

[Versione globale: include tutti i 40 esercizi miscelati nei seriali. Soluzioni: p.7]

Risposte ai Quesiti: 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8: 9: 10:

Nome, Cognome e Matricola:

Università degli Studi di Verona - Corso di Laurea in Informatica

Esame di Analisi Matematica - A.A. 2006/2007, Marco Squassina

Appello d'esame N.2, 22 Giugno 2007 - Sessione Estiva

Indicazioni importanti: Scrivere nome, cognome e matricola in stampatello. I compiti anonimi non saranno corretti. La durata dell'esame è di **120 min.** Nessun libro è consentito. Nessuna calcolatrice grafica è consentita. Scrivere le lettere delle risposte in maiuscolo, in modo chiaro e negli spazi appositi. Restituire solo il presente foglio con le risposte. Annotare e conservare il numero seriale del compito e le risposte date. Le risposte corrette valgono **+7/2** punti. Le risposte errate valgono **-7/6** punti. Le risposte non date valgono **0** punti. Ogni domanda ammette una ed una sola risposta esatta. Se C denota il numero di risposte date corrette e S indica il numero di risposte date errate, il punteggio del compito è dato dalla formula: $P = \frac{7}{2}C - \frac{7}{6}S$.

Quesito 1: Sia $n \geq 1$ e si consideri l'integrale definito

$$I_n = \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Allora:

A: $I_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ per $n \rightarrow \infty$. B: $I_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. C: $I_n \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ per $n \rightarrow \infty$. D: $I_n \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$.

Quesito 2: Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}$$

Allora si ha che:

A: se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^7$ converge ad un numero reale positivo. B: se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^7$ converge ad un numero reale negativo. C: se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^7$ converge a zero. D: se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^7$ diverge.

Quesito 3: Sia $n \geq 1$ e si consideri l'integrale definito

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Allora:

A: $I_n \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$. B: $I_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. C: $I_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ per $n \rightarrow \infty$. D: $I_n \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ per $n \rightarrow \infty$.

Quesito 4: Si consideri la funzione $f(x) = \sin(e^{-\alpha x})$. Quale affermazione è corretta?

A: $|f'(0)f''(0)|$ cresce almeno come α^4 . B: $|f'(0)f''(0)|$ cresce meno di α^3 . C: $|f'(0)f''(0)|$ cresce come α^3 . D: $|f'(0)f''(0)|$ cresce più di α^3 .

Quesito 5: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione dispari, derivabile infinite volte. Consideriamo la funzione

$$g(x) = xf(x) + f(-x).$$

Allora, per ogni $n \geq 1$:

$A: g^{(2n)}(0) = 2nf^{(n-1)}(1).$ $B: g^{(2n)}(1) = 2nf^{(n-1)}(0).$ $C: g^{(2n)}(0) = 2nf^{(2n-1)}(0).$ $D: g^{(n)}(1) = 2nf^{(n-1)}(1).$

Quesito 6: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Allora si ha che:

$A:$ se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^7$ diverge. $B:$ se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^7$ converge a zero. $C:$ se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^7$ converge ad un numero reale positivo. $D:$ se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^7$ converge ad un numero reale negativo.

Quesito 7: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione dispari, derivabile infinite volte. Consideriamo la funzione

$$g(x) = xf(x) + f(-x).$$

Allora, per ogni $n \geq 1$:

$A: g^{(4n)}(0) = 4nf^{(4n-1)}(0).$ $B: g^{(4n)}(0) = 4nf^{(4n-1)}(1).$ $C: g^{(4n)}(1) = 4nf^{(4n-1)}(1).$ $D: g^{(4n)}(1) = 4nf^{(4n-1)}(0).$

Quesito 8: Si consideri la successione $a_n = 2n \log(1 + \frac{5}{n})$, definita per $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora:

$A: \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3.$ $B: \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 5.$ $C: \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 10.$ $D: \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2.$

Quesito 9: Sia z una soluzione dell'equazione

$$\operatorname{Re}(z\operatorname{Re}(z)) = \operatorname{Im}(z\operatorname{Im}(z)).$$

Allora:

$A: z$ ha parte reale nulla. $B: z$ ha parte reale opposta alla parte immaginaria. $C: z$ appartiene ad una delle due bisettrici del piano complesso. $D: z$ ha parte reale uguale alla parte immaginaria.

Quesito 10: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = -\cos x + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

Allora si ha che:

$A:$ se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^6$ diverge. $B:$ se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^6$ converge ad un numero reale positivo. $C:$ se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^6$ converge ad un numero reale negativo. $D:$ se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^6$ converge a zero.

