

Laboratorio di Sistemi e Segnali

**Svolgere il progetto per il
Laboratorio di Sistemi e Segnali:
Un case study completo**

Fiazza Maria-Camilla
24 maggio 2007

Preliminari: il testo del problema

“Il sistema in figura consiste di due masse sospese con un cavo su una massa J.

C'è una molla sul cavo vicino a M2. Il cavo non scivola su J.

1. Derivare l'equazione differenziale del sistema.
 2. Con un metodo numerico del primo ordine, trovare la risposta del sistema, usando dei parametri a scelta ma considerando le masse unitarie e la forza in input costante.
 3. Fare il grafico della risposta del sistema.”
-
-

Fase 0: Esaminare il testo del problema

Il primo nodo da affrontare è l'**organizzazione** del progetto in una sequenza di passi, pensati in modo tale da rispondere in maniera completa a tutti i quesiti del progetto.

È essenziale capire esattamente che cosa viene richiesto dal testo del progetto dal punto di vista procedurale.

“Derivare l'equazione differenziale: parte I”

Analisi del sistema fisico:

- i. Analisi degli elementi costitutivi
 - ii. Assunti e approssimazioni operate
 - iii. Analisi dei vincoli
 - iv. Specifica dei parametri e delle variabili
 - v. Specifica del sistema di riferimento
-
-

“Derivare l'equazione differenziale: parte II”

Modellazione matematica e analisi del sistema di equazioni:

- i. Diagrammi di corpo libero ed equazioni descrittive
 - ii. Determinazione dei descrittori del sistema
 - iii. Determinazione del sistema di equazioni differenziali che modella l'evoluzione del sistema fisico
 - iv. Equazione differenziale del sistema in forma canonica
-
-

“Determinare la risposta del sistema per via numerica: parte I”

Soluzione numerica:

- i. Scelta del metodo numerico del primo ordine
 - ii. Forma a stati delle equazioni differenziali
 - iii. Calcolo della soluzione numerica
 - stesura programma Matlab/C/Java per l'elaborazione
 - discussione dei risultati ottenuti
-
-

“Determinare la risposta del sistema per via numerica: parte I”

Domandina-ina-ina:

Come facciamo a sapere se i risultati sono corretti?

Il nostro script/programma potrebbe generare una qualunque funzione e noi non saremmo in grado, procedendo come fin qui illustrato, di riconoscere neanche una “soluzione” grossolanamente errata.



“Determinare la risposta del sistema per via numerica: parte II”

Anche se è esplicitamente richiesta la sola soluzione numerica, è necessario calcolare anche la soluzione per via analitica. In questo modo è possibile riconoscere se la soluzione numerica esibisce l'andamento corretto.

La soluzione analitica va anche valutata numericamente, per ricavare il margine d'errore della soluzione numerica ottenuta.



Il lavoro a tavolino: riassunto

- **Organizzare** il lavoro
 - **Visualizzare** il comportamento del sistema
 - **Analizzare** le componenti del sistema
 - **Formalizzare** la descrizione del sistema
 - **Risolvere** le equazioni differenziali
-
-

Pronti per iniziare !

Ora che abbiamo una chiara visione delle cose che vanno fatte, siamo finalmente pronti per prendere in considerazione il sistema.

L'obiettivo della fase successiva è di costruirsi un'immagine mentale del funzionamento del sistema, avendo presente:

- sia i ruoli strutturali (a sostiene b, a influenza b),
 - sia il contributo di ogni componente al comportamento sistemico.
-
-

Pronti per iniziare !

La logica che guida tutti queste considerazioni sta nel riconoscere la necessità di **garantirsi una maniera per valutare i propri risultati**, sia per quanto riguarda gli aspetti teorici che per quanto riguarda gli aspetti numerici.

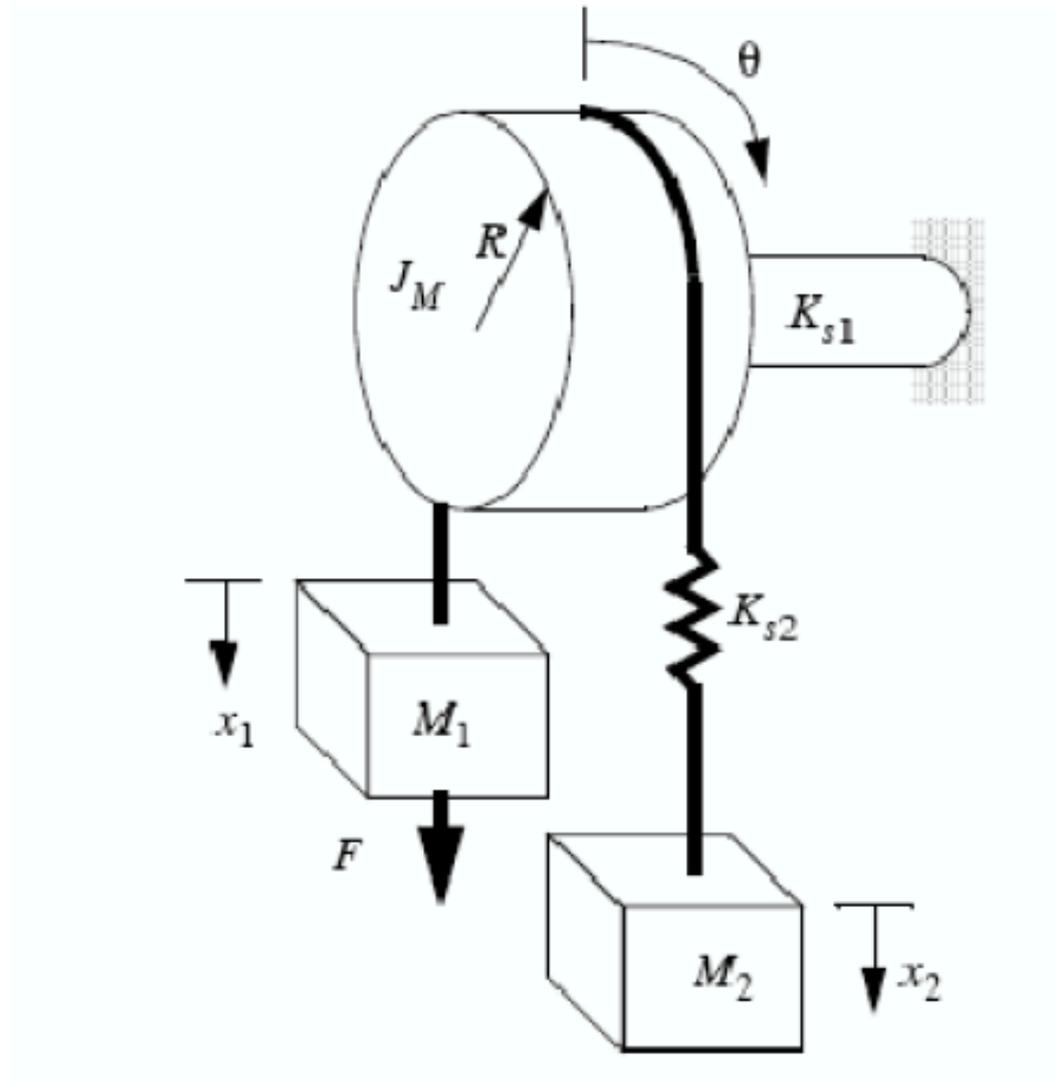
Preliminari: il testo del problema

“Il sistema in figura consiste di due masse sospese con un cavo su una massa J.

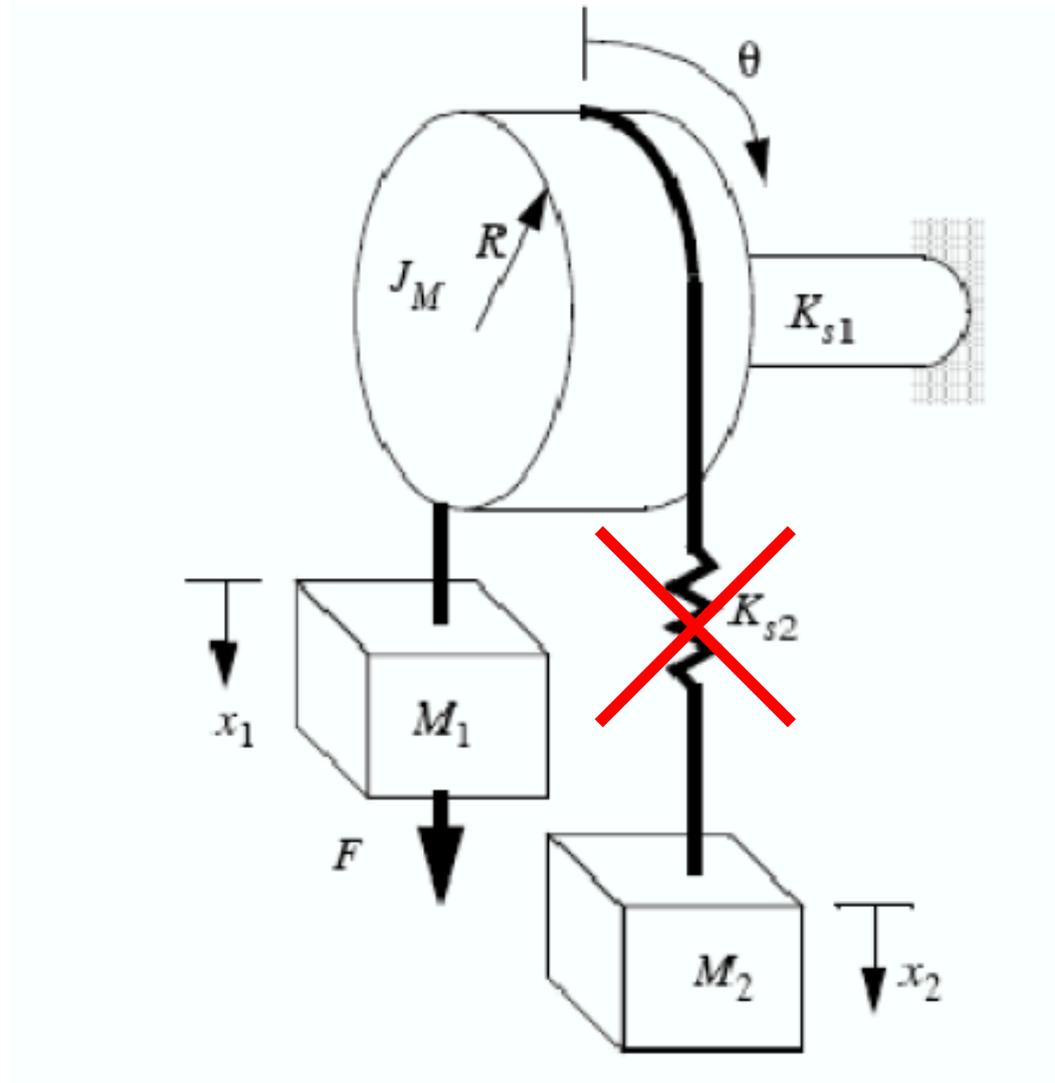
C'è una molla sul cavo vicino a M2. Il cavo non scivola su J.

