Esercizi sulla sintesi per SSE

Tiziano Villa

Anno Accademico 2009-10

Nome e Cognome:
Matricola:
Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	X	
problema 2	X	
problema ...	X	
totale	X	

1. Data la definizione di cofattore generalizzato come funzione incompletamente specificata

$$co(f, g) = (fg, \bar{g}, \bar{f}g),$$

si dimostri che che il cofattore di Shannon f_x e' una copertura di $co(f, x)$, cioe'

$$fx \subseteq f_x \subseteq fx + \bar{x};$$

inoltre si dimostri che e' l'unica copertura di $co(f, x)$ indipendente da x.

Si dimostrino le seguenti proprieta' del cofattore di Shannon:

(a) $xf_x + \overline{x}f_{\overline{x}} = f$
(b) $(f_x)_y = f_{xy}$
(c) $(fg)_x = f_x g_x$
(d) $(\overline{f})_x = \overline{(f_x)}$

Si dimostrino le seguenti proprieta' del cofattore generalizzato:

(a) $f = g\ co(f, g) + \overline{g}\ co(f, \overline{g})$
(b) $co(co(f, g), h) = co(f, gh)$
(c) $co(fg, h) = co(f, h)co(g, h)$
(d) $co(\overline{f}, g) = \overline{co(f, g)}$

2. (a) Si dimostri che $\overline{f} = x\overline{(f_x)} + \overline{x}\overline{(f_{\overline{x}})}$.

   (b) Si applichi il paradigma di ricorsione monotona per complementare la funzione:

   $$f = xy'z' + wxy' + wy'z + wx'z + wyz + xyz + w'xy'z$$

   usando il processo di fusione indicato dal punto precedente.

   (c) Si complementi f usando la legge di De Morgan.

   (d) Si calcoli

   $$U \sharp \mathcal{F},$$

   dove U e' il cubo universale e $\mathcal{F}$ e' la copertura data sopra

   $$\mathcal{F} = \{xy'z', wxy', wy'z, wx'z, wyz, xyz, w'xy'z\}.$$

   L'operazione $\sharp$ tra due cubi α e β e' definita come segue:

   $$\alpha \sharp \beta = \begin{cases} a_1.b_1' & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2.b_2' & \dots & a_n \\ \dots & & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n.b_n' \end{cases}$$

   Che cosa si ottiene ?

   (e) Si calcoli

   $$U \sharp (U \sharp \mathcal{F}).$$

   Che cosa si ottiene ?

3. Si applichi il paradigma di ricorsione monotona per complementare la funzione:

$$f = ab'c' + ab'd + b'cd + a'cd + bcd + abc + ab'cd'$$

(a) E' noto che l'operazione di fusione delle chiamate ricorsive si esegue con la seguente procedura MERGE_WITH_CONTAINMENT, dove data una funzione g s'indicano rispettivamente con $H_0 = \{\cup_{i=1}^{l} c_i\}$ e $H_1 = \{\cup_{j=1}^{k} d_j\}$ le coperture di $g_{x'}$ e g_x:

MERGE_WITH_CONTAINMENT(H_0, H_1) {
$H_2 = \{c_j \mid \exists j \; s.t. c_j \subseteq d_i\} \cup \{d_j \mid \exists \; is.t. d_j \subseteq c_i\}$
$H_0 = H_0 \setminus H_2$
$H_1 = H_1 \setminus H_2$
return($x'H_0 + xH_1 + H_2$)
}

Un'alternativa alla procedura MERGE_WITH_CONTAINMENT e' la seguente procedura MERGE_WITH_COVER:

MERGE_WITH_COVER(H_0, H_1) {
$H_2 = \{c_j \mid c_j \subseteq \{\cup d_i\}\} \cup \{d_j \mid d_j \subseteq \{\cup c_i\}\}$
$H_0 = H_0 \setminus H_2$
$H_1 = H_1 \setminus H_2$
return($x'H_0 + xH_1 + H_2$)
}

Si ripeta il calcolo del complemento di

$$f = ab'c' + ab'd + b'cd + a'cd + bcd + abc + ab'cd'$$

usando MERGE_WITH_COVER invece che MERGE_WITH_CONTAINMENT e si confrontino i risultati.

Che cosa si puo' dire delle proprieta' delle coperture del complemento ottenute usando l'una o l'altra procedura di fusione ?

Traccia. Che cosa si puo' dire circa l'irridondanza o la primalita' delle coperture ottenute ?

4. Sia f una funzione con copertura $F = w'x'y'z' + wx'z' + wx + w'x'yz$.

   (a) Si complementi f con il metodo di ricorsione monotona. Si mostrino i risultati ad ogni passo.

   Traccia di soluzione.

   Cofattorizzando con l'ordine w, x, y, z, si ottiene la seguente copertura del complemento $F_1' = wx'z + w'x + w'yz' + w'y'z$.

(b) Dati due cubi α e β, si definisca la seguente operazione $\alpha \tilde{\sharp} \beta$:

$$\alpha \tilde{\sharp} \beta = \begin{cases} a_1.b'_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1.b_1 & a_2.b'_2 & \dots & a_n \\ \dots & & & \\ a_1.b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n.b'_n \end{cases}$$

Si analizzi l'effetto di tale operazione e la si usi per calcolare il complemento di f, mostrando i passi del calcolo.

Traccia di soluzione.

Calcolando $U \tilde{\sharp} F$ (dove U e' l'universo su x, y, z, w), si ottiene la seguente copertura disgiunta del complemento $F'_2 = wx'z + w'x + w'x'yz' + w'x'y'z$.

(c) Si usi la legge di De Morgan per ottenere il complemento di f. Si semplifichi tale risultato rispetto al contenimento per cubo singolo. Ci sono primi di $\overline{f}$ che mancano dalla lista cosi' ottenuta ? Questo fatto a quale congettura induce ?

Traccia di soluzione.

Si ottiene la seguente copertura del complemento $F_3' = w'x + w'yz' + w'y'z + wx'z + x'y'z$.

Tale copertura contiene tutti i primi di $\overline{f}$.

E' una proprieta' generale di questo procedimento di produrre tutti i primi del complemento.

5. (a) Si dimostri che p e' un primo di f se e solo se e' un cubo massimale (un cubo massimale non e' contenuto in nessun altro cubo) dell'insieme che contiene i seguenti cubi:

   i. $p = qx$, q e' un primo di f_x, $q \not\subseteq f_{\bar{x}}$

   ii. $p = r\bar{x}$, r e' un primo di $f_{\bar{x}}$, $r \not\subseteq f_x$

   iii. $p = qr$, q e' un primo di f_x, r e' un primo di $f_{\bar{x}}$

   (b) Si dimostri il teorema precedente anche nel caso in cui la terza clausola iii. sia sostituita da

   iii. $p = \text{CONSENSO}(qx, r\bar{x})$, q e' un primo di f_x, r e' un primo di $f_{\bar{x}}$.

   L'operazione CONSENSO tra due cubi α e β e' definita come segue:

$$\text{CONSENSO}(\alpha, \beta) = \begin{cases} a_1 + b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n.b_n \\ a_1.b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n.b_n \\ \dots & & & \\ a_1.b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n + b_n \end{cases}$$

   (c) Si consideri il risultato del calcolo $U \sharp (U \sharp \mathcal{F})$, eseguito per l'esercizio 2. (e). Data una qualsiasi copertura $\mathcal{F}$ di una funzione f, si puo' dimostrare un'affermazione generale sul risultato del calcolo $U \sharp (U \sharp \mathcal{F})$?

6. Date le funzioni

$$f_1 = \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$$
$$f_2 = \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c + abc + \overline{a}b\overline{c}$$

   (a) Si generino tutti i primi di f_1 usando la procedura monotona ricorsiva di generazione dei primi;

   (b) Si generino tutti i primi di f_2 usando la procedura monotona ricorsiva di generazione dei primi;

   (c) Si generi con l'algoritmo di tautologia la tavola di Quine-McCluskey ridotta di f_1;

   (d) Si generi con l'algoritmo di tautologia la tavola di Quine-McCluskey ridotta di f_2;

   Nota: in alternativa alla procedura monotona si possono calcolare i primi con l'algoritmo di espansione rispetto al complemento della funzione.

