Esercizi: curve parametrizzate

Formula per la curvatura: $\kappa(t) = \frac{\sqrt{\|\sigma'\|^2\|\sigma''\|^2 - |\langle\sigma'',\sigma'\rangle|^2}}{\|\sigma'\|^3}$.

Esercizio 1. Sia $\sigma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva parametrizzata definita da $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, e sia $\sigma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva parametrizzata definita da $\sigma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$. Mostra che σ_1 e σ_2 hanno la stessa traccia, ma non sono equivalenti tra di loro.

Una soluzione: hanno la stessa traccia, $\sigma_1([0, 2\pi]) = \sigma_2([0, 2\pi]) = S^1$ (la circonferenza di raggio 1). Se fossero equivalenti, avrebbero la stessa lunghezza, ma

$$\begin{aligned} L(\sigma_1) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}dt = 2\pi \\ L(\sigma_2) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2}dt = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Trova una curva parametrizzata $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe C^2 il cui sostegno sia il grafico della funzione valore assoluto. Dimostra che nessuna di tali curve può essere regolare.

Una soluzione: $f(t) = t^3$, $\sigma(t) = (t^3, |t^3|) = \begin{cases} (t^3, -t^3), & t < 0 \\ (t^3, t^3), & t \geq 0 \end{cases}$. Il sostegno è $\sigma(\mathbb{R}) = \{(x, |x|) | x \in \mathbb{R}\}$. Inoltre abbiamo

$$\sigma'(t) = \begin{cases} (3t^2, -3t^2), & t < 0 \\ (3t^2, t^2), & t \geq 0 \end{cases} \qquad \sigma''(t) = \begin{cases} (6t, -6t), & t < 0 \\ (6t, 6t), & t \geq 0 \end{cases}$$

che sono entrambe continue a $t = 0$, quindi σ è di classe C^2.

Non esiste una parametrizzazione regolare: una qualsiasi curva parametrizzata $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ con quel sostegno deve soddisfare $\sigma_1(t)) = -\sigma_2(t)$ se $\sigma_1(t) \leq 0$, e $\sigma_1(t) = \sigma_2(t)$ se $\sigma_1(t) \geq 0$. Quindi,

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= (\sigma_1'(t), -\sigma_1'(t)) \text{ se } \sigma_1 \leq 0, \\ & (\sigma_1'(t), \sigma_1'(t)) \text{ se } \sigma_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Sia t_0 un punto di $\mathbb{R}$ tale che $\sigma(t_0) = (0, 0)$. In un'intorno $I_\epsilon = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ sufficientemente piccolo di t_0, ci sono 3 possibilità per $\sigma_1(t)$:

- σ_1 è non-negativa su I_ϵ: in questo caso σ_1 assume un minimo locale a t_0 quindi $\sigma_1'(t_0) = 0$ e quindi $\sigma'(t_0) = (0, 0)$;
- σ_1 è non-positiva su I_ϵ: in questo caso σ_1 assume un massimo locale a t_0 quindi $\sigma_1'(t_0) = 0$ e quindi $\sigma'(t_0) = (0, 0)$;
- σ_1 cambia segno passando dalla sinistra di t_0 alla destra di t_0; in questo caso per la continuità di σ', $(\sigma_1', -\sigma_1') = (\sigma_1', \sigma_1')$, quindi $-\sigma_1' = \sigma_1'$, quindi $\sigma_1' = 0$, percui $\sigma'(t_0) = (0, 0)$.

Quindi σ non può essere regolare a t_0.

Esercizio 3. Sia $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ la parametrizzazione $\sigma(t) = (t, f(t))$ del grafico di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Dimostra che la lunghezza di σ è $\int_a^b \sqrt{1 + |f'(t)|^2}dt$.

Esercizio 4. Determina una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco per la parabola $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\sigma(t) = (t, at^2)$ con $a > 0$ fissato.

Possiamo scegliere qualsiasi $c \in \mathbb{R}$ da cui misurare la lunghezza d'arco; scegliamo 0.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4a^2\tau^2}d\tau.$$

Sostituzione:

$$\begin{aligned} \tau = \frac{\tan\theta}{2a} &\implies d\tau = \frac{\sec^2\theta}{2a}d\theta \\ \tau = 0 &\implies \theta = 0 \\ \tau \in (-\infty, \infty) &\implies \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \end{aligned}$$

$$\sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta.$$

Quindi $\int \sqrt{1+4a^2\tau^2}d\tau = \int \sec^3\theta d\theta$. Questo integrale si calcola usando la tecnica di integrazione per parti (infatti non è l'integrale più semplice nel mondo),

$$\int \sec^3\theta d\theta \quad = \tfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \tfrac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C,$$

percui

$$\begin{aligned} s(t) = \int_0^t \sqrt{1+4a^2\tau^2}d\tau &= \int_0^{\arctan(2at)} \sec^3\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big|_0^{\arctan(2at)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+4a^2t^2}2at + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1+4a^2t^2}+2at| \end{aligned}$$

A questo punto cediamo all'impossibilità di trovare una formula esplicita per l'inversa $t(s)$ (forse avrei dovuto provare questo esercizio prima di metterlo nella lista di esercizi!) – comunque, sappiamo che l'inversa $t(s)$ esiste, e una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco è $\sigma(t(s)) = (t(s), at(s)^2)$.

Esercizio 5. Sia $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la parametrizzazione $\sigma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $a, b > 0$. Mostra che il sostegno di σ è un'elisse passante per $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$. Trova la curvatura della curva a $(a, 0)$ e $(0, b)$. Mostra che se $a > b$, allora la curvatura a $(\pm a, 0)$ è superiore alla curvatura a $(0, \pm b)$.

Soluzione: $\sigma'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$, $\sigma''(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$. $\sigma(0) = (a, 0), \sigma(\pi/2) = (0, b)$.

Curvatura a $(a, 0)$: $\sigma'(0) = (0, b)$, $\sigma''(0) = (-a, 0)$,

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{\sqrt{\|\sigma'(0)\|^2\|\sigma''(0)\|^2 - \langle\sigma'(0), \sigma''(0)\rangle^2}}{\|\sigma'(0)\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{b^2a^2}}{b^3} \\ &= \frac{a}{b^2} \end{aligned}$$

Curvatura a $(0, b)$: $\sigma'(\pi/2) = (-a, 0)$, $\sigma''(0) = (0, -b)$,

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{\sqrt{b^2a^2}}{a^3} \\ &= \frac{b}{a^2}. \end{aligned}$$

Se $a > b > 0$, allora $a > b \iff a^3 > b^3 \iff a^3/(a^2b^2) > b^3/(a^2b^2) \iff a/b^2 > b/a^2$.