Laboratorio di Sistemi e Segnali

Capire e modellare i sistemi dinamici:

uno sguardo d'insieme.

Fiazza Maria-Camilla
4 giugno 2008

Traccia degli argomenti:

1. Modellazione e tipi di modelli
2. Procedimento generale:
   - analisi del problema (/del sistema?)
   - modellazione
   - analisi della soluzione (/del comportamento?)
3. Un sistema elettrico: un case study
4. Un sistema meccanico: analisi preliminare
5. Avvertenze su possibili difficoltà

I concetti

I temi chiave: preview concettuale

1. La logica sistemica
2. La tracciabilità delle cause
3. L'equivalenza modello-prospettiva:
   - su ciò che è da considerarsi rilevante
   - sugli strumenti concettuali da utilizzarsi
   - sulle tecniche di elaborazione da utilizzarsi
4. L'equivalenza di modelli. Caveat sull'interpretazione

Temi chiave I: la logica sistemica

Capire i sistemi significa avere familiarità con una maniera globale di vederne le caratteristiche e il comportamento.

La logica sistemica va oltre la scomposizione del sistema in componenti che interagiscono. Il tema fondamentale è di attribuire al sistema le proprietà che gli appartengono, senza ricondurle esclusivamente ai singoli elementi componenti.

In questa maniera è possibile avere proprietà che fungono da collante concettuale per l'intero sistema. Ad esempio, il numero di gradi di libertà e il sistema di riferimento appartengono all'intero sistema. Gli elementi costitutivi vi si devono uniformare.

Temi chiave II: la tracciabilità delle cause

Se ci sono dei trend evidenziati dai dati, bisogna sapere se questi trend sono proprietà effettive del sistema o se li abbiamo introdotti noi nella modellazone o nelle semplificazioni operate, oppure se derivano dall'uso di strumenti di elaborazione digitale.

Qui entrano in gioco intrecci sottili tra discipline diverse. Quindi, per assicurarci di poter valutare correttamente un risultato, dobbiamo avere chiarissimo tutto il percorso che abbiamo fatto per arrivarci.

Temi chiave III: l'equivalenza modello-prospettiva

Con un modello non si ha in mano una descrizione del sistema, quanto invece la descrizione di una **prospettiva** sul sistema.

Nel dare un modello, si precisa non solo ciò che è da considerarsi rilevante, ma anche quali strumenti usare (quelli naturali per la rappresentazione scelta)

Nel momento in cui specifichiamo un modello, stiamo anche dichiarando quali fattori abbiamo già considerato e quali restano da esaminare. Un esempio importante è la discretizzazione: se diamo un modello discreto, stiamo comunicando di aver già considerato le conseguenze della discretizzazione sui segnali. .

Temi chiave IV: “equivalenza”di modelli

Ristrutturazione di circuiti, accorpamento di segnali, ma anche estrazione di un modello analitico da uno schema di sistema e simulazione di un modello analitico: sono tutte trasformazioni di modelli.

Queste operazioni si appoggiano su una nozione intuitiva di equivalenza di modelli. Questo tema è il fondamento di discipline come i metodi formali per l'ingegneria del software.

Nel nostro contesto il tema è presenta a livello concettuale più che formale: quando cambiamo rappresentazione cambiamo anche la prospettiva sul sistema

I temi operativi: le linee guida

1. Garantirsi sempre una maniera di **valutare** l'accuratezza dei propri risultati o perlomeno la loro plausiblità.

2. Mantenere la **coerenza** concettuale del modello. In pratica, evitare di introdurre patch a qualsiasi livello.

3. Prestare attenzione all'aspetto **energetico**

Temi operativi I: valutare i risultati

Come facciamo a sapere se i risultati sono corretti?

Senza metodologie alternative per controllare la correttezza dei risultati, sia finali che intermedi, non siamo in grado di riconoscere neanche errori grossolani sul tipo di comportamento del sistema

Temi operativi I: valutare i risultati

Ci basiamo sull'accordo tra
- intuizione/buonsenso e risultati analitici
- risultati analitici e risultati numerici

Dove ci sono discrepanze, è necessario tracciare le cause e capire l'origine del fenomeno.

La logica che guida queste considerazioni sta nel riconoscere la necessità di garantirsi una maniera per valutare i risultati, sia per gli aspetti teorici che per gli aspetti numerici

Temi operativi II: mantenere la coerenza

<u>Patch</u>: Toppa.
Correzione “on the fly”di un problema che si origina a monte di dove viene risolto. Corrisponde ad una strategia di compensazione dell'errore invece che di correttezza.

Temi operativi III: la chiave energetica

Per ogni modello di un sistema fisico (in opposizione a logico), esiste almeno un segnale che è correlato all'energia del sistema. I segnali correlati all'energia sono i segnali fondamentali del sistema.

Esistono diversi formalismi per la meccanica classica; oltre a quello Newtoniano, ci sono quello Lagrangiano e Hamiltoniano. Invece di scrivere equazioni in termini di forze, in questi formalismi si usano come oggetti di base la quantità di moto (Lagrangiano) o l'energia (Hamiltoniano).

In questi formalismi, i segnali hanno significati fisici chiari ed evidenziano la struttura matematica di quel che succede entro il sistema.

Modellazione

Multidisciplinarità della modellazione:

La modellazione di un sistema fisico è un esercizio di **buonsenso**:

- di tipo fisico
- di tipo matematico
- di tipo numerico

Tipi di modelli:

Modelli a circuito

- usano grandezze scalari
- si prestano a scomposizioni in unità funzionali (maglie)
- richiedono algebra lineare ed analisi
- sono naturalmente descritti in forma a stati

Modelli di sistemi meccanici

- si appoggiano su vettori
- si prestano a scomposizioni in unità costitutive
- richiedono fisica ed analisi
- sono naturalmente descritti da equazioni differenziali

Capire il formato d'esame: sistemi “elettrici”

Traccia di esame A, parte 1:

"Data la rappresentazione di circuito in figura, si identifichino i tratti salienti del sistema.

Si spieghino il contributo e il ruolo di ciascun elemento, in particolar modo tratteggiando ove possibile il tipo di comportamento introdotto nel sistema."

Traccia di esame A, parte 2:

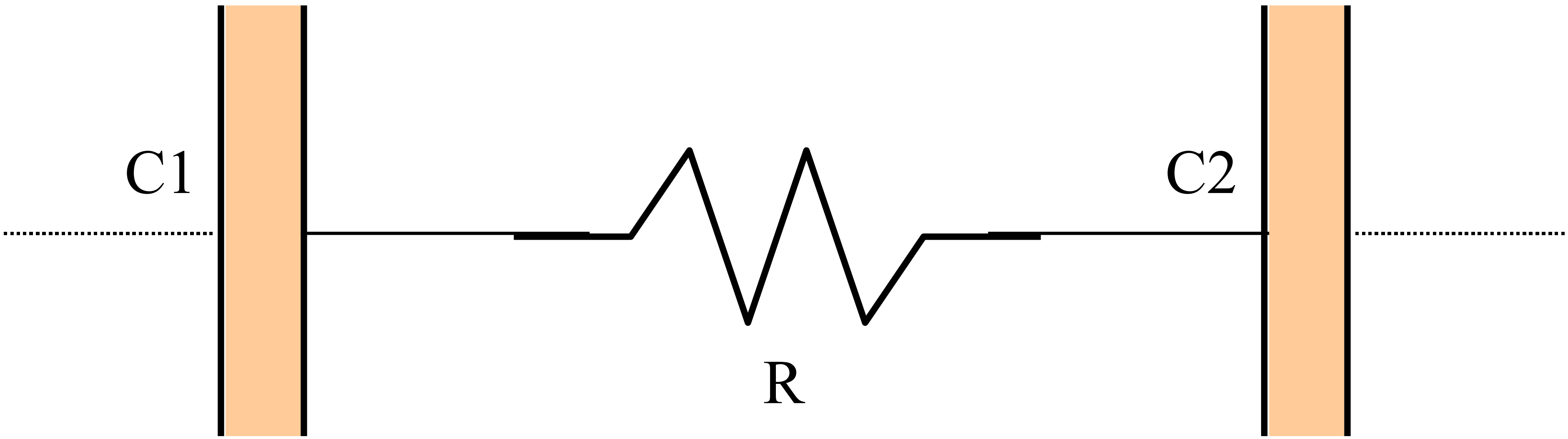
“Si discuta l'indipendenza di ciascun elemento del circuito rispetto agli altri. Si ristrutturi il circuito operando semplificazioni se questo è possibile.

Di che ordine ci si aspetta l'equazione differenziale sottostante?”

Commenti 1:

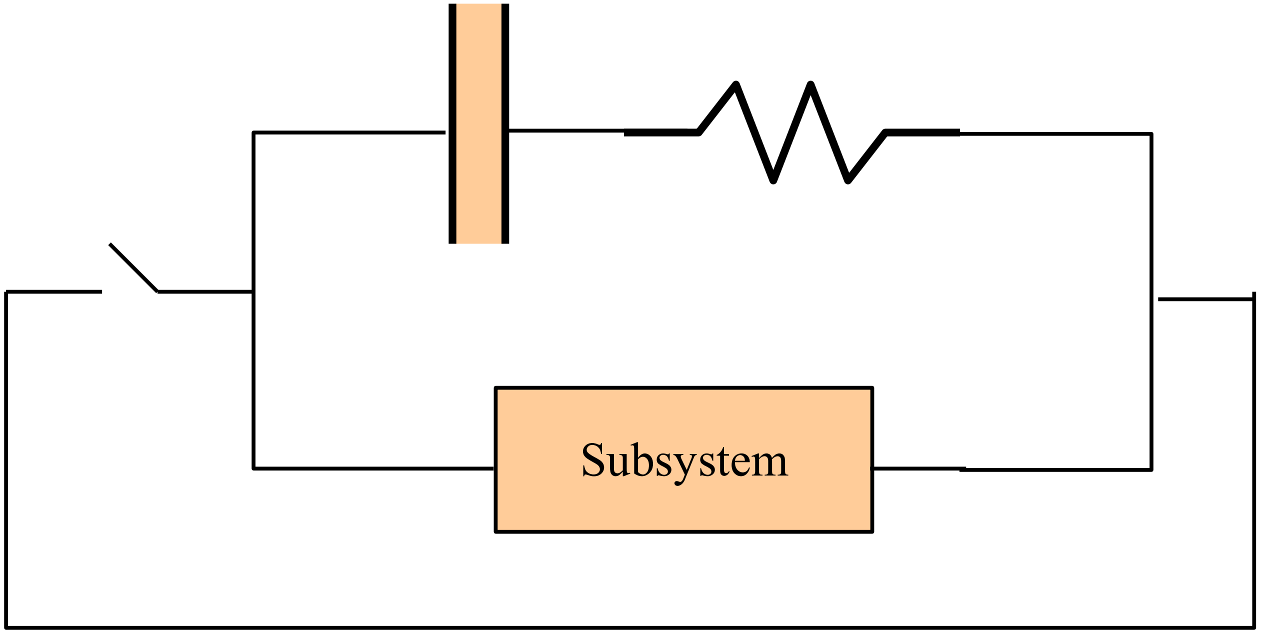
In una rappresentazione a circuito, l'ordine dell'equazione differenziale sottostante corrisponde al numero di elementi indipendenti in grado di immagazzinare energia. Infatti, ciascun elemento è in grado di immagazzinare un solo tipo di energia; si noti la differenza con i sistemi meccanici, in cui un elemento massivo può essere associato a più forme di energia indipendenti (es. energia cinetica e potenziale gravitazionale)”