7. (a) Si generino tutti i primi della funzione multi-uscita (f_1, f_2) (dove f_1 e f_2 sono date nel problema precedente), usando l'algoritmo di espansione rispetto al complemento della funzione.

   (b) Si generi la tavola di Quine-McCluskey ridotta della funzione multi-uscita (f_1, f_2) del problema precedente:

$$f_1 = \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$$
$$f_2 = \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c + abc + \overline{a}b\overline{c}$$

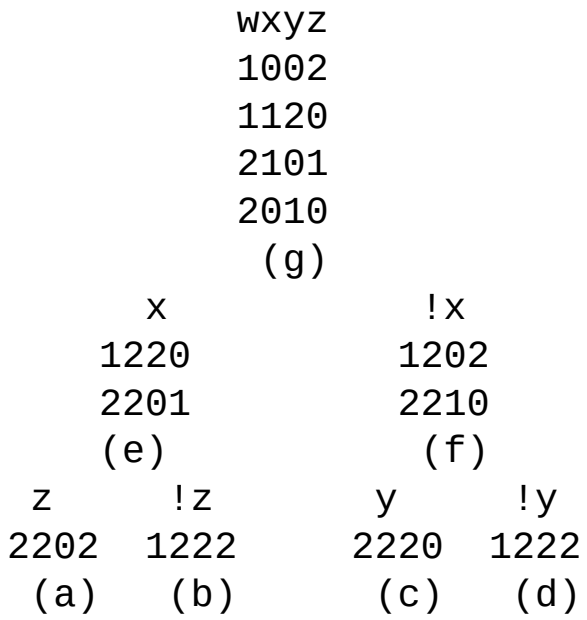
8. (a) Data la seguente funzione Booleana incompletamente specificata:

$$\begin{aligned} f &= wx'y' + wxz' \\ d &= xy'z + x'yz' \end{aligned}$$

dove d sono i punti dove non e' specificata, si trovino tutti i primi con il metodo di ricorsione monotona.

Traccia di soluzione.

Una decomposizione ricorsiva e' la seguente



I seguenti primi sono associati ai vari stadi del processo:

- (a): $\overline{y}$
- (b): w
- (c): $\overline{z}$
- (d): w
- (e): i massimali in $\{\overline{y}z, w\overline{z}, w\overline{y}\}$, cioe' $\overline{y}z, w\overline{z}, w\overline{y}$
- (f): i massimali in $\{y\overline{z}, w\overline{y}, w\overline{z}\}$, cioe' $y\overline{z}, w\overline{z}, w\overline{z}$
- (g): i massimali in $\{wx\overline{y}, x\overline{y}z, wx\overline{z}, \overline{x}y\overline{z}, w\overline{xy}, w\overline{xz}, w\overline{y}, w\overline{yz}, w\overline{y}z, wy\overline{z}, w\overline{z}\}$, cioe' $w\overline{y}, w\overline{z}, \overline{x}y\overline{z}, x\overline{y}z$

Nel fondere i primi di due sottoalberi non si dimentichi di eseguire i prodotti incrociati.

(b) Data la funzione Booleana a 3 ingressi e 2 uscite

$$\begin{aligned} f_1 &= xz' + x'z \\ f_2 &= yz' + x'z + xy \end{aligned}$$

e il cubo

```
x y z  f1f2
- 1 -  0 1
```

si calcoli se il cubo e' contenuto nella funzione riducendo il problema a una verifica di tautologia.

Traccia.

Si tratti la funzione a due uscite come una funzione a piu' valori e una sola uscita (dove le uscite diventano un nuovo ingresso a due valori).

Traccia della soluzione.

L'idea e' di usare il teorema per cui dati un cubo c e una copertura F, $c \subseteq F \Leftrightarrow F_c = 1$.

La funzione a piu' uscite data si puo' rappresentare con la seguente copertura F:

```
xyzw
1200
0210
2101
0211
1121
```

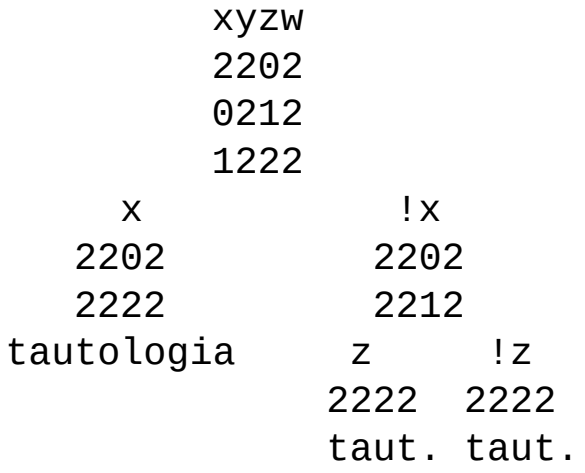
dove w e' la variabile ausiliaria binaria per rappresentare le uscite; inoltre si ha c

```
xyzw
2121
```

Allora si tratta di verificare se $F_c = 1$, dove F_c si riduce a:

```
xyzw
2202
0212
1222
```

Applicando la ricorsione monotona si vede che si ha una tautologia in tutte le foglie.



Percio' il cubo c dato e' contenuto nella funzione (f_1, f_2).

Per maggiore semplicita' si poteva osservare che essendo c contenuto banalmente in f_1 (come cubo vuoto nella prima uscita), il problema si poteva ridurre a verificare subito il contenimento solo per f_2 per le tre variabili d'ingresso (senza introdurre la variabile w per le uscite).

9. Sia dato un circuito che puo' avere uno dei seguenti otto guasti:

$$\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8\}.$$

Si sono calcolati sei vettori di collaudo:

$$\{v_2, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

ciascuno dei quali puo' rilevare alcuni dei guasti, secondo la seguente lista:

(a) v_1 rileva la presenza dei guasti $\{g_1, g_3, g_5\}$;
(b) v_2 rileva la presenza dei guasti $\{g_2, g_4, g_6\}$;
(c) v_3 rileva la presenza dei guasti $\{g_1, g_2, g_4, g_7\}$;
(d) v_4 rileva la presenza dei guasti $\{g_3, g_5, g_8\}$;
(e) v_5 rileva la presenza dei guasti $\{g_2, g_6, g_8\}$;
(f) v_6 rileva la presenza dei guasti $\{g_3, g_4, g_7\}$.

Si trovi un sottoinsieme minimo dei vettori di guasto che rilevi tutti gli otto possibili guasti, se presenti. Si supponga che il circuito abbia al piu' un guasto e che tutti i vettori di collaudo abbiano lo stesso costo.

Traccia. Lo si modelli come un problema di copertura monotona.

10. Si considerino le seguenti due affermazioni:
Teorema Data una funzione $ff = (f, d, r)$, sia $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \{\alpha\}$, dove $\mathcal{F}$ e' una copertura di ff ed α e' un implicante primo disgiunto da $\mathcal{G}$.

Allora α e' un primo essenziale se e solo se

$$\text{CONSENSO}(\mathcal{G}, \{\alpha\})$$

non copre α.

L'operazione CONSENSO tra due cubi α e β e' definita come segue:

$$\text{CONSENSO}(\alpha, \beta) = \begin{cases} a_1 + b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n.b_n \\ a_1.b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n.b_n \\ \dots & & & \\ a_1.b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n + b_n \end{cases}$$

Nota:

- e' vuoto quando distanza ≥ 2;
- contiene un solo cubo quando distanza = 1;
- contiene n cubi quando distanza = 0.

Corollario Data una funzione $ff = (f, d, r)$, sia $\mathcal{F}$ una copertura di f, $\mathcal{D}$ una copertura di d e α un implicante primo di ff.

Allora α e' un primo essenziale se e solo se $\mathcal{H} \cup \mathcal{D}$ non copre α, dove

$$\mathcal{H} = \text{CONSENSO}((\mathcal{F} \cup \mathcal{D}) \sharp \alpha, \alpha),$$

e l'operazione $\sharp$ tra due cubi α e β e' definita come segue:

$$\alpha \sharp \beta = \begin{cases} a_1.b_1' & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2.b_2' & \dots & a_n \\ \dots & & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n.b_n' \end{cases}$$

Si noti che invece di $\sharp$ si puo' usare l'operazione $\tilde{\sharp}$ definita come:

$$\alpha \tilde{\sharp} \beta = \begin{cases} a_1.b_1' & a_2 & \dots & a_n \\ a_1.b_1 & a_2.b_2' & \dots & a_n \\ \dots & & & \\ a_1.b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n.b_n' \end{cases}$$

(a) Si dimostrino informalmente le affermazioni precedenti, spiegando che cosa si ottiene applicando le operazioni indicate.

