Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 1
7 ottobre 2014

1. Sia $\pi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, l'applicazione definita da $\pi_{a,b}(x) = ax+b$. Sia $G = \{\pi_{a,b} | a \neq 0\}$.
   (a) Si dimostri che G è un gruppo rispetto alla composizione e si determini l'espressione di $\pi_{a,b}\pi_{c,d}$. È un gruppo abeliano?
   (b) Sia $N = \{\pi_{a,b} | a = 1\}$. Si verifichi che N è un sottogruppo normale di G.
   (c) Sia $M = \{\pi_{a,b} | a = 1,\ b \in \mathbb{Z}\}$. Si verifichi che M è un sottogruppo di G. È un sottogruppo normale?
   (d) Si dimostri che M è il gruppo ciclico infinito generato da $\pi_{1,1}$ e si dia esplicitamente un isomorfismo tra M e $\mathbb{Z}$

(8 punti)

2. Si consideri il gruppo $GL(2, \mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali con determinante diverso da zero, con l'usuale prodotto matriciale.
   (a) Sia $N = \{X \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det(X) \in \mathbb{Q}\}$. Si dimostri che N è un sottogruppo di $GL(2, \mathbb{R})$. È un sottogruppo normale?
   (b) Sia $H = \{X \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det(X) = 1\}$. Si verifichi che H è un sottogruppo normale di $GL(2, \mathbb{R})$ e di N.
   (c) Si trovi un omomorfismo di gruppi tra N e $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ (numeri razionali diversi da zero con l'usuale moltiplicazione) di cui H è il nucleo.

(6 punti)

3. (a) Si dimostri che la funzione logaritmo $x \mapsto \ln(x)$ definisce un omomorfismo di gruppi $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, dove $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, e si deduca che $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
   (b) Si dimostri che le soluzioni complesse dell'equazione $x^n = 1$ formano un sottogruppo di $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ isomorfo a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
   (c) Si consideri l'insieme $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Si verifichi che $\mathbb{T}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ma non di $(\mathbb{C}, +)$. È un sottogruppo normale di $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$?
   (d) Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ l'applicazione definita da $\varphi(x) = cosx + isenx$. Si dimostri che φ è un omomorfismo di gruppi tra $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{T}, \cdot)$. Si trovino l'immagine e il nucleo di φ.

(8 punti)

4. Sia $f : M \to N$ un omomorfismo di gruppi suriettivo. Si dimostri che:

   (a) se H è un sottogruppo di N, allora $f^{\leftarrow}(H) = \{x \in M | \ f(x) \in H\}$ è un sottogruppo di M contenente $\mathrm{Ker} f$ e $f(f^{\leftarrow}(H)) = H$.

   (b) se L è un sottogruppo di M e $\mathrm{Ker} f \leq L$, allora $f(L)$ è un sottogruppo di N e $f^{\leftarrow}(f(L)) = L$.

   (c) si concluda che esiste una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di M contenenti il nucleo di f e i sottogruppi di N.

(8 punti)

5. Sia G un gruppo finito di ordine *non* divisibile per 3 e sia $(ab)^3 = a^3 b^3$ per ogni $a, b \in G$. Si dimostri che G è abeliano.

(**)

Gli esercizi $(**)$ sono da considerarsi difficili, ma particolarmente stimolanti. Il loro svolgimento comporta ulteriori punti al foglio di esercizi

Consegna: martedì 14 ottobre, durante le esercitazioni.