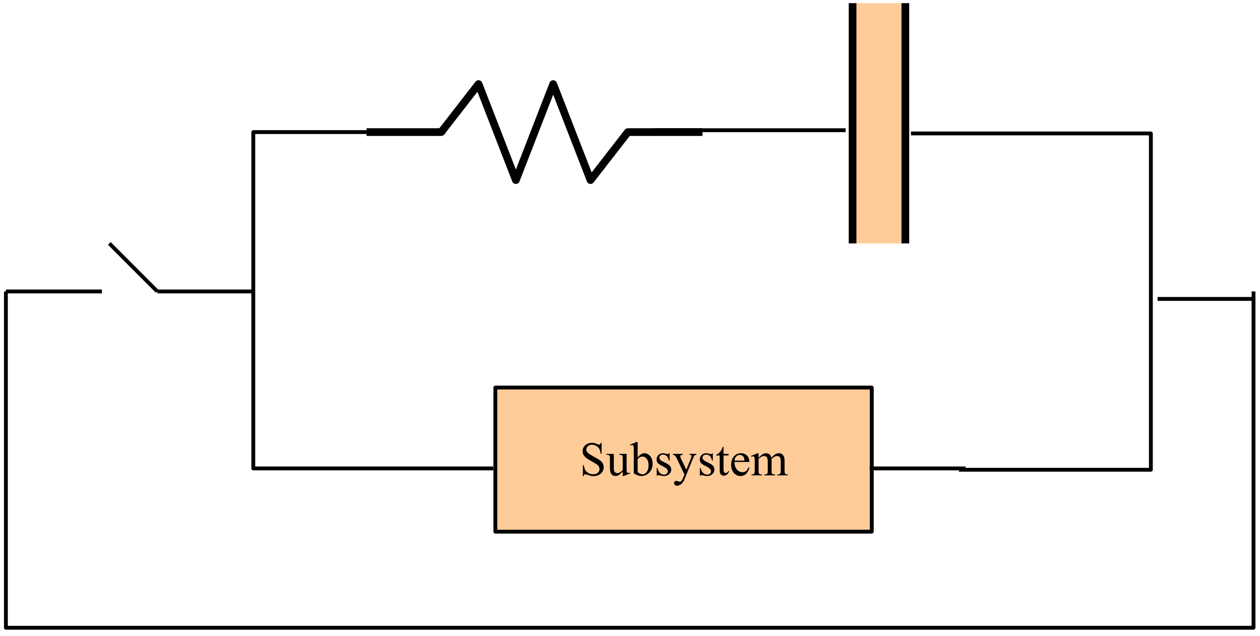
Indipendenti?



Sono due condensatori indipendenti?

Equivalenti?





Equivalenti?

Condizione di equivalenza delle rappresentazioni precedenti: il transitorio elettronico dovuto alla chiusura del circuito può essere trascurato.

Stiamo parlando di fenomeni che durano per intervalli dell'ordine di 10^{-10} secondi !

Traccia di esame A, parte 3:

"Si ricavi l'equazione differenziale del sistema in forma a stati.

Supponiamo che le condizioni iniziali del sistema siano settabili solo a partire dagli stati naturali del sistema e che le CI di progetto siano invece fornite dalla misura di voltaggio e corrente istantanea ai capi dell'elemento X. Si scrivano le trasformazioni (dirette e inverse) corrispondenti e si esprimano le equazioni del sistema rispetto a questo nuovo riferimento"

Traccia di esame A, parte 4:

“Si scriva una espressione che rappresenti il contenuto energetico del sistema.

Se F è di tipo

- costante
- a rampa, su supporto limitato
- sinusoidale
- a frequenza crescente

sulla base dell'intuizione, che comportamento ci si attende?”

Traccia di esame A, parte 5:

“Si tratteggi il procedimento per svolgere con gli strumenti Matlab/Simulink i task seguenti:

- simulazione del sistema
- quale metodo di risoluzione è appropriato? perché?
- valutazione dei risultati”

Traccia di esame A, parte 6:

“(Da consegnare elettronicamente entro le ore <>).

Si implementi l'equazione differenziale in Simulink, in forma estesa (non un blocco singolo per l'intera FdT).

Si valutino i risultati ottenuti e ne si motivi la plausibilità.
Scegliere valori plausibili per condizioni iniziali e parametri.
Commentare i grafici.”

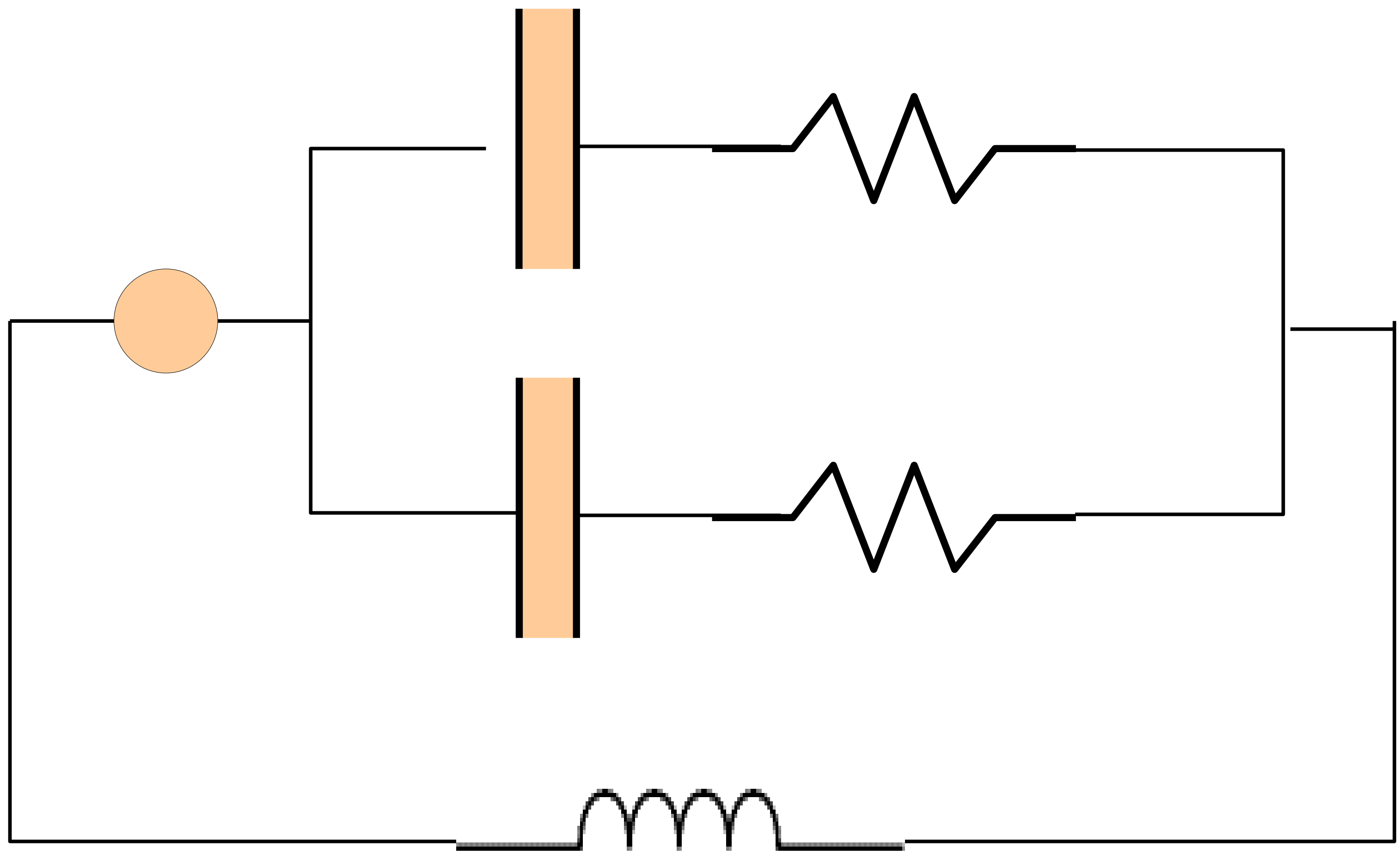
Case Study:
Sistemi "elettrici"

Preliminari: il testo del problema

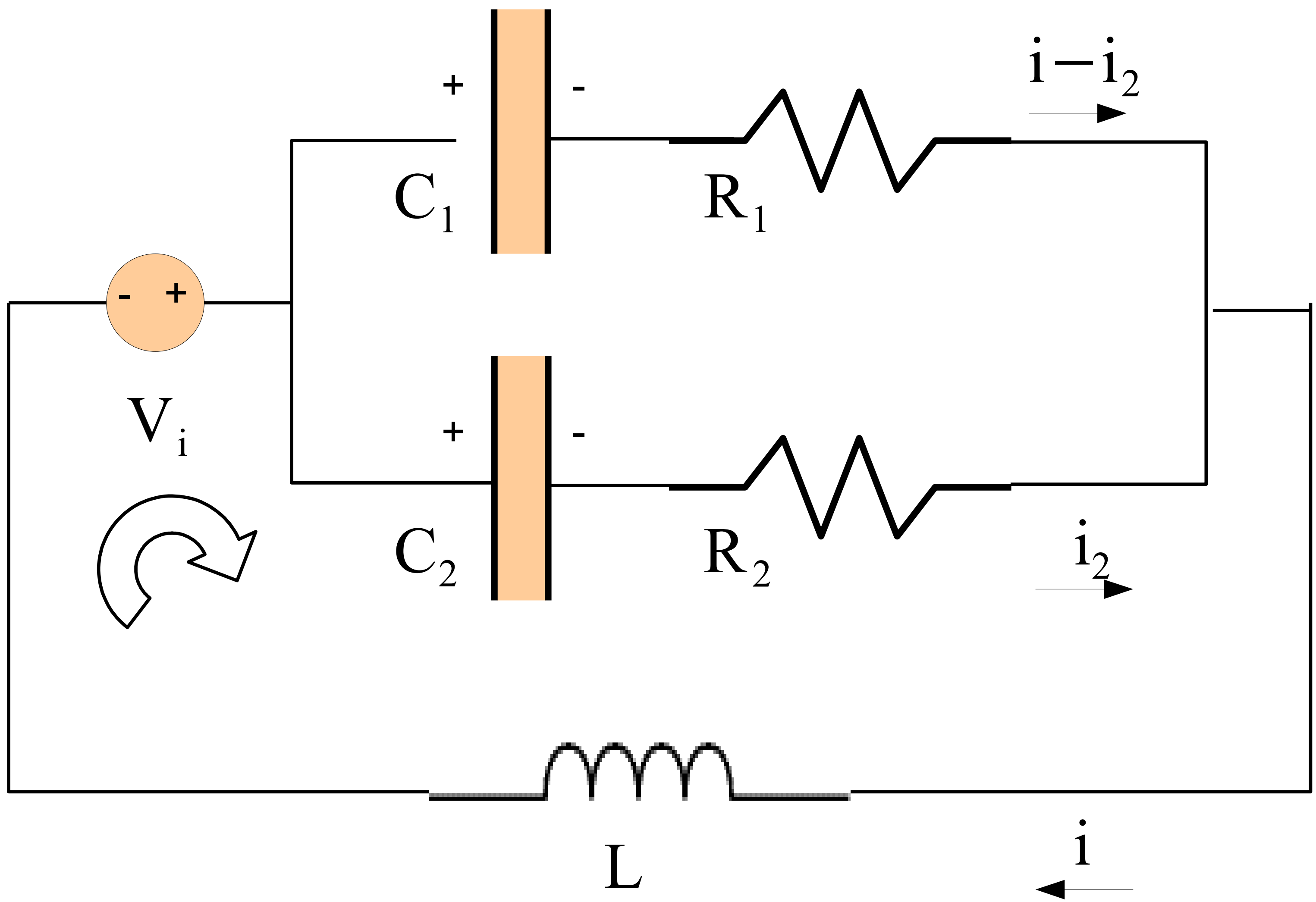
"È dato il sistema in figura (a pagina successiva). Si studi il sistema tenendo presente che siamo interessati alla descrizione della differenza di potenziale ai capi del condensatore nel ramo centrale.