(b) Sfruttando il corollario precedente e' possibile ridurre la prova di essenzialita' a una verifica di contenimento. Indicare di quale verifica si tratta. A quale operazione puo' a sua volta ridursi la verifica di contenimento ? Per quale motivo tale riduzione e' conveniente ?

Applicando il metodo precedente, calcolare quali implicanti della copertura $f = a'b' + b'c + ac + ab$ sono essenziali.

(c) Applicando il metodo precedente, calcolare quali implicanti della seguente copertura di una funzione multi-valore sono essenziali:

```
.mv 3 0 5 5 5
11111 00001 11110
01100 00011 01010
01010 00100 11111
00110 01001 11010
00001 11111 10110
.e
```

Si ricordi che nel caso multi-valore la distanza tra i termini prodotto S and T e' il numero di letterali vuoti dell'intersezione $S \cap T$ e che il consenso si definisce in generale come:

$$\text{CONSENSO}(S,T) = \emptyset \text{ se distanza}(S,T) \geq 2,$$

$$\text{CONSENSO}(S,T) = \bigcup_{i=1}^{n} X_1^{S_1 \cap T_1} \ldots X_i^{S_i \cup T_i} \ldots X_n^{S_n \cap T_n} \text{ altrimenti.}$$

11. Si descriva la procedura basata sull’espansione di Shannon per il calcolo degl’implicanti primi di una funzione a piu’ valori. Si spieghni le operazioni usate nel calcolo e se argomenti informalmente la correttezza.

12. (a) Si definisca la proprieta' di monotonia per una funzione Booleana a due valori.

    Si definisca la proprieta' di monotonia per una copertura di una funzione Booleana a due valori.

    Traccia di soluzione.

    Una funzione Booleana f e' monotona crescente in x_j se cambiando x_j da 0 a 1 la funzione f rimane invariata o cambia da 0 a 1.

    Una copertura F e' monotona crescente in x_j se in ogni prodotto di F la variabile x_j ha il valore 1 oppure 2.

(b) Si dimostri o si trovi un controesempio alla seguente affermazione: una funzione Booleana a due valori e' monotona se e solo se ogni sua copertura e' monotona.

Traccia di soluzione.

Se una copertura F e' monotona in x_j, la funzione corrispondente e' monotona in x_j. Infatti, sia F monotona crescente in x_j, allora essa si puo' rappresentare come somma di prodotti dove in ogni prodotto o x_j non compare (valore 2) o compare in fase positiva (valore 1). Percio', dato un mintermine, cambiando x_j da 0 a 1, il valore della funzione o rimane invariato (c'e' un prodotto contenente il mintermine con x_j cambiato da 0 a 1 in cui la variabile x_j ha il valore 2) o cambia da 0 a 1 (in ogni prodotto contenente il mintermine con x_j cambiato da 0 a 1 la variabile x_j ha il valore 1).

E' falso che ogni copertura di una funzione monotona sia monotona. Si consideri il seguente semplice contro-esempio: la copertura $F_1 = x'y'z' + x'yz' + x'z$ non e' monotona, ma esiste una copertura monotona equivalente $F_2 = x'$ per cui la funzione f di cui F_1 e F_2 sono coperture e' monotona. Similmente la copertura $G_1 = x'z' + y'z + z$ non e' monotona, ma esiste una copertura monotona equivalente $G_2 = x' + z$ per cui la funzione g di cui G_1 e G_2 sono coperture e' monotona.

Pero' se una funzione e' monotona, c'e' almeno una copertura monotona. Supponiamo che f sia monotona crescente in x_j. Dato un mintermine con $x_j = 0$ per cui la funzione vale 1, dato che cambiando il valore della coordinata x_j da 0 a 1 il valore di f non cambia oppure cambia da 0 a 1, vuol dire che si puo' definire un cubo dove la variabile x_j vale 2 (e il resto e' uguale al mintermine considerato); dato un mintermine con $x_j = 0$ per cui la funzione vale 0, mentre cambiando x_j da 0 a 1 per lo stesso mintermine la funzione vale 1, si puo' definire un cubo dove la variabile x_j vale 1 e il resto e' uguale al mintermine considerato. In questo modo per ogni mintermine dove la funzione vale 1 si puo' definire un cubo dove la variabile x_j vale 2 o 1 e in tal modo si costruisce una copertura monotona crescente in x_j.

(c) Si elenchino le proprieta’ principali delle funzioni binarie monotone e se ne commentino brevemente le loro applicazioni.

13. (a) Si definisca il cofattore di Shannon per le funzioni a due valori (a piu' uscite) e poi lo si definisca per le funzioni a piu' valori.

(b) Si mostri che la definizione per le funzioni a due valori e’ un caso speciale di quella a piu’ valori.

14. Usando il paradigma di ricorsione monotona si calcoli il complemento $\overline{f}$ della seguente funzione f:

```
.mv 3 0 5 5 5
11111 00001 11110
01100 00011 01010
01010 00100 11111
00110 01001 11010
00001 11111 10110
.e
```

La copertura precedente di f e' debolmente monotona ?

La copertura ottenuta di $\overline{f}$ e' debolmente monotona ?

15. (a) Si dimostri che se una funzione f e' fortemente monotona, allora il suo complemento $\overline{f}$ e' una funzione fortemente monotona.

    (b) La copertura del complemento ottenuta con il procedimento di complementazione monotona e' minima ? Dimostrarlo o proporre un controesempio.

16. (a) Si definiscano la nozione di monotonia per funzioni binarie e quella di monotonia debole per le funzioni a piu' valori.

Traccia di soluzione.

Si vedano le dispense per i dettagli.

Una funzione Booleana f e' monotona crescente (decrescente) in x_j se cambiando x_j da 0 a 1 la funzione f rimane invariata o cambia da 0 a 1 (da 1 a 0).

Due definizioni equivalenti sono:

Una funzione Booleana f e' monotona crescente (decrescente) in x_j se $f(m-) \leq f(m+)$ ($f(m-) \geq f(m+)$), per ogni coppia di mintermini $m-, m+$ che differiscono nella variabile x_j (a 0 in $m-$ e a 1 in $m+$).

Una funzione Booleana f e' monotona crescente (decrescente) in x_j se $f_{\overline{x}_j} \subseteq f_{x_j}$ ($f_{\overline{x}_j} \supseteq f_{x_j}$).

Accettata una come definizione le altre ne conseguono come teoremi.

Una funzione Booleana f e' debolmente monotona in X_j se esiste un valore i tale che cambiando X_j dal valore i ad un qualsiasi altro valore k, la funzione f rimane invariata o cambia da 0 a 1. Il caso binario e' un caso speciale per $i = 0$ (monotonia crescente) o $i = 1$ (monotonia decrescente).

(b) Quali proprieta' fondamentali della monotonia per funzioni binarie si estendono alla monotonia debole per funzioni a piu' valori ?

Traccia di soluzione.

Si vedano le dispense per i dettagli.

Ci sono tre proprieta' fondamentali della monotonia nel caso binario:

(a) Una copertura monotona e' la tautologia se e solo se contiene il cubo universale.

(b) Tutti gli implicanti primi di una funzione monotona sono essenziali.

(c) Il complemento di una funzione monotona e' monotona.

La prima vale anche nel caso di coperture debolmente monotone. Le altre due non valgono per coperture debolmente monotone.

La prima proprieta' nel caso della monotonia debole si dimostra come caso particolare della seguente proposizione. Sia F una copertura debolmente monotona nella variabile X_i, e sia $G = \{c \in F \mid c$ non dipende da $X_i\}$. Allora $G = 1 \Leftrightarrow F = 1$. Infatti come suo corollario si deduce che una copertura debolmente monotona e' una tautologia se e solo se uno dei cubi della copertura e' il cubo universale.

