Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia A

18 Settembre 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$F = \{\text{albero da frutto è infetto}\}$$
$$T = \{\text{il test risulta positivo}\}$$

Dai dati si ricava che:

$$\begin{aligned} P(F) &= 0.005 \\ P(T|\bar{F}) &= 0.03 \quad \text{(falso positivo)} \\ P(\bar{T}|F) &= 0.02 \quad \text{(falso negativo)} \end{aligned}$$

La probabilità che il test sia positivo è

$$\begin{aligned} &T = (T \cup F) \cap (T \cup \bar{F}) \\ &\Rightarrow P(T) = P(T \cup F) + P(T \cup \bar{F}) = P(T|F)P(F) + P(T|\bar{F})P(\bar{F}) \\ &\quad = 0.98 \cdot 0.005 + 0.03 \cdot (1 - 0.005) = 0.03475 \end{aligned}$$

Inoltre, per la formula di Bayes, si ha:

$$P(F|T) = \frac{P(T|F)P(F)}{P(T)} = 0.141$$

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a,b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avremo:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = 1 \ ,$$

dunque la funzione è una densità di probabilità.

Per quel che riguarda media e varianza:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2} = 3 \\
Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{57}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Si ha:

$$\begin{aligned}
E[T] &= E\left[\frac{1}{18}X_1 + \frac{1}{9}X_2 + \alpha X_3\right] = \frac{1}{18}E[X_1] + \frac{1}{9}E[X_2] + \alpha E[X_3] \\
&= \frac{3+18\alpha}{18}\mu =: \mu
\end{aligned}$$

dunque, si ha $\alpha = \frac{5}{6}$.

Il valore della stima del parametro è:

$$T = \frac{1}{18}\cdot 2 + \frac{1}{9}\cdot 4 + \frac{5}{6}\cdot 6 = \frac{50}{9} \ .$$

Per quanto riguarda l'errore quadratico medio:

se lo stimatore è corretto, allora $EQM(T) = Var(T)$, dunque

$$EQM(T)\frac{1}{324}\sigma^2 + \frac{1}{81}\sigma^2 + \frac{25}{36}\sigma^2 = \frac{2070}{2916}\sigma^2 \approx 0.7099\sigma^2$$

Nel caso in cui $\alpha = 0$, allora T è distorto, infatti $E(T) = \frac{1}{6}\mu \neq \mu$, dunque

$$EQM(T) = Var(T) + b(T)^2 = \frac{1}{324}\sigma^2 + \frac{1}{81}\sigma^2 + \frac{1}{36}\mu^2 = \frac{9}{4} \approx 2.25$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia B

18 Settembre 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{albero di agrumi è infetto}\} \\ T &= \{\text{il test risulta positivo}\} \end{aligned}$$

Dai dati si ricava che:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.008 \\ P(T|\bar{A}) &= 0.02 \qquad \text{(falso positivo)} \\ P(\bar{T}|A) &= 0.05 \qquad \text{(falso negativo)} \end{aligned}$$

La probabilità che il test sia positivo è

$$\begin{aligned} &T = (T \cup A) \cap (T \cup \bar{A}) \\ \Rightarrow &P(T) = P(T \cup A) + P(T \cup \bar{A}) = P(T|A)P(A) + P(T|\bar{A})P(\bar{A}) \\ &\quad = 0.95 \cdot 0.008 + 0.02 \cdot (1 - 0.008) = 0.0274 \end{aligned}$$

Inoltre, per la formula di Bayes, si ha:

$$P(A|T) = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T)} = 0.2770$$

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a, b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avremo:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = 1 \ ,$$

dunque la funzione è una densità di probabilità.

Per quel che riguarda media e varianza:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2} = 6.5 \\
Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \approx 4.0833
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Si ha:

$$\begin{aligned}
E[T] &= E\left[\frac{1}{26}X_1 + \frac{2}{13}X_2 + \alpha X_3\right] = \frac{1}{26}E[X_1] + \frac{2}{13}E[X_2] + \alpha E[X_3] \\
&= \frac{5+26\alpha}{26}\mu =: \mu
\end{aligned}$$

dunque, si ha $\alpha = \frac{21}{26}$.