1. Derivare l'equazione differenziale del sistema.
 2. Con un metodo numerico del primo ordine, trovare la risposta del sistema, usando dei parametri a scelta ma considerando le masse unitarie e la forza in input costante.
 3. Fare il grafico della risposta del sistema.”
-
-

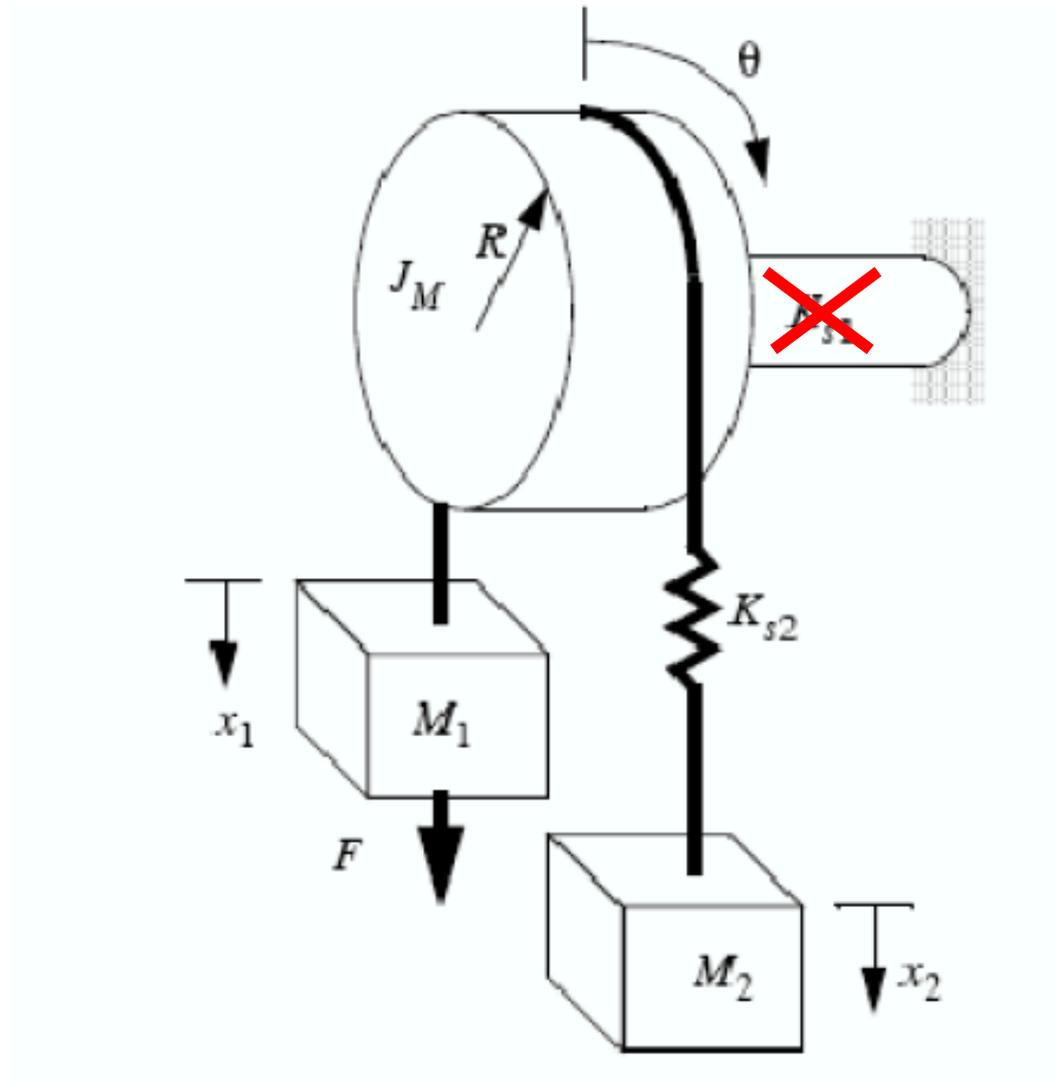
Preliminari: il testo del problema



Visualizzare: e se mancasse K_2 ?



Visualizzare: e se K_1 si comportasse solo come sostegno?



Visualizzare: che comportamento ci aspettiamo dal sistema?

Abbiamo riconosciuto due tipologie di comportamento indotte dalla presenza delle molle K_1 (rotazionale) e K_2 (coassiale):

- il comportamento oscillatorio, dovuto all'interplay di F e della reazione di K_1 , in assenza di K_2 .
- il comportamento sfasato di M_2 rispetto ad M_1 , dovuto alla presenza di K_2 , in assenza di K_1 .

Ci aspettiamo che i comportamenti siano entrambi presenti nel sistema completo, ma ...

Visualizzare: che comportamento ci aspettiamo dal sistema?

Ci aspettiamo che i comportamenti siano entrambi presenti nel sistema completo, ma ...

- il comportamento oscillatorio non è dovuto solo a K_1 e
- la differenza di fase non è dovuta solo a K_2 .

Il sistema non vede due elementi elastici distinti, ma un comportamento elastico unico, dovuto ad entrambi. Questo perché la logica sistemica non è in grado di discriminare i propri elementi. In altre parole, un sistema non è in grado di pensare e/o reagire “a pezzi”.

Modellazione



Elementi Costitutivi del sistema: notazione

Usiamo un solo simbolo per indicare:

- il parametro
- l'elemento del sistema da esso caratterizzato

Quindi parliamo di molla coassiale di coefficiente K_{s2} , oppure semplicemente di K_{s2} .

Elementi Costitutivi del sistema I

- \mathbf{K}_{s1} o \mathbf{K}_1 . Molla rotazionale, che assumiamo incernierata su un parete da un lato e sull'elemento cilindrico J_M dall'altro lato. Resiste alla rotazione di J_M e contemporaneamente trasmette al sistema una forza diretta verso l'alto che si oppone all'accelerazione verticale dell'intero sistema (e del suo centro di massa)
 - \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 . Elementi massivi.
-
-

Elementi Costitutivi del sistema II

- \mathbf{J}_M . Elemento massivo che supporta il filo e si muove ruotando in maniera solidale al filo stesso.
 - **Filo**. Sostiene gli elementi di massa M_1 e M_2 e vincola il moto di M_1 , M_2 e \mathbf{J}_M , collegandoli.
 - \mathbf{K}_{s2} o \mathbf{K}_2 . Molla coassiale. Ritarda il moto di M_2 rispetto a M_1 e modella l'estensibilità del filo reale.
-
-

Assunti sul sistema I: il filo

Il filo del modello si assume *inestensibile e privo di massa*. La massa del filo reale viene trascurata perché di valore estremamente piccolo rispetto alle altre masse in gioco (si parla di almeno due ordini di grandezza di differenza).

La caratteristica dei cavi di non trasmettere forze di compressione implica inoltre che il nostro modello matematico è *vincolato* a $F(t) \geq 0$

Assunti sul sistema II: estensibilità

La caratteristica dei cavi reali di essere soggetti ad estensione quando sono sottoposti a tensione viene modellata dall'elemento K_2 , una molla che reagisce a deformazione coassiale.

K_2 dipende dal materiale di cui è costituito il cavo, ma è normalmente piuttosto elevato.

Assunti sul sistema III: approssimazione di massa nulla

Ipotizzare una massa nulla per il modello di un elemento reale implica che la sommatoria delle forze agenti sull'elemento sia il vettore $\mathbf{0}$. Ciò serve ad evitare di trovarsi con accelerazioni infinite.

Questa considerazione si estende a tutti gli elementi del sistema eccettuati M_1 , M_2 e J_M , ovvero gli elementi massivi.

Assunti sul sistema IV: approssimazione di massa puntiforme

Assumiamo che gli elementi di massa M_1 e M_2 siano approssimabili puntualmente, intendendo con ciò che il comportamento fisico del sistema e la sua descrizione matematica risultano invariate sostituendo a M_1 e M_2 due masse puntiformi con gli stessi parametri di massa.

Assunti sul sistema V: ipotesi di densità uniforme e simmetria

Assumiamo che l'elemento K_{S1} sia imperniato sul centroide di J_M .

Assumiamo anche che la densità di J_M sia uniforme, garantendoci così di poter calcolare il momento d'inerzia di J_M a partire dalla massa e da grandezze geometriche (misura del raggio, altezza del cilindro).

Assunti sul sistema VI: approssimazione degli attriti

Tutti gli attriti vengono trascurati, dato che essi non sono in alcun modo segnalati nella descrizione del sistema assegnata.

- Gli attriti viscosi, derivanti dal moto in un mezzo diverso dal vuoto, sono considerati di entità trascurabile rispetto alle forze in gioco.
 - Gli attriti che sono fisicamente necessari a garantire la trasmissione delle forze sono modellati matematicamente da *vincoli* e non compaiono nelle equazioni descrittive del sistema
-
-

Assunti sul sistema VII: linearizzazione dei coefficienti elastici

Assumiamo che gli elementi K_1 e K_2 operino in un ambito in cui i valori della deformazione rispettano l'approssimazione lineare espressa dalla legge di Hooke:

$$F_{K1} \propto \Delta\theta \quad \text{e} \quad F_{K2} \propto \Delta x$$

Ciò è equivalente a linearizzare le equazioni differenziali che descrivono il comportamento delle molle.

Vincoli sul sistema I:

1. Vincolo di inestensibilità del filo:

$$x_1 + x_2 + \pi R = \text{length},$$

con length costante e finito, ma potenzialmente illimitato.

2. Vincolo di trasmissibilità della forza:

$$F(t) \geq 0 \quad \forall t$$

3. Vincoli numerici esplicitati nel testo del progetto:

$$M_1 = M_2, \text{ ovvero}$$

gli elementi massivi M_1 e M_2 hanno pari massa

Vincoli sul sistema II: moto solidale

4. Il cavo non scivola su J_M , cioè il movimento del cavo è solidale alla rotazione di J_M . Da qui si ricava il vincolo:

$$R(-\Delta\theta) = \Delta x_1 \quad \text{ovvero:}$$

lo spostamento angolare di J_M è direttamente proporzionale allo spostamento traslazionale di M_1 , secondo un fattore $1/R$.

Vincoli sul sistema III: moto solidale

In un sistema reale c'è sempre attrito tra il cavo e J_M .

L'attrito statico svolge qui un triplice ruolo:

- trasmette la tensione puntuale del filo a J_M ;
- ritarda il movimento di J_M rispetto a quello del filo;
- dissipa energia.

Il primo ruolo viene modellato dal vincolo, mentre il secondo e il terzo sono considerati di entità trascurabile.

Parametri e Variabili

Sono parametri:

$$R, J_M, K_{S1}, K_{S2}, M_1, M_2, F$$

Sono variabili:

$$x_1, x_2, \theta \quad [x_1(t), x_2(t), \theta(t)]$$

Tali variabili sono funzioni del tempo e, prese nel loro insieme, definiscono **l'interfaccia esterna** del sistema.

Interfaccia interna ed esterna: il concetto

Per interfaccia esterna si intende l'astrazione corrispondente ad un insieme di segnali del sistema, che siano: 1) immediatamente accessibili ad un osservatore esterno e 2) rilevanti ai fini della descrizione del comportamento.

Per interfaccia interna si intende l'astrazione corrispondente ad un insieme di segnali che modella la “comunicazione” tra componenti del sistema, ma che non sia 1) immediatamente accessibile ad un osservatore esterno o 2) non rilevante ai fini della descrizione del sistema.