Un'altra proprieta' della monotonia debole usata per calcolare il supercubo del complemento (cioe' il cubo piu' piccolo che contiene il complemento) e' che se F e' una copertura debolmente monotona e F^i rappresenta l'i-esimo cubo della copertura allora

$$supercubo(\overline{F}) = \bigcap_{i=1}^{|F|} supercubo(\overline{F}^i).$$

17. (a) Si ottenga il diagramma di decisione binaria ridotto e ordinato secondo l'ordine $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ (senza lati complementati) della funzione

$$f = x_1x_2 + \overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_3.$$

Si applichi la procedura *apply_ite*. Si mostrino i passi del procedimento seguito.

Traccia di soluzione.

Si considerino come disponibili i diagrammi delle costanti 0 e 1 e delle variabili x_1, x_2 e x_3. Si costruiscano prima i diagrammi dei singoli prodotti x_1x_2, x_2x_3 e $\overline{x}_1\overline{x}_3$ usando *apply_ite* per calcolare i prodotti. Poi si costruisca il diagramma della somma dei prodotti usando *apply_ite* per calcolare le somme.

(b) Si ottenga il diagramma di decisione binaria ridotto e ordinato della precedente funzione usando anche i lati complementati. Per farlo si ripeta la costruzione precedente usando anche il caso terminale

$$ITE(F, 0, 1) = F'$$

per scoprire quando usare lati complementati.

Si mostrino i passi del procedimento seguito.

Si adotti la convenzione che le negazioni compaiono solo sui lati *else*, per cui i lati *else* si etichettano con un cerchietto vuoto se sono regolari o con un cerchietto pieno se sono complementati (regola per verificare il diagramma della funzione: poiche' i lati *then* non sono mai complementati, il valore di una funzione per il mintermine $1, 1, \ldots, 1$ sara' 0 se e solo se il lato uscente dal nodo associato alla funzione e' complementato).

18. (a) Si ottenga il diagramma di decisione binaria ridotto e ordinato secondo l'ordine $a < b < c$ (senza lati complementati) della funzione

$$f = (a + b)c.$$

Si mostrino i passi del procedimento seguito.

(b) Si ottenga il diagramma di decisione binaria ridotto e ordinato secondo l'ordine $a < c < b$ (senza lati complementati) della funzione

$$f = (a + b)c.$$

Si mostrino i passi del procedimento seguito.

19. (a) Si ottenga il diagramma di decisione binaria ridotto e ordinato secondo l'ordine $a < b < c < d$ (senza lati complementati) della funzione

$$f = abd' + ab'd + a'c + a'c'd.$$

Si mostrino i passi del procedimento seguito.

Traccia di soluzione.

Si applichi la procedura *robdd_build*.

(b) Si ottenga il diagramma di decisione binaria ridotto e ordinato della precedente funzione usando anche i lati complementati, trasformando il diagramma precedente. Si mostrino i passi del procedimento seguito.

Si adotti la convenzione che le negazioni compaiono solo sui lati *else*, per cui i lati *else* si etichettano con un cerchietto vuoto se sono regolari o con un cerchietto pieno se sono complementati (regola per verificare il diagramma della funzione: poiche' i lati *then* non sono mai complementati, il valore di una funzione per il mintermine $1, 1, \ldots, 1$ sara' 0 se e solo se il lato uscente dal nodo associato alla funzione e' complementato).

Traccia di soluzione.
Si converta il grafo ottenuto in precedenza propagando una negazione dalla radice alle foglie. Si ottiene:

```
radice f: (un solo) lato complementato punta a nodo n1 con variabile a
nodo n1: lato T punta a nodo n2 con variabile b
         lato E complementato punta a nodo n3 con variabile c
nodo n2: lato T punta a nodo n4 con variabile d
         lato E complementato punta a nodo n4 con variabile d
nodo n3: lato T punta a nodo '1'
         lato E punta a nodo n4 con variabile d
nodo n4: lato T punta a nodo '1'
         lato E complementato punta a nodo '1'
```

Si noti che il grafo con i lati complementati ha 3 nodi in meno del precedente.

20. (a) Si ottenga il diagramma di decisione binaria ridotto e ordinato secondo l'ordine $a < b$ (senza lati complementati) della funzione

$$f = a'b' + a'b + ab' + ab.$$

Si applichi la procedura *robdd_build*. Si mostrino i passi del procedimento seguito.

Traccia di soluzione.

robdd_build($a'b' + a'b + ab' + ab$,1) {
  $\phi \leftarrow \pi(1)$ /* $= a$ */
  $\eta \leftarrow$ robdd_build($b' + b$,2) {
    $\phi \leftarrow \pi(2)$ /* $= b$ */
    $\eta \leftarrow$ robdd_build(1,3) {
      return v_1
    $\lambda \leftarrow$ robdd_build(1,3) {
      return v_1
    return v_1 /* $\eta = \lambda$ */
  }
  $\lambda \leftarrow$ robdd_build($b' + b$,2) {
    $\phi \leftarrow \pi(2)$ /* $= b$ */
    $\eta \leftarrow$ robdd_build(1,3) {
      return v_1
    $\lambda \leftarrow$ robdd_build(1,3) {
      return v_1
    return v_1 /* $\eta = \lambda$ */
  }
  return v_1 /* $\eta = \lambda$ */
}

Il diagramma risultante e' costituito dal solo nodo v_1 a cui punta la funzione f.

(b) Si ottenga il diagramma di decisione binaria ridotto e ordinato secondo l'ordine $a < b$ (senza lati complementati) della funzione

$$g = (a' + b')(a' + b)(a + b')(a + b).$$

Si applichi la procedura *robdd_build*. Si mostrino i passi del procedimento seguito.

Traccia di soluzione.

robdd_build($(a' + b')(a' + b)(a + b')(a + b)$,1) {
  $\phi \leftarrow \pi(1)$ /* $= a$ */
  $\eta \leftarrow$ robdd_build($b'b(1 + b')(1 + b)$,2) {
    $\phi \leftarrow \pi(2)$ /* $= b$ */
    $\eta \leftarrow$ robdd_build(0,3) {
      return v_0
    $\lambda \leftarrow$ robdd_build(0,3) {
      return v_0
    return v_0 /* $\eta = \lambda$ */
  }
  $\lambda \leftarrow$ robdd_build($(1 + b')(1 + b)b'b$,2) {
    $\phi \leftarrow \pi(2)$ /* $= b$ */
    $\eta \leftarrow$ robdd_build(0,3) {
      return v_0
    $\lambda \leftarrow$ robdd_build(0,3) {
      return v_0
    return v_0 /* $\eta = \lambda$ */
  }
  return v_0 /* $\eta = \lambda$ */
}

Il diagramma risultante e' costituito dal solo nodo v_0 a cui punta la funzione g.

Si noti che il punto di entrambi gli esercizi non e' semplificare come $f = 1$ e $g = 0$, bensi' applicare meccanicamente la procedura *robdd_build*, per ottenere come risultato finale rispettivamente il nodo che rappresenta la funzione identita' e il nodo che rappresenta la funzione nulla.

Addendum sull'operazione ITE

I casi terminali sono

$$\begin{aligned} ITE(F,1,0) &= F \\ ITE(1,F,G) &= F \\ ITE(0,F,G) &= G \\ ITE(F,G,G) &= G \\ ITE(F,0,1) &= \overline{G} \end{aligned}$$

Ci sono molte triple che danno il medesimo risultato, ad es., $ITE(\overline{x}_1 + x_2x_4, (x_1+x_2)x_4, 0)$ e $ITE(x_2x_4(x_1+\overline{x}_3), 1, \overline{x}_1x_2x_3x_4)$ producono il medesimo risultato x_2x_4.

Sarebbe auspicabile, ma praticamente difficile, identificare tutte le triple che producono il medesimo risultato, perche' potremmo associarle allo stesso elemento della "computed table". Ci sono dei casi speciali in cui si possono identificare facilmente triple equivalenti, ad es.,

$$ITE(F,G,F) = ITE(F,G,0) = ITE(G,F,G) = ITE(G,F,0) = F.G$$

Per questi casi si trasforma una tripla in una forma convenzionale prima di cercarla nella "computed table". In tal modo tutte le triple che sono associate alla stessa forma hanno il medesimo elemento nella tavola.

