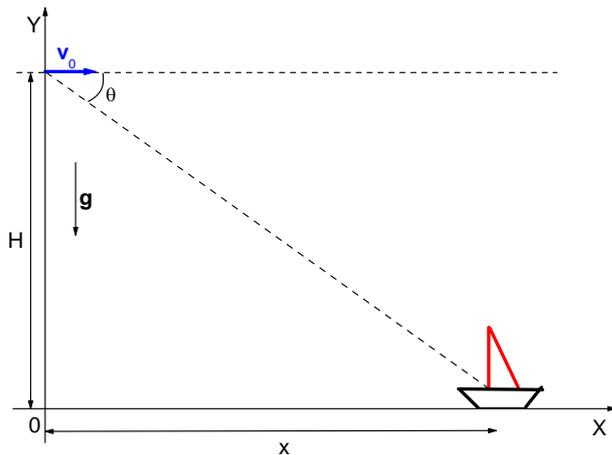


Problema n. 2:

Un bombardiere vola a 430 km/h alla quota costante di 1200 m verso un punto posto sulla verticale di una nave ormeggiata in mare aperto. Sotto quale angolo visuale (rispetto alla direzione orizzontale) il pilota dovrebbe lanciare una bomba per essere certo di colpire la nave?

Soluzione:



Dati:

$$H = 1200m$$

$$|\vec{v}_0| = 430 \text{ Km/h}$$

Determinare l'angolo visuale θ , sotto il quale il pilota dovrebbe sganciare la bomba per colpire la nave.

Scegliamo un sistema di riferimento XY come quello mostrato in figura e definiamo l'angolo visuale θ come l'angolo individuato dall'orizzonte (nel nostro caso una retta parallela all'asse X) con la retta congiungente istantaneamente il bombardiere alla nave. Chiamiamo \vec{v}_0 la velocità con cui il bombardiere viaggia alla quota costante di $H = 1200m$: dato che esso vola con velocità costante sempre alla stessa quota il vettore \vec{v}_0 sarà un vettore parallelo all'asse X e costante in modulo, direzione e verso (come mostrato in figura)

Nell'istante in cui la bomba viene sganciata dal bombardiere essa avrà una velocità iniziale coincidente in modulo, direzione e verso con quella posseduta dal bombardiere, quindi pari a \vec{v}_0 .

Analizziamo ora il moto seguito da un'ipotetica bomba sganciata dal bombardiere: abbiamo un caso di moto balistico, con accelerazione costante pari a \vec{g} , accelerazione di gravità, che avviene nel piano XY. La bomba sganciata dall'aereo seguirà quindi nella sua caduta una traiettoria parabolica, fino a impattare con la superficie marina (nel nostro caso, data la scelta del sistema di riferimento,

con l'asse X): il problema ci chiede di determinare l'angolo θ sotto il quale il pilota deve sganciare la bomba, affinché essa impatti con la nave cioè affinché la sua traiettoria intercetti la nave stessa. (Si noti che, implicitamente, ci viene chiesto di determinare, attraverso l'angolo θ la distanza x dal bombardiere a cui deve trovarsi la nave affinché la bomba la colpisca)

Per risolvere il problema ricaviamo la legge oraria per il moto utilizzando le ben note relazioni:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, dove \vec{a} e \vec{v} sono i vettori accelerazione e velocità, mentre \vec{r} è il vettore posizione che ad ogni istante mi individua la posizione della palla nello spazio. Dall'integrazione di tali relazioni con le condizioni iniziali $\vec{v}(t=t_0) = \vec{v}_0$ e $\vec{r}(t=t_0) = \vec{r}_0$ e ricordando che l'accelerazione \vec{a} è costante (in direzione, verso e modulo) e pari a \vec{g} , si ottengono le leggi orarie:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0) \tag{1}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2 + \vec{v}_0(t-t_0)$$

Riscriviamo ora le leggi (1) in termini di componenti lungo X e Y, ricordando che l'accelerazione \vec{a} ha una componente non nulla solo lungo l'asse Y e pari, in modulo, a $+g$:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g(t-t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t-t_0) \\ y = y_0 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + v_{0y}(t-t_0) \end{cases}$$

In particolare, consideriamo il secondo sistema di equazioni di (1) che descrive ad ogni istante la posizione (in termini di componenti lungo X e Y) della bomba durante il suo moto, dal momento in cui viene sganciata all'istante in cui colpisce la nave.