Interfaccia interna ed esterna del sistema

$$\{x_1(t), x_2(t), \theta(t)\}$$

costituiscono l'interfaccia esterna del sistema

$T(t)$, tensione ai capi del filo
appartiene all'interfaccia interna



Descrittori del sistema

- I descrittori del sistema sono un sottoinsieme dei segnali dell'interfaccia esterna, eventualmente derivati (o sommati) a seconda delle grandezze di interesse.
 - L'interfaccia esterna del sistema è costituita da $\{ x_1(t), x_2(t), \theta(t) \}$, ma il vincolo di moto solidale $R(-\Delta\theta) = \Delta x_1$ ci rivela che $x_1(t)$ è direttamente riconducibile a $\theta(t)$.
 - L'interfaccia contiene solo due segnali indipendenti. Scegliamo come descrittori del sistema: $\{x_2(t), \theta(t)\}$
-
-

Il sistema di riferimento

Il modello assegnato specifica \hat{x}_1 e \hat{x}_2 positivi in $-\hat{k}$, con \hat{x}_i versore associato al moto della massa M_i e $\hat{\theta}$ in senso orario, osservando il sistema verso la parete; in altre parole, secondo la regola della mano destra, $\hat{\theta}$ è un versore entrante nella parete.

Il sistema di riferimento assegnato deve essere indicato nei diagrammi a corpo libero relativi ad ogni elemento del sistema.

Diagrammi di corpo libero I: M_1

Agiscono:

forza di gravita'

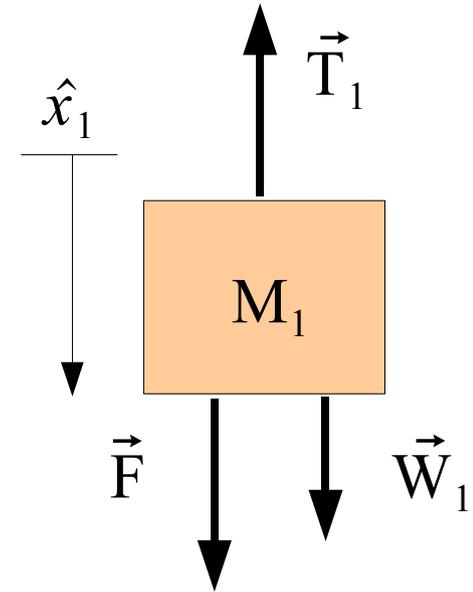
$$\vec{W}_1 = M_1 g \hat{x}_1$$

forza esterna applicata

$$\vec{F} = F \hat{x}_1$$

tensione del filo

$$\vec{T}_1 = T_1 (-\hat{x}_1)$$



Equazione del moto per l'elemento M_1 :

$$\sum_{\text{reali}} \vec{F}_i = M_1 \ddot{x}_1$$

$$M_1 g + F - T_1 = M_1 \ddot{x}_1$$

Diagrammi di corpo libero II: M_2

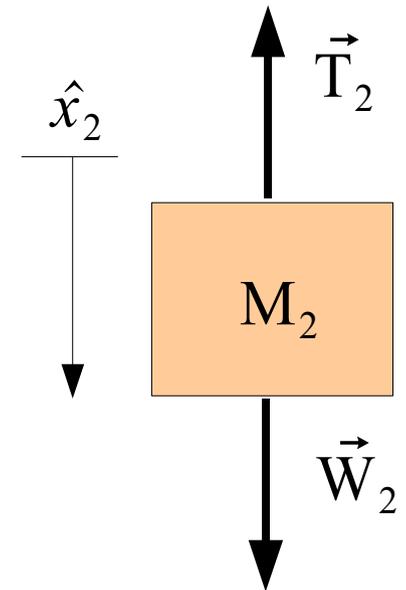
Agiscono:

forza di gravità

$$\vec{W}_2 = M_2 g \hat{x}_2$$

tensione del filo

$$\vec{T}_2 = T_2 (-\hat{x}_2)$$



Equazione del moto per l'elemento M_2 :

$$\sum_{\text{reali}} \vec{F}_i = M_2 \ddot{x}_2$$

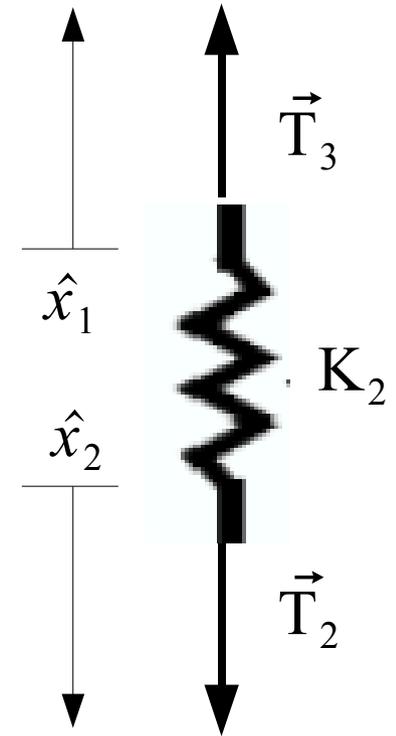
$$M_2 g - T_2 = M_2 \ddot{x}_2$$

Diagrammi di corpo libero III: K_2

Agisce la tensione del filo agli estremi:

lato inferiore $\vec{T}_2 = T_2 \hat{x}_2$

lato superiore $\vec{T}_3 = T_3 \hat{x}_1$



Equazione del moto per l'elemento K_2 :

$$\sum_{\text{reali}} \vec{F}_i = M_{0+} a_{K_2} = \vec{0} \quad (\text{ipotesi di massa nulla})$$

$$\vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad T_2 \hat{x}_2 + T_3 (-\hat{x}_2) = \vec{0}$$

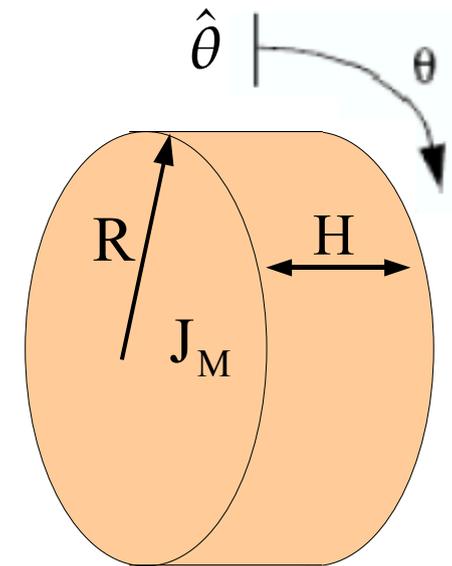
$$T_2 = T_3$$

(vincolo su variabili interne)

Equazione della deformazione per l'elemento K_2 :

$$T_2 = K_2 (x_1 + x_2)$$

Calcolo del momento d'inerzia



$$\begin{aligned} \mathbf{I}_J &= \int_0^H \int_0^R r^2 dm = \int_0^H \int_0^R \rho r^2 dV = \\ &= \rho \int_0^H \int_0^R r^2 (2\pi r) dr dh = (2\pi\rho) \int_0^H dh \int_0^R r^3 dr \\ &= (2\pi\rho) \int_0^H dh \left[\frac{r^4}{4} \right]_{0,R} = 2\pi \frac{M}{(\pi R^2 H)} \frac{R^4}{4} H \\ &= \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_J = \frac{1}{2} JR^2$$

Diagrammi di corpo libero IV: K_1

Agiscono:

momento della tensione T_1

$$\vec{\tau}_1 = T_1 R (-\hat{\theta})$$

momento della tensione T_2

$$\vec{\tau}_2 = T_2 R \hat{\theta}$$

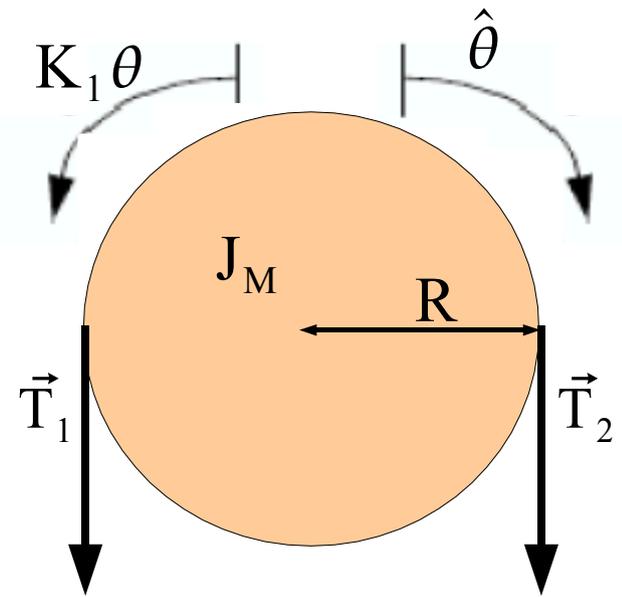
reazione della molla rotazionale

$$\tau_{K_1} = -K_1 \hat{\theta}$$

Equazione del moto rotazionale
per l'elemento J_M :

$$\sum_{\text{reali}} \vec{\tau}_i = I_J \ddot{\theta}$$

$$-T_1 R + T_2 R - K_1 \theta = I_J \ddot{\theta}$$



Osservazione

Salta subito all'occhio come nelle equazioni differenziali per le singole componenti del sistema non ci siano termini in \dot{x}_2 o in $\dot{\theta}$.

Ciò è giustificato dall'assenza di elementi che resistono alla velocità (smorzatori, attriti di mezzo, etc.).

In effetti,

le uniche forze in gioco sono conservative

Studio analitico



Approccio Analitico I

Partiamo dall'equazione del moto (traslazionale) per M_1 e per M_2 e dall'equazione del moto (rotazionale) per J_M , sfruttando subito i vincoli noti:

$$\text{eq. moto } M_1: \quad M \ddot{x}_1 = F + Mg - T$$

$$\text{da cui ricaviamo } T: \quad T = F + Mg - M \ddot{x}_1$$

$$\text{eq. moto } M_2: \quad M \ddot{x}_2 = Mg - K_2(x_1 + x_2)$$

$$\text{eq. moto } J_M: \quad I_J \ddot{\theta} = -TR + RK_2(x_1 + x_2) - K_1\theta$$

Eliminiamo T dall'equazione per J_M usando l'espressione ricavata dall'equazione per M_2

Approccio Analitico II: sistema di equazioni differenziali in $\theta(t)$ e $x_2(t)$

$$\begin{cases} M \ddot{x}_2 = Mg - K_2(x_1 + x_2) \\ I_J \ddot{\theta} = -R(F + Mg - M \ddot{x}_1) + RK_2(x_1 + x_2) - K_1 \theta \\ x_1 = -R\theta, \quad \ddot{x}_1 = -R\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M \ddot{x}_2 = Mg - K_2(x_2 - R\theta) \\ I_J \ddot{\theta} = -R(F + Mg) + RM(-R\ddot{\theta}) + RK_2(x_2 - R\theta) - K_1 \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} M \ddot{x}_2 + K_2 x_2 - RK_2 \theta = Mg \\ (I_J + R^2 M) \ddot{\theta} + (K_1 + R^2 K_2) \theta - RK_2 x_2 = -R(F + Mg) \end{cases}$$

Approccio Analitico III: l'equazione per x_2

Siamo arrivati ad un sistema di due equazioni differenziali di ordine 2. Per poterne affrontare la soluzione analitica, dobbiamo prima ricavare equazioni differenziali di ordine 4 nelle sole $x_2(t)$ e $\theta(t)$. Isoliamo θ nella prima equazione, ne troviamo la derivata seconda e sostituiamo nella seconda equazione, per ottenere:

$$\begin{aligned} & M(I_J + R^2 M) x_2^{(iv)} + \\ & (I_J K_2 + MK_1 + 2R^2 MK_2) x_2^{(ii)} + \\ & K_1 K_2 x_2^{(0)} = \\ & MgK_1 - R^2 FK_2 \end{aligned}$$

Approccio Analitico IV: soluzione per x_2

Procediamo a risolvere l'equazione differenziale:

- la funzione forzante è costante, perciò la soluzione particolare x_p è pure costante e si ricava da:

$$K_1 K_2 x_p = Mg K_1 - FR^2 K_2$$

$$x_p = \left(\frac{Mg}{K_2} - \frac{FR^2}{K_1} \right)$$

- il polinomio caratteristico può essere visto come un polinomio di secondo grado in λ^2 , perciò cerchiamo prima il quadrato delle radici.