Si consideri il circuito come comandato in voltaggio dal segnale $V_i(t)$."

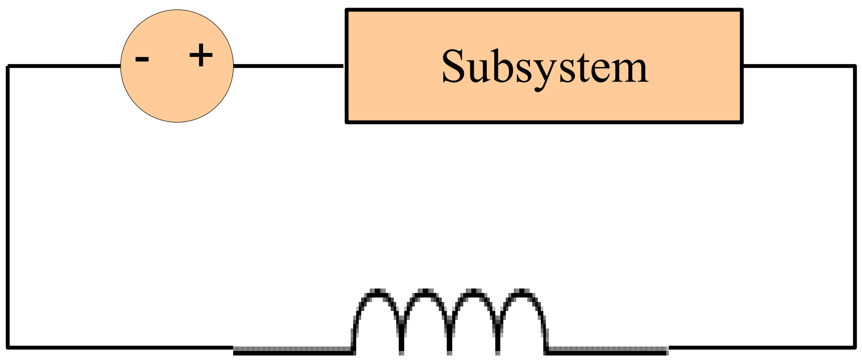
Preliminari: il testo del problema

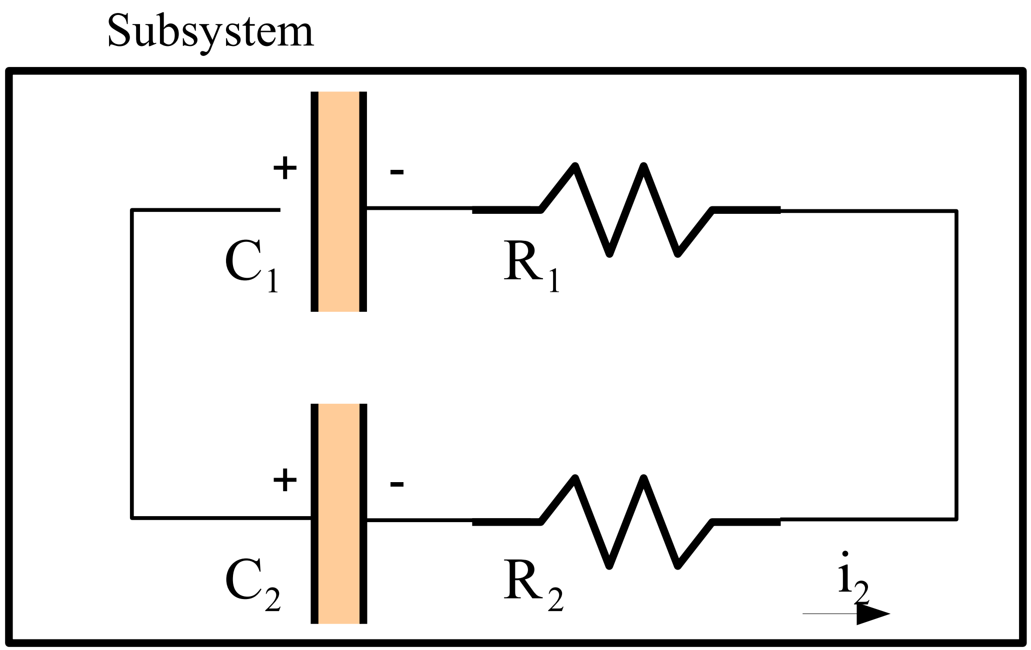


Preliminari: dichiarazione dei riferimenti



Visualizzare il sistema





Elementi ed energia

Elemento resistivo (o dissipativo)
luogo in cui il sistema perde energia

Elemento capacitivo
luogo in cui il sistema immagazzina energia (**strutturalmente**)

Elemento induttivo
luogo in cui il sistema immagazzina energia (**rispetto ai flussi**)

Variabili e parametri

Sono parametri del sistema:

$$\{\ R_{1,} R_{2,} C_{1,} C_{2,} L\ \}$$

Sono variabili:

$$\{\ i(t), i_2(t), q_1(t), q_2(t)\ \}$$

$V_i(t)$ svolge il ruolo di funzione forzante, ed è l'unica porta di comunicazione in input verso l'esterno del sistema.

Assunti sul sistema

Dato il modello di partenza, gli assunti sul sistema riguardano unicamente i due aspetti seguenti:

- i parametri hanno valori che non cambiano nel tempo: $R_1(t) = R_1 \cdot 1(t)$--> che può essere visto come un numero.

Analogo discorso vale per tutti i parametri che caratterizzano il sistema, ovvero le capacità, le resistenze e l'induttanza.

- i componenti sono ideali [non c'è ragione di ipotizzare altrimenti]. Pertanto, assumiamo che gli elementi C_1 e C_2 abbiano un comportamente puramente capacitivo, che R_1 e R_2 un comportamento puramente resistivo e che L sia puramente induttivo.

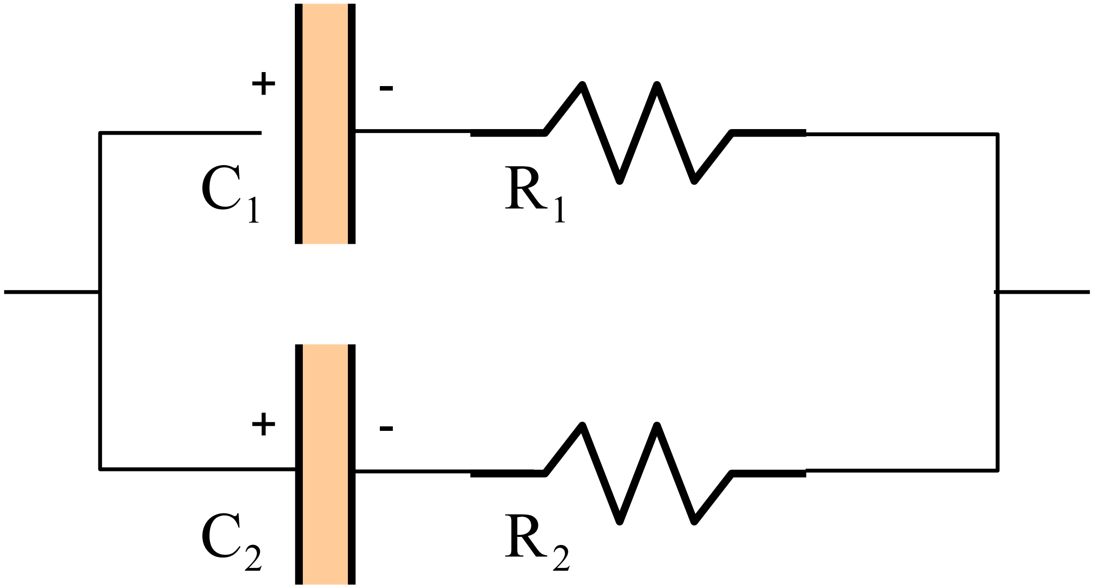
Decomposizione del sistema

I modelli a circuito non si prestano ad essere scomposti in elementi costitutivi da cui ricavare le equazioni differenziali che governano il sistema. Questo perché:

1) la tecnica per l'estrazione di equazioni differenziali si appoggia sui principi di Kirchoff. Si noti che si tratta di una formulazione dei principi di conservazione (carica, energia).
2) I modelli a circuito non lavorano con vettori, ma con scalari dotati di segno ("vettori ridotti"). Infatti, di tali vettori sono di interesse solo l'intensità e il verso, visto che la direzione è vincolata dalla struttura del circuito.

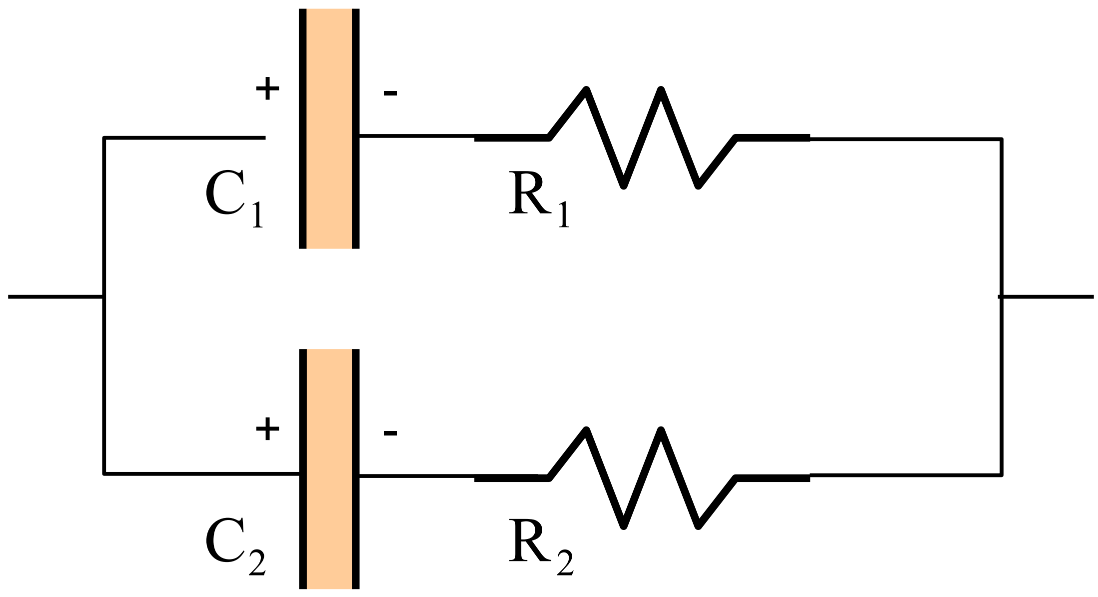
Le ragioni che supportano l'uso dei diagrammi di corpo libero semplicemente in questi modelli vengono a mancare.

Osservazione:



La struttura non è riducibile.
Quindi i due condensatori sono indipendenti.

Osservazione:



C_1 e C_2 non danno luogo a tipi di comportamento in diretta opposizione. Semplicemente, si appoggiano allo stesso flusso di cariche i e ne ripartono la corrente in i_2 e $i-i_2$

Stati Naturali del sistema:

La semantica dei modelli in forma a circuito prevede che gli stati naturali del sistema siano associati a:

- cariche presenti nei condensatori
- correnti che attraversano gli induttori

Quindi il modello a circuito specifica già che il nostro obiettivo è descrivere il sistema in termini dei tre segnali di stato:

$$\{\ q_{1,} q_{2,} i\ \} \quad \text{ovvero} \quad \{\ q_1(t), q_2(t), i(t)\ \}$$

Ordine del sistema:

È già evidente grazie alla nostra discussione preliminare che le cariche nei condensatori sono descritte da segnali indipendenti.

