Appunti di Probabilità e Statistica

a.a. 2014/2015 C.d.L. Informatica – Bioinformatica
I. Oliva

Lezione 4

1 Probabilità

Parliamo ra di v.a. assolutamente continue.

v.a. (assolutamente) continua: una v.a. X è continua se, per ogni valore x_0, è nota la probabilità che tale v.a. assuma valori in un intervallo $(x_0, x_0 + \mathrm{d}x)$. In particolare,

$$P(x_0 < X \leq x_0 + \mathrm{d}x) = f(x_0)\mathrm{d}x \ .$$

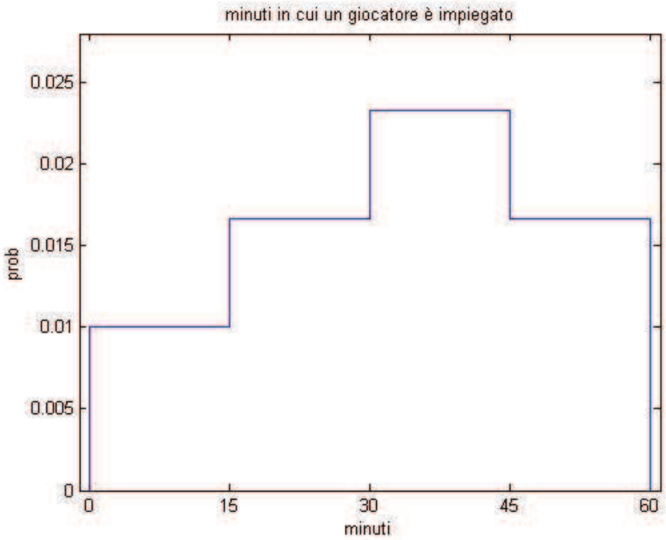
La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, integrabile, si chiama *densità* di X ed è t.c.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \ .$$

La funzione densità soddisfa due proprietà:

- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$
- $f(x) = F'_X(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, dove $F_X(x)$ è la funzione di ripartizione di X. Dunque, la probabilità si calcola come $P(X \leq x) = F_X(x)$. Di conseguenza, la probabilità di una v.a. continua è un'area.

Esempio 1.1. *Consideriamo la distribuzione del tempo impiegato da un giocatore di football durante una partita:*



Qual è la probabilità che il giocatore giochi dal terzo quarto in poi?

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 30) &= P(30 \leq X \leq 45) + P(45 \leq X \leq 60) \\
&= (45 - 30) \cdot 0.0233 + (60 - 45) \cdot 0.0167 = 0.6 \ .
\end{aligned}
$$

Qual è la probabilità che il giocatore giochi i 20 minuti centrali della partita?

20 minuti centrali $= 30 \pm 10$ *minuti, ossia*

$$
\begin{aligned}
P(20 \leq X \leq 40) &= P(20 \leq X \leq 30) + P(30 \leq X \leq 40) \\
&= (30 - 20) \cdot 0.0167 + (40 - 30) \cdot 0.0233 = 0.4 \ .
\end{aligned}
$$

Qual è la probabilità che il giocatore giochi i primi 40 minuti della partita?

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 40) &= P(0 \leq X \leq 15) + P(15 \leq X \leq 30) + P(30 \leq X \leq 40) \\
&= (15 - 0) \cdot 0.01 + (30 - 15) \cdot 0.0167 + (40 - 30) \cdot 0.233 = 0.6305 \ .
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.1. *La seguente funzione*

$$
f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, & \textit{se } x > 1 \\ 0, & \textit{altrimenti} \end{cases}
$$

descrive la distribuzione del reddito mensile, espresso in migliaia di euro, di una popolazione di individui, caratterizzata da redditi mensili maggiori di 1000 *euro.*

1. *Calcolare la probabilità che il reddito di un individuo sia superiore a* 2000 *euro.*
2. *Calcolare la probabilità che il reddito di un individuo sia compreso tra* 1500 *e* 2000 *euro.*
3. *Estratto a caso un campione di 5 soggetti dalla popolazione, determinare la probabilità che almeno uno abbia un reddito superiore a* 2000 *euro.*

Ora elenchiamo alcune delle densità continue più importanti.