Approccio Analitico V: soluzione per x_2

Infatti, il polinomio caratteristico dell'equazione e' :

$$M(I_J + R^2 M)\lambda^4 + (I_J K_2 + MK_1 + 2R^2 MK_2)\lambda^2 + K_1 K_2 \lambda = 0$$

Rinominando i coefficienti abbiamo:

$$\alpha \lambda^4 + \beta \lambda^2 + \gamma = 0, \quad \text{ovvero } \alpha (\lambda^2)^2 + \beta (\lambda^2) + \gamma = 0$$

$$\lambda^2 \text{ si ottiene come: } (\lambda^2)_{1,2} = \frac{(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}{(2\alpha)}$$

Tuttavia, c'e' una difficolta' evidente nello stabilire il segno del discriminante, che richiede un piccolo gioco di prestigio di raccoglimenti

Approccio Analitico VI: segno di λ^2

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ &= (\mathbf{I}_J \mathbf{K}_2 + \mathbf{M} \mathbf{K}_1 + 2\mathbf{R}^2 \mathbf{M} \mathbf{K}_2)^2 - 4 \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{M} (\mathbf{I}_J + \mathbf{R}^2 \mathbf{M}) \\ &= (\mathbf{I}_J \mathbf{K}_2)^2 + 4(\mathbf{K}_2 \mathbf{R}^2 \mathbf{M})^2 + (\mathbf{M} \mathbf{K}_1)^2 \\ &\quad + 2(2\mathbf{I}_J \mathbf{K}_2^2 \mathbf{R}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{I}_J \mathbf{M} + 2\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{R}^2 \mathbf{M}^2) \\ &\quad - 4(\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{I}_J \mathbf{M} + \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{R}^2 \mathbf{M}^2) \\ &= (\mathbf{I}_J \mathbf{K}_2)^2 + 4(\mathbf{K}_2 \mathbf{R}^2 \mathbf{M})^2 + (\mathbf{M} \mathbf{K}_1)^2 \\ &\quad + 4(\mathbf{I}_J \mathbf{K}_2^2 \mathbf{R}^2 \mathbf{M}) - 2(\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{I}_J \mathbf{M})\end{aligned}$$

che puo' essere visto come: (magia!)

$$= (\mathbf{I}_J \mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_2 \mathbf{R}^2 \mathbf{M} - \mathbf{M} \mathbf{K}_1)^2 + 4(\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{R}^2 \mathbf{M}^2)$$

che e' garantito essere positivo perche' somma di quadrati e di prodotti di termini positivi

Approccio Analitico VII: segno di λ^2

Come conseguenza della positività di Δ , λ^2 è reale e quindi λ^2_1 e λ^2_2 sono due numeri reali distinti.

Visto che le radici del polinomio in λ^2 sono reali, possiamo applicare la regola di Cartesio: le due permanenze implicano che λ^2_1 e λ^2_2 sono entrambi negativi.

Perciò, i λ cercati per il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale sono 4 numeri *immaginari puri*.

Ora siamo in grado di ricavare i modi elementari del sistema.

Approccio Analitico VIII: modi elementari

Detti

$$\omega_1 = \sqrt{|\lambda_1^2|} \quad \text{e}$$

$$\omega_2 = \sqrt{|\lambda_2^2|},$$

I modi elementari del sistema sono:

$$\mathbf{E} = \left\{ \cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t), \cos(\omega_2 t), \sin(\omega_2 t) \right\}$$

Discussione del risultato analitico I: stabilità

Visto che per tutte le radici dell'equazione caratteristica vale $\text{Re}(\lambda) = 0$ e non ci sono radici multiple, il sistema è al limite di stabilità, quindi è da considerarsi instabile.

Tuttavia, un sistema fisico è sempre un sistema stabile rispetto a segnali correlati all'energia, quindi sembra esservi una discrepanza tra realtà e modello.

Discussione del risultato analitico II: stabilità

La questione si risolve ricordando che avevamo dichiarato trascurabili le forze di attrito.

Se considerati, i termini di attrito contribuiscono nella equazione per x_2 ad almeno un termine tra $\{D^3x_2(t), D^1x_2(t)\}$

Tali termini portano a soluzioni con parte reale negativa che, per quanto piccola in valore assoluto, garantiscono la stabilità del sistema.

Discussione del risultato analitico III: risposta ad ingressi limitati

Da notare anche che la risposta del sistema a $F(t)=F$ (ingresso forzante costante e limitato) è limitata, perché combinazione lineare di modi elementari tutti limitati.

Se invece il sistema fosse soggetto ad un ingresso forzante limitato e oscillante, la risposta non sarebbe più sempre limitata.

Discussione del risultato analitico IV: risposta ad ingressi limitati

Definendo l'ingresso oscillante come :

$$F_n = F + A \sin(\omega_f t + \phi)$$

sotto il vincolo $F > A$,

se $\omega_f = \omega_1$ o $\omega_f = \omega_2$, si osserva una componente della risposta del tipo: $t \sin(\omega_f t)$ o $t \cos(\omega_f t)$, che è chiaramente non limitata.

Vale la pena sottolineare questo punto perché F_n è certamente compreso tra $F_{\min} = F - |A|$ e $F_{\max} = F + |A|$, che portano entrambi ad un comportamento limitato.

Discussione del risultato analitico V: risonanza

Il fenomeno appena evidenziato è dovuto alla risonanza tra il segnale in ingresso e gli oscillatori “virtuali” del sistema, che hanno pulsazione ω_1 e ω_2 .

Si nota che ω_1 e ω_2 non dipendono solo da K_1 e K_2 , ma da tutti i parametri del sistema, nessuno escluso. Qui troviamo conferma che il sistema “eredita” le tipologie di comportamento indotte dalla presenza di K_1 e K_2 , ma non le riconduce ad un unico componente fisico.

Discussione del risultato analitico VI: considerazioni energetiche

Nel sistema sono fisicamente presenti 5 elementi in grado di immagazzinare energia:

- K_1, K_2 (energia potenziale elastica)
- M_1, M_2 (energia meccanica: cinetica + potenziale)
- J_M (energia meccanica: cinetica)

L'energia potenziale dell'elemento M_1 si può ricavare a partire dall'energia potenziale di K_1 , mentre l'energia cinetica di M_1 si può ricavare dall'energia cinetica di J_M .

Discussione del risultato analitico VII: considerazioni energetiche

Quindi, a fronte di 5 elementi in grado di immagazzinare energia, vi sono solo 4 elementi in grado di immagazzinarla in modo indipendente, quindi il sistema ha solo 4 gradi di libertà.

Il sistema, dunque, è correttamente rappresentabile da equazioni differenziali di ordine IV.

Le condizioni iniziali naturali sul sistema si riferiscono a ciascuno dei 4 termini di energia, e quindi si esprimono su:

$$\{\theta, \dot{\theta}, x_2, \dot{x}_2\} \text{ oppure } \{\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \ddot{x}_2, \dot{x}_2\}$$

Soluzione analitica I:

Ritornando alla soluzione analitica per $x_2(t)$, abbiamo fin qui ottenuto:

$$x_2(t) = c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t) + c_3 \cos(\omega_2 t) + c_4 \sin(\omega_2 t) + \left(\frac{Mg}{K_2} - \frac{FR^2}{K_1} \right)$$

Ora e' necessario imporre le condizioni iniziali sul sistema, che consideriamo inizialmente a riposo per x_2 .

$$\text{C.I. : } D^i x_2(t) = 0 \quad \text{per } i \in \{0 \dots 3\}$$

Soluzione analitica II:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_3 + x_p = 0 \\ -c_1 \omega_1^2 - c_3 \omega_2^2 = 0 \\ c_2 \omega_1 + c_4 \omega_2 = 0 \\ -c_2 \omega_1^3 - c_4 \omega_2^3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{\omega_2^2 x_p}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \\ c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{-\omega_1^2 x_p}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \\ c_4 = 0 \end{array} \right.$$

Ora $x_2(t)$ e' completamente noto e $\ddot{x}_2(t)$ e' facilmente determinabile per doppia derivazione.

$$\dot{x}_2(t) = -\omega_1 c_1 \sin(\omega_1 t) + \omega_1 c_2 \cos(\omega_1 t) \\ -\omega_2 c_3 \sin(\omega_2 t) + \omega_2 c_4 \cos(\omega_2 t)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -\omega_1^2 c_1 \cos(\omega_1 t) - \omega_1^2 c_2 \sin(\omega_1 t) \\ -\omega_2^2 c_3 \cos(\omega_2 t) - \omega_2^2 c_4 \sin(\omega_2 t)$$

Soluzione analitica III: soluzione per θ

A questo punto siamo in grado di risolvere per θ l'equazione $K_2 x_2 + M \ddot{x}_2 - RK_2 \theta = Mg$ ricavando:

$$\theta(t) = \frac{K_2 - M\omega_1^2}{RK_2} (c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)) + \frac{K_2 - M\omega_2^2}{RK_2} (c_3 \cos(\omega_2 t) + c_4 \sin(\omega_2 t)) - \frac{RF}{K_1}$$

In questa forma $\theta(t)$ risulta completamente specificato. Tuttavia, questa forma non si presta alla risoluzione per via numerica, quindi e' necessario derivare un'equazione di ordine 4 anche per $\theta(t)$, come fatto per $x_2(t)$.

Soluzione analitica IV: equazione per θ

Ripartiamo dal sistema di equazioni differenziali di ordine 2, isolando questa volta x_2 nella seconda equazione; ne troviamo la derivata seconda e sostituiamo nella prima equazione, per ottenere:

$$M \left(\frac{I_J + R^2 M}{RK_2} \right) \theta^{(iv)} + \left(\frac{I_J}{R} + \frac{MK_1}{RK_2} + 2RM \right) \theta^{(ii)} + \frac{K_1}{R} \theta^{(0)} = -F$$

Sebbene questa sia una forma per $\theta(t)$ che si presta alla risoluzione numerica, le condizioni iniziali su θ devono comunque essere ricavate dalla forma precedente.