C'è indipendenza anche tra un generico condensatore ed un generico induttore, poiché questi reagiscono a segnali che sono l'uno derivato dell'altro e pertanto sono indipendenti.

Infatti, un induttore vede e reagisce alla derivata del segnale di corrente che lo attraversa, mentre i condensatori reagiscono al semplice segnale di corrente.

È possibile concludere già ora che la tripla di segnali di stato è non solo sufficiente a descrivere il sistema, ma anche necessaria. Quindi $\{ q_1(t), q_2(t), i(t) \}$ è una base per il sistema e l'ordine del sistema è 3.

Descrizione Analitica :

Procediamo a ricavare le equazioni descrittive del sistema, applicando i principi di Kirchoff. Come buona norma, la regola dei nodi è stata applicata direttamente in sede di definizione dei segnali.

Ciò permette di avere meno simboli da risolvere e di non rischiare di risolvere rispetto a segnali che non sono di interesse. Nel nostro caso specifico, abbiamo evitato di definire un simbolo nuovo per rappresentare la corrente nel ramo superiore.

Equazioni descrittive:

Loop principale (Ramo superiore):

$$V_i - \frac{q_1}{C_1} - R_1(i - i_2) - L\ddot{i} = 0$$

Loop principale (Ramo inferiore):

$$V_i - \frac{q_2}{C_2} - R_2 i_2 - L\ddot{i} = 0$$

Equazioni descrittive (alternative):

Struttura condensatori-resistori:

(1) $$\frac{q_1}{C_1}+R_1(i-i_2)=\frac{q_2}{C_2}+R_2 i_2$$

Loop principale (Ramo inferiore):

(2) $$V_i-\frac{q_2}{C_2}-R_2 i_2-L\dot{i}=0$$

Ricavare le equazioni in forma a stati:

Nelle equazioni, l'unica grandezza estranea alla descrizione a stati è i_2. La esplicitiamo come $i_2 = \dot{q}_2$

Per ricavare la forma a stati dobbiamo identificare delle relazioni del tipo: $\dot{\text{stato}} = f(q_1, q_2, i) + \alpha\,\text{ingresso}$

in cui f esprime una combinazione lineare.

Procediamo ricavando i_2 (ovvero $\dot{q}_2$), dalla (1):

$$\frac{q_1}{C_1} + R_1(i - i_2) = \frac{q_2}{C_2} + R_2 i_2$$

$$\frac{q_1}{C_1} + R_1 i - \frac{q_2}{C_2} = R_1 i_2 + R_2 i_2$$

$$\dot{q}_2(R_1 + R_2) = \frac{q_1}{C_1} + R_1 i - \frac{q_2}{C_2}$$

Ricavare le equazioni in forma a stati:

Abbiamo raggiunto:

$$\boxed{\dot{q}_2=\frac{q_1}{C_1}\frac{1}{(R_1+R_2)}-\frac{q_2}{C_2}\frac{1}{(R_1+R_2)}+\frac{R_1}{(R_1+R_2)}i}$$

che è un'equazione di aggiornamento dello stato, ovvero una delle equazioni del sistema di equazioni che definiscono la forma a stati.

Per raggiungere la seconda equazione di aggiornamento, sostituiamo l'espressione appena trovata in (2), ad ottenere:

$$\boxed{\dot{i}=-\frac{q_1}{L C_1}\frac{R_2}{(R_1+R_2)}-\frac{q_2}{L C_2}\frac{R_1}{(R_1+R_2)}-\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)}i+\frac{V_i}{L}}$$

Ricavare le equazioni in forma a stati:

L'equazione di aggiornamento mancante, quella per q_1, si ricava da : $q_1 = i - i_2$

Arriviamo a:

$$\boxed{\dot{q}_1 = -\frac{q_1}{C_1}\frac{1}{(R_1+R_2)} + \frac{q_2}{C_2}\frac{1}{(R_1+R_2)} + \frac{R_2}{(R_1+R_2)}\dot{i}}$$

Detto $\vec{x}$ il vettore degli stati, $\vec{x} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ i \end{bmatrix}$

si scrive l'equazione differenziale del sistema in forma a stati come :

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\mathbf{V}_{\mathbf{i}}$$

Ricavare le equazioni in forma a stati:

$$
A = \frac{1}{(R_1+R_2)} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_2} & R_2 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & R_1 \\ -\frac{R_2}{L\,C_1} & -\frac{R_1}{L\,C_2} & -\frac{R_1\,R_2}{L} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}
$$

E l'equazione di uscita?

Ricavare le equazioni in forma a stati:

L'equazione di uscita cattura ciò che del sistema è d'interesse. Nel nostro caso, si richiede di concentrarsi sulla differenza di potenziale ai capi del condensatore C_2.

Per ispezione del circuito si ricava:

$$y = \frac{q_2}{C_2} = \frac{1}{C_2} \cdot q_2$$

$$\boxed{y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}}$$

Condizioni iniziali I:

Supponiamo che le condizioni iniziali (C.I.) siano date ai capi dell'elemento di interesse. Spesso succede che le C.I. non siano date sugli stati naturali del sistema, rispetto a cui abbiamo espresso le equazioni descrittive del sistema in forma a stati.

Come convertire?

Condizioni iniziali II:

Siano $[r, \dot{r}, \ddot{r}]^T(0)$ le condizioni inziali date;
(Si noti $r = y(t)$; $\dot{r} = \dot{y}(t)$; $\ddot{r} = \ddot{y}(t)$)

Qui usiamo nuovi simboli per indicare che concettualmente le C.I. non sono sull'<u>uscita</u>, ma riguardano semplicemente condizioni indipendenti che, prese nel loro complesso, descrivono lo stato del sistema.

Il problema si riconduce a identificare la trasformazione che mappa

$$\begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ i \end{bmatrix}$$

Condizioni iniziali III:

Esistono tecniche generali per svolgere questo passaggio in maniera efficiente per stati arbitari, purché indipendenti; purtroppo queste tecniche richiedono l'identificazione degli autostati, l'uso di potenze di matrici e la trasformazione in forma di Jordan.

Fortunatamente, anche tecniche più “artigianali” possono servire allo scopo.

Condizioni iniziali IV:

Identifichiamo r rispetto alla tripla degli stati naturali:

$r = \frac{q_2}{C_2}$ Deriviamo a ottenere $\dot{r}$

$\dot{r} = \frac{1}{C_2} \dot{q}_2$ Ricaviamo $\dot{q}_2$ in termini di $[q_1, q_2, i]$

Ricorriamo alle equazioni di aggiornamento dello stato per $\dot{q}_2$

$$\dot{r} = \frac{1}{C_2} \left\{ \left(\frac{1}{R_1 + R_2} \right) \underbrace{\left[\frac{1}{C_1} \quad -\frac{1}{C_2} \quad R_1 \right]}_{\text{II riga matrice A}} \vec{x} \right\}$$

Da qui, derivando ancora si ottiene una espressione per $\ddot{r}$

Condizioni iniziali V:

Ricorriamo ancora alle equazioni di aggiornamento dello stato, ottenendo:

$$\ddot{r} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1+R_2}\right)\left[\frac{1}{C_1} \quad -\frac{1}{C_2} \quad R_1\right] \dot{\vec{\mathbf{x}}}$$

$$\ddot{r} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1+R_2}\right)\left[\frac{1}{C_1} \quad -\frac{1}{C_2} \quad R_1\right]\left\{\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}}+\mathbf{B}\,\mathbf{V}_{\mathbf{i}}\right\}$$

Svolgendo si giunge a:

$$\ddot{r} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1+R_2}\right)^2\left[\alpha \quad \beta \quad \gamma\right] \vec{x} + \mu \; V_i$$

Condizioni iniziali VI:

Dove:

$$\alpha = -\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{C_1 C_2} - \frac{R_1 R_2}{L C_1}$$

$$\beta = \frac{1}{C_1 C_2} + \frac{1}{C_2^2} - \frac{R_1^2}{L C_2}$$

$$\gamma = \frac{R_2}{C_1} - \frac{R_1}{C_2} - \frac{R_1^2 R_2}{L}$$

$$\mu = \frac{1}{L C_2}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)$$

Trasformazione di C.I. I:

Rappresentare tutto questo è piuttosto antipatico, visto quanto è complessa anche solo l'espressione per la terza C.I.
Usiamo un [barba]trucco per ottenere una rappresentazione più facile da manipolare e per evidenziare la struttura dei coefficienti: premoltiplicare per una matrice diagonale, contenente i coefficienti delle righe:

$$\begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} = \frac{1}{C_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1+R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(R_1+R_2)^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & R_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{bmatrix} V_i$$

Trasformazione di C.I. II:

$$\vec{r} = \frac{1}{C_2}\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,\vec{x} + \mu\,\mathbf{e_1}\,V_i$$

$$\underbrace{\vec{r} - \mu\,\mathbf{e_1}\,V_i}_{\vec{gr}} = \frac{1}{C_2}\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,\vec{x}$$

$$\vec{x} = C_2(\mathbf{D}\,\mathbf{M})^{-1}\vec{gr}$$

$$\boxed{\vec{x} = C_2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\vec{gr}}$$

Si noti che spesso si assume: $\vec{r} = \vec{gr}$

poiché si intende: $V_i(0)=0$.

E lo studio analitico?

Come abbiamo detto in precedenza, lo studio analitico va fatto tutte le volte che è possibile. Però nella sua forma naturale, la descrizione analitica è in forma a stati matriciale. Come si risolvono le equazioni del tipo $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + BV_i$?

Supponiamo di volere una idea qualitativa delle caratteristiche del sistema, in termini dei suoi modi elementari. Per ora ignoriamo l'ingresso e ci concentriamo sulla risposta libera. L'equazione si riconduce a: $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

Questa forma è estremamente simile alla ben nota:

$$\dot{x} = \lambda x$$

la cui soluzione è $x(t) = k e^{\lambda t}$

Soluzione analitica per forma a stati

In effetti il parallelo regge, e possiamo pensare alla risposta libera come:

$$\vec{x} = e^{A\,t}$$

Questa dicitura misteriosa si chiama esponenziale di matrice (Teoria dei Sistemi) ed è il cuore della soluzione analitica per equazioni differenziali in forma a stati matriciale.

Come affrontare la soluzione analitica senza usare questo strumento?

Soluzione analitica per forma a stati

Abbiamo due strade a disposizione:

1) Accontentarci di determinare i modi elementari del sistema senza cercare espressioni analitiche complete per i segnali in gioco. Se si richiede solo uno studio qualitativo, questa strada è praticabile.

Nelle equazioni differenziali scalari, i modi elementari si determinano cercando gli zeri dell'equazione caratteristica.
Qui cerchiamo gli zeri del polinomio caratteristico della matrice $A - \lambda I$. Sì, in effetti stiamo cercando gli autovalori di A, matrice di aggiornamento dello stato.

Soluzione analitica per forma a stati

Detti λ_i gli autovalori, i modi elementari si possono esprimere come

$$e^{\lambda_i t}$$

eventualmente pesati per una componente polinomiale in caso di autovalori multipli

I modi ulteriori introdotti dalla presenza della funzione forzante si possono ricavare in molti casi secondo la stessa logica vista in Analisi II con il metodo degli annichilatori.