Quesito 11: Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x-1)^2}{\sqrt{x}(x-1)^{-\alpha}\sqrt{x+1}} dx$$

risulta convergente se e solo se:

$A: \alpha > -3.$ $B: \alpha < \frac{3}{2}.$ $C: \alpha \geq \frac{2}{3}.$ $D: \alpha < 3.$

Quesito 12: Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(-1) = 1$ e $f(1) = 3$. Allora necessariamente risulta:

A: $[1, 3] \subseteq f([-1, 1])$. B: $f([-1, 1]) \subseteq [1, 3]$. C: $f([-1, 1]) = \{1, 3\}$. D: $f([-1, 1]) = [1, 3]$.

Quesito 13: Sia $n \geq 1$ e si consideri l'integrale definito

$$I_n = \arctan(n) + \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Allora:

A: $I_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ per $n \rightarrow \infty$. B: $I_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. C: $I_n \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$. D: $I_n \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ per $n \rightarrow \infty$.

Quesito 14: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}$$

Allora si ha che:

A: se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^6$ diverge. B: se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^6$ converge ad un numero reale positivo. C: se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^6$ converge ad un numero reale negativo. D: se $x \rightarrow 0$ allora $f(x)/x^6$ converge a zero.

Quesito 15: Sia $\alpha > 0$. Allora la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan(n)}{n^\alpha(n+1)} + (-1)^n \frac{\log(2^n + 1)}{n^\alpha} \right)$$

converge se e solo se

A: $\alpha > 0$. B: $\alpha \geq 1$. C: per nessun valore di α . D: $\alpha > 1$.

Quesito 16: L'insieme

$$A = \{a_n = \cos(\pi n)n \log(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

A: risulta inferiormente limitato. B: ammette minimo ma non massimo. C: risulta superiormente illimitato. D: ammette sia massimo che minimo.

Quesito 17: Sia z una soluzione dell'equazione

$$\operatorname{Re}(z \operatorname{Re}(z)) = \operatorname{Im}(z).$$

Allora:

A: z ha parte reale positiva. B: z appartiene ad una coppia di rette del piano complesso. C: z appartiene ad una parabola nel piano complesso. D: z ha parte immaginaria negativa.

Quesito 18: Si consideri la funzione $f(x) = \sin(e^{\alpha x})$. Quale affermazione è corretta?

A: $|f'(0)f''(0)|$ cresce come α^3 . B: $|f'(0)f''(0)|$ cresce almeno come α^4 . C: $|f'(0)f''(0)|$ cresce più di α^3 . D: $|f'(0)f''(0)|$ cresce meno di α^3 .

Quesito 19: Sia $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$ e $f(2) = 2$. Allora necessariamente risulta:

A: $f([0, 2]) = \{0, 2\}$. B: $[0, 2] \subseteq f([0, 2])$. C: $f([0, 2]) = [0, 2]$. D: $f([0, 2]) \subseteq [0, 2]$.

Quesito 20: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione dispari, derivabile infinite volte. Consideriamo la funzione

$$g(x) = xf(x) + f(-x).$$

Allora, per ogni $n \geq 1$:

A: $g^{(n)}(1) = -nf^{(n-1)}(1)$. B: $g^{(n)}(0) = nf^{(n-1)}(1)$. C: $g^{(n)}(1) = nf^{(n-1)}(0)$. D: $g^{(n)}(1) = nf^{(n-1)}(1)$.

Quesito 21: Sia $\alpha \geq -1$. Allora la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan(n)}{n^{\alpha}(n^2+1)} + (-1)^n \frac{\log(2^n+1)}{n^{\alpha}} \right)$$

risulta indeterminata se

A: $-1 < \alpha \leq 1$. B: $\alpha \geq 2$. C: $-1 < \alpha \leq 2$. D: per nessun valore di α .

Quesito 22: Sia $\alpha > 0$. Allora l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)^2}{\sqrt{x}(x-1)^{4\alpha}(x+1)} dx$$

risulta convergente se e solo se:

A: $\alpha < \frac{4}{3}$. B: $\alpha < \frac{3}{4}$. C: $\alpha > \frac{3}{4}$. D: $\alpha \geq \frac{4}{3}$.

Quesito 23: Si consideri la successione $a_n = 2n^2 \log(1 + \frac{3}{n})$, definita per $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora:

A: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 6$. B: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -5$. C: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$. D: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Quesito 24: Sia $n \geq 1$ e si consideri l'integrale definito

$$I_n = -\arctan(n+1) + \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Allora:

A: $I_n \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$. B: $I_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ per $n \rightarrow \infty$. C: $I_n \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ per $n \rightarrow \infty$. D: $I_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Quesito 25: L'insieme

$$A = \{a_n = \cos(\pi n) \arctan(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

A: ammette sia massimo che minimo. B: ammette estremo superiore uguale a $\pi/2$. C: ammette massimo uguale a $\pi/2$. D: ammette minimo uguale a $-\pi/2$.

Quesito 26: Si consideri la successione $a_n = 2n \log(1 + \frac{3}{n})$, definita per $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora:

A: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$. B: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$. C: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 6$. D: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$.