Soluzione analitica V: CI per θ

$$\theta(0) = c_1 \left(\frac{K_2 - M\omega_1^2}{RK_2} \right) + c_3 \left(\frac{K_2 - M\omega_2^2}{RK_2} \right) - \frac{RF}{K_1}$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

$$\ddot{\theta}(0) = -\omega_1^2 c_1 \left(\frac{K_2 - M\omega_1^2}{RK_2} \right) - \omega_2^2 c_3 \left(\frac{K_2 - M\omega_2^2}{RK_2} \right)$$

$$\ddot{\theta}(0) = 0$$

Questo passaggio è ulteriore conferma che le C.I. su θ dipendono da quelle scelte per x_2 . Quindi *non* possiamo imporre condizioni iniziali tutte nulle per θ , anche se verrebbe quasi naturale.

Precauzioni I: applicabilità del modello

Prima di procedere alla stima numerica, è bene ricordarsi che le equazioni descrittive di un sistema fisico effettivamente descrivono il suo comportamento solo in determinati intervalli.

Per controllare se ci troviamo entro le condizioni di applicabilità, dobbiamo chiederci quali sono le possibili fonti di comportamento “a soglia”, ovvero momenti critici in cui possono cambiare le *leggi* del sistema.

Precauzioni II: applicabilità del modello

Gli assunti sul sistema che abbiamo dichiarato in fase di analisi equivalgono ad una effettiva linearizzazione delle equazioni, visto che abbiamo

- linearizzato la risposta delle molle (Hooke)
- dichiarato trascurabili attriti proporzionali a $v^2(t)$

Siamo al riparo da cambiamenti di leggi dovuti alla non-linearità del sistema. Rimane un'unica potenziale fonte di comportamento di soglia, che è la tensione T .

Precauzioni III: applicabilità del modello

Visto che i cavi non trasmettono forze di compressione, se $T(t) < 0$ per qualche t_i dobbiamo riscrivere per gli intervalli $[t_i, t_i + \Delta t)$ le equazioni del sistema.

$x_2(t)$ e $\theta(t)$ sarebbero funzioni definite a tratti come soluzione di equazioni differenziali diverse. I valori nell'estremo destro di ogni intervallo sarebbero da considerarsi come condizioni iniziali delle equazioni per l'intervallo successivo.

Precauzioni IV: equazione per la tensione

Dal procedimento risolutivo per le equazioni differenziali del sistema, recuperiamo il legame tra T e θ ; giungiamo ad un'equazione che possiamo valutare numericamente per verificare che il nostro modello effettivamente corrisponda al sistema.

$$T = F + Mg - M \ddot{x}_1 = F + Mg - M(-R \ddot{\theta}) = F + Mg + RM \ddot{\theta}$$

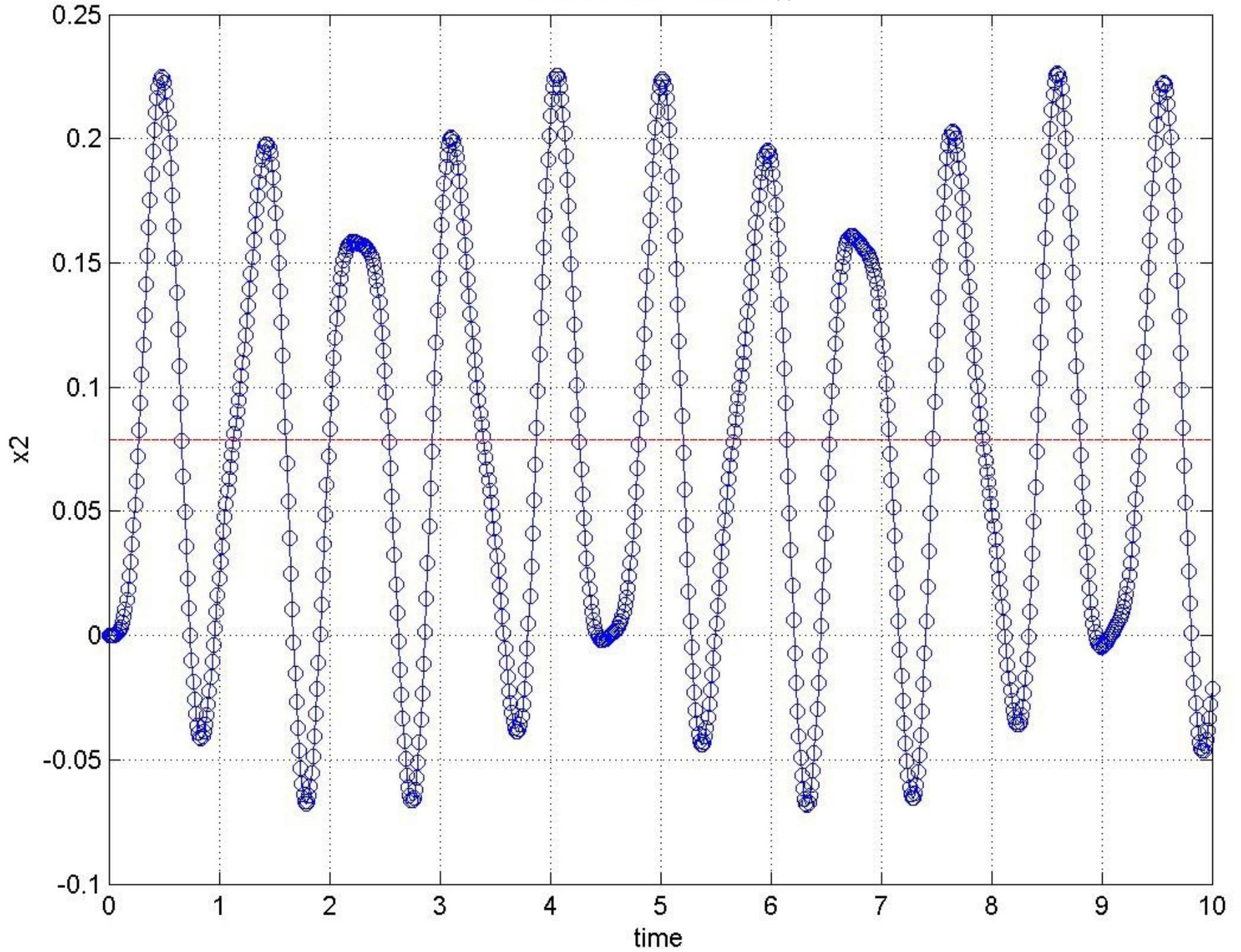
$$T = F + Mg + RM \ddot{\theta}$$

Grafici

(studio analitico)



Soluzione Analitica $x_2(t)$



Leggere il grafico: soluzione analitica per x_2

In rosso è evidenziata la componente non oscillante della risposta (componente in continua).

Si nota subito che la funzione è periodica.

Un'occhiata al grafico ci dà una stima di circa 4.5 per il periodo.

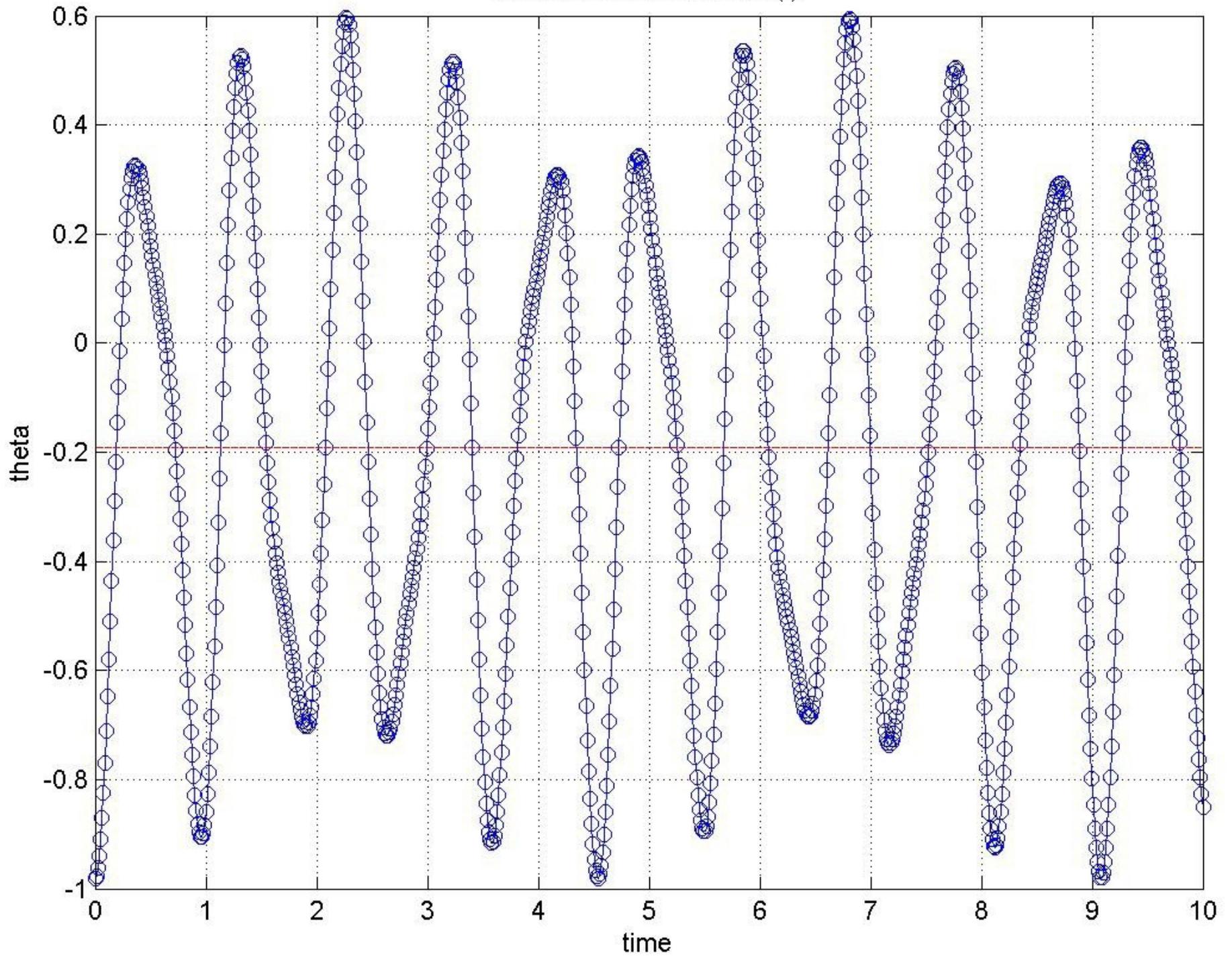
Ci dobbiamo chiedere come ricondurre questa periodicità alla nostra analisi teorica, per verificare se i risultati numerici sono plausibili.

Leggere il grafico: soluzione analitica per x_2

La soluzione analitica delle equazioni aveva messo in luce che la risposta è riconducibile alla combinazione di sinusoidi e cosinusoidi di pulsazione ω_1 e ω_2 .

Le pulsazioni caratteristiche del sistema sono valutate dallo script, e corrispondono a periodi di circa 0.9 e 0.5. Il rapporto dei periodi è $T_1/T_2 \approx 9/5$ e il periodo della funzione è $5T_1$ o $9T_2$, cioè circa 4.5, come evidente dal grafico.

