Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2015/16
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra

9 febbraio 2016

Parte 1

1. Si decida se sono veri o falsi i seguenti enunciati (motivando la risposta).
   (a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^4 + x^2 + 1)$ è un'estensione di campi di grado 4.
   (b) $(2x + 1)$ è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x]$.
   (c) L'elemento $\overline{x}^{\,2}$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Q}[x]/((x^2 + 1)(x - 1))$.
   (d) Un divisore di zero in un anello R non è mai invertibile.

   (*8 punti*)

2. Siano $f = x^3 + x + 1,\ g = x^2 + x + 1$.
   (a) Si scomponga g in polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$. (*2 punti*)
   (b) Si scomponga f in polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$. (*2 punti*)
   (c) Si calcoli il massimo comun divisore di f e g in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$. (*2 punti*)
   (d) Si calcoli il massimo comun divisore di f e g in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$. (*1 punto*)

Punteggio:

vedi retro!!

Parte 2

Nota: chi ha superato la prova intermedia del 24/11/2015 (ottenendo almeno *9 punti*) può svolgere solo questa seconda parte della prova scritta.
In tal caso l'esame va consegnato **dopo 60 minuti** e per superarlo sono necessari almeno *9 punti*.

3. Sia F il campo di riducibilità completa del polinomio $f = x^3 - 10$ su $\mathbb{Q}$.
   (a) Si determini una $\mathbb{Q}$-base di F e si verifichi che $\mathbb{Q} \subset F$ è un'estensione di Galois con gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong S_3$. (*3 punti*)
   (b) Si determinino tutti gli elementi di G. (*3 punti*)
   (c) Si determinino tutti i sottogruppi di G e tutti i campi intermedi $\mathbb{Q} \subset L \subset F$. (*6 punti*)

4. Ricordiamo che un'estensione di campi $K \subset F$ si dice *finita* se il grado $[F : K]$ è finito. Si dimostri che un'estensione finita è sempre algebrica. (*3 punti*)

Nome: .... **Matricola:** .... **Punteggio totale:**

vedi retro!!