- **V.a. uniforme.**
  Sia X un punto scelto *a caso* in $(0,1]$; allora, la probabilità che esso sia minore o uguale ad $1/2$ è proprio $1/2$, in quanto

$$(0,1] = \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$
$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = P\left(X \in \left(0, \frac{1}{2}\right]\right) = P\left(X \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$
$$P\left(X \in \left(0, \frac{1}{2}\right]\right) + P\left(X \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) = 1$$

  E se dividessimo l'intervallo in 4 parti uguali? Analogamente, avremo:

$$(0,1] = \left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right]$$
$$P\left(X \leq \frac{1}{4}\right) = P\left(X \in \left(0, \frac{1}{4}\right]\right) = \frac{1}{4}$$
$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = P\left(X \in \left(0, \frac{1}{4}\right]\right) + P\left(X \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}$$
$$P\left(X \leq \frac{3}{4}\right) = P\left(X \in \left(0, \frac{1}{4}\right]\right) + P\left(X \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) + P\left(X \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right) = \frac{3}{4}$$

Continuando a dividere l'intervallo in parti sempre più piccole, alla fine avremo

$$P(X \leq x) = x, \; \forall \, x \in (0,1] \; .$$

Dunque, la funzione di ripartizione è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases} .$$

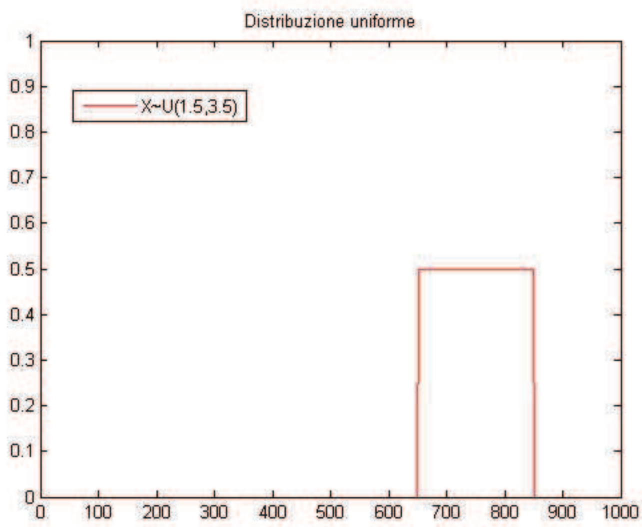
Per definizione di funzione densità, si ha

$$f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{se } x \geq 1 \end{cases} ,$$

ossia, $f(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$. Tale funzione è detta *densità uniforme continua* su $(0,1)$ e X si chiama *v.a. uniforme su (0,1),* che si indica con $X \sim \mathcal{U}(0,1)$.

In maniera più generale, una v.a. uniforme su $[a,b]$ è $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a,b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} .$$



- **V.a. esponenziale.**

  La v.a. esponenziale rappresenta l'analogo della v.a. geometrica nel continuo. Si indica con $X \sim Exp(\mu)$ e indica l'istante di rottura, in un intervallo di tempo, di un apparecchio non soggetto ad usura, che si potrebbe guastare per motivi contingenti.

  L'assenza di usura si esprime in termini matematici attraverso la *proprietà di assenza di memoria:*

  $$P(X > t + s | X > t) = P(X > s)\,.$$

  come nel caso della geometrica, si ha

  $$\begin{aligned} P(X > s) = P(X > t + s|X > t) &= \frac{P(X > t + s, X > t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(X > t + s)}{P(X > t)} \\ &\Rightarrow P(X > t + s) = P(X > s)P(X > t) \end{aligned}$$

  L'unica funzione continua che soddisfa una disequazione come quella precedente è l'esponenziale $e^{-\mu t}$, dunque

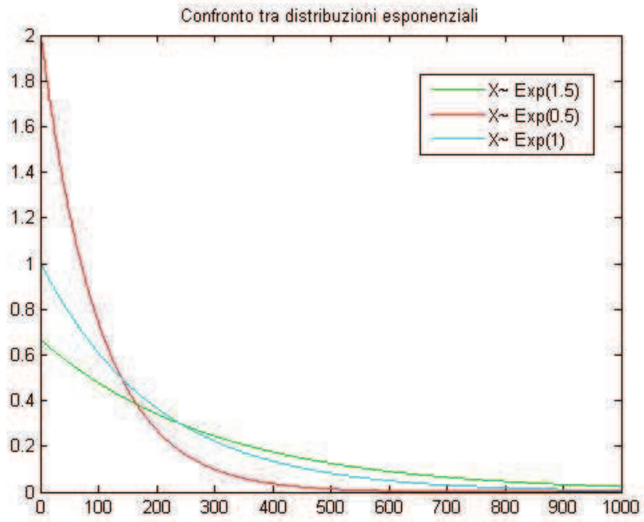
  $$P(X > t) = e^{-\mu t} \;\Rightarrow\; P(X \le t) = 1 - e^{-\mu t}, \;\text{ con } t \ge 0,\, \mu > 0\,.$$