Soluzione Analitica $\theta(t)$



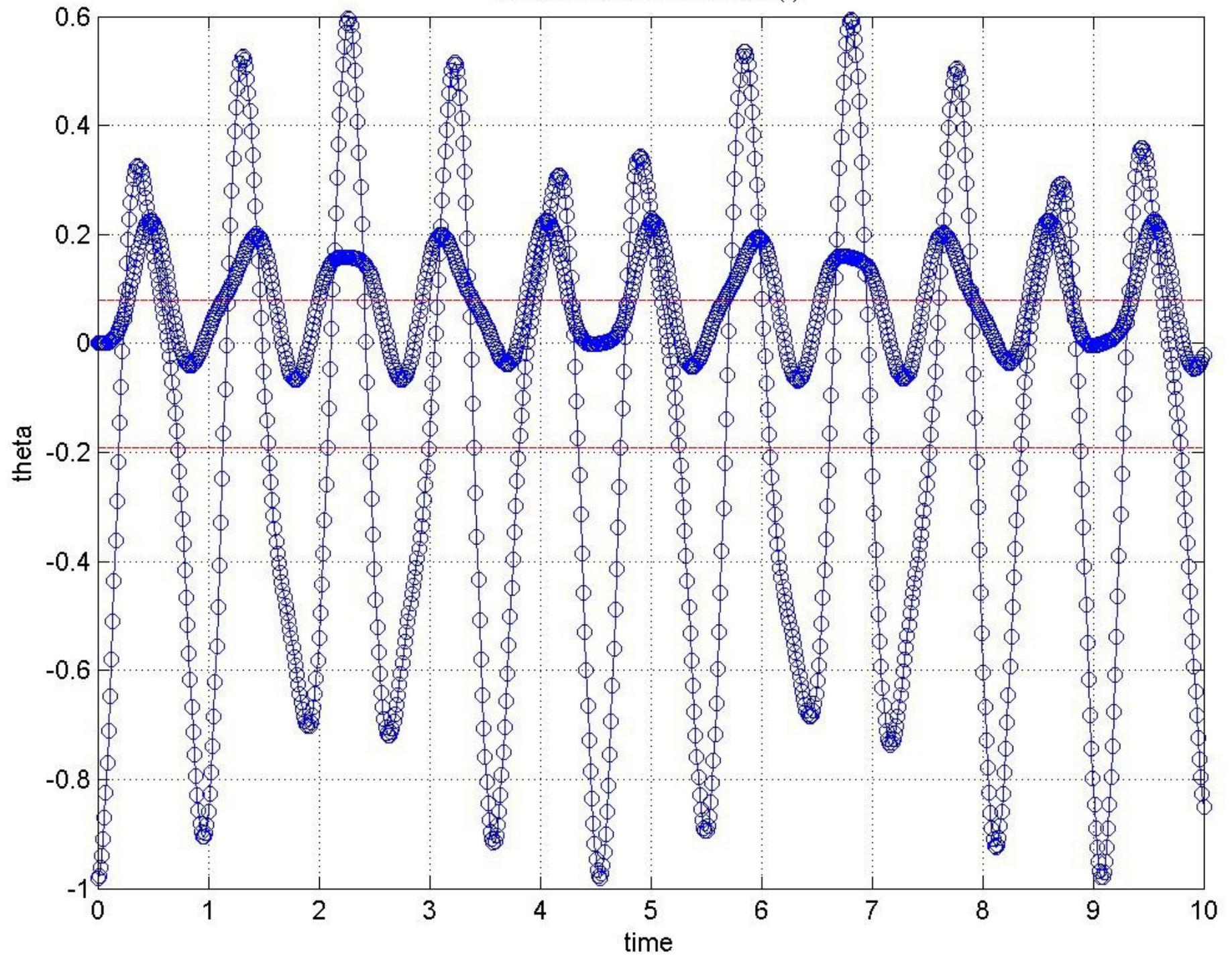
Leggere il grafico: soluzione analitica per θ

In rosso è evidenziata la componente non oscillante della risposta (componente in continua).

Si nota che la funzione è periodica di periodo circa 4.5, ed in questo segue perfettamente l'andamento di $x_2(t)$.

L'andamento dei minimi relativi è speculare rispetto a quello dei minimi relativi di x_2 , ma segue una sinusoide con la stessa frequenza.

Soluzione Analitica theta(t)

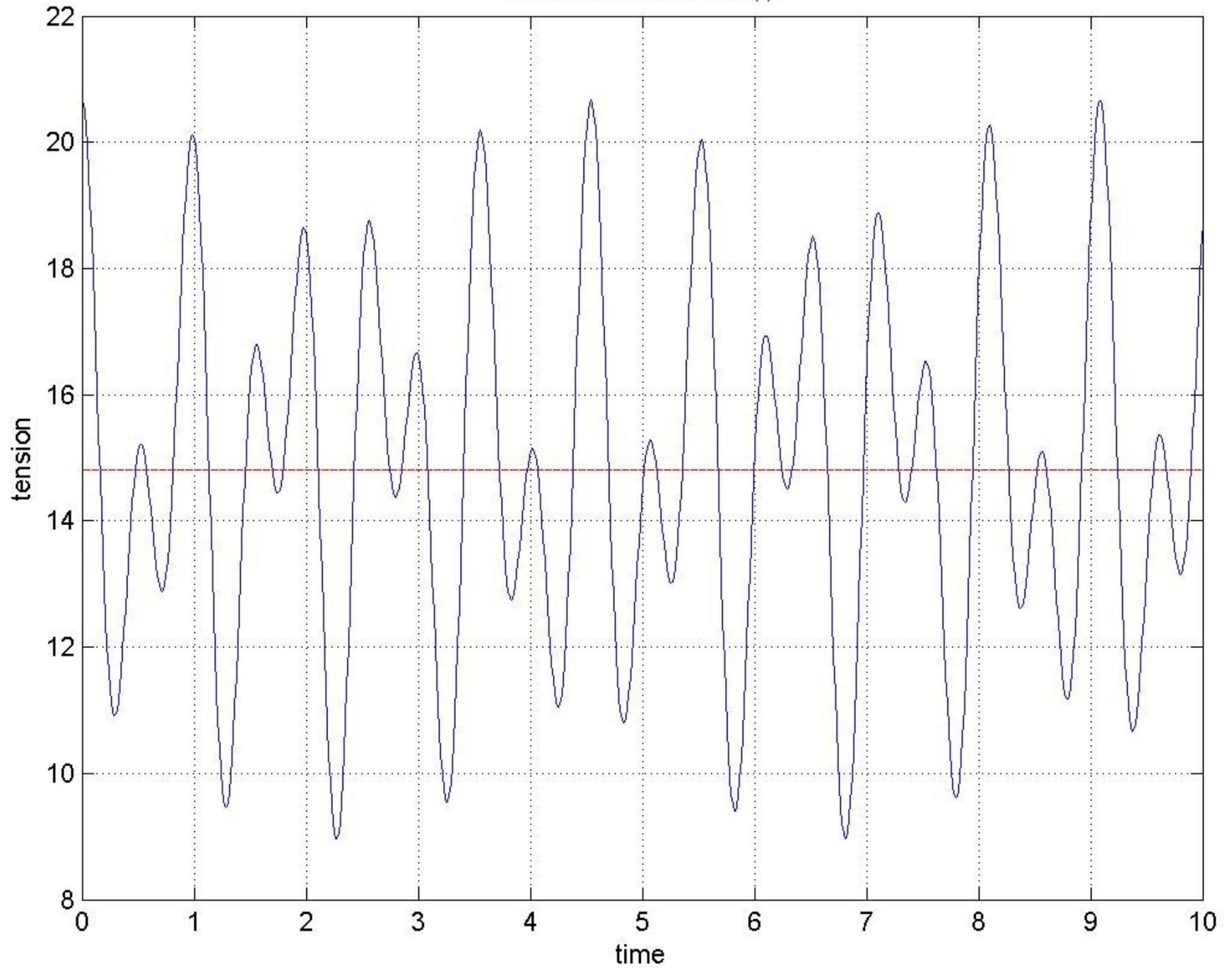


Leggere il grafico: $\theta(t)$ e $x_2(t)$ a confronto

Oltre alla corrispondenza in periodicità tra $x_2(t)$ e $\theta(t)$, si nota che nel corso del periodo fondamentale (di 4.5), i massimi relativi per $\theta(t)$, prima anticipano e poi ritardano i massimi relativi per x_2 . Questo comportamento è coerente con l'interpretazione della molla coassiale come elemento di ritardo.

Si nota anche che l'andamento relativo dei massimi oscilla “a pendolo”, passando più tempo in uno stato di piccoli ritardi rispetto a forti ritardi/anticipi.

Soluzione Analitica T(t)



Leggere il grafico: l'andamento della tensione

La rilevanza di questo grafico sta solo nell'intervallo di valori assunti, dato che la tensione appartiene all'interfaccia interna del sistema.

La tensione assume valori tutti abbondantemente positivi, per cui il comportamento descritto dal sistema di equazioni differenziali individuato è valido su tutto il dominio.

Studio numerico



Approccio numerico I: scelta del metodo

Viene richiesto di utilizzare un metodo del primo ordine per la risoluzione numerica delle equazioni differenziali.

Usare un metodo del primo ordine significa che vogliamo operare a partire dal valore della funzione e della sola derivata prima.

Le equazioni da risolvere, però, sono di ordine 4 sia in $x_2(t)$ che in $\theta(t)$, il che significa che l'evoluzione del segnale è influenzata da quattro ordini di derivate.

Approccio numerico II: scelta del metodo

Qui la domanda cruciale è se nel sistema in esame la derivata prima può “raccolgere” la maggior parte delle informazioni sull'andamento globale della funzione.

La risposta viene dallo studio teorico. Sappiamo di avere a che fare con funzioni periodiche, e sappiamo anche che il sistema è conservativo, quindi ci aspettiamo che il sistema non perda energia, ovvero che l'ampiezza delle oscillazioni globalmente non decresca..

Approccio numerico III: scelta del metodo

Vista la tipologia del segnale, se ci limitiamo alla derivata prima rischiamo di:

- stimare in maniera molto grossolana il periodo;
- sotto- o sovrastimare pesantemente i termini di energia racchiusi nelle derivate superiori;

Quindi, per ottenere una buona approssimazione, le derivate di ordine superiore devono essere visibili al metodo scelto.

Approccio numerico IV: scelta del metodo

Il **metodo di Eulero**, che è il primo candidato in quanto più semplice metodo al primo ordine, risulta di scarsa efficacia.

Infatti, l'evoluzione della risposta è influenzata da ben tre derivate di ordine superiore al primo, che risultano completamente invisibili al metodo di Eulero.

Approccio numerico V: scelta del metodo

La scelta ricade in modo piuttosto naturale sull'integrazione stile **Runge-Kutta**, che si appoggia esclusivamente su equazioni al primo ordine (e quindi si considera come un metodo del primo ordine), ma le elabora per stimare le derivate di ordine superiore.

