad (c) \alpha > -1 \qquad (d) \alpha > 0$$

✍ **Esercizio 12.3.55.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^2 \frac{x^\alpha + 2x^3}{\sin^2 x}$$

è convergente è dato da:

$$(a)\alpha > 3 \qquad (b)\alpha > 4 \qquad (c)\alpha > 1 \qquad (d)\alpha > 2$$

✍ **Esercizio 12.3.56.** *Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e valga $f(x) > 0$ per $x \in [0, +\infty)$. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, allora è sempre vero che:*

(a) f ha minimo in $[0, +\infty)$
(b) f ha massimo in $[0, +\infty)$
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ è convergente
(d) $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ è convergente

✍ **Esercizio 12.3.57.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale improprio*

$$\int_2^3 \frac{\log(x-1)}{(x-2)^\alpha}$$

è convergente è dato da:

$$(a)\alpha > 1 \qquad (b)\alpha > 0 \qquad (c)\alpha < 1 \qquad (d)\alpha < 2$$

✍ **Esercizio 12.3.58.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\sin(1/x)}{(x+1)^\alpha}$$

è convergente è dato da:

$$(a)\alpha > 1 \qquad (b)\text{nessun valore} \qquad (c)\alpha < 1 \qquad (d)\alpha > 2$$

✍ **Esercizio 12.3.59.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, e si abbia $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Allora è vero che*

(a) $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è divergente
(b) $\int_0^{+\infty} f'(x)\,dx$ è divergente
(c) $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -f(0)$
(d) $\int_0^{+\infty} f'(x)\,dx = -f(0)$

✍ **Esercizio 12.3.60.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{2^x}{x^\alpha}$$

è convergente è dato da:

$(a) 0 < \alpha < 2 \qquad (b)$nessun valore $\qquad (c) \alpha > 0 \qquad (d) 0 < \alpha < 1$

✍ **Esercizio 12.3.61.** *Sia E l'insieme dei numeri reali α per cui l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-t}}{t^{2\alpha}}\,dt$$

è convergente. Allora:

$$(a) E = (1/2, \infty) \qquad (b) E = (-\infty, 1/2) \qquad (c) E = \emptyset \qquad (d) E = (-\infty, \infty)$$

✍ **Esercizio 12.3.62.** *Sia*

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |t|\,dt.$$

Allora il grafico di f vicino a $x = 0$ è?

✍ **Esercizio 12.3.63.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da*

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)\, e^{-2x}$$

(1) Se ne disegni qualitativamente il grafico [in particolare, crescenza e decrescenza, convessità e concavità]
(2) Si dica inoltre, motivando la risposta, se l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente, divergente o indeterminato.

✍ **Esercizio 12.3.64.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(e^{2x} - 1)\,(1 - \cos x)^\alpha}$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da:

$$(a) 1 < \alpha < 2 \qquad (b) \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2} \qquad (c) \frac{1}{2} < \alpha < 1 \qquad (d) \frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$$

✍ **Esercizio 12.3.65.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha \sin\sqrt{x}}{2x^2 + x^3}$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da:

$$(a) 1 < \alpha < 2 \qquad (b) \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2} \qquad (c) 0 < \alpha < 1 \qquad (d) \frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$$

✍ **Esercizio 12.3.66.** *L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_1^\infty \frac{e^{1/x^2} - 1}{(x^\alpha + 1)x}\, dx$$

è convergente è dato da:

$$(a) \alpha > -6 \qquad (b) \alpha > -\frac{1}{2} \qquad (c) \alpha > -2 \qquad (d) \alpha > -4$$

✍ **Esercizio 12.3.67.** *Sia*

$$h(x) = \int_{x/2}^{1} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

Allora $h'(\pi) =$

$$(a)\pi/2 \qquad (b) -\sqrt{2}/\pi \qquad (c)1 \qquad (d)0$$

✍ **Esercizio 12.3.68.** *Sia*

$$h(x) = \int_{x/2}^{1} \frac{\sin(\pi t/2)}{t}\, dt.$$

Allora $h'(1) =$

$$(a)2 \qquad (b)2/\pi \qquad (c)1 \qquad (d)0$$

✍ **Esercizio 12.3.69.** *Se* $f(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \sin t^2\, dt$, *allora* $f'(x) =$

$(a)2x \sin x^4 - 2\sin(2x)^2 \qquad (b)x^2 \cos x^4 - 2x\cos(2x)^2 \qquad (c) \cos x^4 - \cos(2x)^2 \qquad (d) \sin x^4 - \sin(2x)^2$

✍ **Esercizio 12.3.70.** *Il polinomio di Taylor della funzione*

$$g(x) = \int_0^x \frac{\cos(2t) - t}{\sqrt{2t^2+1}}\, dt$$

di centro $x_0 = 0$ *e di grado 2 è*

$$(a)x - x^2 \qquad (b)x + x^2 \qquad (c)x + \frac{x^2}{2} \qquad (d)x - \frac{x^2}{2}$$

✍ **Esercizio 12.3.71.** *Se, per* $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_3^{x^2+2} \frac{1}{t^2 - 2t}\, dt$, *allora* $f'(x) =$

$$(a)\frac{2}{x^3+3x} \qquad (b)\frac{2}{x^3+2x} \qquad (c)\frac{2}{x^3+x} \qquad (d)\frac{2}{x^3+4x}$$

✍ **Esercizio 12.3.72.** *Indicata con f la funzione definita da*

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{f(3x) - 3f(x)}$$

✍ **Esercizio 12.3.73.** *Calcolate la derivata prima delle seguenti funzioni:*

$$(a) \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\, dt \qquad (b) \int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt \qquad (c) \int_{x}^{x^2} \sqrt{t\, e^t}\, dt$$

✍ **Esercizio 12.3.74.** *Scrivete lo sviluppo di Taylor di punto iniziale l'origine delle seguenti funzioni:*

$$(a) \int_1^{1+x} \frac{\log t}{t}\, dt \text{ fino all'ordine 2} \qquad (b) \sin\left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right) \text{ fino all'ordine 3}$$

✍ **Esercizio 12.3.75.** *Sia f la funzione definita da*

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt;$$

dimostrate che l'equazione $f(x) = 1 - x$ ha un'unica soluzione su $\mathbb{R}$ e determinare tale soluzione con un errore inferiore a 3/10.