Soluzione analitica per forma a stati

La seconda strada a disposizione consiste nel ricavare, a partire dalle equazioni descrittive, l'equazione differenziale per il sistema in forma canonica, che si risolve con le tecniche viste per equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

In questo caso è possibile determinare l'espressione analitica completa per le funzioni in gioco.

E lo studio analitico?

Ripartiamo delle equazioni iniziali:

$$\begin{cases} \dfrac{q_1}{C_1} + R_1(i - i_2) = \dfrac{q_2}{C_2} + R_2 i_2 \\ V_i - \dfrac{q_2}{C_2} - R_2 i_2 - L\dot{i} = 0 \\ \dot{q}_1 = i - i_2 \end{cases}$$

Esprimiamo i_2 in termini di $\dot{q}_2$

$$\begin{cases} \dfrac{q_1}{C_1} + R_1 i - R_1 \dot{q}_2 = \dfrac{q_2}{C_2} + R_2 \dot{q}_2 \\ L\dot{i} + R_2 \dot{q}_2 + \dfrac{q_2}{C_2} = V_i \\ \dot{q}_1 = i - \dot{q}_2 \end{cases}$$

E lo studio analitico?

Introduciamo l'equazione di uscita: $y = q_2 / C_2$

$$\begin{cases} \dfrac{q_1}{C_1} + R_1 i - R_1 C_2 \dot{y} = \dfrac{C_2 y}{C_2} + R_2 C_2 \dot{y} \\ L \dot{i} + R_2 C_2 \dot{y} + \dfrac{C_2 y}{C_2} = V_i \\ \dot{q}_1 = i - C_2 \dot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{q_1}{C_1} + R_1 i = C_2 (R_1 + R_2) \dot{y} + y \\ L \dot{i} + R_2 C_2 \dot{y} + y = V_i \\ \dot{q}_1 = i - C_2 \dot{y} \end{cases}$$

E lo studio analitico?

Come liberarsi di q1, che non è presente nella 2a equazione? Derivando l'equazione (a) e sostituendo con il secondo membro della (c); passiamo da

$$\begin{cases} \dfrac{q_1}{C_1}+R_1 i=C_2(R_1+R_2)\dot{y}+y & \text{(a)} \\ L\dot{i}+R_2C_2\dot{y}+y=V_i & \text{(b)} \\ \dot{q}_1=i-C_2\dot{y} & \text{(c)} \end{cases}$$

a:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C_1}(i-C_2\dot{y})+R_1\dot{i}=C_2(R_1+R_2)\ddot{y}+\dot{y} \\ L\dot{i}+R_2C_2\dot{y}+y=V_i \end{cases}$$

Equazione differenziale del sistema

Ora non resta che sostituire $\dot{i}$ ricavato dalla seconda nella prima equazione. Visto che è presente solo i (e non $\dot{i}$), deriviamo nuovamente e sostituiamo.

Si arriva infine all'equazione differenziale descrittiva del sistema:

$$C_2(R_1+R_2)\dddot{y}+\left(1+\frac{C_2}{C_1}+\frac{R_1^2C_2}{L}\right)\ddot{y}+\frac{1}{L}\left(1+\frac{R_2C_2}{C_1}\right)\dot{y}+\frac{1}{C_1L}y$$

$$=\quad \frac{1}{L}\dot{V}_i+\frac{1}{LC_1}V_i$$

Si nota che l'equazione è dell'ordine atteso (3). Il secondo membro mostra che ci sono elementi che vedono segnali di ordini diversi.

Modi elementari del sistema

Ora è sufficiente esaminare i segni dei coefficienti delle derivate di y (che sono tutti positivi) per rendersi conto che le soluzioni dell'equazione caratteristica (**se reali**) sono tutte negative. (Regola di Cartesio)

Visto che l'equazione è di ordine 3 e che i coefficienti sono tutti reali, è noto dall'algebra che, se ci sono soluzioni complesse, abbiamo una coppia di soluzioni complesse coniugate (--> comportamento oscillatorio) ed una soluzione reale negativa.

La regola di Routh conferma che anche la parte reale delle soluzioni complesse è negativa, in perfetto accordo con l'intuizione fisica

Che tipo di comportamento aspettarsi dal sistema?

È importante riuscire a prevedere almeno le caratteristiche qualitative della risposta del sistema. Ma è altrettanto importante sapere quando esse non siano predicibili neppure grossolanamente.

Ragioniamo un po' sul nostro sistema:

- Ordine del sistema e modi elementari
- I coefficienti sono tutti reali
- Da cosa dipende la tipologia del comportamento?

Che tipo di comportamento aspettarsi dal sistema?

Ragioniamo un po' sul nostro sistema:

- le correnti che attaversano le resistenze sono sempre concordi?
- a che cosa contribuisce l'induttanza?

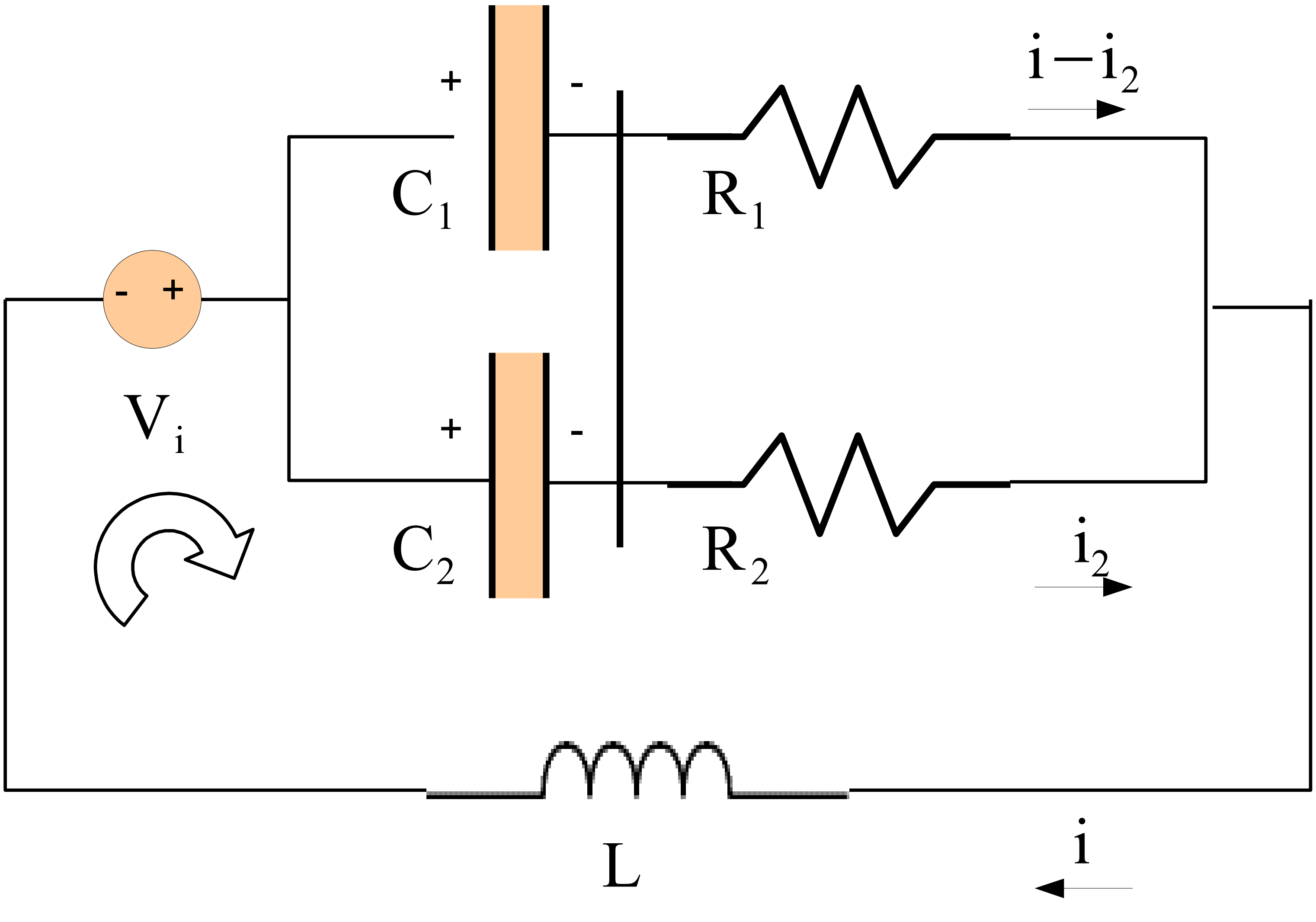
Verifichiamo la nostra intuizione mettendoci nel caso semplice di un ingresso limitato e costante.

Condizioni iniziali per il comportamento a soglia:

Supponiamo che, se l' energia contenuta in C_2 raggiunge il 40% dell'energia totale del sistema, dall'alto venga fatto cadere un piccolo conduttore.

Il sistema ora si presenta cosi' (vedi slide seguente):

Condizioni iniziali per il comportamento a soglia:



Comportamento a soglia: esercizio

Come cambiano le equazioni differenziali che governano il sistema?

Se dovessimo mostrare l'andamento della differenza di potenziale ai capi dell'elemento C_2 lungo **tutta** l'evoluzione del sistema, quali condizioni iniziali dovremmo assumere per la nuova equazione differenziale?

Capire il formato d'esame: sistemi “meccanici”

Traccia di esame B, parte 1a:

“Dato il sistema in figura, si identifichino le grandezze rilevanti per la sua descrizione, tenendo presente che siamo interessati in particolare al:

- moto di un particolare elemento;
- comportamento energetico del sistema nel suo complesso;
- andamento della velocità relativa di due elementi;
- ...

<Ulteriori informazioni sul sistema fisico e sugli obiettivi della modellazione>

Si indichino anche i parametri che caratterizzano il sistema.”

Commenti 1a:

Qui è richiesto di usare precisione e ragionevolezza nello stabilire un'interfaccia esterna del sistema (oltre all'interfaccia interna, nel caso che differiscano).

Notare che viene chiaramente richiesto di fare una distinzione tra parametri e variabili, e che nel momento in cui si identificano delle grandezze come variabili, sia anche necessario specificare quale sia il sistema di riferimento scelto.

Interfaccia interna ed esterna: il concetto

Per interfaccia esterna si intende l'astrazione corrispondente ad un insieme di segnali del sistema, che siano: 1) immediatamente accessibili ad un osservatore esterno e 2) rilevanti ai fini della descrizione del comportamento.

Per interfaccia interna si intende l'astrazione corrispondente ad un insieme di segnali che modella la “comunicazione” tra componenti del sistema, ma che non sia 1) immediatamente accessibile ad un osservatore esterno o 2) non rilevante ai fini della descrizione del sistema.

Traccia di esame B, parte 1b:

“Si tenga presente che l'intervallo di velocità in cui il sistema opera è di un ordine di grandezza tale che

l' attrito <tipo> non è trascurabile

Si descriva il fenomeno corrispondente e si delinei brevemente una strategia per rappresentarlo, gestendolo per mezzo di equazioni differenziali lineari.”