Dato che le equazioni differenziali sono di quarto ordine, ricorriamo al metodo di Runge-Kutta al quarto ordine, con ciò intendendo che usiamo equazioni del primo ordine per stimare le derivate di ordine superiore, fino al quarto compreso

Approccio numerico VI: scelta del metodo

Dobbiamo svolgere il procedimento risolutivo RK4 due volte, separatamente per $x_2(t)$ e $\theta(t)$. È vero che $\theta(t)$ è ricavabile da $x_2(t)$ direttamente, secondo le equazioni descrittive del sistema:

$$\theta(t) = \frac{(K_2 x_2(t) + M \ddot{x}_2(t) - Mg)}{(K_2 R)}$$

ma procedendo per via puramente numerica è inevitabile propagare di molto gli errori su $x_2(t)$, specialmente considerando l'operazione di derivata numerica necessaria per ricavare il termine in $\ddot{x}_2(t)$

Approccio numerico VII: forma a stati

Il metodo di Runge-Kutta richiede di avere a disposizione una funzione che computi l'equazione di stato: pertanto è necessario portare le equazioni differenziali in forma a stati, come sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

Posto $v(t)$ pari alla funzione che stiamo cercando di calcolare per via numerica, abbiamo:

$$\alpha v^{(iv)}(t) + \beta \ddot{v}(t) + \gamma = \text{Forcing}$$

Approccio numerico VIII: forma a stati

La rappresentazione a stati di $v(t)$ come sistema di equazioni differenziali del primo ordine è:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)x_3 + \left(\frac{-\gamma}{\alpha}\right)x_1 + \frac{\text{Forcing}}{\alpha} \end{cases}$$

In forma matriciale:

eq. aggiornamento stato: $\vec{\dot{x}} = \text{StateM} \vec{x} + \text{N}$

eq. di uscita: $v = \text{Q} \vec{x}$

Approccio numerico IX: forma a stati

$$\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

$$Q = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$N = [0 \ 0 \ 0 \ (\text{Forcing}/\alpha)]^T$$

$$\text{StateM} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-\gamma/\alpha) & 0 & (-\beta/\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

con matrice di transizione StateM

Approccio numerico X: RK4

Il metodo RK4 nella sua forma generale si può rappresentare come:

$$D \mathbf{x} = f(t, \mathbf{x}) = \text{update}(t, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{F1} = h * f(t, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{F2} = h * f(t + h/2, \mathbf{x} + \mathbf{F1}/2)$$

$$\mathbf{F3} = h * f(t + h/2, \mathbf{x} + \mathbf{F2}/2)$$

$$\mathbf{F4} = h * f(t + h, \mathbf{x} + \mathbf{F3})$$

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + (\mathbf{F1} + 2\mathbf{F2} + 2\mathbf{F3} + \mathbf{F4})/6$$

Approccio numerico XI: RK4

Dato che l'equazione di stato nel nostro caso non dipende da t (sia per $x_2(t)$ che per $\theta(t)$), ci riconduciamo alla versione semplificata seguente:

$$D \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \text{updateL}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{F1} = h * \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{F2} = h * \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{F1}/2)$$

$$\mathbf{F3} = h * \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{F2}/2)$$

$$\mathbf{F4} = h * \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{F3})$$

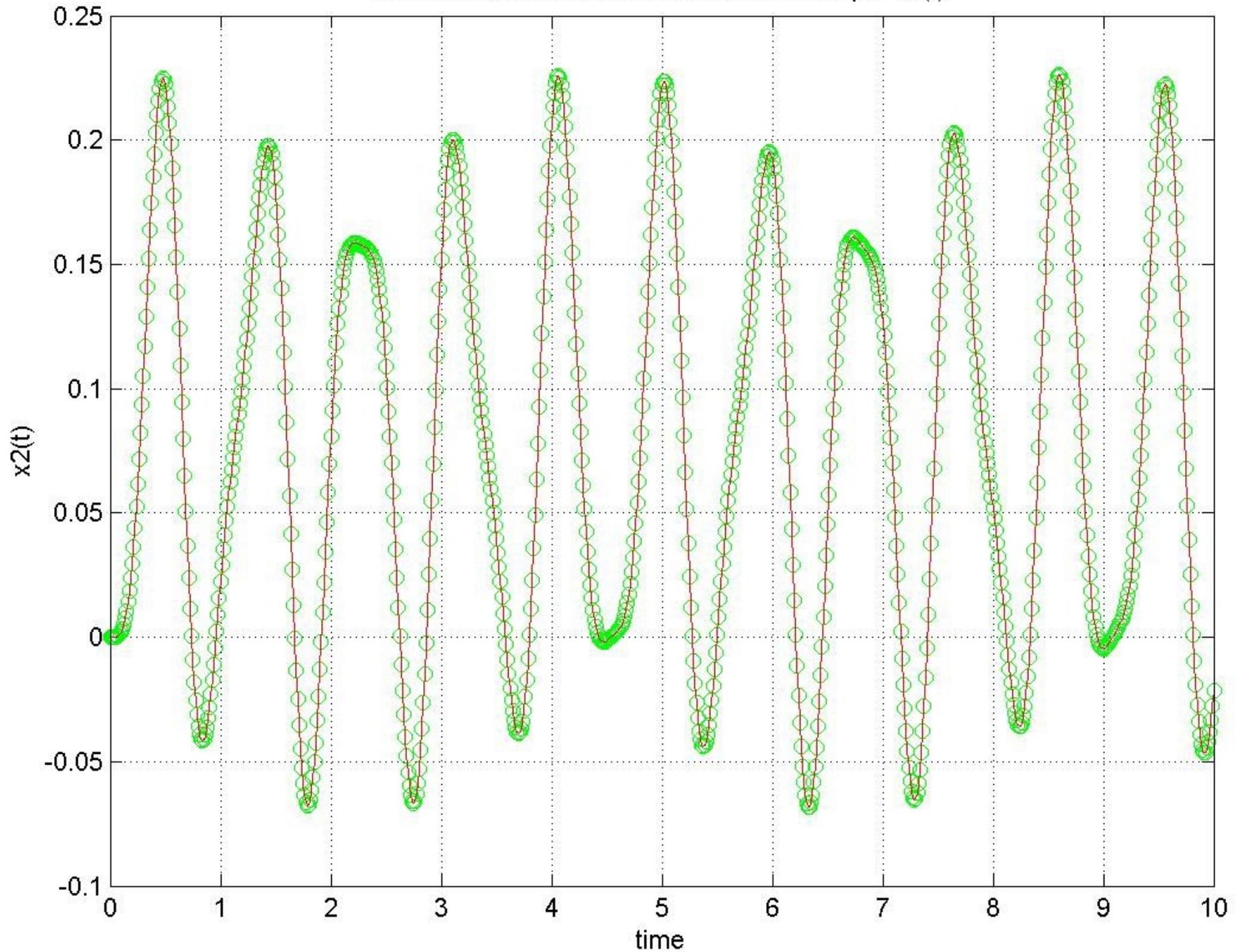
$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + (\mathbf{F1} + 2\mathbf{F2} + 2\mathbf{F3} + \mathbf{F4})/6$$

Grafici

(studio numerico)



Confronto Soluzione Analitica e numerica per $x_2(t)$



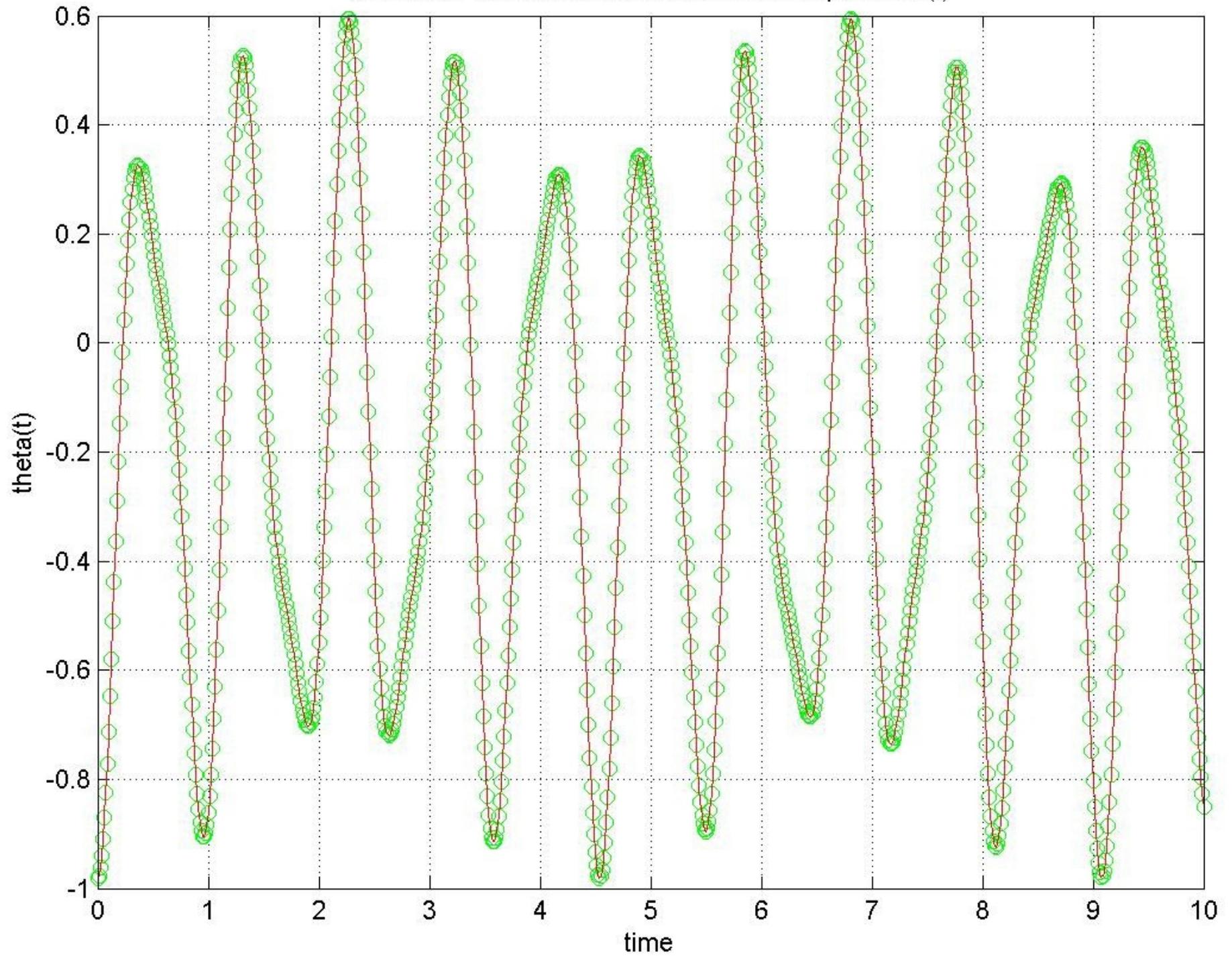
Leggere il grafico: $x_2(t)$ – soluzioni a confronto

In rosso la soluzione analitica per x_2 , in verde la soluzione numerica RK4.

Si nota l'ottimo accordo degli andamenti delle due funzioni: anche la soluzione numerica “vede” la periodicità di x_2 e riesce a rilevare tutti i massimi e i minimi relativi grazie alla stima delle derivate superiori.