✍ **Esercizio 12.3.76.** *Calcolate*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\sin^2 t + e^{-t^2})\, dt - x}{(\sin^2 x - x^2)x}$$

12.4. Esercizi di tipo teorico

✍ **Esercizio 12.4.1.** *Sia* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Se* $g(a) = -1$*,* $g(b) = 1$ *e* $g'(x) > 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$*, allora:*

$$(a) \int_a^b g(x)\,dx > 0 \qquad (b) \int_a^b g(x)\,dx = 0$$

$(c) g$ non ha né massimo né minimo in $[a,b]$ $\qquad (d) g(x) = 2$ non ha soluzione in $[a,b]$

✍ **Esercizio 12.4.2.** *Sia* $\int_a^b g(x)\,dx > 0$*. Allora necessariamente:*

$(a) \exists x_0 \in [a,b]$ tale che $g(x_0) > 0$ $\qquad (b) g$ è continua e quindi ha massimo in $[a,b]$

$(c) g(x) \geq 0$ in $[a,b]$ $\qquad (d) g(x) > 0$ in $[a,b]$.

✍ **Esercizio 12.4.3.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e periodica di periodo* π*. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?*

$$(a) \forall\, a, b \in \mathbb{R} \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (b) \forall\, a, b \in \mathbb{R} \int_{2a}^{2b} f(x)\,dx = 2\int_a^b f(x)\,dx$$

$$(c) \forall\, a \in \mathbb{R} \int_{a-2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx = 0 \qquad (d) \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

✍ **Esercizio 12.4.4.** *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, allora necessariamente:*

(a)la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ è una funzione derivabile

(b)la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int -0^x f(t)\,dt$ è una funzione crescente

(c)esiste, finito o infinito, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

(d)esiste almeno un massimo locale di f

✍ **Esercizio 12.4.5.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che* $f(x) = -f(-x)$*. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?*

$$(a) \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f^2(x)\,dx \qquad (b) \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

$$(c) \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \qquad (d) \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$$

✍ **Esercizio 12.4.6.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, tale che* $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 6$*. Allora esiste* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$(a) f(x_0) = 2 \qquad (b) f(x_0) = 1 \qquad (c) f(x_0) = 1/2 \qquad (d) f(x_0) = 3/2$$

✍ **Esercizio 12.4.7.** *Sia* $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile e tale che* $g(x) \leq x$ *per ogni* $x \in [0,1]$. *Allora è sempre vero che*

$$(a) \int_0^x g(t)\,dt \leq \; xg(0) \; \text{ per ogni } x \in [0,1] \qquad (b) g(0) \geq 1$$
$$(c) \int_0^x g(t)\,dt \leq \; x^2/2 \; \text{ per ogni } x \in [0,1] \qquad (d) g'(0) \geq 1$$

✍ **Esercizio 12.4.8.** *Le funzioni continue* $f(x)$ *e* $g(x)$ *siano tali che* $\int_1^3 f(x)\,dx \leq \int_1^2 g(x)\,dx$. *Allora, considerando il valore massimo e il valore minimo nei rispettivi intervalli di integrazione, è vero che*

$$(a) \max g(x) \geq \frac{1}{2} \min f(x) \qquad (b) \max f(x) \geq \; 2 \min g(x)$$
$$(c) \max g(x) \geq \; 2 \min f(x) \qquad (d) \max f(x) \geq \frac{1}{2} \min g(x)$$

✍ **Esercizio 12.4.9.** *Sia* $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Se* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > (b-a)\,f(a)$ *allora è sempre vero che:*

$$(a) \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\,f(b) \qquad (b) f(x) \text{ non è costante}$$
$$(c) f(x) \text{ è strettamente crescente} \qquad (d) f(x) > f(a) \; \text{ per ogni } x \in [a,b]$$

12.5. Aree e volumi

✍ **Esercizio 12.5.1.** *Calcolate l'area della regione piana limitata dalle curve*

$$y = x \qquad \text{e} \qquad y = \sin x$$

nell'intervallo $-\pi/4 \leq x \leq \pi/2$.

✍ **Esercizio 12.5.2.** *Calcolate l'area della regione piana compresa tra le curve di equazione*

$$y = x^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad y = 16x^2(x^2 - 1)$$

e le rette verticali di equazione $x = 1$ *e* $x = -1$.

✍ **Esercizio 12.5.3.** *Calcolate, in funzione del parametro reale* c*, l'area* $A(c)$ *della regione piana compresa fra il grafico della funzione* $y = x^3 + cx$*, l'asse delle ascisse e le rette di equazionr* $x = 0$ *e* $x = 1$*. Trovate per quale valore di* c *l'area è minima e calcolate il valore minimo di* $A(c)$.

✍ **Esercizio 12.5.4.** *Calcolate l'area* S *della regione piana compresa tra le curve di equazione* $y = \log x$*, l'asse delle ascisse e la retta* $y = x - (3 - \log 3)$.

✍ **Esercizio 12.5.5.** *In funzione del parametro reale* m *calcolate l'area* $A(m)$ *della regione di piano limitata dalla parabola di equazione* $y = x^2$ *e dalla retta passante per i punti* (m, m^2) *e* $(2m, 4m^2)$*. Calcolate poi massimo e minimo di* $A(m)$ *per* $m \in [-2, 4]$.