I seguenti casi permettono di stabilire equivalenze tra triple:

(a) Due argomenti dell'ITE sono uguali, es. $ITE(F,F,G)$

(b) Due argomenti dell'ITE sono l'uno il complemento dell'altro, es. $ITE(F,G,\overline{F})$

(c) Almeno un argomento e' costante, es. $ITE(F,G,0)$

Per arrivare a delle triple convenzionali, si applica una prima serie di trasformazioni che rimpiazza il massimo numero di argomenti con una costante:

$$\begin{aligned} ITE(F,F,G) &\Rightarrow ITE(F,1,G) \\ ITE(F,G,F) &\Rightarrow ITE(F,G,0) \\ ITE(F,G,\overline{F}) &\Rightarrow ITE(F,G,1) \\ ITE(F,\overline{F},G) &\Rightarrow ITE(F,0,G) \end{aligned}$$

Una seconda serie di trasformazioni usa le seguente uguaglianze

$$\begin{aligned} ITE(F,1,G) &= ITE(G,1,F) \\ ITE(F,G,0) &= ITE(G,F,0) \\ ITE(F,G,1) &= ITE(\overline{G},\overline{F},1) \\ ITE(F,0,G) &= ITE(\overline{G},0,\overline{F}) \\ ITE(F,G,\overline{G}) &= ITE(G,F,\overline{F}) \end{aligned}$$

per scegliere la tripla il cui primo argomento ha la variabile piu' in alto nel suo grafo con indice minimo nell'ordinamento.

Un'altra serie di trasformazioni usa le seguenti uguaglianze

$$ITE(F,G,H) = ITE(\overline{F},H,G) = \overline{ITE(F,\overline{G},\overline{H})} = \overline{ITE(\overline{F},\overline{H},\overline{G})}$$

In questo caso si sceglie la tripla ai cui due primi argomenti si punta con lati non complementati. Per es., se F non e' complementato e G e' complementato, si sostituisce $ITE(F,G,H)$ con $ITE(F,\overline{G},\overline{H})$ e se ne prende il complemento (da $ITE(F,G,H) = \overline{ITE(F,\overline{G},\overline{H})}$. Similmente, se F e' complementato e G non e' complementato, si si sostituisce $ITE(F,G,H)$ con $ITE(\overline{F},H,G)$ (da $ITE(F,G,H) = ITE(\overline{F},H,G)$).

Tra le conseguenze di queste trasformazioni c'e' la possibilita' di applicare la legge di De Morgan: $F.G = \overline{(\overline{F}+\overline{G})}$; infatti

$$F.G = ITE(F,G,0) = \overline{ITE(\overline{F},1,\overline{G})} = \overline{(\overline{F}+\overline{G})}$$

(si ha $ITE(F,G,0) = \overline{ITE(\overline{F},1,\overline{G})}$ da $ITE(F,G,H) = \overline{ITE(\overline{F},\overline{H},\overline{G})}$).

21. Per ognuna delle seguenti espressioni, si stabilisca se sono algebriche, prime, irridondanti:

    (a) $abc + a'b + bcd$,

    (b) $abc + abd + a'b'c$,

    (c) $abc + bcd + bd$.

22. Si divida $F = ab + ac + ad' + bc + bd'$ per $G = a + b$.

23. Si divida l'espressione algebrica

$$F = abrs+abrt+abd+abe+abu+ghrs+ghrw+ghd+ghe+ghu+dp+eq+rstuw$$

per il divisore $D = ab + gh$. Si ottengano $Q = F/D$ e R.

24. Data l'espressione algebrica $F = abc + abd' + a'bd + abef$ si trovi il divisore primario corrispondente al cubo ab. Tale divisore primario e' un nucleo ?

25. Sia data l'espressione algebrica $F = uwxy + uvxy + tx + tz + rsw + vwxy$.

    (a) Si calcolino i nuclei di livello 0.

    (b) Per ogni nucleo k di livello 0, si esprima F nella forma $ck + r$, dove c e' il co-nucleo e r e' il resto.

La sintesi architetturale di cui alle pagine seguenti non e’ inclusa nel programma dell’anno in corso.

26. Il grafo delle precedenze (V, E) ha come nodi le operazioni $v_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ (v_0 e v_n operazioni nulle) e come lati (v_j, v_i) le relazioni di precedenza (cioe' $(v_j, v_i) \in E$ se v_j deve precedere v_i).

    Inoltre siano $d_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ i tempi di esecuzione delle operazioni $v_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ ($d_0 = d_n = 0$), e $\mathcal{T} : V \to \{1, 2, \ldots, n_{res}\}$ l'unico tipo di risorsa che realizza una data operazione.

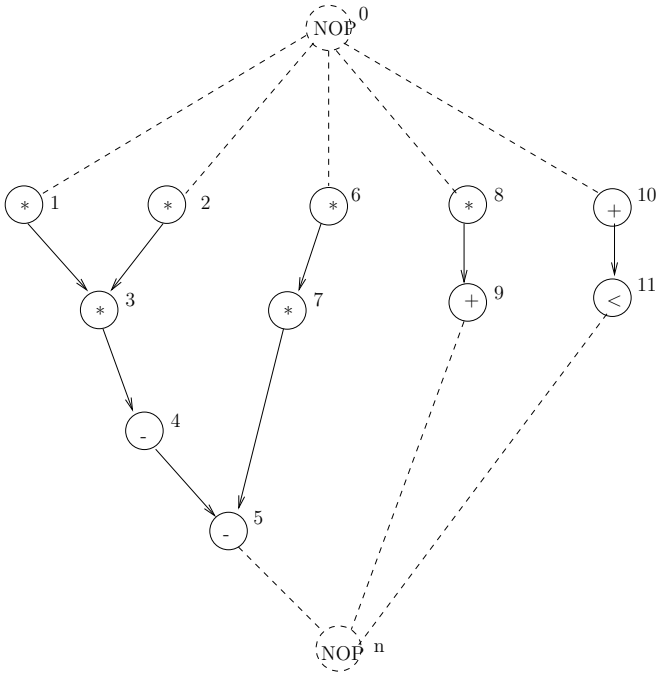


Figure 1: Grafo delle precedenze (da un algoritmo per integrare numericamente con Eulero in avanti l'equazione differenziale $y'' + 3xy' + 3y = 0$).

Si consideri il grafo delle precedenze in Fig. 1. Negli esercizi seguenti, si assumano le seguenti ipotesi, quando non specificato diversamente. Siano $d_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots, 11$, $d_0 = d_n = 0$. L'assegnamento delle risorse sia $\mathcal{T}(1) = 1$, $\mathcal{T}(2) = 1$, $\mathcal{T}(3) = 1$, $\mathcal{T}(6) = 1$, $\mathcal{T}(7) = 1$, $\mathcal{T}(8) = 1$; $\mathcal{T}(4) = 2$, $\mathcal{T}(5) = 2$, $\mathcal{T}(9) = 2$, $\mathcal{T}(10) = 2$, $\mathcal{T}(11) = 2$.

(a) (Schedulazione senza vincoli) Si applichi al grafo delle precedenze in Fig. 1 l'algoritmo di schedulazione ASAP e se ne mostrino i passi.

(b) (Schedulazione con vincolo sulla latenza) Si applichi al grafo delle precedenze in Fig. 1 l'algoritmo di schedulazione ALAP con latenza $\overline{\lambda} = 4$ e se ne mostrino i passi.

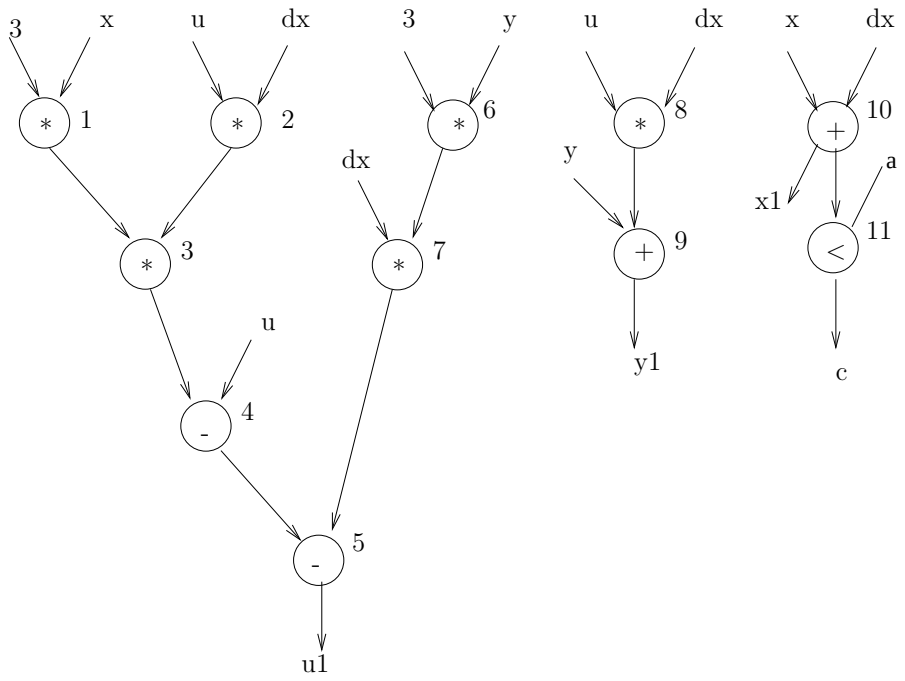


Figure 2: Grafo del flusso dei dati (da un algoritmo per integrare numericamente con Eulero in avanti l'equazione differenziale $y'' + 3xy' + 3y = 0$).