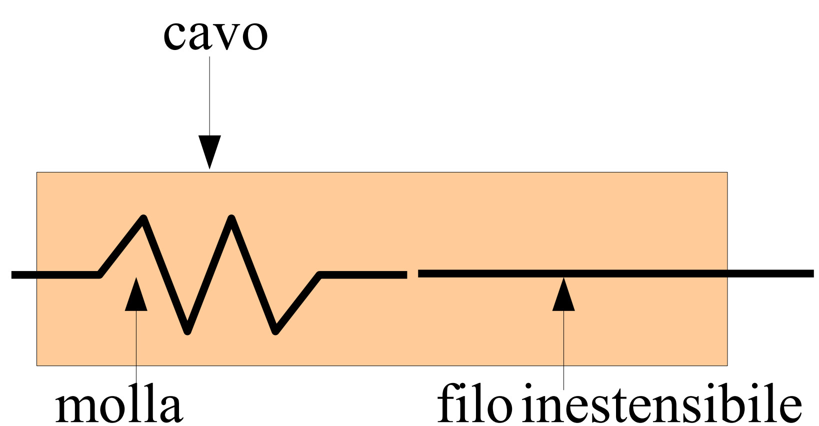
Commenti 1b:

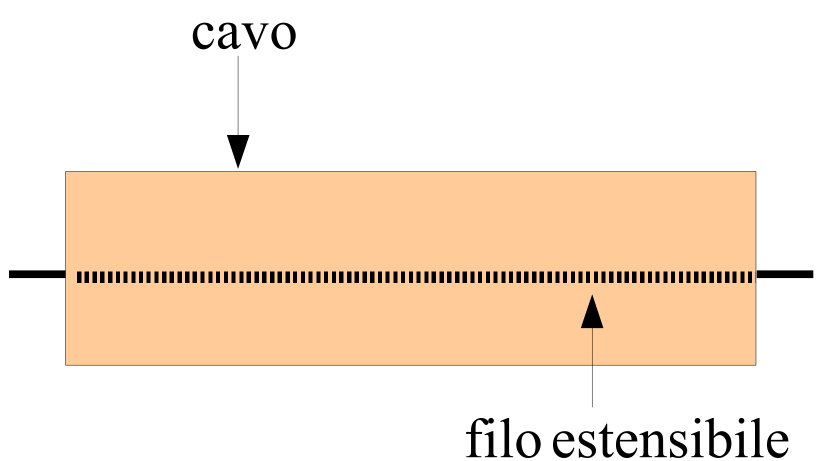
Qui si richiede una breve spiegazione dell'effetto degli attriti sui segnali in gioco. In generale, bisogna ricordare che l'attrito è sempre una forza resistiva, mai attiva.

Una modellazione che non tenga conto di ciò può dare origine a fenomeni spiacevoli, come modelli in cui un massa in moto prima si ferma e poi comincia ad accelerare nella direzione opposta al moto precedente per l' “effetto” (ehm...) degli attriti.

In questo senso gli attriti (statico e dinamico) si inseriscono nella classe più generale dei fenomeni che danno luogo a comportamenti a soglia.

Modelli equivalenti?





Modelli equivalenti?

No!

I due modelli sono equivalenti solo se è già noto per altra via(analitica o numerica) che nel caso in esame le forze cui è soggetto il cavo sono esclusivamente di trazione.

I modelli non sono affatto equivalenti per forze di compressione. Infatti, nel primo caso la forza trasmessa diventa automaticamente $\vec{0}$, mentre nel secondo caso il "cavo" nel suo complesso si contrae (!) e trasmette una forza.

Traccia di esame B, parte 2:

"Si considerino i vincoli presenti sul sistema; si indichi chiaramente a che semplificazione corrispondono (se corrispondono ad una semplificazione) e ne si mostri l'effetto sul procedimento di modellazione/analisi.

Si consideri se F stessa sia soggetta a vincoli, affinchè preservi il suo significato fisico.

Si traccino diagrammi di corpo libero completi per ciascun elemento, riportando chiaramente il sistema di riferimento e nominando le forze/i momenti in gioco."

Commenti 2:

I vincoli a cui ci si riferisce qui sono di svariati tipi, ma possono essere classificati in famiglie:

1. Vincoli di natura fisica (inestensibilità, conservazione della lunghezza di cavi inestensibili, incompenetrabilità dei corpi, non trasmissibilità delle forze di compressione tramite cavi)
2. Vincoli introdotti da semplificazioni nel modello (assunti di massa nulla, ...)
3. Vincoli derivanti dal sistema (es. moto solidale di elementi)
4. Semplificazioni computazionali (masse puntuali, punti di applicazione delle forze corrispondenti al centroide, ...)
5. Linearizzazione su elementi singoli (applicazione della legge di Hooke, ...)

Traccia di esame B, parte 3:

“Sulla base delle osservazioni fin qui svolte, quali caratteristiche del comportamento del sistema è possibile anticipare?

Di che ordine ci si aspetta l'equazione differenziale sottostante?

Come influiscono sulle aspettative le caratteristiche dell'input F (costante, oscillatoria, rampa)?”

Traccia di esame B, parte 4:

“Si sviluppi l'equazione differenziale del sistema. Se significativo, si indichi il significato fisico di ciascun termine.

Si proceda anche a ricavare la soluzione analitica dell'equazione differenziale e ne si tratteggino le caratteristiche salienti.

Si verifichi se le osservazioni precedenti sono compatibili con i risultati trovati.”

Traccia di esame B, parte 5:

"Si tratteggi il procedimento per svolgere con gli strumenti Matlab/Simulink i task seguenti:

- simulazione del sistema
- quale metodo di risoluzione è appropriato? Perché?
- valutazione dei risultati"

Traccia di esame B, parte 6:

"(Da consegnare elettronicamente entro le ore <>).

Si implementi l'equazione differenziale in Simulink, in forma estesa (non un blocco singolo per l'intera FdT).

Si valutino i risultati ottenuti e ne si motivi la plausibilità.
Scegliere valori plausibili per condizioni iniziali e parametri.
Commentare i grafici."

Commenti 3: Scelta di valori significativi

Piccolo caveat:

Può succedere [è successo] che lo studio analitico indichi la presenza di più componenti, ma che nel grafico se ne veda solo una. Analogo discorso quando la soluzione analitica indica n modi elementari (ben distinguibili) e nel grafico se ne riconoscono solo m, con $m<n$.

<u>**Dove sono finite le componenti mancanti?**</u>

Commenti 3: Scelta di valori significativi

Opzione 1:

Non tutte le componenti sono facilmente distinguibili alla scala in cui si è rappresentata la soluzione.

Si ricalcola la soluzione per altri intervalli della variabile indipendente; di solito si cerca all'ordine di grandezza immediatamente superiore e a quello immediatamente inferiore.

Commenti 3: Scelta di valori significativi

Opzione 2:

Se il problema non si risolve calcolando la soluzione su altra scala, è il caso di considerare che i valori scelti per i parametri possano portare il coefficiente di uno dei modi elementari a valori prossimi allo zero.

Si procede ad esaminare il rapporto tra i coefficienti dei modi elementari nell'espressione analitica della risposta. Se il rapporto assume valori o molto prossimi allo zero o estremamente elevati, è il caso di scegliere nuovi valori per i parametri. In questo modo è possibile evidenziare chiaramente sui grafici tutti i comportamenti elementari in gioco.

Analisi preliminare: definire la prospettiva a partire dal modello schematico di sistema

Formalizzazione del problema:

1. Identificazione degli elementi costitutivi
2. Specifica dei parametri e delle variabili
3. Specifica del sistema di riferimento
4. Analisi dei ruoli degli elementi costitutivi
5. Assunti e approssimazioni operate
6. Analisi dei vincoli

Studio Analitico: Definire la soluzione

Modellazione matematica e analisi del sistema di equazioni:

i. Diagrammi di corpo libero ed equazioni descrittive

ii. Determinazione dei descrittori del sistema

iii. Determinazione del sistema di equazioni differenziali che modella l'evoluzione del sistema fisico

iv. Equazione differenziale del sistema in forma canonica

Studio Numerico: implementare la soluzione

<u>Simulazione</u>

i. Scelta del metodo di elaborazione.

ii. Forma a stati delle equazioni differenziali

iii. Calcolo della soluzione numerica
- discussione dei risultati ottenuti

Case study:
sistemi “meccanici”

Visualizzare !

Un primo obiettivo è di costruirsi un'immagine mentale del funzionamento del sistema, avendo presente:

- sia i ruoli strutturali (a sostiene b, a influenza b),

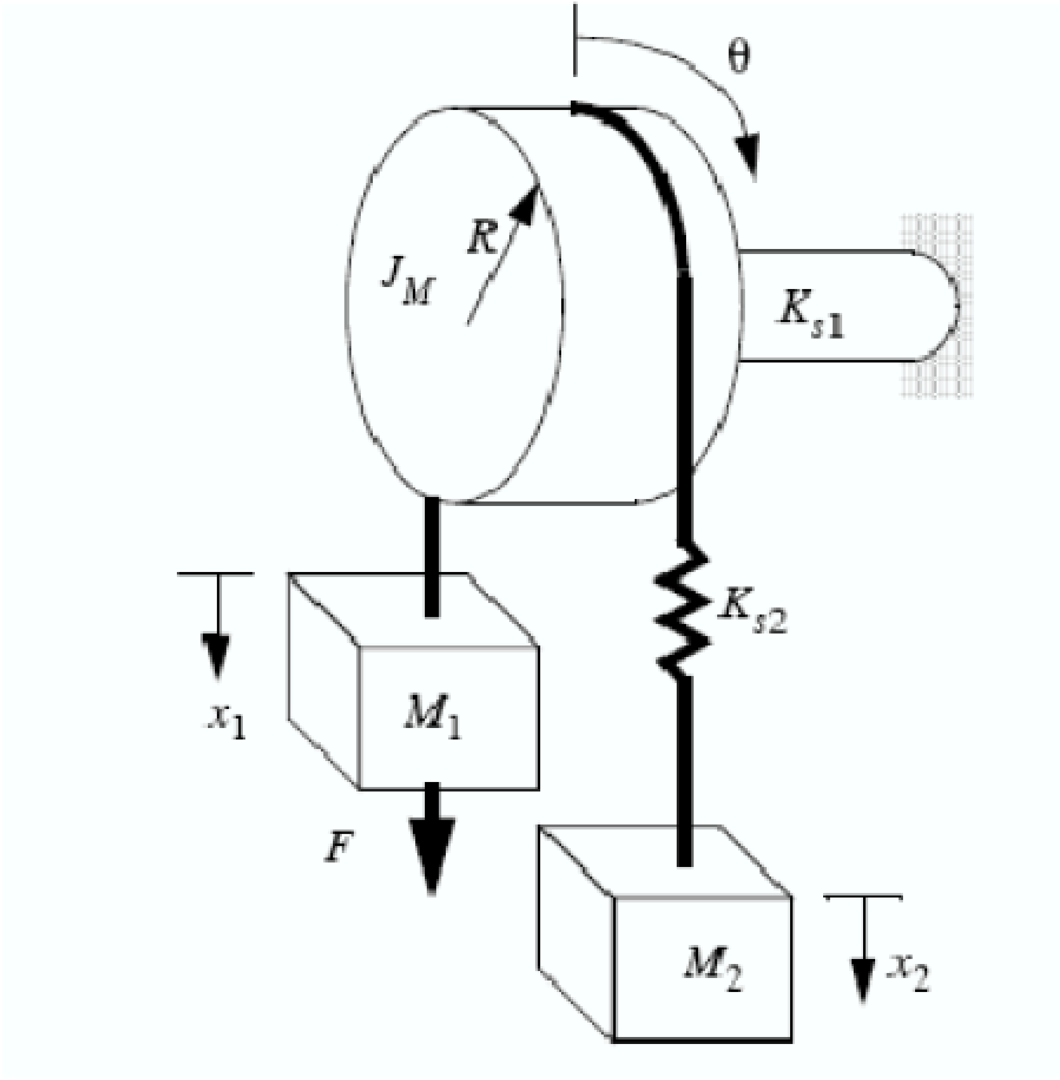
- sia il contributo di ogni componente al comportamento sistemico.