✍ **Esercizio 12.5.6.** *In funzione del parametro reale* m *calcolate l'area* $A(m)$ *della regione di piano limitata dalla parabola di equazione* $y = x^2 - 3x$ *e dalla retta di equazione* $y = mx$*. Calcolate poi massimo e minimo di* $A(m)$ *per* $m \in [-4, 0]$.

✍ **Esercizio 12.5.7.** *Sia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $g(x) = \sin x$*. Per* $\alpha \in [0, \pi]$ *indicate con* $A(\alpha)$ *l'area (positiva!) della parte di piano compresa fra il grafico di* g *e le rette* $\{y = 0\}, \{x = \alpha\}$ *e* $\{x = 2\alpha\}$*. Trovate i valori massimi e minimi, relativi ed assoluti, di* $A(\alpha)$ *per* $\alpha \in [0, \pi]$.

✍ **Esercizio 12.5.8.** *Sia* $g(x) = 2x^2$ *per* $0 \le x \le 1$*. Indicate con* $A(\alpha)$ *l'area della regione piana, interna alla striscia* $0 \le x \le 1$ *e compresa tra il grafico di* g *e la retta di equazione* $y = \alpha$*. Calcolate* $A(\alpha)$*, disegnate il grafico di* $A(\alpha)$ *e trovate il valore minimo ed il valore massimo di* $A(\alpha)$ *nell'intervallo* $-1 \le \alpha \le 3$.

✍ **Esercizio 12.5.9.** *Calcolate, per ogni* $\alpha \ge 0$*, l'area* $A(\alpha)$ *della regione piana, compresa fra le curve di equazione*

$$y = 2x^3 \qquad \text{e} \qquad y = \alpha x$$

e le rette verticali di equazione $x = 0$ *e* $x = 2$*. Trovate per quali valori di* α*, compresi nell'intervallo* $0 \le \alpha \le 4$*, l'area* $A(\alpha)$ *assume i valori minimo e massimo.*

✍ **Esercizio 12.5.10.** *Calcolate l'area massima di un trapezio isoscele di perimetro totale 1 e con angoli alla base di ampiezza* $\phi \in (0, \pi/2]$

✍ **Esercizio 12.5.11.** *Calcolate i volumi* V_x *e* V_y *ottenuti ruotando, rispettivamente attorno all'asse delle ascisse o all'asse delle ordinate, il sottografico dell'ellisse di equazione*

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad a > 0, b > 0.$$

✍ **Esercizio 12.5.12.** *Trovate la lunghezza dell'arco di spirale di equazioni* $x(t) = e^{-2t}\cos t$*,* $y(t) = e^{-2t}\sin t$ *per* $t \in [0, +\infty)$.

$$(a) + \infty \qquad (b)\frac{e^2\,\pi}{\sqrt{5}} \qquad (c)\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad (d)\frac{\sqrt{5}}{2e^2}$$

✍ **Esercizio 12.5.13.** *Sia $a > 0$. Calcolate la superficie dello specchio parabolico ottenuto facendo ruotare attorno all'asse x l'arco di parabola di equazione $y = 8\sqrt{ax}$ per $x \in [0, a]$.*

✍ **Esercizio 12.5.14.** *Sia $f_\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f_\alpha(x) = x^2 + \alpha x$, con $\alpha \in [-1, 0]$. Indichiamo con $V(\alpha)$ il volume del solido ottenuto facendo ruotare il grafico di f_α attorno all'asse delle ascisse. Calcolate $V(\alpha)$ e trovate i valori massimo e minimo di $V(\alpha)$ al variare di $\alpha \in [-1, 0]$.*

✍ **Esercizio 12.5.15.** *Calcolate la lunghezza dell'arco di curva piana di equazione $2y^2 = x^3$ fra i punti di coordinate $(0, 0)$ e $(2, 2)$.*

✍ **Esercizio 12.5.16.** *La lunghezza dell'arco di parabola semicubica di equazione $y^2 = x^3$ compreso tra l'origine ed il punto di coordinate $x = 4$ e $y = 8$ è*

$$(a)\frac{4}{5}(10^{2/3} - 1) \qquad (b)\frac{7}{2}10^{2/3} \qquad (c)(10^{5/2} - 1) \qquad (d)\frac{8}{27}(10^{3/2} - 1)$$

✍ **Esercizio 12.5.17.** *Sia $f_\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f_\alpha(x) = x^2 - \alpha$, con $\alpha \in [0, 1]$. Indichiamo con $V(\alpha)$ il volume del solido ottenuto facendo ruotare il grafico di f_α attorno all'asse delle ascisse. Calcolate $V(\alpha)$ e trovate i valori massimo e minimo di $V(\alpha)$ al variare di $\alpha \in [0, 1]$.*

✍ **Esercizio 12.5.18.** *Considerate, per $x \geq 0$, la curva di equazione $y = \sqrt{x}$ e la retta di equazione $y = ax$ con $a \geq 0$. Sia $S(a)$ la regione di piano compresa fra la retta e la curva. Calcolate il volume $V(a)$ del solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la regione $S(a)$.*

✍ **Esercizio 12.5.19.** *Sia S la regione piana delimitata dal grafico della funzione $f(x) = x^3/2$, dalle rette verticali $x = 1$ e $x = 2$ e dall'ase x. Calcolare l'area totale della superficie del solido generato facendo ruotare S attorno all'asse x.*

✍ **Esercizio 12.5.20.** *Si determini il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare l'insieme*

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le \sqrt{\log(2 + 3x)}\}$$

attorno all'asse x.