(c) (Schedulazione euristica per latenza minima con l'algoritmo a lista)

i. Si applichi l'algoritmo a lista al grafo delle precedenze in Fig. 1 con $a_1 = 2$ moltiplicatori e $a_2 = 2$ unita' aritmetico-logiche. La funzione di priorita' e' data dalla seguente etichettatura: $v_1 \to 4$, $v_2 \to 4$, $v_3 \to 3$, $v_4 \to 2$, $v_5 \to 1$, $v_6 \to 3$, $v_7 \to 2$, $v_8 \to 2$, $v_9 \to 1$, $v_{10} \to 2$, $v_{11} \to 1$, che indica la lunghezza del percorso piu' lungo dal nodo al pozzo.
Inoltre i tempi di esecuzione delle operazioni siano $d_1 = 2$ per il moltiplicatore e $d_2 = 1$ per l'unita' aritmetico-logica.

ii. Si ripeta l'esercizio precedente supponendo $d_1 = 1$ per il moltiplicatore e $d_2 = 1$ per l'unita' aritmetico-logica.

iii. Si applichi l'algoritmo a lista al grafo delle precedenze in Fig. 1 con $a_1 = 3$ moltiplicatori e $a_2 = 1$ unita' aritmetico-logica. Inoltre i tempi di esecuzione delle operazioni siano $d_1 = 2$ per il moltiplicatore e $d_2 = 1$ per l'unita' aritmetico-logica.
Si usi come funzione di priorita' ancora la lunghezza del percorso piu'

lungo dal nodo al pozzo.

iv. Si ripeta l'esercizio precedente assumendo una funzione di priorita' diversa che assegna l'inizio delle operazioni v_2, v_6, v_8 al primo ciclo di calcolo.

(d) (Schedulazione euristica per risorse minime con l'algoritmo a lista)
Si applichi l'algoritmo a lista al grafo delle precedenze in Fig. 1 nell'ipotesi che tutte le operazioni richiedano un tempo unitario e che si richieda una latenza di 4 cicli.

(e) Qual e' la relazione tra l'algoritmo euristico a lista e l'algoritmo di Hu (per la schedulazione di multiprocessori) ? Nel rispondere si descriva l'algoritmo di Hu.

(f) (Schedulazione per latenza minima con vincoli sulle risorse)
Si consideri la formulazione classica con ILP della schedulazione con vincoli sulle risorse, rispetto alle variabili $X = \{x_{il}, i = 0, 1, \ldots, n; l = 1, 2, \ldots, \overline{\lambda} + 1\}$, con $x_{il} = 1$ solo quando l'operazione v_i inizia al passo l della schedulazione, e $\overline{\lambda}$ maggiorante sulla latenza:
Si noti che $x_{il} = 0$ per $l < t_i^S$ o $l > t_i^L$ per ogni operazione $v_i, i = 0, 1, \ldots, n$, dove t_i^S sono i minoranti calcolati dall'algoritmo ASAP ($x_{il} = 1 \rightarrow l \geq t_i^S$) e t_i^L sono i maggioranti calcolati dall'algoritmo ALAP ($x_{il} = 1 \rightarrow l \leq t_i^L$), da cui

$$\Sigma_l \, x_{il} = \Sigma_{l=t_i^S}^{t_i^L} \, x_{il}, \; i = 0, 1, \ldots, n$$

(il tempo d'inizio d'ogni operazione e' unico, percio' l'inizio t_i di ogni operazione v_i puo' essere scritto come $t_i = \Sigma_l \, l.x_{il}$, $t_i^S \leq t_i \leq t_i^L$).
I vincoli sono:

$$(*) \; \Sigma_l \, x_{il} = 1, i = 0, 1, \ldots, n$$

(il tempo d'inizio d'ogni operazione e' unico)

$$(**) \; \Sigma_l \, l.x_{il} \geq \Sigma_l \, l.x_{jl} + d_j, \; i, j = 0, 1, \ldots, n, \; (v_j, v_i) \in E$$

(le relazioni di precedenza devono essere soddisfatte)

$$(***) \; \Sigma_{i:\mathcal{T}(v_i)=k} \, \Sigma_{m=l-d_i+1}^{l} x_{im} \leq a_k, \; k = 1, 2, \ldots, n_{res}, \; l = 1, 2, \ldots, \overline{\lambda}+1$$

(i vincoli sulle risorse devono essere soddisfatti ad ogni passo della schedulazione)

Ogni insieme di tempi iniziali che soddisfa i vincoli precedenti ci da' una soluzione ammissibile.

Si consideri la schedulazione con vincoli sulle risorse del grafo in Fig. 1. Si assuma che ci siano due tipi di risorse: moltiplicatore e unita' aritmetico-logica (che esegue somme/sottrazioni e confronti). Entrambe le risorse eseguano in un ciclo. Si assuma anche che si possano usare al piu' due moltiplicatori e due unita' aritmetico-logiche: $a_1 = 2$, $a_2 = 2$.

i. Usando l'algoritmo euristico di schedulazione a lista ("list scheduling") si trovi un maggiorante sulla latenza.

ii. Con gli algoritmi ASAP and ALAP si trovino dei vincoli sui tempi d'inizio, t_i^S and t_i^L.

iii. Si scrivano in dettaglio tutte le equazioni precedenti per l'unicita' dei tempi di partenza, le relazioni di precedenza e le quantita' di risorse disponibili.

iv. Si risolvano i vincoli precedenti (*), (**), (***) per ottenere una soluzione ammissibile.

v. Si risolvano i vincoli precedenti (*), (**), (***) con la funzione di minimo

$$min\ \mathbf{c}^T\mathbf{t}$$

e $\mathbf{c} = [0, 0, \ldots, 1]^T$ equivalente a

$$min\ t_n = \Sigma_l\ l.x_{nl}$$

che corrisponde a minimizzare la latenza della schedulazione (da $\overline{\lambda} = t_n - t_0$ si ha che una soluzione ottima implica $t_0 = 1$).

vi. Si risolvano i vincoli precedenti (*), (**), (***) con la funzione obiettivo

$$min\ \mathbf{c}^T\mathbf{t}$$

e $\mathbf{c} = [1, 1, \ldots, 1]^T$ equivalente a

$$min\ \Sigma_i t_i = \Sigma_i \Sigma_l\ l.x_{il}$$

che corrisponde a minimizzare il tempo iniziale per tutte le operazioni.

(g) (Schedulazione per risorse minime con vincoli sulla latenza)

L'obiettivo dell'ottimizzazione e' una somma pesata delle risorse usate rappresentata dal vettore $\mathbf{a}$, esprimibile come

$$min\ \mathbf{c}^T\mathbf{a}$$

dove $\mathbf{c}$ e' il vettore dei costi delle singole risorse. Nelle equazioni (***) gli $a_k,\ k = 1, 2, \ldots, n_{res}$ sono adesso incognite ausiliarie.
C'e' inoltre un vincolo sulla latenza

$$t_n = \Sigma_l\ l.x_{nl} \leq \overline{\lambda} + 1$$

Per i dati del problema precedente, assumendo inoltre $\mathbf{c} = [5, 1]^T$ (il moltiplicatore costa 5 unita' di area e l'unita' aritmetico-logica ne costa una) e un maggiorante sulla latenza di $\overline{\lambda} = 4$, si riscrivano i vincoli del tipo (***) (quelli dei tipi (*) e (**) sono uguali al caso precedente) e si minimizzi la funzione di costo

$$\mathbf{c}^T\mathbf{a} = 5.a_1 + 1.a_2$$

27. Il problema dell'associazione ("binding") e' quello di associare risorse a operazioni. Tale problema si puo' formulare con un modello di programmazione lineare per interi, che estende quello visto per la schedulazione per latenza minima con vincoli sulle risorse.