Quesito 27: Sia $\alpha > 0$. Allora l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)^2}{\sqrt{x}(x-1)^{5\alpha}(x+1)} dx$$

risulta convergente se e solo se:

A: $\alpha < \frac{5}{3}$. B: $\alpha \geq \frac{5}{3}$. C: $\alpha > \frac{3}{5}$. D: $\alpha < \frac{3}{5}$.

Quesito 28: L'insieme

$$A = \{a_n = 2 \cos(\pi n) \arctan(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

A: ammette minimo uguale a $-\pi$. *B*: ammette massimo uguale a π . *C*: ammette sia massimo che minimo. *D*: ammette estremo superiore uguale a π .

Quesito 29: Sia z una soluzione dell'equazione

$$\operatorname{Re}(z\operatorname{Re}(z)) = -\operatorname{Im}(z\operatorname{Im}(z)).$$

Allora:

A: z ha parte reale opposta alla parte immaginaria. *B*: z appartiene ad una delle due bisettrici del piano complesso. *C*: z è l'origine del piano complesso. *D*: z ha parte reale positiva.

Quesito 30: L'insieme

$$A = \{a_n = \cos(\pi n)(n^2 + 1) : n \in \mathbb{N}\}$$

A: risulta inferiormente limitato. *B*: risulta superiormente illimitato. *C*: ammette minimo ma non massimo. *D*: ammette sia massimo che minimo.

Quesito 31: Sia z una soluzione dell'equazione

$$\operatorname{Re}(z\operatorname{Re}(z)) = -\operatorname{Im}(z).$$

Allora:

A: z appartiene ad una coppia di rette del piano complesso. *B*: z ha parte immaginaria positiva. *C*: z appartiene ad una parabola nel piano complesso. *D*: z ha parte reale positiva.

Quesito 32: Si consideri la funzione $f(x) = \sin(e^{-2x})$. Quale affermazione è corretta?

A: $f'(0)f''(0) < -1$. *B*: $f'(0)f''(0) > 8$. *C*: $f'(0)f''(0) > 0$. *D*: $f'(0)f''(0) \leq 0$.

Quesito 33: Sia $\alpha \geq -1$. Allora la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan(n)}{n^{\alpha}(n^2 + 1)} + (-1)^n \frac{\log(2^n + 1)}{n^{\alpha-1}} \right)$$

risulta indeterminata se

A: $-1 < \alpha \leq 1$. *B*: $-1 < \alpha \leq 2$. *C*: per nessun valore di α . *D*: $\alpha \geq 2$.

Quesito 34: Sia $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$ e $f(3) = 3$. Allora necessariamente risulta:

A: $f([0, 3]) = \{0, 3\}$. *B*: $f([0, 3]) \subseteq [0, 3]$. *C*: $f([0, 3]) = [0, 3]$. *D*: $[0, 3] \subseteq f([0, 3])$.

Quesito 35: Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(-1) = -1$ e $f(1) = 3$. Allora necessariamente risulta:

A: f non si annulla mai. *B*: $f([-1, 1]) = [-1, 3]$. *C*: $[-1, 3] \subseteq f([-1, 1])$. *D*: f si annulla due volte.

Quesito 36: Si consideri la funzione $f(x) = \sin(e^{2x})$. Quale affermazione è corretta?

A: $f'(0)f''(0) > 1$. *B*: $f'(0)f''(0) \geq 0$. *C*: $f'(0)f''(0) < -4$. *D*: $f'(0)f''(0) < 0$.

Quesito 37: Si consideri la successione $a_n = -4n \log(1 + \frac{3}{n})$, definita per $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora:

A: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -12$. *B*: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -3$. *C*: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 6$. *D*: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -4$.

Quesito 38: Sia $\alpha > 0$. Allora la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan(n)}{n^{\alpha}(n^2 + 1)} + (-1)^n \frac{\log(2^n + 1)}{n^{\alpha-1}} \right)$$

converge se e solo se

A: $\alpha \geq 0$. B: $\alpha > 1$. C: per nessun valore di α . D: $\alpha > 2$.

Quesito 39: Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione dispari, derivabile infinite volte. Consideriamo la funzione

$$g(x) = xf(x) + f(-x).$$

Allora, per ogni $n \geq 1$:

A: $g^{(n)}(1) = nf^{(n-1)}(1) - f^{(n)}(0)$. B: $g^{(n)}(0) = nf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0)$. C: $g^{(n)}(0) = nf^{(n-1)}(0) + f^{(n)}(0)$.

D: $g^{(n)}(1) = nf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(1)$.

Quesito 40: Sia $\alpha > 0$. Allora l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{\sqrt{x}(x-1)^{2\alpha}(x+1)} dx$$

risulta convergente se e solo se:

A: $\alpha > 1$. B: $\alpha \leq 2$. C: $\alpha = 1$. D: $\alpha < 1$.

BBBCCCACCBAAACDCCABDABDCBCDDCBCCBDCDADBD