Il valore della stima del parametro è:

$$T = \frac{1}{26}\cdot(-26) + \frac{2}{13}\cdot 39 + \frac{21}{26}\cdot 26 = 26 \ .$$

Per quanto riguarda l'errore quadratico medio:

se lo stimatore è corretto, allora $EQM(T) = Var(T)$, dunque

$$EQM(T) = \frac{1}{676}\sigma^2 + \frac{4}{169}\sigma^2 + \frac{441}{676}\sigma^2 = \frac{458}{676}\sigma^2 \approx 0.6775\sigma^2$$

Nel caso in cui $\alpha = 0$, allora T è distorto, infatti $E(T) = \frac{5}{26}\mu \neq \mu$, dunque $b(T) = \frac{5}{26}\mu - \mu = -\frac{21}{26}\mu$, allora

$$EQM(T) = Var(T) + b(T)^2 = \frac{1}{676}\sigma^2 + \frac{4}{676}\sigma^2 + \frac{441}{676}\mu^2 = \frac{451}{676} \approx 0.6672$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia C

18 Settembre 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$U = \{\text{albero di ulivo è infetto}\}$$
$$T = \{\text{il test risulta positivo}\}$$

Dai dati si ricava che:

$$\begin{aligned} P(U) &= 0.009 \\ P(T|\bar{U}) &= 0.015 \quad \text{(falso positivo)} \\ P(\bar{T}|U) &= 0.035 \quad \text{(falso negativo)} \end{aligned}$$

La probabilità che il test sia positivo è

$$\begin{aligned} &T = (T \cup U) \cap (T \cup \bar{U}) \\ &\Rightarrow P(T) = P(T \cup U) + P(T \cup \bar{U}) = P(T|U)P(U) + P(T|\bar{U})P(\bar{U}) \\ &\quad = 0.965 \cdot 0.009 + 0.015 \cdot (1 - 0.009) = 0.0235 \end{aligned}$$

Inoltre, per la formula di Bayes, si ha:

$$P(U|T) = \frac{P(T|U)P(U)}{P(T)} = 0.3688$$

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a, b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avremo:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = 1 \ ,$$

dunque la funzione è una densità di probabilità.

Per quel che riguarda media e varianza:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2} = 2.5 \\ Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \approx 0.7500 \end{aligned}$$

Esercizio 3. Si ha:

$$\begin{aligned} E[T] &= E\left[\frac{3}{14}X_1 + \frac{2}{7}X_2 + \alpha X_3\right] = \frac{3}{14}E[X_1] + \frac{2}{7}E[X_2] + \alpha E[X_3] \\ &= \frac{7+14\alpha}{14}\mu =: \mu \end{aligned}$$

dunque, si ha $\alpha = \frac{1}{2}$.

Il valore della stima del parametro è:

$$T = \frac{3}{14} \cdot (-1) + \frac{2}{7} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 = \frac{67}{14} \approx 4.7857 \ .$$

Per quanto riguarda l'errore quadratico medio:

se lo stimatore è corretto, allora $EQM(T) = Var(T)$, dunque

$$EQM(T) = \frac{9}{196}\sigma^2 + \frac{4}{49}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{74}{196}\sigma^2 \approx 0.3776\sigma^2$$

Nel caso in cui $\alpha = 0$, allora T è distorto, infatti $E(T) = \frac{1}{2}\mu \neq \mu$, dunque $b(T) = \frac{1}{2}\mu - \mu = -\frac{1}{2}\mu$, allora

$$EQM(T) = Var(T) + b(T)^2 = \frac{9}{196}\sigma^2 + \frac{4}{49}\sigma^2 + \frac{1}{4}\mu^2 = \frac{26}{196} \approx 0.1327$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia D

18 Settembre 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$V = \{\text{filare è infetto}\}$$
$$T = \{\text{il test risulta positivo}\}$$

Dai dati si ricava che:

$$\begin{aligned} P(V) &= 0.007 \\ P(T|\bar{V}) &= 0.025 \quad \text{(falso positivo)} \\ P(\bar{T}|V) &= 0.03 \quad \text{(falso negativo)} \end{aligned}$$

La probabilità che il test sia positivo è

$$\begin{aligned} &T = (T \cup V) \cap (T \cup \bar{V}) \\ &\Rightarrow P(T) = P(T \cup V) + P(T \cup \bar{V}) = P(T|V)P(V) + P(T|\bar{V})P(\bar{V}) \\ &\quad = 0.97 \cdot 0.007 + 0.025 \cdot (1 - 0.007) = 0.0316 \end{aligned}$$

Inoltre, per la formula di Bayes, si ha:

$$P(V|T) = \frac{P(T|V)P(V)}{P(T)} = 0.2148$$

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a, b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avremo:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = 1 \ ,$$

dunque la funzione è una densità di probabilità.