Nel nostro caso, con il sistema di riferimento scelto, avremo che $x_0 = 0$ e $y_0 = H$; inoltre, per comodità possiamo porre l'istante iniziale (cioè l'istante in cui la bomba viene sganciata e inizia il suo moto verso la nave) $t_0 = 0$. Sostituendo tali condizioni otteniamo la legge oraria per la bomba:

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = H - \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \end{cases}$$

Come abbiamo detto, la velocità iniziale con cui viene sganciata la bomba coincide con il vettore \vec{v}_0 , quindi le componenti lungo le direzioni X e Y possono essere scritte come:

$$v_{0x} = v_0$$

$$v_{0y} = 0$$

Sostituendo nelle leggi del moto otteniamo finalmente:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Il problema ci chiede di determinare il valore dell'angolo θ affinché la bomba colpisca la nave, ovvero ci viene chiesto di determinare θ tale che la traiettoria (parabolica) seguita dalla bomba intercetti la nave che si trova nel punto $(x, y = 0)$.

Il problema non ci fornisce la posizione lungo l'asse X della nave, cioè il valore della coordinata x , ma possiamo esprimerla in funzione della quota H a cui vola il bombardiere e dell'angolo θ , attraverso semplici considerazioni trigonometriche: avremo quindi che $x = H \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

Utilizziamo quindi le equazioni precedenti e imponiamo la condizione che il punto $(x, y = 0)$ soddisfi alle leggi orarie, ovvero:

$$\begin{cases} H \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = v_0 t \\ 0 = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto un sistema di due equazioni in due incognite, che risolto (ad esempio per sostituzione) ci fornisce il valore dell'angolo θ cercato:

$$\begin{cases} t = H \frac{\cos \theta}{v_0 \sin \theta} \\ 0 = H - \frac{1}{2} g \left(H \frac{\cos \theta}{v_0 \sin \theta} \right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} \frac{g H^2}{v_0^2} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{g H}{2}} = \frac{1}{430 \cdot 10^3 \text{ m} / 3.6 \cdot 10^3 \text{ s}} \sqrt{\frac{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 1200 \text{ m}}{2}} = 0.64$$

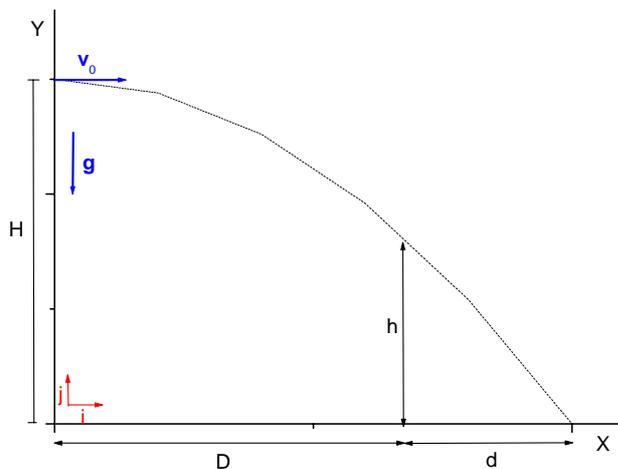
Da cui otteniamo infine la soluzione: $\theta = \operatorname{arctg}(0.64) = 32.69 = 32^\circ 42'$

Problema n. 4:

Durante il servizio, un tennista lancia la palla, assimilabile a un punto materiale, orizzontalmente, si da imprimere ad essa una velocità iniziale parallela al suolo: Calcolare:

- la minima velocità iniziale che deve essere impressa alla palla perché essa possa superare la rete alta $h = 0.9 \text{ m}$ e posta a di distanza $D = 15.0 \text{ m}$ dal tennista, se la palla viene lanciata da un'altezza $H = 2.5 \text{ m}$; [$\mathbf{v}_0 = 26.25 \text{ ms}^{-1} \mathbf{i}$]
- la distanza d dalla rete in corrispondenza della quale la palla toccherà il suolo, nell'ipotesi che la palla sfiori la rete; [$d = 3.75 \text{ m}$]
- il tempo di volo della palla, nell'ipotesi di cui al punto precedente. [$t_v = 0.714 \text{ s}$]