Preliminari: il testo del problema

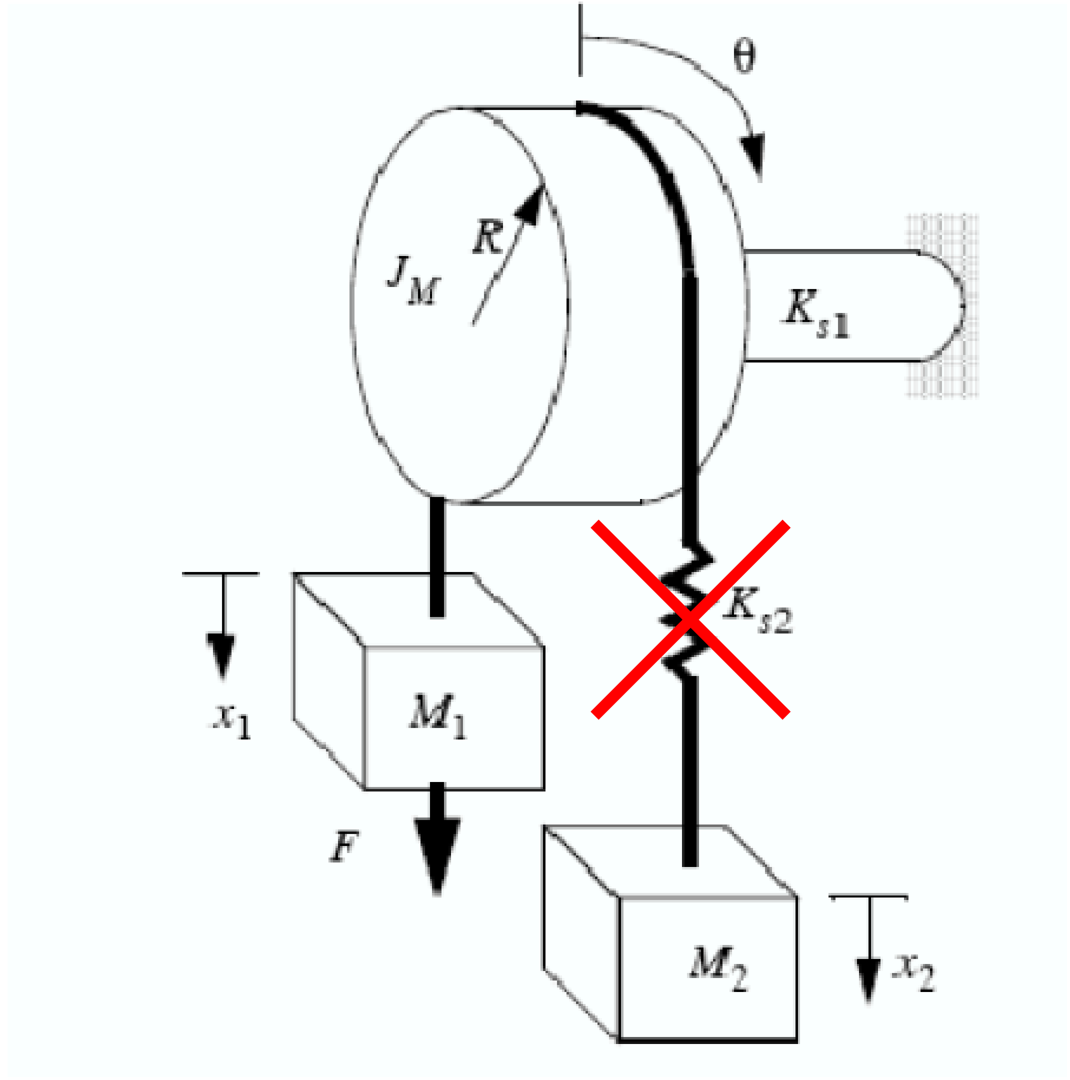
“Il sistema in figura consiste di due masse sospese con un cavo su una massa J.
C’è una molla sul cavo vicino a M2. Il cavo non scivola su J.

1. Derivare l'equazione differenziale del sistema.
2. Con un metodo numerico del primo ordine, trovare la risposta del sistema, usando dei parametri a scelta ma considerando le masse unitarie e la forza in input costante.
3. Fare il grafico della risposta del sistema.”

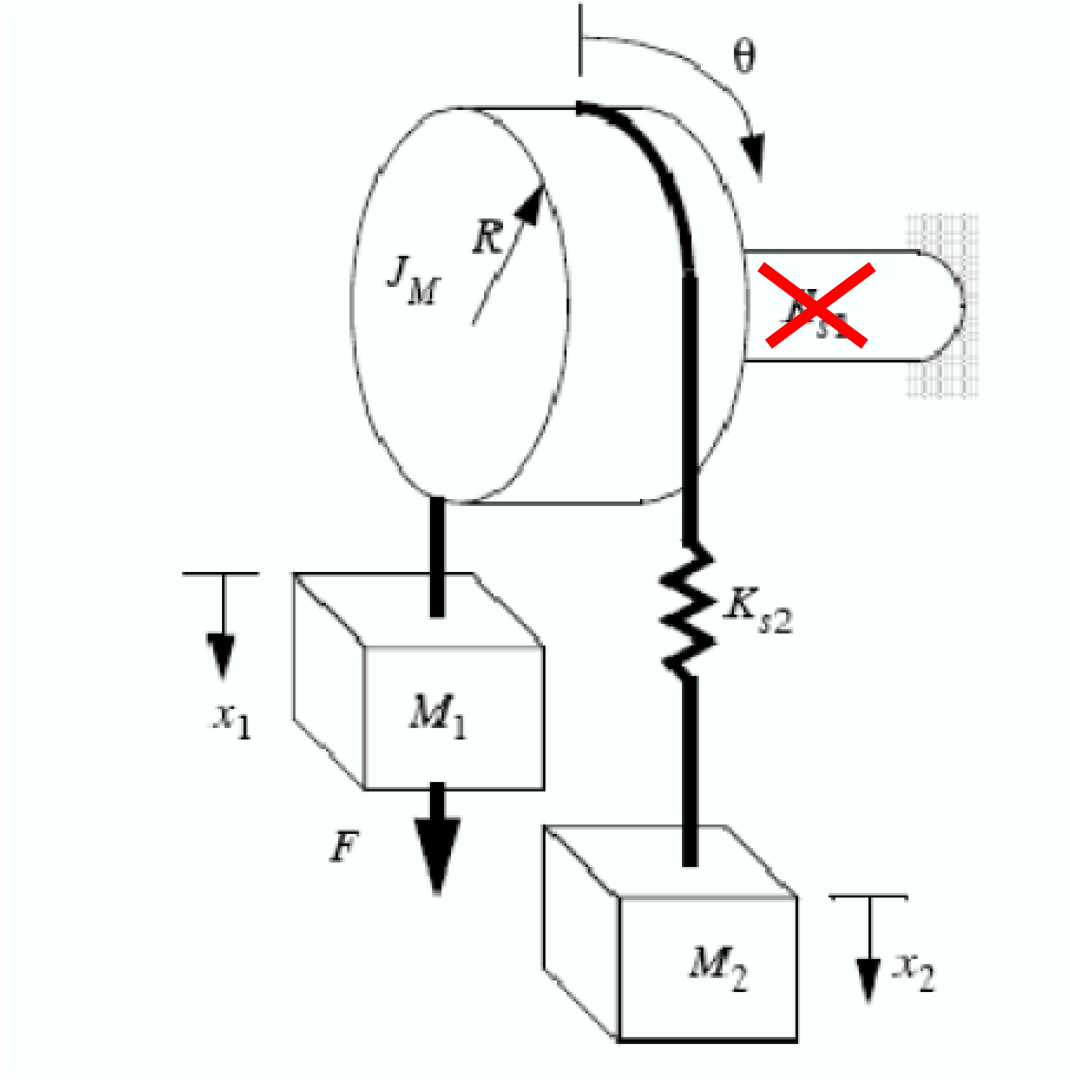
Preliminari: il testo del problema



Visualizzare: e se mancasse K_2 ?



Visualizzare: e se K_1 si comportasse solo come sostegno?



Visualizzare: che comportamento ci aspettiamo dal sistema?

Abbiamo riconosciuto due tipologie di comportamento indotte dalla presenza delle molle K_1 (rotazionale) e K_2 (coassiale):

- il comportamento oscillatorio, dovuto all'interplay di F e della reazione di K_1, in assenza di K_2.
- il comportamento sfasato di M_2 rispetto ad M_1, dovuto alla presenza di K_2, in assenza di K_1.

Ci aspettiamo che i comportamenti siano entrambi presenti nel sistema completo, ma ...

Visualizzare: che comportamento ci aspettiamo dal sistema?

Ci aspettiamo che i comportamenti siano entrambi presenti nel sistema completo, ma ...

- il comportamento oscillatorio <u>non</u> è dovuto <u>solo</u> a K_1 e
- la differenza di fase <u>non</u> è dovuta <u>solo</u> a K_2.

Il sistema non vede due elementi elastici distinti, ma un comportamento elastico unico, dovuto ad entrambi. Questo perché <u>*la logica sistemica non è in grado di discriminare i propri elementi*</u>. In altre parole, un sistema non è in grado di pensare e/o reagire “a pezzi”.

Modellazione del sistema

Elementi Costitutivi del sistema: notazione

Usiamo un solo simbolo per indicare:
- il parametro
- l'elemento del sistema da esso caratterizzato

Quindi parliamo di molla coassiale di coefficiente K_{S2}, oppure semplicemente di K_{S2}.

Elementi Costitutivi del sistema I

- **K_{S1} o K_1**. Molla rotazionale, che assumiamo incernierata su un parete da un lato e sull'elemento cilindrico J_M dall'altro lato. Resiste alla rotazione di J_M e contemporaneamente trasmette al sistema una forza diretta verso l'alto che si oppone all'accelerazione verticale dell'intero sistema (e del suo centro di massa)

- **M_1** e **M_2**. Elementi massivi.

Elementi Costitutivi del sistema II

- **J_M**. Elemento massivo che supporta il filo e si muove ruotando in maniera solidale al filo stesso.

- **Filo**. Sostiene gli elementi di massa M_1 e M_2 e vincola il moto di M_1, M_2 e J_M, collegandoli.

- **K_{S2}** o **K_2**. Molla coassiale. Ritarda il moto di M_2 rispetto a M_1 e modella l'estensibilità del filo reale.

Assunti sul sistema I: il filo

Il filo del modello si assume *inestensibile e privo di massa*. La massa del filo reale viene trascurata perché di valore estremamente piccolo rispetto alle altre masse in gioco (si parla di almeno due ordini di grandezza di differenza).

La caratteristica dei cavi di non trasmettere forze di compressione implica inoltre che il nostro modello matematico è *vincolato* a $F(t) \geq 0$

Assunti sul sistema II: estensibilità

La caratteristica dei cavi reali di essere soggetti ad estensione quando sono sottoposti a tensione viene modellata dall'elemento K_2, una molla che reagisce a deformazione coassiale.