Per quel che riguarda media e varianza:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2} = 1 \\ Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \approx 5.3333 \end{aligned}$$

Esercizio 3. Si ha:

$$\begin{aligned} E[T] &= E\left[\frac{3}{25}X_1 + \frac{4}{5}X_2 - \alpha X_3\right] = \frac{3}{25}E[X_1] + \frac{4}{5}E[X_2] - \alpha E[X_3] \\ &= \frac{23-25\alpha}{25}\mu =: \mu \end{aligned}$$

dunque, si ha $\alpha = -\frac{2}{25}$.

Il valore della stima del parametro è:

$$T = \frac{3}{25}\cdot 2 + \frac{4}{5}\cdot 4 - \frac{2}{25}\cdot(-1) = \frac{88}{25} = 3.52 \ .$$

Per quanto riguarda l'errore quadratico medio:

se lo stimatore è corretto, allora $EQM(T) = Var(T)$, dunque

$$EQM(T) = \frac{9}{625}\sigma^2 + \frac{16}{25}\sigma^2 + \frac{4}{625}\sigma^2 = \frac{413}{625}\sigma^2 \approx 0.6608\sigma^2$$

Nel caso in cui $\alpha = 0$, allora T è distorto, infatti $E(T) = \frac{23}{25}\mu \neq \mu$, dunque $\frac{23}{25}\mu - \mu = -\frac{2}{25}\mu$, allora

$$EQM(T) = Var(T) + b(T)^2 = \frac{9}{625}\sigma^2 + \frac{16}{25}\sigma^2 + \frac{529}{625}\mu^2 \approx 0.6544$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia E

18 Settembre 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$
\begin{aligned}
C &= \{\text{il giocatore è un calciatore}\} \\
B &= \{\text{il giocatore è un cestista}\} \\
T &= \{\text{il giocatore è un tennista}\} \\
E &= \{\text{il giocatore partecipa per la prima volta ad un torneo}\}
\end{aligned}
$$

Dai dati si ricava che:

$$
\begin{aligned}
P(C) = 0.5,\, P(B) = 0.3,\; P(T) = 1 - 0.5 - 0.3 = 0.2 \\
P(E|C) = 0.1,\, P(E|B) = 0.33,\; P(E|T) = 0.1
\end{aligned}
$$

1. La probabilità che un giovane scelto a caso sia al suo primo torneo è

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P((E \cap C) \cup (E \cap B) \cup (E \cap T)) \\
&= P(E|C)P(C) + P(E|B)P(B) + P(E|T)P(T) \\
&= 0.1 \cdot 0.5 + 0.33 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.169
\end{aligned}
$$

2. La probabilità che il partecipante scelto sia un cestista, sapendo che è al suo primo torneo, è, per la formula di Bayes,

$$
P(B|E) = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E)} = 0.5858
$$

3. La probabilità che il partecipante scelto sia un calciatore, sapendo che non è al suo primo torneo, è, per la formula di Bayes,

$$\begin{aligned} P(C|\bar{E}) &= \frac{P(\bar{E}|C)P(C)}{P(\bar{E})} = \frac{(1-P(E|C))P(C)}{1-P(E))} \\ &= \frac{(1-0.1)0.5}{1-0.169} = 0.5415 \end{aligned}$$

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a,b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avremo:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = 1 \ ,$$

dunque la funzione è una densità di probabilità.

Dalle proprietà della media, si ricava che $E[Y] = E[X+1] = E[X]+1$. D'altra parte,

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2} = 5,$$

allora $E[Y] = 5 + 1 = 6$.