✍ **Esercizio 12.5.21.** *Sia S la regione piana delimitata dal grafico della funzione*

$$f(x) = \frac{x\sqrt{2x}}{3 + 2x^2} \ \text{ per } 0 \le x \le 2$$

dall'asse x e dalle rette verticali $x = 0$ e $x = 2$. Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare S attorno all'asse x.

✍ **Esercizio 12.5.22.** *Si calcoli il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare l'insieme*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \log(2 + x)\}$$

attorno all'asse y.

✍ **Esercizio 12.5.23.** *Sia S la regione piana delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}\,x)$ per $0 \le x \le 1$ e dalla retta $r(x) = 1 - x$. Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare S attorno all'asse y.*

✍ **Esercizio 12.5.24.** *Sia S la regione piana delimitata dal grafico della funzione $f(x) = 2 - x^2$, dalle rette verticali $x = 0$ e $x = 1$ e dall'asse x. Calcolare l'area totale (parte di base, parte laterale, parte superiore) della superficie del solido generato facendo ruotare S attorno all'asse y.*

✍ **Esercizio 12.5.25.** *Fissato $t \in [0, 1]$, siano $A(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse veritcale il grafico della funzione x per $x \in [0, t]$, e $B(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione x^2 per $x \in [0, t]$. Studiando la funzione $K(t) := A(t) - B(t)$ per $t \in [0, 1]$, si dimostri che per certi valori di t si ha $A(t) > B(t)$, mentre per altri si ha $A(t) < B(t)$, e che l'uguaglianza fra le due aree sussiste per un unico valore di $t \in (0, 1]$. In particolare si determinino il minimo e il massimo di $K(t)$ per $t \in [0, 1]$.*

CAPITOLO 13

Esercizi riguardanti equazioni differenziali ordinarie

13.1. Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

13.1.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 13.1.1.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{y^2+4}t \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Inoltre si determini il valore $\alpha > 0$ per cui $\dfrac{y(t)}{t^\alpha}$ tende a un numero finito e non nullo per $t \to +\infty$.

Si tratta di un'equazione non lineare del primo ordine a variabili separabili. Integrando si ottiene subito

$$\int \left(\frac{y^2+4}{y^2} \right) dy = \int t\,dt + C$$

da cui

$$y - \frac{4}{y} = \int \left(1 + \frac{4}{y^2} \right) dy = \int \left(\frac{y^2+4}{y^2} \right) dy = \frac{t^2}{2} + C$$

quindi imponendo il dato di Cauchy, si ha immediatamente $C = 0$. Dunque si ha

$$\frac{y^2 - 4 - \frac{t^2 y}{2}}{y} = 0.$$

Il numeratore può essere visto come un'equazione di secondo grado in y. Quindi risolvendo si ha

$$y(t) = \frac{t^2/2 \mp \sqrt{\frac{t^4}{4} + 16}}{2} = \frac{t^2 \mp \sqrt{t^4 + 64}}{4}.$$

Siccome il dato di Cauchy è incompatibile con la scelta del segno meno (si avrebbe $y(0) = -2$) la soluzione richiesta del problema di Cauchy proposto è

$$y(t) = \frac{t^2 + \sqrt{t^4 + 64}}{4}.$$

Ora, siccome $\sqrt{t^4 + 64} \sim t^2$ per $t \to +\infty$, si ha che $y(t) \sim \frac{x^2}{2}$ quindi il valore di α richiesto è $\alpha = 2$.

✍ **Esercizio 13.1.2.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^2 + t}{2e^{2y} + 6e^y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale non-lineare, del primo ordine, a variabili separabili. Si ottiene

$$e^{2y} + 6e^y = \int (2e^{2y} + 6e^y)\, dy = \int (t^2 + t)\, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C.$$

Imponendo il dato di Cauchy si ottiene $C = 7$ da cui

$$e^{2y} + 6e^y - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 7 = 0.$$

A questo punto dobbiamo cercare di ricavare la y. Poniamo $z = e^y$. Allora cercando di ricostruire un quadrato si ottiene

$$(z + 3)^2 = z^2 + 6z + 9 = 9 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 7.$$

da cui

$$e^y = z = -3 \mp \sqrt{16 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}}.$$

Il segno meno della radice deve essere scartato a causa della positività dell'esponenziale e anche della incompatibilità del dato di Cauchy. In conclusione dunque

$$y(t) = \log\left(-3 + \sqrt{16 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}}\right).$$

✍ **Esercizio 13.1.3.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 3e^x - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(t)$ vicino all'origine ha:

□ *concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza positiva;*

□ *concavità verso il basso e retta tangente con pendenza positiva;*

□ *concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza negativa;*

□ *concavità verso il basso e retta tangente con pendenza negativa*

Si tratta di un problema di Cauchy in cui compare un'equazione differenziale del primo ordine *non lineare* e *non a variabili separabili.* Quindi in linea di principio non sappiamo come ricavare la soluzione. Ma ai fini dell'esercizio è importante soprattutto conoscere non tanto la forma esatta dell'equazione quanto il comportamento della stessa *localmente*, in particolare vicino al punto $x_0 = 1$. Allora considerando l'equazione si ottiene:

$$y'(0) = 3 - 0 = 3 > 0$$

quindi ricordando il significato geometrico della derivata prima, l'informazione $y'(0) > 0$ ci dice che vicino a $x_0 = 1$ la soluzione ha retta tangente con pendenza positiva. Inoltre derivando l'equazione si ottiene

$$y'' = 3e^x - 2y\,y'$$

da cui

$$y''(0) = 3 - 2y(0)\,y'(0) = 3 - 2 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0.$$

Per cui ricordando il significato geometrico della derivata seconda, questa informazione ci dice che vicino al punto $x_0 = 1$ la soluzione ha concavità verso il basso. La risposta esatta è dunque la seconda.