Soluzione:



Dati:

$$H = 2.5\text{m}$$

$$h = 0.9\text{m}$$

$$D = 15.0\text{m}$$

- (a) *Determinare la minima velocità iniziale che deve essere impressa alla palla perché essa possa superare la rete*

Si tratta di un moto balistico, con accelerazione costante pari a \vec{g} , accelerazione di gravità. Scegliamo un sistema di riferimento XY come quello illustrato in figura, con la direzione Y uguale e contraria a quella dell'accelerazione \vec{g} : con tale scelta di sistema di riferimento, la velocità iniziale impressa alla palla \vec{v}_0 sarà un vettore parallelo all'asse X, come mostrato in figura.

Per ricavare le leggi orarie per questo sistema, utilizziamo ora le ben note relazioni:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, dove \vec{a} e \vec{v} sono i vettori accelerazione e velocità, mentre \vec{r} è il vettore posizione che ad ogni istante mi individua la posizione della palla nello spazio. Tali relazioni

andranno integrate, con le condizioni iniziali $\vec{v}(t=t_0)=\vec{v}_0$ e $\vec{r}(t=t_0)=\vec{r}_0$ e ricordando che l'accelerazione \vec{a} è costante (in direzione, verso e modulo) e pari a \vec{g} , ottenendo così le leggi orarie:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0)}$$
(1)

(Nota: osservando le equazioni sopra, si deduce facilmente che il vettore velocità \vec{v} si trova sempre nel piano individuato dai vettori \vec{v}_0 e \vec{a} , così come \vec{r} : da questa osservazione possiamo concludere che il moto della palla si svolge sempre nel piano individuato da \vec{v}_0 e \vec{a} , che è quello coincidente con il piano XY scelto come sistema di riferimento)

Riscriviamo ora le leggi (1) in termini di componenti lungo X e Y, ricordando che l'accelerazione \vec{a} ha una componente non nulla solo lungo l'asse Y e pari a $-g$:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g(t - t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y = y_0 - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0) \end{cases}$$
(2)

Come abbiamo detto il moto è balistico, ovvero la traiettoria seguita dalla palla sarà una parabola, come illustrato in figura (e come è facile verificare eliminando il tempo dalle espressioni per x e y e ottenendo così un'equazione per la coordinata y in funzione di x).

Per determinare la minima velocità iniziale da imporre alla palla affinché essa superi la rete, dobbiamo utilizzare le leggi orarie imponendo che la traiettoria (parabolica) della palla passi al di sopra dell'altezza h a distanza D dal tennista, ovvero dobbiamo imporre che il punto $(x = D, y = h)$ soddisfi al sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y = y_0 - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0) \end{cases}$$

quindi scriveremo:
$$\begin{cases} D = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ h = y_0 - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0) \end{cases}$$

Per come abbiamo scelto il sistema di riferimento XY, avremo che $x_0 = 0$ e $y_0 = H$ (come si deduce facilmente osservando la figura), mentre scegliamo arbitrariamente $t_0 = 0$ (possiamo farlo, dato che il problema non ci da indicazioni in questo senso). Inoltre la velocità iniziale \vec{v}_0 è un vettore parallelo all'asse X (come ci viene esplicitamente detto nei dati del problema), quindi varrà

che:
$$\begin{aligned} v_{ox} &= v_0 \\ v_{oy} &= 0 \end{aligned}$$

Sostituendo tutte queste informazioni nelle leggi orarie otteniamo il sistema di due equazioni in due

incognite t e v_0 :
$$\begin{cases} D = v_0 t \\ h = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

che risolto (semplicemente per sostituzione, ad esempio), ci fornisce l'espressione per la velocità iniziale:

$$v_0^2 = \frac{D^2 g}{2(H-h)} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{D^2 g}{2(H-h)}} = \sqrt{\frac{(15.0m)^2 \cdot 9.8m/s^2}{2(2.5m - 0.9m)}} = 26.25 m/s$$

Come già osservato prima, la velocità iniziale trovata è un vettore parallelo all'asse x, quindi

scriveremo, in termini vettoriali:
$$\vec{v}_0 = 26.25 m/s \hat{i}$$

(b) *Determinare la distanza d dalla rete in corrispondenza della quale la palla toccherà il suolo.*

Mettiamoci quindi nella situazione in cui la palla, a cui è stata impressa una velocità iniziale $\vec{v}_0 = 26.25 m/s \hat{i}$ sfiora la rete e poi cade a terra; abbiamo detto che la traiettoria seguita dalla palla è parabolica e, in questo secondo punto del problema, essa è già determinata, avendo fissato tutte le condizioni iniziali, in particolare la velocità iniziale.