    Per semplicita' si assuma che tutte le operazioni e risorse siano dello stesso tipo. In questo modo si gestiscono i problemi con piu' tipi di operazioni come problemi indipendenti uno per ogni tipo di risorsa (grazie al fatto che i tipi sono disgiunti).

    S'introduce un insieme di variabili di decisione binarie con due indici, $B = \{b_{ir}; i = 1, 2, \ldots, n_{op}; r = 1, 2, \ldots, a\}$, e un insieme di costanti di decisione binarie con due indici, $X = \{x_{il}; i = 1, 2, \ldots, n_{op}; l = 1, 2, \ldots, \lambda + 1\}$, dove $a \leq n_{op}$ e' un maggiorante sul numero di risorse da usarsi. La variabile binaria b_{ir} vale 1 solo quando l'operazione v_i e' associata alla risorsa r, cioe' $\beta(v_i) = (1, r)$, dove il primo argomento di β e' il tipo di risorsa. La costante binaria x_{ir} vale 1 solo quando l'operazione v_i inizia al passo l della schedulazione, cioe' $l = t_i$, come definito nel modello ILP per la schedulazione con vincoli sulle risorse. Questi valori sono costanti conosciute, poiche' si assume di partire da grafi schedulati.

    La ricerca di un'associazione compatibile con una data schedulazione (quest'ultima rappresentata da X) e un maggiorante sulla risorsa a e' equivalente a ricercare dei valori B che soddisfano i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{a} b_{ir} &= 1,\ i = 1, 2, \ldots, n_{op} \\
\sum_{i=1}^{n_{op}} \sum_{m=l-d_i+1}^{l} x_{im} &\leq 1,\ l = 1, 2, \ldots, \lambda + 1,\ r = 1, 2, \ldots, a \\
b_{ir} &\in \{0, 1\},\ i = 1, 2, \ldots, n_{op},\ r = 1, 2, \ldots, a
\end{aligned}$$

    Il primo gruppo di vincoli assicura che ogni operazione v_i sia assegnata ad una e una sola risorsa. Il secondo gruppo di vincoli impone che al piu' un'operazione sia in esecuzione, tra quelle assegnate alla risorsa r, in ogni istante di tempo. Poiche' e' sufficiente imporre che le variabili in B siano interi non-negativi per soddisfare l'ultimo gruppo di vincoli (che le variabili in B siano 0 o 1, il problema puo' risolversi come programmazione lineare per interi (invece che programmazione lineare per $0 - 1$). Il modello puo' essere esteso facilmente a tipi multipli di operazioni.

Sia data la seguente schedulazione del grafo delle precedenze in Fig. 1:

$$x_{1,1} = x_{2,1} = x_{3,2} = x_{4,3} = x_{5,4} = x_{6,2} = x_{7,3} = x_{8,3} = x_{9,4} = x_{10,1} = x_{11,2} = 1.$$

Ci sono due tipi di risorse (moltiplicatore, etichettato con 1, e unita' aritmetico-logica, etichettata con 2). Si supponga che ciascuna risorsa richieda un tempo di esecuzione di un'unita'. Un'associazione ammissibile delle operazioni alle risorse deve soddisfare i seguenti vincoli.
Per i moltiplicatori:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{a_1} b_{ir} &= 1,\ \forall\, i : \mathcal{T}(v_i) = 1 \\ \sum_{i:\mathcal{T}(v_i)=1} b_{ir} x_{il} &\leq 1,\ l = 1, 2, \ldots, \lambda + 1,\ r = 1, 2, \ldots, a_1 \end{aligned}$$

Per gli addizionatori:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{a_2} b_{ir} &= 1,\ \forall\, i : \mathcal{T}(v_i) = 2 \\ \sum_{i:\mathcal{T}(v_i)=2} b_{ir} x_{il} &\leq 1,\ l = 1, 2, \ldots, \lambda + 1,\ r = 1, 2, \ldots, a_2 \end{aligned}$$

(a) Si trovi, se esiste. una realizzazione con $a_1 = 1$ moltiplicatore, indicando i valori delle incognite in B.

(b) Si trovi, se esiste. una realizzazione con $a_1 = 2$ moltiplicatori, indicando i valori delle incognite in B.

(c) Si trovi, se esiste. una realizzazione con $a_2 = 1$ unita' aritmetico-logiche, indicando i valori delle incognite in B.

(d) Si trovi, se esiste. una realizzazione con $a_2 = 2$ unita' aritmetico-logiche, indicando i valori delle incognite in B.

(e) Si mostri il grafo delle precedenze con le associazioni di operazioni a risorse per il caso $a_1 = 2$, $a_2 = 2$.

28. Il grafo delle precedenze (V, E) ha come nodi le operazioni $v_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ (v_0 e v_n operazioni nulle) e come lati (v_j, v_i) le relazioni di precedenza (cioe' $(v_j, v_i) \in E$ se v_j deve precedere v_i).

    Inoltre siano $d_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ i tempi di esecuzione delle operazioni $v_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ ($d_0 = d_n = 0$), e $\mathcal{T} : V \rightarrow \{1, 2, \ldots, n_{res}\}$ l'unico tipo di risorsa che realizza una data operazione.

    Si consideri il grafo delle precedenze in Fig. 3. Siano $d_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots, 11$, $d_0 = d_n = 0$. L'assegnamento delle risorse sia $\mathcal{T}(1) = 1$, $\mathcal{T}(2) = 1$, $\mathcal{T}(3) = 1$, $\mathcal{T}(6) = 1$, $\mathcal{T}(7) = 1$, $\mathcal{T}(8) = 1$; $\mathcal{T}(4) = 2$, $\mathcal{T}(5) = 2$, $\mathcal{T}(9) = 2$, $\mathcal{T}(10) = 2$, $\mathcal{T}(11) = 2$.

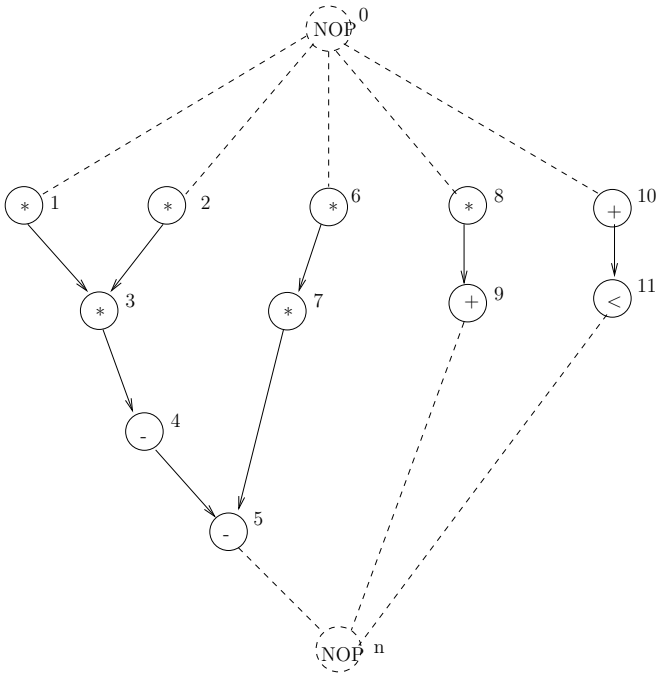


Figure 3: Grafo delle precedenze (da un algoritmo per integrare numericamente con Eulero in avanti l'equazione differenziale $y'' + 3xy' + 3y = 0$).

(a) (Schedulazione senza vincoli) Si applichi al grafo delle precedenze in Fig. 1 l'algoritmo di schedulazione ASAP e se ne mostrino i passi per ottenere il vettore dei risultati $\mathbf{t}^S$.

Traccia di soluzione.