13.1.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 13.1.4.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{-x}\sqrt{y+1}}{e^{-x}+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

➾ **R.**

$$y = \left[-\frac{1}{2} \log(e^{-x} + 1) + \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log 2 \right]^2 - 1.$$

✍ **Esercizio 13.1.5.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (e^{-3y} + 1)(2x - 1) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

➾ **R.**

$$y(t) = \frac{1}{3} \log \left[(1 + e^{-3}) e^{3x^2 - 3x} - 1 \right].$$

✍ **Esercizio 13.1.6.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (3 + 27y^2)\left(xe^{3x} - 2x^2\right) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

➾ **R.**

$$y(t) = \frac{1}{3} \tan\left(3t\, e^{3t} - e^{3t} - 6t^3 + 1\right).$$

✍ **Esercizio 13.1.7.** *Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale* $y' = 2xe^{-3y}$.

13.1.3. Test a risposta multipla

✍ **Esercizio 13.1.8.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Allora $y(1) =$
☐ e;
☐ 2;
☐ $\sqrt{2}$;
☐ $\sqrt{e}$.

✍ **Esercizio 13.1.9.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - (t+2)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(t)$ vicino all'origine ha:
☐ concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza positiva;
☐ concavità verso il basso e retta tangente con pendenza positiva;
☐ concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza negativa;
☐ concavità verso il basso e retta tangente con pendenza negativa

➻ **R.** Concavità verso il basso e retta tangente con pendenza positiva.

✍ **Esercizio 13.1.10.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 3\sin t + y^2 \\ y(0) = \pi \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(t)$ vicino a $x_0 = 0$ ha:
☐ concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza positiva;
☐ concavità verso il basso e retta tangente con pendenza positiva;
☐ concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza negativa;
☐ concavità verso il basso e retta tangente con pendenza negativa

➻ **R.** Concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza positiva.

13.2. Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine

13.2.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 13.2.1.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 3t + 2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione caratteristica associata è

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

che dà come soluzioni $r = 3$ con doppia molteplicità. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$z(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ora cerco una soluzione dell'equazione non omogenea associata. Per il metodo di somiglianza, la cerco nella forma $\overline{y}(t) = At + B$. Quindi $\overline{y}'(t) = A$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Inserendo questi dati nell'equazione di partenza si ottiene dunque

$$0 - 6A + 9(At + B) = 3t + 2$$

da cui si deduce (uguagliando tra loro i coefficienti del termine di primo grado e uguagliando tra loro i termini noti)

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = \frac{4}{9}.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea di partenza è:

$$y(t) = z(t) + \overline{y}(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t} + \frac{1}{3}\, t + \frac{4}{9},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. A questo punto impongo i dati di Cauchy per risolvere il problema associato. Prima di tutto si ha

$$-1 = y(0) = c_1 + \frac{4}{9}; \tag{13.2.1}$$

in secondo luogo, ricordando che

$$y'(t) = 3\, c_1\, e^{3t} + 3\, c_2\, t\, e^{3t} + c_2\, e^{3t} + \frac{1}{3}$$

si ha

$$2 = y'(0) = 3c_1 + c_2 + \frac{1}{3}. \tag{13.2.2}$$

A questo punto si deve risolvere il sistema lineare non omogeneo a coefficienti costanti costituito da (13.2.1)–(13.2.2). Ricavando c_1 dalla (13.2.1) e inserendo il risultato nella (13.2.2), si ottiene con semplici calcoli

$$c_1 = -\frac{13}{9}, \qquad c_2 = 2 - \frac{1}{3} - 3c_1 = \frac{5}{3} + \frac{13}{3} = 6.$$

Concludendo, la soluzione del problema di Cauchy proposto è:

$$y(t) = -\frac{13}{9}e^{3t} + 6\,t\,e^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{4}{9}.$$

✍ **Esercizio 13.2.2.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Allora $\lim_{t\to+\infty} y(t) =$

□ 0;

□ non esiste;

□ $+\infty$;

□ $-\infty$

L'equazione $y'' + 2y' - 3$ è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea. L'equazione caratteristica associata è $r^2 + 2r - 3 = 0$ che dà come soluzioni $r = 1$ e $r = -3$ da cui la soluzione generale dell'equazione risulta

$$y(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{-3t},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. A questo punto impongo i dati di Cauchy; si ottiene

$$0 = y(0) = c_1 + c_2$$

mentre osservando che $y'(t) = c_1\,e^t - 3c_2\,e^{-3t}$ si deduce

$$1 = y'(0) = c_1 - 3c_2$$

quindi

$$c_1 = \frac{1}{4}; c_2 = -\frac{1}{4}.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione di partenza risulta

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-3t}.$$

A questo punto chiaramente

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$$

quindi la risposta corretta è la terza.

✍ **Esercizio 13.2.3.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos(2t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione $y'' - y' - 2y = \cos(2t)$ è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione caratteristica associata alla corrispondente equazione omogenea è

$$r^2 - r - 2 = 0$$

che dà come soluzioni $r = -1$ e $r = 2$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. A questo punto, dal metodo di somiglianza, cerco una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo

$$\overline{y}(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t).$$

Prima di tutto si ha

$$\overline{y}'(t) = 2\alpha \cos(2t) - 2\beta \sin(2t); \qquad \overline{y}''(t) = -4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t).$$