Esercizio 3. Sia X la v.a. che misura l'evento "l'autobus si ferma improvvisamente per un guasto all'$i$esimo chilometro". Dunque, avremo

$$P(X = x) = \frac{1}{30}, \ x = 1, \dots, 30 \ .$$

Tra il 15esimo ed il 19esimo chilometro l'autobus percorre 5 chilometri dei 30 totali, allora

$$\begin{aligned} P(15 \leq X \leq 19) &= P(X = 15) + P(X = 16) \\ &+ P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) \\ &= 5 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{6} \approx 0.1667 \ . \end{aligned}$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia F

18 Settembre 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$
\begin{aligned}
R &= \{\text{il giocatore è un rugbista}\} \\
B &= \{\text{il giocatore è un cestista}\} \\
V &= \{\text{il giocatore è un pallavolista}\} \\
E &= \{\text{il giocatore partecipa per la prima volta ad un torneo}\}
\end{aligned}
$$

Dai dati si ricava che:

$$
\begin{aligned}
P(R) = 0.4,\ P(B) = 0.15,\ P(V) = 1 - 0.4 - 0.15 = 0.45 \\
P(E|R) = 0.1,\ P(E|B) = 0.25,\ P(E|V) = 0.15
\end{aligned}
$$

1. La probabilità che un giovane scelto a caso sia al suo primo torneo è

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P((E \cap R) \cup (E \cap B) \cup (E \cap V)) \\
&= P(E|R)P(R) + P(E|B)P(B) + P(E|V)P(V) \\
&= 0.1 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.15 + 0.15 \cdot 0.45 = 0.145
\end{aligned}
$$

2. La probabilità che il partecipante scelto sia un rugbista, sapendo che è al suo primo torneo, è, per la formula di Bayes,

$$
P(R|E) = \frac{P(E|R)P(R)}{P(E)} = 0.2759
$$

3. La probabilità che il partecipante scelto sia un cestista, sapendo che non è al suo primo torneo, è, per la formula di Bayes,

$$\begin{aligned} P(B|\bar{E}) &= \frac{P(\bar{E}|B)P(B)}{P(\bar{E})} = \frac{(1-P(E|B))P(B)}{1-P(E))} \\ &= \frac{(1-0.25)0.15}{1-0.145} = 0.1316 \end{aligned}$$

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a,b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avremo:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = 1 \ ,$$

dunque la funzione è una densità di probabilità.

Dalle proprietà della media, si ricava che $E[Y] = E[X-1] = E[X]-1$. D'altra parte,

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2} = 6.5,$$

allora $E[Y] = 6.5 - 1 = 5.5$.

Esercizio 3. Sia X la v.a. che misura l'evento "l'autobus si ferma improvvisamente per un guasto all'$i$esimo chilometro". Dunque, avremo

$$P(X = x) = \frac{1}{25}, \ x = 1, \dots, 25 \ .$$

Tra il quarto ed il decimo chilometro l'autobus percorre 7 chilometri dei 25 totali, allora

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 10) &= P(X=4) + P(X=5) \\ &+ P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) \\ &= 7 \cdot \frac{1}{25} = 0.28 \ . \end{aligned}$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia G

18 Settembre 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$
\begin{aligned}
C &= \{\text{il giocatore è un calciatore}\}\\
B &= \{\text{il giocatore è un cestista}\}\\
R &= \{\text{il giocatore è un rugbista}\}\\
E &= \{\text{il giocatore partecipa per la prima volta ad un torneo}\}
\end{aligned}
$$

Dai dati si ricava che:

$$
\begin{aligned}
P(C) = 0.58,\ P(R) = 0.18,\ P(B) = 1 - 0.58 - 0.18 = 0.24\\
P(E|C) = 0.24,\ P(E|R) = 0.05,\ P(E|B) = 0.31
\end{aligned}
$$

1. La probabilità che un giovane scelto a caso sia al suo primo torneo è

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P((E \cap C) \cup (E \cap B) \cup (E \cap R))\\
&= P(E|R)P(R) + P(E|C)P(C) + P(E|B)P(B)\\
&= 0.05 \cdot 0.18 + 0.24 \cdot 0.58 + 0.31 \cdot 0.24 = 0.2226
\end{aligned}
$$

2. La probabilità che il partecipante scelto sia un cestista, sapendo che è al suo primo torneo, è, per la formula di Bayes,

$$
P(C|E) = \frac{P(E|C)P(C)}{P(E)} = 0.6253
$$

3. La probabilità che il partecipante scelto sia un calciatore, sapendo che non è al suo primo torneo, è, per la formula di Bayes,

$$P(C|\bar{E}) = \frac{P(\bar{E}|C)P(C)}{P(\bar{E})} = \frac{(1-P(E|C))P(C)}{1-P(E))}$$
$$= \frac{(1-0.24)0.58}{1-0.2226} = 0.5670$$

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a,b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Avremo:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = 1\ ,$$

dunque la funzione è una densità di probabilità.