Definiamo $\mathbf{t}^S$ il vettore dei tempi iniziali calcolati dall'algoritmo ASAP,

cioe' $\mathbf{t}^S = \{t_i^S : i = 0, 1, \ldots, n\}$. L'algoritmo ASAP produce i tempi iniziali minimi.

L'algoritmo ASAP inizia con $t_0^S = 1$. Allora i vertici i cui predessori sono stati assegnati sono: $\{v_1, v_2, v_6, v_8, v_{10}\}$. Percio' il loro tempo iniziale e' posto a $t_0^S + d_0 = 1 + 0 = 1$ e cosi' via. Cosi' si attiene:
$t_0^S = 1$, $t_1^S = 1$, $t_2^S = 1$, $t_3^S = 2$, $t_4^S = 3$, $t_5^S = 4$, $t_6^S = 1$, $t_7^S = 2$, $t_8^S = 1$, $t_9^S = 2$, $t_{10}^S = 1$, $t_{11}^S = 2$, $t_n^S = 5$.
Poiche' $t_n^S = 5$, la latenza e' $\lambda = 5 - 1 = 4$.

(b) (Schedulazione con vincolo sulla latenza) Si applichi al grafo delle precedenze in Fig. 3 l'algoritmo di schedulazione ALAP con latenza $\overline{\lambda} = 4$ e se ne mostrino i passi per ottenere il vettore dei risultati $\mathbf{t}^L$.

Traccia di soluzione.

Definiamo $\mathbf{t}^L$ il vettore dei tempi iniziali calcolati dall'algoritmo ASAP, cioe' $\mathbf{t}^L = \{t_i^L : i = 0, 1, \ldots, n\}$. L'algoritmo ALAP produce i tempi iniziali massimi.

L'algoritmo ALAP con $\overline{\lambda} = 4$ inizia con $t_n^L = 5$. Allora i vertici i cui successori sono stati assegnati sono $\{v_5, v_9, v_{11}\}$. Percio' il loro tempo iniziale e' posto a $t_n^L - 1 = 5 - 1 = 4$ e cosi' via. Cosi' si attiene:
$t_0^L = 1$, $t_1^L = 1$, $t_2^L = 1$, $t_3^L = 2$, $t_4^L = 3$, $t_5^L = 4$, $t_6^L = 2$, $t_7^L = 3$, $t_8^L = 3$, $t_9^L = 4$, $t_{10}^L = 3$, $t_{11}^L = 4$, $t_n^L = 5$.

(c) Quante risorse di tipo 1 e quante di tipo 2 sono necessarie per ASAP ? Quante per ALAP ?

Traccia di soluzione.

ASAP usa 4 risorse di tipo 1 (moltiplicatori) e 2 risorse di tipo 2 (unita' aritmetico-logiche).

ALAP usa 2 risorse di tipo 1 (moltiplicatori) e 3 risorse di tipo 2 (unita' aritmetico-logiche).

Qual e' la mobilita' dei nodi ?

Traccia di soluzione.

La mobilita' e' definita come $\mu = t_i^L - t_i^S, i = 0, 1, \ldots, n$. Si ottiene:
$t_0^L - t_0^S = 0$, $t_1^L - t_1^S = 0$, $t_2^L - t_2^S = 0$, $t_3^L - t_3^S = 0$, $t_4^L - t_4^S = 0$, $t_5^L - t_5^S = 0$, $t_6^L - t_6^S = 1$, $t_7^L - t_7^S = 1$, $t_8^L - t_8^S = 2$, $t_9^L - t_9^S = 2$, $t_{10}^L - t_{10}^S = 2$, $t_{11}^L - t_{11}^S = 2$, $t_n^L - t_n^S = 0$.
Esistono schedulazioni che usano meno risorse di quante sono richieste da ASAP e ALAP a parita' di latenza ?

Traccia di soluzione.

Si, a parita' della latenza $\lambda = 4$ si puo' scendere a 2 risorse di tipo 1 (moltiplicatori) e 2 risorse di tipo 2 (unita' aritmetico-logiche):
$t_0 = 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, $t_5 = 4$, $t_6 = 2$, $t_7 = 3$, $t_8 = 3$, $t_9 = 4$, $t_{10} = 1$, $t_{11} = 2$, $t_n = 5$.

29. Il grafo delle precedenze (V, E) ha come nodi le operazioni $v_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ (v_0 e v_n operazioni nulle) e come lati (v_j, v_i) le relazioni di precedenza (cioe' $(v_j, v_i) \in E$ se v_j deve precedere v_i).

    Inoltre siano $d_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ i tempi di esecuzione delle operazioni $v_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ ($d_0 = d_n = 0$), e $\mathcal{T} : V \to \{1, 2, \ldots, n_{res}\}$ l'unico tipo di risorsa che realizza una data operazione.

    Si consideri il grafo delle precedenze in Fig. 4. Siano $d_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots, 11$, $d_0 = d_n = 0$. L'assegnamento delle risorse sia $\mathcal{T}(1) = 1$, $\mathcal{T}(2) = 1$, $\mathcal{T}(3) = 1$, $\mathcal{T}(6) = 1$, $\mathcal{T}(7) = 1$, $\mathcal{T}(8) = 1$; $\mathcal{T}(4) = 2$, $\mathcal{T}(5) = 2$, $\mathcal{T}(9) = 2$, $\mathcal{T}(10) = 2$, $\mathcal{T}(11) = 2$.

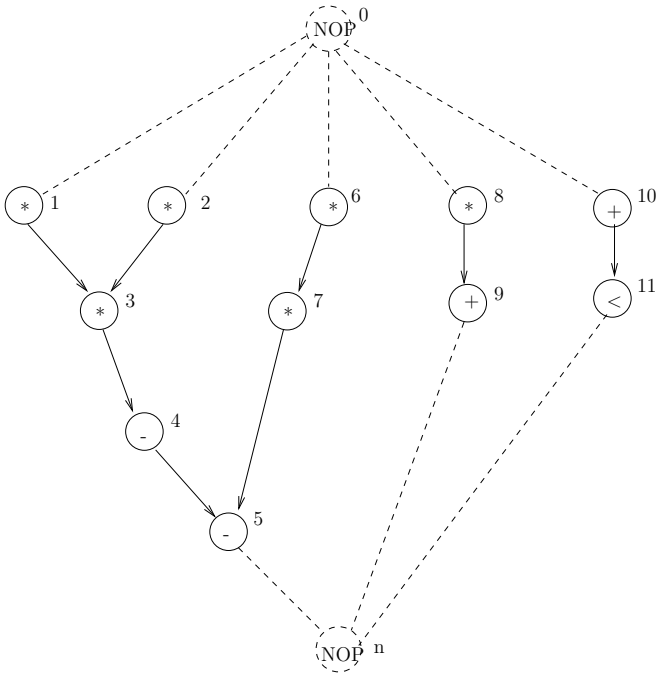


Figure 4: Grafo delle precedenze (da un algoritmo per integrare numericamente con Eulero in avanti l'equazione differenziale $y'' + 3xy' + 3y = 0$).

(a) (Schedulazione euristica per latenza minima con l'algoritmo a lista)
    Si descriva l'algoritmo euristico a lista ("list scheduling") per schedulazione a latenza minima.

(b) Si applichi l'algoritmo a lista al grafo delle precedenze in Fig. 4 con $a_1 = 2$ moltiplicatori e $a_2 = 2$ unita' aritmetico-logiche. La funzione di priorita' sia data dalla seguente etichettatura: $v_1 \to 4$, $v_2 \to 4$, $v_3 \to 3$, $v_4 \to 2$, $v_5 \to 1$, $v_6 \to 3$, $v_7 \to 2$, $v_8 \to 2$, $v_9 \to 1$, $v_{10} \to 2$, $v_{11} \to 1$, che indica la lunghezza del percorso piu' lungo dal nodo al pozzo. Inoltre i tempi di esecuzione delle operazioni siano $d_1 = 1$ per il moltiplicatore e $d_2 = 1$ per l'unita' aritmetico-logica.

Si descrivano con precisione i passi dell'algoritmo.

(c) Qual e' la relazione tra l'algoritmo euristico a lista e l'algoritmo di Hu (per la schedulazione di multiprocessori) ? Nel rispondere si descriva l'algoritmo di Hu.