  La funzione di ripartizione si scrive, allora:

  $$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\mu t}, & \text{se } t \ge 0 \end{cases}\,.$$

  X si chiama *v.a. esponenziale,* si indica con $X \sim Exp(\mu)$ e la relativa densità è

  $$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ \mu e^{-\mu t}, & \text{se } t \ge 0 \end{cases}\,.$$



- **V.a. normale.** Una v.a. continua $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, definita sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, è detta avere *densità normale (o gaussiana) standard*, se ha densità

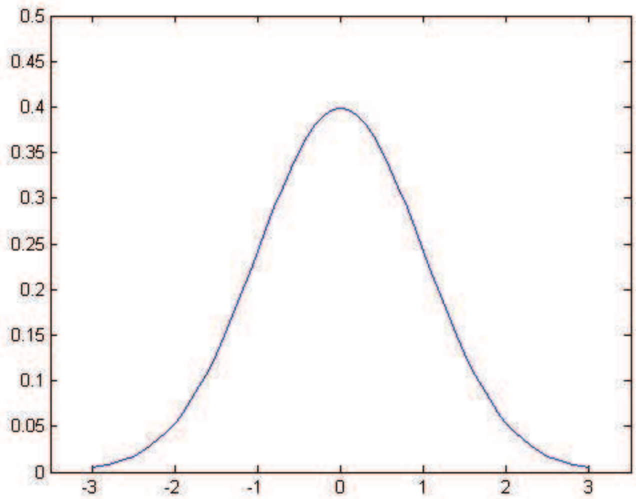
$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \ \forall\, z \in \mathbb{R}\ .$$

Si dimostra che $\varphi(z)$ è effettivamente una densità di probabilità, dato che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \mathrm{d}z = 1\ .$$

Da un breve studio di funzione, si ricava che:

  - Dominio: $\mathbb{R}$
  - Codominio: $\mathbb{R}^+$
  - simmetria rispetto all'asse y
  - no intersezioni con asse x, una intersezione con asse y
  - Punto di massimo: $M = (0, 1/\sqrt{2\pi})$
  - Punti di flesso: $F_1 = (-1, e^{-\frac{1}{2}}/\sqrt{2\pi})$



La funzione di ripartizione è

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} .$$

Tale funzione di ripartizione non è calcolabile analiticamente, ma viene tabulata.

Proprietà della funzione di ripartizione ϕ

Se $P(Z \leq z) = \phi(z)$, si ha

1. $P(z_1 \leq Z \leq z_2) = \phi(z_2) - \phi(z_1)$
2. $P(Z > z) = 1 - \phi(z)$
3. $P(|Z| \leq z) = 2\phi(z) - 1$
4. $P(|Z| > z) = 2 - 2\phi(z)$

Più in generale, si definisce *distribuzione normale* di parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$ la distribuzione di probabilità con densità e funzione di ripartizione date rispettivamente da

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t$$

Anche questa funzione di ripartizione non è calcolabile analiticamente. Per poter calcolare la probabilità, occorre seguire alcuni step.

Standardizzazione Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, allora $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, infatti: poniamo $y := \frac{t-\mu}{\sigma}$, allora

$$\begin{aligned} t &= \sigma y + \mu \\ \mathrm{d}t &= \sigma \mathrm{d}y \\ t \to -\infty &\Rightarrow y \to -\infty \\ t \to x &\Rightarrow y \to \frac{x-\mu}{\sigma} \end{aligned}$$

Dunque, si ha:

$$F_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma \mathrm{d}y = F_Z(z)\ .$$