A questo punto, inserendo i dati ottenuti nell'equazione di partenza, si ottiene

$$-4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t) - 2\alpha \cos(2t) + 2\beta \sin(2t) - 2\alpha \sin(2t) - 2\beta \cos(2t) = \cos(2t)$$

da cui, con semplici calcoli

$$(-6\alpha + 2\beta) \sin(2t) + (-2\alpha - 6\beta) \cos(2t) = \cos(2t)$$

da cui uguagliando i coefficienti dei termini simili si ha

$$\begin{cases} -6\alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha - 6\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{20} \\ \beta = -\dfrac{3}{20}. \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione si partenza è data da

$$\overline{y}(t) = -\frac{1}{20}\sin(2t) - \frac{3}{20}\cos(2t).$$

da cui la soluzione generale ha la forma

$$y(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t} - \frac{1}{20}\sin(2t) - \frac{3}{20}\cos(2t).$$

Imponendo i dati di Cauchy, con semplici calcoli si ottiene la seguente soluzione del problema di Cauchy proposto

$$y(t) = \frac{11}{15}\, e^{-t} + \frac{5}{12}\, e^{2t} - \frac{1}{20}\sin(2t) - \frac{3}{20}\cos(2t).$$

✍ **Esercizio 13.2.4.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 8y = e^{-2t} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

➻ **R.** Equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti. Equazione caratteristica $r^2 - 4r + 8 = 0$ da cui $r = 2 \mp 2i$.
Soluzione generale dell'omogenea

$$y(t) = c_1\, e^{2t}\sin(2t) + c_2\, e^{2t}\,\cos(2t).$$

Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $\overline{y}(t) = A\, e^{-2t}$ da cui inserendo nell'equazione tale espressione assieme all'espressione delle sue derivate si ottiene facilmente $A = 1/20$.
La soluzione generale della non omogenea è dunque

$$y(t) = c_1\, e^{2t}\sin(2t) + c_2\, e^{2t}\,\cos(2t) + \frac{1}{20}\, e^{-2t}.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ottiene facilmente che la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(t) = \frac{11}{10}\, e^{2t}\sin(2t) - \frac{21}{20}\, e^{2t}\,\cos(2t) + \frac{1}{20}\, e^{-2t}.$$

13.2.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 13.2.5.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \sin(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

➻ **R.**

$$y(t) = -\frac{7}{15}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{2t} - \frac{3}{20}\sin(2t) + \frac{1}{20}\cos(2t).$$

✍ **Esercizio 13.2.6.** *Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - 4y' + 13y = 4x$.*

✍ **Esercizio 13.2.7.** *Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale*

$$2y'' + 3y' + 4y = 0.$$

✍ **Esercizio 13.2.8.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y'' + 6y' + 8y = e^{4t} + t^2, \qquad y(1) = 2, \qquad y'(1) = 3.$$

✍ **Esercizio 13.2.9.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y' + 2(\tan t)y = t, \qquad y(-1) = 4.$$

✍ **Esercizio 13.2.10.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

R.

$$y(t) = \frac{1}{9}e^t - \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{1}{3}t\,e^t$$

✍ **Esercizio 13.2.11.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y' + 3(\cot t)y = t, \qquad y(-1) = -\pi.$$

✍ **Esercizio 13.2.12.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y'' + 6y' + 8y = e^{2t} + \sqrt{\pi}t^2, \qquad y(1) = 0, \qquad y'(-1) = 2.$$

✍ **Esercizio 13.2.13.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y' - 6(\cot t)y = t, \qquad y(2) = \pi.$$

✍ **Esercizio 13.2.14.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y' + (\tan t)y = 2t^2, \qquad y(1) = 3.$$

✍ **Esercizio 13.2.15.** *Si consideri l'equazione differenziale*

$$y^{(3)} - 2y'' + 5y' = 0.$$

(i) Se ne determini l'integrale generale.
(ii) Trovare, se esistono, tutte le soluzioni $y(t)$ tali che

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = \pi.$$

(iii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(3)} - 2y'' + 5y' = 3te^t.$$

✍ **Esercizio 13.2.16.** *(i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

(ii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 9y = \cos(\sqrt{2}t).$$

✍ **Esercizio 13.2.17.** *(i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

(ii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 13y = 1 + e^{2t}.$$

✍ **Esercizio 13.2.18.** *(i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y''' + y' = 0.$$

(ii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + y' = 1 + e^{t}.$$

✍ **Esercizio 13.2.19.** *(i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' - 2y' + 17y = 0.$$

(ii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 17y = \sin(2t).$$

.

CAPITOLO 14

Esercizi riguardanti principio di induzione e successioni definite per ricorrenza

14.1. Principio di induzione

✍ **Esercizio 14.1.1.** *Provare per induzione che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha* $3^n \geq \frac{n}{2} 2^n$

Sia $P(n) = \{3^n \geq \frac{n}{2} 2^n\}$. Allora $P(1)$ è vera, infatti $3^1 \geq \frac{1}{2} 2 = 1$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$3^{n+1} = 3^n \, 3 \overset{P(n)}{\geq} \frac{n}{2} \, 2^n \, 3 \overset{???}{\geq} \frac{n+1}{2} 2^{n+1}$$

Questo accade se e solo se

$$\frac{n}{2} \, 3 \geq \frac{n+1}{2} \, 2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2$$

Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.
Si poteva anche procedere ponendo equivalentemente

$$P(n) = \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^n \geq \frac{n}{2} \right\}$$

✍ **Esercizio 14.1.2.** *Provare per induzione che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha* $3^n \geq n 2^n$

Sia $P(n) = \{3^n \geq n\,2^n\}$. Allora $P(1)$ è vera, infatti $3^1 \geq 2$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$3^{n+1} = 3^n\,3 \overset{P(n)}{\geq} n\,2^n\,3 \overset{???}{\geq} (n+1)\,2^{n+1}$$