Si tratta quindi di capire a quale distanza X dall'origine del sistema di riferimento che abbiamo scelto la parabola seguita dalla palla intercederà il suolo (che nel sistema di riferimento scelto da noi ha ordinata nulla), ovvero dobbiamo determinare per quale valore di x la traiettoria parabolica della palla passa per il punto $(x, y = 0)$.

Come nel punto precedente, utilizziamo ancora le leggi orarie:
$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

dove abbiamo semplicemente sostituito nelle leggi orarie (2) le condizioni note:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = H \quad \text{e posto per comodità } t_0 = 0$$

$$v_{ox} = v_0$$

$$v_{oy} = 0$$

Dobbiamo determinare x affinché il punto $(x, y = 0)$ soddisfi al sistema di equazioni sopra, per cui

$$\text{scriveremo: } \begin{cases} x = v_0 t \\ 0 = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto un sistema di due equazioni in due incognite, che risolto per sostituzione ci

$$\text{da semplicemente: } \begin{cases} t = x/v_0 \\ 0 = H - \frac{1}{2} g \left(x/v_0\right)^2 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2H \cdot v_0^2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.5m \cdot (26.25m/s)^2}{9.8m/s^2}} = 18.75m$$

Il valore di x che abbiamo trovato corrisponde alla distanza rispetto all'origine del sistema di riferimento a cui la palla tocca il suolo: per determinare quanto richiesto dal problema, ovvero la distanza d dalla rete a cui la palla cede al suolo basta procedere per semplice sottrazione:

$$d = x - D = 18.75m - 15m = 3.75m$$

(c) *Determinare il tempo di volo della palla, nell'ipotesi di cui al punto precedente*

Siamo sempre nell'ipotesi che la palla compia un moto parabolico, con velocità iniziale $\vec{v}_0 = 26.25m/s \hat{i}$, toccando il suolo in un punto che dista 3.75m dalla rete (o 18.75m dall'origine del sistema di riferimento scelto): per determinare il tempo di volo (cioè il tempo impiegato dalla palla a compiere questo moto parabolico e a toccare terra), possiamo usare indifferentemente una delle due leggi orarie utilizzate per risolvere il punto (b).

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ 0 = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Per semplicità, utilizziamo la prima delle due equazioni sopra, sostituendo a x il valore trovato nel punto precedente ($x = 18.75m$) e ottenendo così:

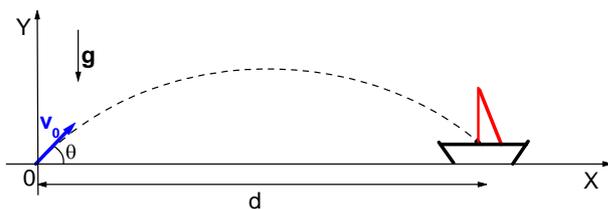
$$t = \frac{x}{v_0} = \frac{18.75m}{26.25m/s} = 0.714s, \text{ che corrisponde al tempo di volo cercato.}$$

Problema n. 6:

Una nave pirata è ormeggiata a 500 metri dalla base di un forte che difende l'entrata del porto di un'isola. Il cannone che la protegge, piazzato a livello del mare, ha una velocità di bocca di 82 m/s. Calcolare:

- a quale alzo (angolo di elevazione) si deve puntare il cannone per colpire la nave pirata; [$\theta = 23^{\circ}23'$]
- il tempo di volo per l'alzo maggiore; [$t_v = 15.4$ s]
- a quale distanza L dal porto deve portarsi la nave per essere fuori dalla portata di tiro del cannone. [$L > 686.1$ m]

Soluzione:



Dati:

$$|\vec{v}_0| = 82 \text{ m/s}$$

$$d = 500 \text{ m}$$

(a) Determinare a quale alzo (angolo di elevazione) si deve puntare il cannone per colpire la nave pirata

Il moto della bomba sparata dal cannone verso la nave, è un caso di moto balistico, con accelerazione costante pari a \vec{g} , accelerazione di gravità, mentre la velocità iniziale della bomba sparata dal cannone sarà un generico vettore \vec{v}_0 .