Z prende il nome di *v.a. standardizzata.* Passando alla probabilità, si ha

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

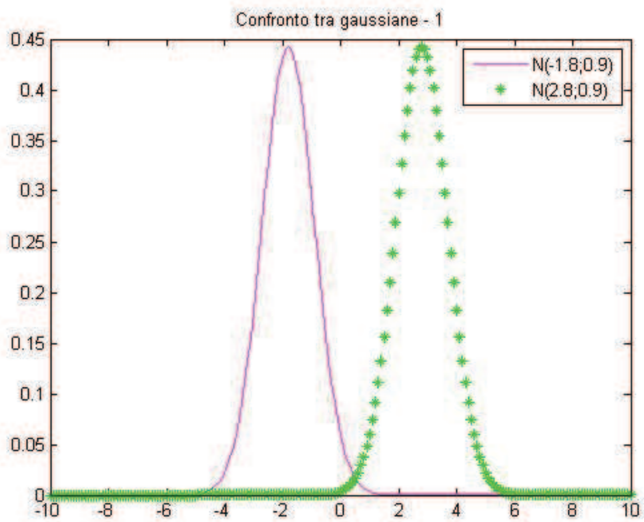
Riconduzione alla funzione di ripartizione Una volta ottenuta la v.a. standardizzata, si applicano le sue proprietà per il calcolo della probabilità.

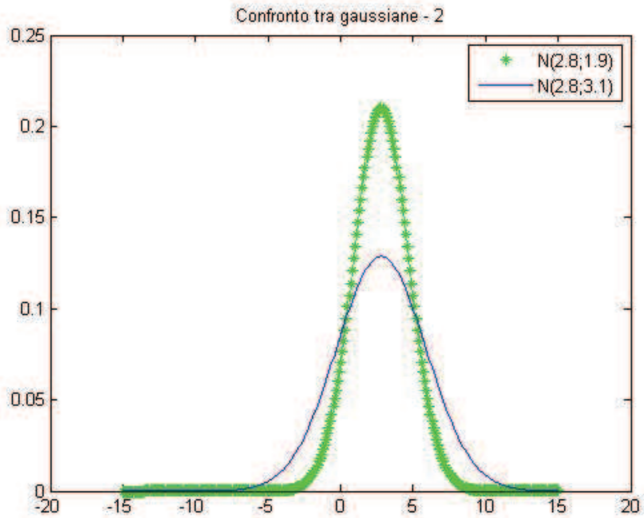
Adattamento alle tavole Si ricavano i valori della standardizzata dalle tavole.
Se conosciamo $z > 0$, cerchiamo l'elemento corrispondente $\phi(z)$ all'interno delle tavole.
Se conosciamo $z < 0$, cerchiamo l'elemento corrispondente $\phi(-z) = 1 - \phi(-z)$ all'interno delle tavole.
Se conosciamo il valore assunto da $\phi(z)$, che coincide con il quantile della distribuzione, possiamo determinare il livello di tale quantile:

$$\begin{aligned} \alpha = P(Z \leq z) &\Rightarrow \phi^{-1}(\alpha) = z_\alpha \\ \alpha = P(Z > z) &\Rightarrow \phi^{-1}(1-\alpha) = z_{1-\alpha} \\ \alpha = P(|Z| \leq z) &\Rightarrow \phi^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = z_{\frac{\alpha+1}{2}} \\ \alpha = P(|Z| > z) &\Rightarrow \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Proprietà della distribuzione normale

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Codominio: $\mathbb{R}^+$
- simmetria rispetto alla retta verticale passante per μ
- no intersezioni con asse x, una intersezione con asse y
- Punto di massimo in corrispondenza di $x = \mu$
- Punti di flesso in corrispondenza di $x = \mu \pm \sigma$
- al variare di μ, la curva subisce traslazioni a destra o a sinistra
- al variare di σ, la curva diventa più o meno schiacciata
- *Legge dei tre* σ : data una distribuzione normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,
  1. l'intervallo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ contiene circa il 68.3% delle osservazioni
  2. l'intervallo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ contiene circa il 95.4% delle osservazioni
  3. l'intervallo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ contiene circa il 99.7% delle osservazioni





Esercizio 1.2. *La durata di un tornio si distribuisce secondo una normale di parametri $\mu = 2$ anni e $\sigma = 0.5$ anni. Calcolare:*

1. *la probabilità che il tornio duri più di 28 mesi*
2. *l'intervallo di ampiezza 2 anni al quale corrisponde la massima probabilità di contenere la durata effettiva del tornio.*

Esercizio 1.3. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x\cos(x), & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

determinare la costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x)$ sia densità di probabilità e calcolare la probabilità di $E = \{X \leq \pi/4\}$.