L'errore assoluto massimo commesso è $2.45e-05$, che è più che accettabile per una funzione con banda di ordinate ampia circa 0.3

Confronto Soluzione Analitica e numerica per $\theta(t)$



Leggere il grafico: $\theta(t)$ – soluzioni a confronto

In rosso la soluzione analitica per $\theta(t)$, in verde la soluzione numerica RK4.

Valgono considerazioni analoghe alla figura precedente per l'ottimo accordo degli andamenti delle due funzioni.

L'errore assoluto massimo commesso è $1.24e-04$, che è più che accettabile per una funzione con banda di ordinate ampia circa 1.6

Stima dell'errore I

Il massimo errore assoluto commesso dipende dal numero di punti da esaminare entro l'intervallo di interesse. Per steps posto a 801 (il default cui si riferiscono i grafici, con passo $h = 1/80$) abbiamo l'ottimo risultato

$$\|\Delta x_2\| = 2.4340e-005, \quad \|\Delta \theta\| = 1.2354e-004,$$

mentre per steps posto a 81 (con passo $h = 1/8$),

$$\|\Delta x_2\| = 0.0655, \quad \|\Delta \theta\| = 0.3300,$$

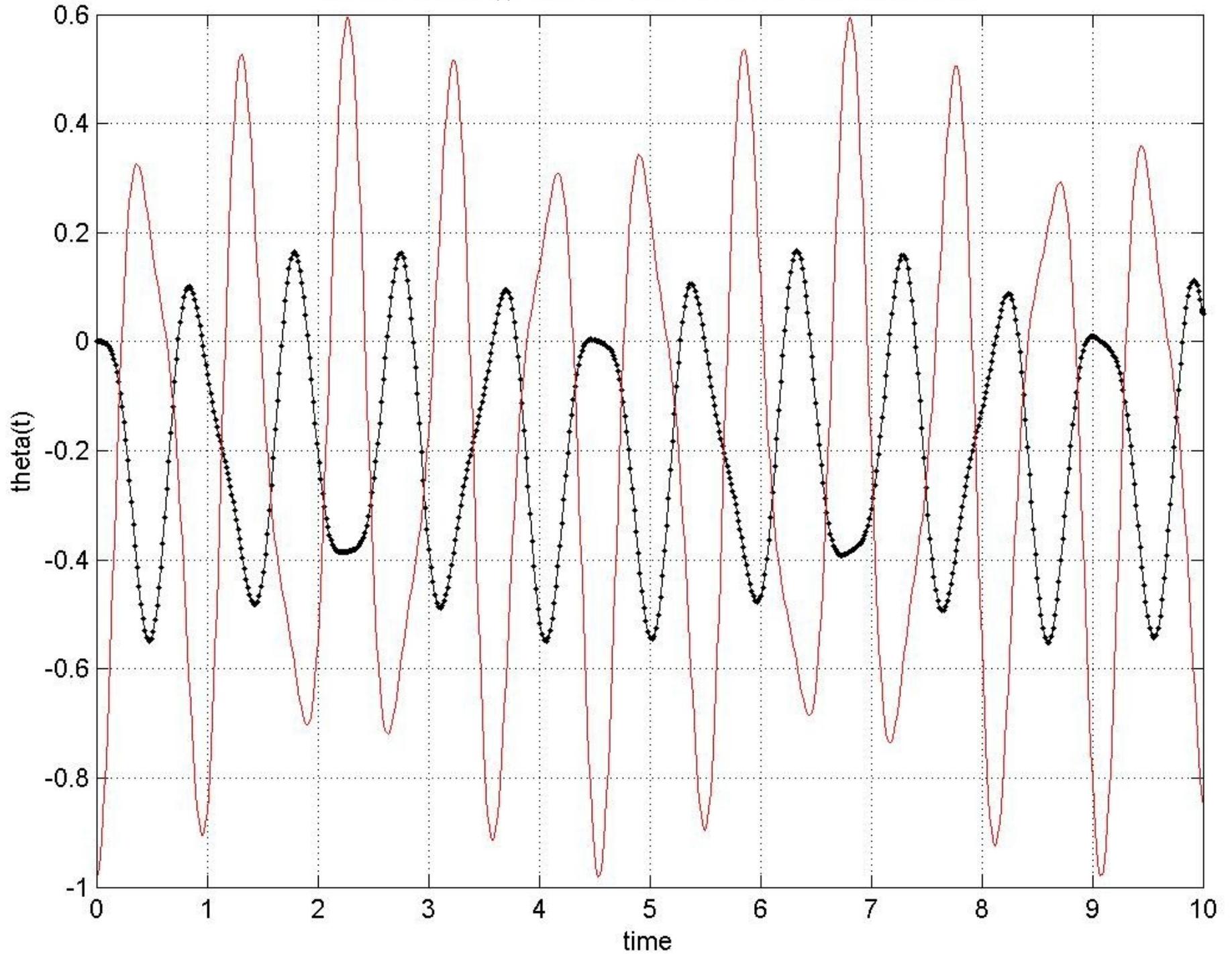
il che è abbastanza imbarazzante, considerando che la norma di x_2 è circa 0.25 mentre quella di θ si aggira intorno allo 0.6.

Stima dell'errore II

La soluzione “analitica” è pure approssimata, poiché è ottenuta su un elaboratore soggetto ad errori dovuti alla limitata precisione macchina; tuttavia, tali errori, oltre ad essere molto contenuti, sono anche locali, nel senso che non si propagano al calcolo di altri valori della stessa funzione, rappresentata per punti.

La soluzione numerica, invece, è soggetta ad errori non locali, che si propagano al calcolo di tutti i valori successivi.

confronto theta(t) sol analitica e numerica con nessuna c.i.



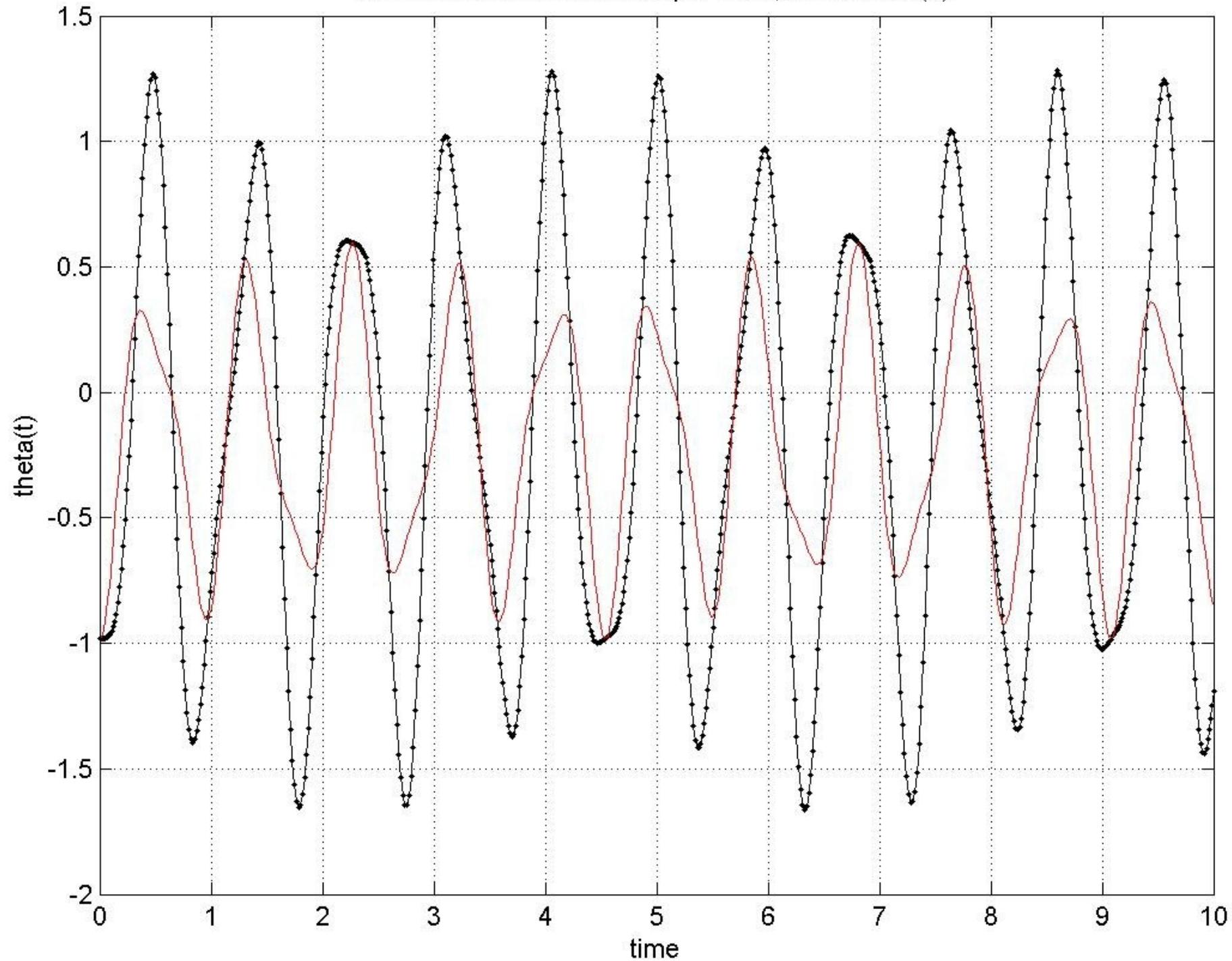
Leggere il grafico: $\theta(t)$ – soluzioni a confronto

In rosso la soluzione analitica per $\theta(t)$, in nero la soluzione numerica RK4 a partire da condizioni iniziali su $\theta^{(i)}(t)$ tutte a zero.

Si nota un pessimo accordo delle due funzioni.

La soluzione numerica sembra catturare solo le caratteristiche di periodicità di $\theta(t)$, e risulta fuori fase di π . L'ampiezza delle oscillazioni non raggiunge mai l'ampiezza massima di $\theta(t)$, e ciò è indice che non sono stati inclusi alcuni termini di energia.

confronto sol. num/analitica per theta, c.i. su theta(0)



Leggere il grafico: $\theta(t)$ – soluzioni a confronto

In rosso la soluzione analitica per $\theta(t)$, in nero la soluzione numerica RK4 a partire da condizioni iniziali su $\theta^{(i)}(t)$ tutte a zero eccetto $\theta^0(t)$.

Si nota un grande miglioramento dell'accordo delle due funzioni rispetto al grafico precedente.

La soluzione numerica cattura sia le caratteristiche di periodicità di $\theta(t)$ che la fase. L'ampiezza risulta superiore a quella della soluzione analitica; ciò è dovuto al non aver considerato le CI sulle derivate superiori, che portano a “frenare” un po' l'oscillazione del sistema.

Leggere il grafico: $\theta(t)$ – soluzioni a confronto

La condizione mancante è sulle derivate superiori all'estremo sinistro dell'intervallo, poiché l'ampiezza dell'oscillazione (come per la soluzione analitica) rimane costante.

Quindi, bastano condizioni puntuali in un punto (lo zero) per determinare l'ampiezza corretta, che viene poi mantenuta, data la natura non smorzata del sistema

Lo script

A conclusione, vediamo come si presenta all'utente l'esecuzione di uno script Matlab dedicato.

Lo script è stato sviluppato per generare i dati da includere nella relazione di progetto ed è da considerarsi come allegato alla relazione stessa, visto che la documenta.