Scegliamo dunque un sistema di riferimento XY come quello illustrato in figura, con la direzione Y uguale e contraria a quella dell'accelerazione: il moto che stiamo studiando avverrà nel piano individuato dagli assi X e Y.

Per ricavare le leggi orarie per questo sistema, utilizziamo ora le ben note relazioni:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, dove \vec{a} e \vec{v} sono i vettori accelerazione e velocità, mentre \vec{r} è il vettore posizione che ad ogni istante mi individua la posizione della palla nello spazio. Tali relazioni andranno integrate, con le condizioni iniziali $\vec{v}(t=t_0) = \vec{v}_0$ e $\vec{r}(t=t_0) = \vec{r}_0$ e ricordando che l'accelerazione \vec{a} è costante (in direzione, verso e modulo) e pari a \vec{g} , ottenendo così le leggi orarie:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0) \quad (1)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0)$$

Riscriviamo ora le leggi (1) in termini di componenti lungo X e Y, ricordando che l'accelerazione \vec{a} ha una componente non nulla solo lungo l'asse Y e pari a $-g$, ottenendo:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g(t - t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y = y_0 - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0) \end{cases}$$

Nel nostro caso, la scelta del sistema di riferimento, ci porta ad avere $x_0 = y_0 = 0$ (è facile da dedurre se consideriamo che l'origine degli assi cartesiani è stata presa coincidente con il punto in cui si trova il cannone); per comodità poniamo anche $t_0 = 0$.

Inoltre, possiamo scomporre lungo gli assi X e Y anche la velocità iniziale del proiettile sparato dal cannone \vec{v}_0 , che come illustrato in figura è un vettore avente origine nell'origine degli assi che forma con l'asse orizzontale X un angolo generico θ ; tale angolo θ costituisce l'incognita del nostro problema, ovvero l'angolo di elevazione a cui deve essere puntato il cannone per fare in modo che esso colpisca la nave.

Scriviamo dunque le componenti lungo gli assi cartesiani di \vec{v}_0 :

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

Sostituendo quindi le relazioni sopra nelle leggi orarie ricavate precedentemente, otteniamo:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t \end{cases}$$

che mi danno in ogni istante la posizione (in termini di coordinate x e y) del proiettile sparato da cannone.

Il problema ci chiede di determinare il valore di θ , affinché il proiettile colpisca la nave che si trova nel punto di coordinate (rispetto al sistema di riferimento scelto) $(x = d, y = 0)$; non ci resta quindi

che imponere la condizione che, il punto di coordinate $(d,0)$ soddisfi alle leggi orarie scritte sopra,

ovvero che il sistema:
$$\begin{cases} d = v_0 \cos \theta \\ 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta \end{cases}$$
 abbia soluzioni.

A questo punto abbiamo un sistema di due equazioni in due incognite (t e θ) che possiamo facilmente risolvere, ad esempio per sostituzione, ottenendo la seguente espressione per l'angolo θ :

$$\boxed{\sin 2\theta = \frac{gd}{v_0^2}}$$

(Nota: nel riarrangiare l'espressione per l'angolo θ , può essere utile, servirsi della nota relazione trigonometrica $2\sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$)

Dall'espressione sopra otteniamo due soluzioni possibili, comprese fra 0 e 90° , per l'angolo di elevazione:

$$2\theta = \arcsen\left(\frac{gd}{v_0^2}\right) = \arcsen\left(\frac{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 500 \text{ m}}{(82 \text{ m/s})^2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 23^\circ 23'}$$

$$\pi - 2\theta = \arcsen\left(\frac{gd}{v_0^2}\right) = \arcsen\left(\frac{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 500 \text{ m}}{(82 \text{ m/s})^2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 66^\circ 36'}$$

Nota bene: si noti che, entrambe le soluzioni per θ sono valide: esse corrispondono a due diverse traiettorie paraboliche compiute dal proiettile, entrambe però tali da soddisfare la condizione per cui la traiettoria intercetti l'asse X alla distanza d dall'origine degli assi (nel punto appunto in cui si trova la barca).