Esercizio 1.4. *Il tempo di attesa di un guasto in un dispositivo ha legge esponenziale di parametro $\lambda = 1/11$ mesi. Calcolare la probabilità che il guasto si verifichi non prima di 6 mesi dopo l'ultimo controllo.*

Esercizio 1.5. *Una marca di birra offre confezioni contenenti nominalmente $55\,cl$ di prodotto. Si osserva che il 10% delle confezioni contiene meno di $53.5\,cl$ di birra e che il 15% ne contiene più di $56\,cl$. Assumendo che la distribuzione del contenuto sia normale, calcolare:*

1. *i parametri della distribuzione*
2. *la probabilità che, selezionando a caso una lattina, questa abbia contenuto inferiore di quello nominale*

3. *la probabilità che, selezionando a caso 3 lattine, al massimo due abiano un contenuto inferiore a quello nominale.*

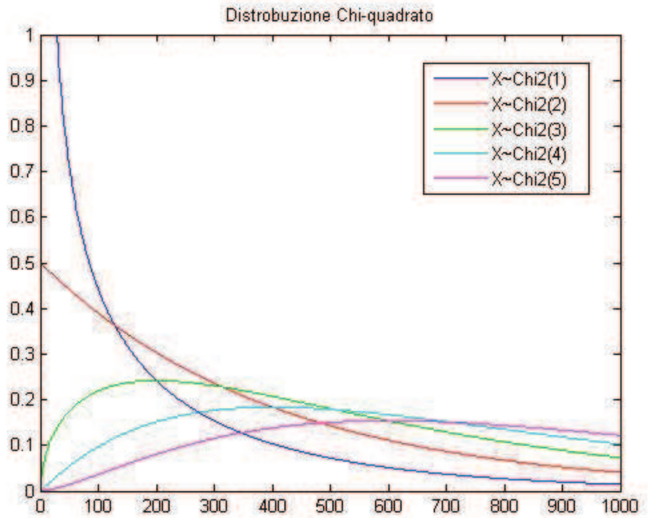
- **V.a. chi-quadrato.** Sia $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ una v.a. normale standard e consideriamo $Y := X^2$. Quale sarà la distribuzione di Y? Se $y < 0$, allora $F_Y(y) = 0$. Supponiamo $y \geq 0$, allora

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X\sqrt{y}) = \phi(\sqrt{y}) - \phi(-\sqrt{y}) \\ &= 2\phi(\sqrt{y}) - 1\,. \end{aligned}$$

Dunque, si ha

$$\begin{aligned} f(y) &= 2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi(\sqrt{y}) = \varphi(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{1/2} e^{-y/2} \end{aligned}$$

La v.a. $Y = X^2$ si chiama *chi-quadrato* e si indica con $Y \sim \chi^2(1)$, dove 1 rappresenta i *gradi di libertà,* con densità appena definita. In generale, se $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$, dove $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ i.i.d., allora avremo $Y \sim \chi^2(n)$ (v.a. chi-quadrato con n gradi di libertà).



V.a. t **di Student** Sia Z una v.a. normale standard e sia Y una v.a. chi-quadrato con n gradi di libertà. La v.a.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$$

si chiama *v.a. t di Student* con $n-1$ gradi di libertà.

La sua distribuzione è simmetrica (in quanto lo è la distribuzione gaussiana). Le espressioni della corrispondente densità di probabilità e della funzione di ripartizione coinvolgono le funzioni Beta e Gamma, rispettivamente. I valori dei quantili sono tabulati, come accade per v.a. gaussiane e chi-quadrato.

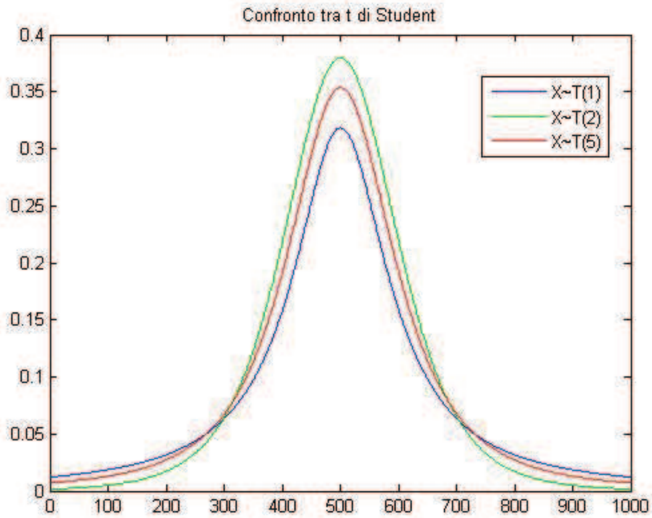
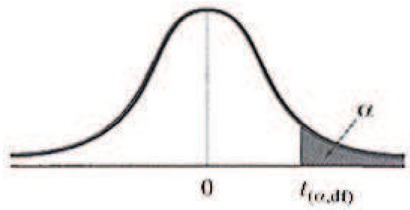