Dalle proprietà della media, si ricava che $E[Y] = E[2X+1] = 2E[X]+1$. D'altra parte,

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2} = 2.5,$$

allora $E[Y] = 2 \cdot 2.5 + 1 = 6$.

Esercizio 3. Sia X la v.a. che misura l'evento "l'autobus si ferma improvvisamente per un guasto all'$i$esimo chilometro". Dunque, avremo

$$P(X = x) = \frac{1}{50},\ x = 1, \ldots, 50\ .$$

Tra il 32esimo ed il 40esimo chilometro l'autobus percorre 9 chilometri dei 50 totali, allora

$$\begin{aligned} P(32 \le X \le 40) &= P(X=32) + P(X=33) \\ &+ P(X=34) + P(X=35) + P(X=36) + P(X=37) \\ &+ P(X=38) + P(X=39) + P(X=40) \\ &= 9 \cdot \frac{1}{50} = 0.18\ . \end{aligned}$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.

Prova scritta di Probabilità e Statistica – Soluzione traccia H

18 Settembre 2015

Esercizio 1. Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned}
C &= \{\text{il giocatore è un calciatore}\}\\
V &= \{\text{il giocatore è un pallavolista}\}\\
T &= \{\text{il giocatore è un tennista}\}\\
E &= \{\text{il giocatore partecipa per la prima volta ad un torneo}\}
\end{aligned}$$

Dai dati si ricava che:

$$P(C) = 0.26, P(V) = 0.55, \; P(T) = 1 - 0.26 - 0.55 = 0.19$$
$$P(E|C) = 0.1, P(E|V) = 0.33, \; P(E|T) = 0.1$$

1. La probabilità che un giovane scelto a caso sia al suo primo torneo è

$$\begin{aligned}
P(E) &= P((E \cap C) \cup (E \cap V) \cup (E \cap T))\\
&= P(E|C)P(C) + P(E|V)P(V) + P(E|T)P(T)\\
&= 0.1 \cdot 0.26 + 0.33 \cdot 0.19 + 0.1 \cdot 0.19 = 0.2265
\end{aligned}$$

2. La probabilità che il partecipante scelto sia un cestista, sapendo che è al suo primo torneo, è, per la formula di Bayes,

$$P(T|E) = \frac{P(E|T)P(T)}{P(E)} = 0.0839$$

3. La probabilità che il partecipante scelto sia un calciatore, sapendo che non è al suo primo torneo, è, per la formula di Bayes,

$$
\begin{aligned}
P(T|\bar{E}) &= \frac{P(\bar{E}|T)P(T)}{P(\bar{E})} = \frac{(1-P(E|T))P(T)}{1-P(E))} \\
&= \frac{(1-0.1)0.19}{1-0.0839} = 0.2211
\end{aligned}
$$

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a,b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

Avremo:

$$
\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = 1 \ ,
$$

dunque la funzione è una densità di probabilità.

Dalle proprietà della media, si ricava che $E[Y] = E[2X-1] = 2E[X]-1$. D'altra parte,

$$
E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2} = 1,
$$

allora $E[Y] = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Esercizio 3. Sia X la v.a. che misura l'evento "l'autobus si ferma improvvisamente per un guasto all'$i$esimo chilometro". Dunque, avremo

$$
P(X = x) = \frac{1}{19}, \ x = 1, \dots, 19 \ .
$$

Tra il primo ed il sesto chilometro l'autobus percorre 6 chilometri dei 19 totali, allora

$$
\begin{aligned}
P(1 \leq X \leq 6) &= P(X=1) + P(X=2) \\
&\quad + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\
&= 6 \cdot \frac{1}{19} = 0.3158 \ .
\end{aligned}
$$

Esercizio 4. Vedi Teoria.