Questo accade se e solo se

$$3n \geq 2(n+1) \quad\Leftrightarrow\quad n \geq 2$$

Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.
Si poteva anche procedere ponendo equivalentemente

$$P(n) = \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n \right\}$$

✍ **Esercizio 14.1.3.** *Provare per induzione che per ogni $n \geq 2$ si ha $2^n + 4^n \leq 5^n$*

Sia $P(n) = \{2^n + 4^n \leq 5^n\}$. Allora $P(2)$ è vera, infatti $2^2 + 4^2 = 20 \leq 5^2 = 25$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$5^{n+1} = 5^n\,5 \overset{P(n)}{\geq} 5(2^n + 4^n) \geq 2\,2^n + 4\,4^n = 2^{n+1} + 4^{n+1}$$

Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.4.** *Provare per induzione che per ogni $n \geq 6$ si ha $n^n \geq 2^n\,n!$*

Sia $P(n) = \{n^n \geq 2^n\,n!\}$. Allora $P(6)$ è vera, infatti $6^6 = 46656 \geq 2^6 \cdot 6! = 64 \cdot 720 = 46080$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$(n+1)!2^{n+1} = n!2^n(n+1)2 \overset{P(n)}{\leq} n^n(n+1)2 \overset{???}{\leq} (n+1)^{n+1}$$

e questo è vero perché $(\frac{n+1}{n})^n \geq 2$ (si vede applicando la disuguaglianza di Bernoulli).
Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.5.** *Provare che la proposizione $2^n \geq n^2$ è induttiva per $n \geq 3$; per quali valori di n la proposizione è vera?*

Sia $P(n) = 2^n \geq n^2\}$. Dimostrare che $P(n)$ è induttiva per $n \geq 3$ significa dimostrare che per $n \geq 3$, se è vera $P(n)$ allora è anche vera $P(n+1)$. Supponiamo allora che sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$2^{n+1} = 2^n\, 2 \overset{P(n)}{\geq} n^2\, 2 \overset{???}{\geq} (n+1)^2$$

e questo è vero perché $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ per $n \geq 3$.
Con questo abbiamo provato solo che $P(n)$ è induttiva per $n \geq 3$, NON che $P(n)$ è VERA per $n \geq 3$. Infatti per $n = 3$ $P(3)$ è falsa. $P(n)$ è vera per $n \geq 4$, quindi il principio di induzione lo posso applicare per $n \geq 4$. Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 4$.

✍ **Esercizio 14.1.6.** *Provare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $n! \geq 2^{n-1}$*

Sia $P(n) = \{n! \geq 2^{n-1}\}$. Allora $P(1)$ è vera, infatti $1! = 1 \geq 2^0 = 1$. $P(2)$ è anche vera, infatti $2! = 2 \geq 2^1$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{P(n)}{\geq} 2^{n-1}(n+1) \overset{???}{\geq} 2^n$$

e questo è vero perché $n \geq 1$.
Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.7.** *Provare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni $a \geq -1$ si ha $(1+a)^n \geq 1 + na$ (disuguaglianza di Bernoulli)*

Sia $P(n) = \{(1+a)^n \geq 1 + na\}$. Allora $P(1)$ è vera, infatti $1 + a \geq 1 + a$. $P(2)$ è anche vera, infatti $(1+a)^2 = 1 + a^2 + 2a \geq 1 + 2a$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \overset{P(n)}{\geq} (1+na)(1+a) \overset{???}{\geq} (1 + (n+1)a)$$

e questo è vero se e soltanto se $1 + a + na + na^2 \geq 1 + na + a$ e questo è sempre vero.
Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.8.** *Provare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $e^n \geq n + 1$*

Sia $P(n) = \{e^n \geq n+1\}$. Allora $P(1)$ è vera, infatti $e \geq 2$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$e^{n+1} = e^n\, e \overset{P(n)}{\geq} (n+1)e \overset{???}{\geq} (n+2)$$

e questo è vero se e soltanto se $ne + e - n - 2 \geq 0$ e questo è sempre vero perché $ne - n \geq 0$ e $e - 2 \geq 0$
Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.9.** *Provare per induzione che la somma dei cubi interi da 0 a n vale* $S(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$S(1)$ è banalmente vera. $S(2) = 1 + 2^3 = 9 = 3^2$. Supponiamo sia vera $S(n)$. Dimostriamo che è vera $S(n+1)$. Allora

$$S(n+1) = S(n) + (n+1)^3 \overset{S(n)}{\geq} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}[n^2+4n+4] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Quindi per il principio di induzione, $S(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.10.** *Provare per induzione che la somma dei n interi vale* $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$S(1)$ è banalmente vera. $S(2) = 1 + 2 = 3 = \frac{2\,3}{2} = 3$. Supponiamo sia vera $S(n)$. Dimostriamo che è vera $S(n+1)$. Allora

$$S(n+1) = S(n) + (n+1) \overset{S(n)}{\geq} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)}{2}[n+2] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Quindi per il principio di induzione, $S(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.11.** *Provare per induzione che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha* $n^n \geq n!$

Sia $P(n) = \{n^n \geq n!\}$. $P(1)$ è banalmente vera. $P(2) = 2^2 = 4 \geq 2! = 2$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{P(n)}{\leq} n^n(n+1) \overset{???}{\leq} (n+1)^{n+1} = (n+1)^n(n+1)$$

e questo è vero visto che $n^n \leq (n+1)^n$.
Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.12.** *Provare per induzione che la somma dei primi n numeri dispari vale* $S(n) = n^2$

$S(1)$ è banalmente vera. $S(2) = 1 + 3 = 4 = 2^2$. Supponiamo sia vera $S(n)$. Dimostriamo che è vera $S(n+1)$. Allora

$$S(n+1) = S(n) + (2n+1) \overset{S(n)}{\geq} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Quindi per il principio di induzione, $S(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.13.** *Provare per induzione la formula di Stirling*

$$\forall n \qquad \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n}\, n\, e$$