Tavola della funzione di ripartizione della v.a. Normale Standard

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

Tavola della distribuzione T di Student

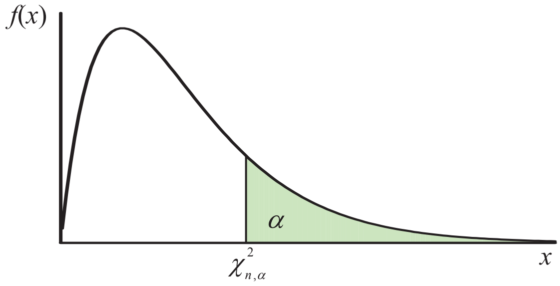


Gradi di libertà	Area nella coda di destra								
	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.660
30	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
31	1.309	1.696	2.040	2.144	2.453	2.744	3.022	3.375	3.633
32	1.309	1.694	2.037	2.141	2.449	2.738	3.015	3.365	3.622
33	1.308	1.692	2.035	2.138	2.445	2.733	3.008	3.356	3.611
34	1.307	1.691	2.032	2.136	2.441	2.728	3.002	3.348	3.601
35	1.306	1.690	2.030	2.133	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591
36	1.306	1.688	2.028	2.131	2.434	2.719	2.990	3.333	3.582
37	1.305	1.687	2.026	2.129	2.431	2.715	2.985	3.326	3.574
38	1.304	1.686	2.024	2.127	2.429	2.712	2.980	3.319	3.566
39	1.304	1.685	2.023	2.125	2.426	2.708	2.976	3.313	3.558
40	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
41	1.303	1.683	2.020	2.121	2.421	2.701	2.967	3.301	3.544
42	1.302	1.682	2.018	2.120	2.418	2.698	2.963	3.296	3.538
43	1.302	1.681	2.017	2.118	2.416	2.695	2.959	3.291	3.532
44	1.301	1.680	2.015	2.116	2.414	2.692	2.956	3.286	3.526
45	1.301	1.679	2.014	2.115	2.412	2.690	2.952	3.281	3.520
46	1.300	1.679	2.013	2.114	2.410	2.687	2.949	3.277	3.515
47	1.300	1.678	2.012	2.112	2.408	2.685	2.946	3.273	3.510
48	1.299	1.677	2.011	2.111	2.407	2.682	2.943	3.269	3.505
49	1.299	1.677	2.010	2.110	2.405	2.680	2.940	3.265	3.500
50	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496

Tavola della distribuzione T di Student (continua)