(b) *Determinare il tempo di volo per l'alzo maggiore*

Come abbiamo visto nel punto precedente, abbiamo due possibili valori dell'angolo di alzo θ che soddisfano la condizione per cui il cannone riesca a colpire la nave. Il problema ci dice di considerare il valore maggiore fra i due ottenuti, ovvero: $\theta = 66^\circ 36'$

Il tempo di volo che ci viene richiesto di calcolare è il tempo necessario perché il proiettile sparato dal cannone compia il suo moto parabolico e arrivi a terra, in questo caso in particolare colpendo la nave.

Possiamo dunque utilizzare ancora le leggi orarie, di cui ci siamo serviti nel punto precedente:

$$\begin{cases} d = v_0 \cos \theta \\ 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta \end{cases}$$

solo che in questo caso il valore dell'angolo θ è fissato e pari a $\theta = 66^\circ 36'$ e la nostra incognita è costituita invece dal tempo.

Per semplicità utilizziamo ad esempio la prima delle due equazioni del sistema di cui sopra: $d = v_0 \cos \theta$, da cui ricaviamo facilmente l'espressione per il tempo di volo:

$$t_v = \frac{d}{v_0 \cos \theta} = \frac{500m}{82 \frac{m}{s} \cdot \cos(66^\circ 36')} = 15.4s$$

(c) *Determinare a quale distanza L dal porto deve portarsi la nave per essere fuori dalla portata di tiro del cannone*

Per rispondere a questo ultimo quesito è necessario determinare la gittata massima del cannone, ovvero qual è la massima distanza a cui il cannone riesce a sparare.

Determiniamo prima l'espressione per la gittata in generale utilizzando ancora una volta le leggi

orarie:
$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta t \end{cases}$$

La gittata corrisponde al valore x_G a cui un ipotetico proiettile sparato dal cannone tocca il suolo (nel nostro caso l'asse X), ovvero tale per cui sia $y = 0$.

Imponiamo quindi questa condizione nel sistema di equazioni di cui sopra e risolviamo il sistema (ad esempio per semplice sostituzione), ricavando x_G in funzione degli altri parametri noti:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta \\ 0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta t \end{cases} \Rightarrow x \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{2} g \frac{x}{v_0^2 \cos^2 \theta} \right) = 0$$

Da cui otteniamo due soluzioni possibili per la gittata:

$x_{G,1} = 0$ $x_{G,2} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta \cdot v_0^2}{g}$

La prima soluzione è ovviamente banale, e corrisponde al caso limite in cui il proiettile viene sparato in verticale lungo l'asse Y e ricade poi nel medesimo punto, mentre la seconda soluzione è l'espressione corretta per la gittata, che come si nota dipende oltre che dal modulo della velocità iniziale del proiettile, anche da un'espressione in θ .

Nota: può essere interessante andare a considerare i casi limite dell'espressione che ci fornisce la gittata:

per $\theta = 0 \Rightarrow x_G = 0$

per $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_G = 0$ (ricadiamo nel caso banale che ci dava la prima soluzione)

Tornando alla domanda del problema, ci viene chiesto di calcolare la gittata massima del cannone: massimizzando quindi l'espressione trovata per x_G possiamo facilmente ricavare che l'angolo θ a

cui la gittata è massima corrisponde a un valore di $\theta = 45^\circ$. Infatti, se calcoliamo la derivata prima dell'espressione di x_G e la uguagliamo a zero otteniamo:

$$\frac{dx_G}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g} [\text{sen}\theta \cdot (-\text{sen}\theta) + \cos\theta \cdot \cos\theta] = 0 \Rightarrow (\text{sen}\theta)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Nel caso quindi del nostro cannone la gittata massima (che corrisponde alla distanza minima dal cannone di cui deve allontanarsi la nave per essere fuori dalla portata del cannone) sarà pari alla gittata che si ottiene con un angolo di elevazione di $\theta = 45^\circ$ e modulo della velocità iniziale pari a 82 m/s :

$$x_{G,Max} = \frac{2\text{sen}(45^\circ)\cos(45^\circ) \cdot (82\text{ m/s})^2}{9.8\text{ m/s}^2} = 686.1\text{ m}$$