Sia $P(n) = \{(\frac{n}{e})^n \leq n!\}$. $P(1)$ è banalmente vera. $P(2) = (\frac{2}{e})^2 = \frac{4}{e^2} \leq 2$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{P(n)}{\geq} \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) \overset{???}{\geq} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

e questo è vero visto che $e \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ (la successione a secondo membro è crescente e tende ad e che quindi è il suo estremo superiore.
Sia ora $Q(n) = \{(\frac{n}{e})^n ne \geq n!\}$. $Q(1)$ è banalmente vera. $Q(2) = (\frac{2}{e})^2 2e = \frac{8}{e} \geq 2$. Supponiamo sia vera $Q(n)$. Dimostriamo che è vera $Q(n+1)$. Allora

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{Q(n)}{\leq} \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1)\, n\, e \overset{???}{\leq} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} (n+1)\, e$$

e questo è vero visto che $e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ (la successione a secondo membro è decrescente e tende ad e che quindi è il suo estremo inferiore.
Quindi per il principio di induzione, la disuguaglianza di Stirling è vera per ogni n.

14.2. Successioni definite per ricorrenza

14.2.1. Esercizi con traccia della soluzione

✍ **Esercizio 14.2.1.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^3 + a_n}{2} \end{cases}$$

Hint della soluzione: occorre distinguere i casi:

CASO 1: $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$. In tal caso la successione è costantemente uguale a 1 (o rispettivamente -1) per ogni n

CASO 2: $\alpha > 1$

(1) La successione è ben definita

(2) La successione è monotona crescente. Infatti occorre dimostrare che $a_{n+1} \geq a_n$ cioè

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} \geq a_n$$

che è vero se $a_n \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

(3) Si dimostra per induzione che $a_n \geq \alpha$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (vero perché $\alpha > 1$)

(4) Quindi dal passo (2), essendo la successione monotona crescente, si sa che esiste

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

finito o infinito.

(5) Passiamo al limite nella relazione di ricorrenza, si ha

$$\ell = \frac{\ell^3 + \ell}{2}$$

da cui i possibili limiti reali sono $\ell = 0$, $\ell = 1$ oppure $\ell = -1$. Sono però tutti e tre da escludere perché dal passo (3) abbiamo dimostrato che $a_n \geq \alpha > 1$. Quindi se $\alpha > 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

CASO 3: $\alpha < -1$. Analogamente a quanto visto ora, si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

CASO 4: $0 < \alpha < 1$.
(1) La successione è ben definita
(2) La successione è monotona decrescente. Infatti occorre dimostrare che $a_{n+1} \leq a_n$ cioè

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} \leq a_n$$

che è vero se $a_n \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$
(3) Si dimostra per induzione che $0 \leq a_n \leq \alpha$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (vero perché $0 < \alpha < 1$)
(4) Quindi dal passo (2), essendo la successione monotona decrescente, si sa che esiste

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

finito o infinito.
(5) Passiamo al limite nella relazione di ricorrenza, si ha come prima che i possibili limiti reali sono $\ell = 0$, $\ell = 1$ oppure $\ell = -1$. Sono però da escludere $\ell = \pm 1$ perché dal passo (3) abbiamo dimostrato che $0 \leq a_n \leq \alpha < 1$. La stessa relazione ci permette di escludere anche i limiti infinit, quindi se $0 < \alpha < 1$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

CASO 5: $-1 < \alpha < 0$. Analogo al precedente.

✍ **Esercizio 14.2.2.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1} \end{cases}$$

Hint della soluzione:
(1) la successione è ben definita;
(2) per induzione si prova che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(3) la successione è monotona decrescente (si dimostra per induzione che $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(4) dal punto (3) esiste $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$ con $\ell \geq 0$
(5) passando al limite dentro la legge ricorsiva si ottiene che al secondo membro c'è ℓ diviso una quantità che tende all'infinito e che deve uguagliare ℓ per cui deve necessariamente essere $\ell = 0$. Riassumendo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

✍ **Esercizio 14.2.3.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_1 = 2012 \\ a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n + 1} \end{cases}$$

Hint della soluzione:
(1) la successione è ben definita;
(2) per induzione si prova che $a_n > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(3) la successione è monotona decrescente ma è difficile dimostrare la monotonia attraverso la definizione: $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ in quanto si dovrebbe dimostrare che $x + 1 \leq x^n$ (difficile!). Aggirando l'ostacolo, si prova a dimostrare che $a_n \leq 2012 + n$ per induzione.
(4) A questo punto dalla legge ricorsiva

$$a_n = \sqrt[n]{a_{n-1} + 1} \overset{(3)}{\leq} \sqrt[n]{2012 + (n-1) + 1} = \sqrt[n]{2012 + n}$$

quindi dal passo (2)

$$1 < a_n \leq \sqrt[n]{2012 + n}$$

e quindi dal teorema del confronto si conclude che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

14.2.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 14.2.4.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_1 = 2012 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

✍ **Esercizio 14.2.5.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_1 = 2012 \\ a_{n+1} = \pi a_n + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

✍ **Esercizio 14.2.6.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza, al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n} \end{cases}$$

✍ **Esercizio 14.2.7.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{a_n}} \end{cases}$$

Bibliografia

[1] E. Acerbi, G. Buttazzo: *Primo corso di Analisi Matematica*, Pitagora Editrice (Bologna), 1997.

[2] E. Giusti: *Esercizi di Analisi Matematica 1* Bollati Boringhieri, 1989.

[3] Temi d'esame assegnati a vari corsi di Ingegneria presso l'Università degli Studi di Trento, titolari dei corsi: R. Serapioni, A. Valli, A. Visintin.