Gradi di libertà	Area nella coda di destra								
	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
51	1.298	1.675	2.008	2.108	2.402	2.676	2.934	3.258	3.492
52	1.298	1.675	2.007	2.107	2.400	2.674	2.932	3.255	3.488
53	1.298	1.674	2.006	2.106	2.399	2.672	2.929	3.251	3.484
54	1.297	1.674	2.005	2.105	2.397	2.670	2.927	3.248	3.480
55	1.297	1.673	2.004	2.104	2.396	2.668	2.925	3.245	3.476
56	1.297	1.673	2.003	2.103	2.395	2.667	2.923	3.242	3.473
57	1.297	1.672	2.002	2.102	2.394	2.665	2.920	3.239	3.469
58	1.296	1.672	2.002	2.101	2.392	2.663	2.918	3.237	3.466
59	1.296	1.671	2.001	2.100	2.391	2.662	2.916	3.234	3.463
60	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
61	1.296	1.670	2.000	2.099	2.389	2.659	2.913	3.229	3.457
62	1.295	1.670	1.999	2.098	2.388	2.657	2.911	3.227	3.454
63	1.295	1.669	1.998	2.097	2.387	2.656	2.909	3.225	3.452
64	1.295	1.669	1.998	2.096	2.386	2.655	2.908	3.223	3.449
65	1.295	1.669	1.997	2.096	2.385	2.654	2.906	3.220	3.447
66	1.295	1.668	1.997	2.095	2.384	2.652	2.904	3.218	3.444
67	1.294	1.668	1.996	2.095	2.383	2.651	2.903	3.216	3.442
68	1.294	1.668	1.995	2.094	2.382	2.650	2.902	3.214	3.439
69	1.294	1.667	1.995	2.093	2.382	2.649	2.900	3.213	3.437
70	1.294	1.667	1.994	2.093	2.381	2.648	2.899	3.211	3.435
71	1.294	1.667	1.994	2.092	2.380	2.647	2.897	3.209	3.433
72	1.293	1.666	1.993	2.092	2.379	2.646	2.896	3.207	3.431
73	1.293	1.666	1.993	2.091	2.379	2.645	2.895	3.206	3.429
74	1.293	1.666	1.993	2.091	2.378	2.644	2.894	3.204	3.427
75	1.293	1.665	1.992	2.090	2.377	2.643	2.892	3.202	3.425
76	1.293	1.665	1.992	2.090	2.376	2.642	2.891	3.201	3.423
77	1.293	1.665	1.991	2.089	2.376	2.641	2.890	3.199	3.421
78	1.292	1.665	1.991	2.089	2.375	2.640	2.889	3.198	3.420
79	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.888	3.197	3.418
80	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
81	1.292	1.664	1.990	2.087	2.373	2.638	2.886	3.194	3.415
82	1.292	1.664	1.989	2.087	2.373	2.637	2.885	3.193	3.413
83	1.292	1.663	1.989	2.087	2.372	2.636	2.884	3.191	3.412
84	1.292	1.663	1.989	2.086	2.372	2.636	2.883	3.190	3.410
85	1.292	1.663	1.988	2.086	2.371	2.635	2.882	3.189	3.409
86	1.291	1.663	1.988	2.085	2.370	2.634	2.881	3.188	3.407
87	1.291	1.663	1.988	2.085	2.370	2.634	2.880	3.187	3.406
88	1.291	1.662	1.987	2.085	2.369	2.633	2.880	3.185	3.405
89	1.291	1.662	1.987	2.084	2.369	2.632	2.879	3.184	3.403
90	1.291	1.662	1.987	2.084	2.368	2.632	2.878	3.183	3.402
91	1.291	1.662	1.986	2.084	2.368	2.631	2.877	3.182	3.401
92	1.291	1.662	1.986	2.083	2.368	2.630	2.876	3.181	3.399
93	1.291	1.661	1.986	2.083	2.367	2.630	2.876	3.180	3.398
94	1.291	1.661	1.986	2.083	2.367	2.629	2.875	3.179	3.397
95	1.291	1.661	1.985	2.082	2.366	2.629	2.874	3.178	3.396
96	1.290	1.661	1.985	2.082	2.366	2.628	2.873	3.177	3.395
97	1.290	1.661	1.985	2.082	2.365	2.627	2.873	3.176	3.394
98	1.290	1.661	1.984	2.081	2.365	2.627	2.872	3.176	3.393
99	1.290	1.660	1.984	2.081	2.365	2.626	2.871	3.175	3.391
100	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
101	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.625	2.870	3.173	3.389
102	1.290	1.660	1.983	2.080	2.363	2.625	2.869	3.172	3.389
103	1.290	1.660	1.983	2.080	2.363	2.624	2.869	3.171	3.388
104	1.290	1.660	1.983	2.080	2.363	2.624	2.868	3.170	3.387
105	1.290	1.659	1.983	2.080	2.362	2.623	2.868	3.170	3.386
106	1.290	1.659	1.983	2.079	2.362	2.623	2.867	3.169	3.385
107	1.290	1.659	1.982	2.079	2.362	2.623	2.866	3.168	3.384
108	1.289	1.659	1.982	2.079	2.361	2.622	2.866	3.167	3.383
109	1.289	1.659	1.982	2.079	2.361	2.622	2.865	3.167	3.382
110	1.289	1.659	1.982	2.078	2.361	2.621	2.865	3.166	3.381
30000	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291

Tavola 2 – Percentili della variabile casuale Chi-quadrato



n	α									
	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	$0.0^{4}393$	$0.0^{3}157$	$0.0^{3}982$	$0.0^{2}393$	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.2	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2