K_2 dipende dal materiale di cui è costituito il cavo, ma è normalmente piuttosto elevato.

Assunti sul sistema III: approssimazione di massa nulla

Ipotizzare una massa nulla per il modello di un elemento reale implica che la sommatoria delle forze agenti sull'elemento sia il vettore **0**. Ciò serve ad evitare di trovarsi con accelerazioni infinite.

Questa considerazione si estende a tutti gli elementi del sistema eccettuati M_1, M_2 e J_M, ovvero gli elementi massivi.

Assunti sul sistema IV: approssimazione di massa puntiforme

Assumiamo che gli elementi di massa M_1 e M_2 siano approssimabili puntualmente, intendendo con ciò che il comportamento fisico del sistema e la sua descrizione matematica risultano invariate sostituendo a M_1 e M_2 due masse puntiformi con gli stessi parametri di massa.

Assunti sul sistema V:
ipotesi di densità uniforme e simmetria

Assumiamo che l'elemento K_{S1} sia imperniato sul centroide di J_M.

Assumiamo anche che la densità di J_M sia uniforme, garantendoci cosí di poter calcolare il momento d'inerzia di J_M a partire dalla massa e da grandezze geometriche (misura del raggio, altezza del cilindro).

Assunti sul sistema VI: approssimazione degli attriti

Tutti gli attriti vengono trascurati, dato che essi non sono in alcun modo segnalati nella descrizione del sistema assegnata.

- Gli attriti viscosi, derivanti dal moto in un mezzo diverso dal vuoto, sono considerati di entità trascurabile rispetto alle forze in gioco.
- Gli attriti che sono fisicamente necessari a garantire la trasmissione delle forze sono modellati matematicamente da *vincoli* e non compaiono nelle equazioni descrittive del sistema

Assunti sul sistema VII: linearizzazione dei coefficienti elastici

Assumiamo che gli elementi K_1 e K_2 operino in un ambito in cui i valori della deformazione rispettano l'approssimazione lineare espressa dalla legge di Hooke:

$$F_{K1} \propto \Delta\theta \qquad \text{e} \qquad F_{K2} \propto \Delta x$$

Ciò è equivalente a linearizzare le equazioni differenziali che descrivono il comportamento delle molle.

Vincoli sul sistema I:

1. Vincolo di inestensibilità del filo:

$$x_1 + x_2 + \pi R = \text{length},$$

con length costante e finito, ma potenzialmente illimitato.

2. Vincolo di trasmissibilità della forza:

$$F(t) \geq 0 \qquad \forall\, t$$

3. Vincoli numerici esplicitati nel testo del progetto:

$$M_1 = M_2\ , \quad \text{ovvero}$$

gli elementi massivi M_1 e M_2 hanno pari massa

Vincoli sul sistema II: moto solidale

4. Il cavo non scivola su J_M, cioè il movimento del cavo è solidale alla rotazione di J_M. Da qui si ricava il vincolo:

$$R(-\Delta\theta) = \Delta x_1 \quad \text{ovvero:}$$

lo spostamento angolare di J_M è direttamente proporzionale allo spostamento traslazionale di M_1, secondo un fattore $1/R$.

Vincoli sul sistema III: moto solidale

In un sistema reale c'è sempre attrito tra il cavo e J_M. L'attrito statico svolge qui un triplice ruolo:

- trasmette la tensione puntuale del filo a J_M;
- ritarda il movimento di J_M rispetto a quello del filo;
- dissipa energia.

Il primo ruolo viene modellato dal vincolo, mentre il secondo e il terzo sono considerati di entità trascurabile.

Parametri e Variabili

Sono parametri:

R, J_M, K_{S1}, K_{S2}, M_1, M_2, F

Sono variabili:

x_1, x_2, θ [$x_1(t)$, $x_2(t)$, $\theta(t)$]

Tali variabili sono funzioni del tempo e, prese nel loro insieme, definiscono **l'interfaccia esterna** del sistema.

Interfaccia interna ed esterna del sistema

$\{x_1(t), x_2(t), \theta(t)\}$
costituiscono l'interfaccia esterna del sistema

$T(t)$, tensione ai capi del filo
appartiene all'interfaccia interna

Descrittori del sistema

- I descrittori del sistema sono un sottoinsieme dei segnali dell'interfaccia esterna, eventualmente derivati (o sommati) a seconda delle grandezze di interesse.
- L'interfaccia esterna del sistema è costituita da $\{ x_1(t), x_2(t), \theta(t) \}$, ma il vincolo di moto solidale $R(-\Delta\theta) = \Delta x_1$ ci rivela che $x_1(t)$ è direttamente riconducibile a $\theta(t)$.

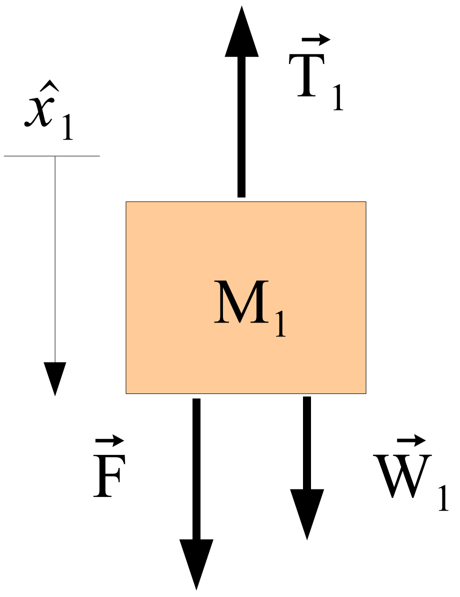
- L'interfaccia contiene solo due segnali indipendenti. Scegliamo come descrittori del sistema: $\{x_2(t), \theta(t)\}$

Il sistema di riferimento

Il modello assegnato specifica $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ positivi in $-\hat{k}$, con $\hat{x}_i$ versore associato al moto della massa M_i e $\hat{\theta}$ in senso orario, osservando il sistema verso la parete; in altre parole, secondo la regola della mano destra, $\hat{\theta}$ è un versore entrante nella parete.

Il sistema di riferimento assegnato deve essere indicato nei diagrammi a corpo libero relativi ad ogni elemento del sistema.

Diagrammi di corpo libero I: M_1



Agiscono:

forza di gravita' $\vec{W}_1 = M_1\, g\, \hat{x}_1$

forza esterna applicata $\vec{F} = F\, \hat{x}_1$

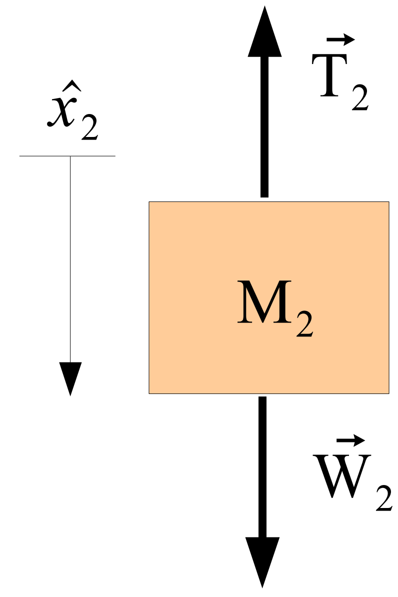
tensione del filo $\vec{T}_1 = T_1\, (-\hat{x}_1)$

Equazione del moto per l'elemento M_1:

$$\sum_{reali} \vec{F}_i = M_1\, \ddot{x}_1$$

$$\boxed{M_1\, g + F - T_1 = M_1\, \ddot{x}_1}$$

Diagrammi di corpo libero II: M_2



Agiscono:

forza di gravita' $\quad \vec{W}_2 = M_2\, g\, \hat{x}_2$

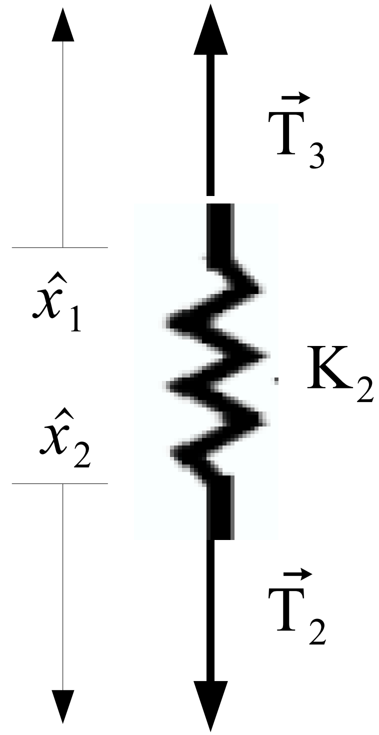
tensione del filo $\quad \vec{T}_2 = T_2\,(-\hat{x}_2)$

Equazione del moto per l'elemento M_2:

$$\sum_{reali} \vec{F}_i = M_2\, \ddot{x}_2$$

$$\boxed{M_2\, g - T_2 = M_2\, \ddot{x}_2}$$

Diagrammi di corpo libero III: K_2



Agisce la tensione del filo agli estremi:

lato inferiore $\quad \vec{T}_2 = T_2\,\hat{x}_2$

lato superiore $\quad \vec{T}_3 = T_3\,\hat{x}_1$

Equazione del moto per l'elemento K_2:

$$\sum_{reali} \vec{F}_i = M_{0+}\,a_{K2} = \vec{0} \quad \text{(ipotesi di massa nulla)}$$

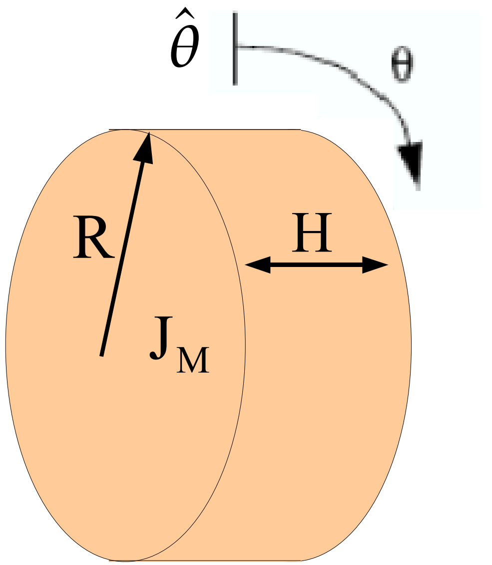
$$\vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad T_2\,\hat{x}_2 + T_3\,(-\hat{x}_2) = \vec{0}$$

$$\boxed{T_2 = T_3} \qquad \text{(vincolo su variabili interne)}$$

Equazione della deformazione per l'elemento K_2:

$$\boxed{T_2 = K_2\,(x_1 + x_2)}$$

Calcolo del momento d'inerzia



$$\mathbf{I_J} = \int_0^H \int_0^R r^2 dm = \int_0^H \int_0^R \rho\, r^2 dV =$$

$$= \rho \int_0^H \int_0^R r^2 (2\pi r)\, dr\, dh = (2\pi\rho) \int_0^H dh \int_0^R r^3 dr$$

$$= (2\pi\rho) \int_0^H dh \left[\frac{r^4}{4}\right]_{0,R} = 2\pi \frac{M}{(\pi R^2 H)} \frac{R^4}{4} H$$

$$= \frac{1}{2} M R^2$$

$$\boxed{I_J = \frac{1}{2} J R^2}$$

Diagrammi di corpo libero IV: K_1

Agiscono:

momento della tensione T_1 $\quad \vec{\tau}_1 = T_1 R(-\hat{\theta})$

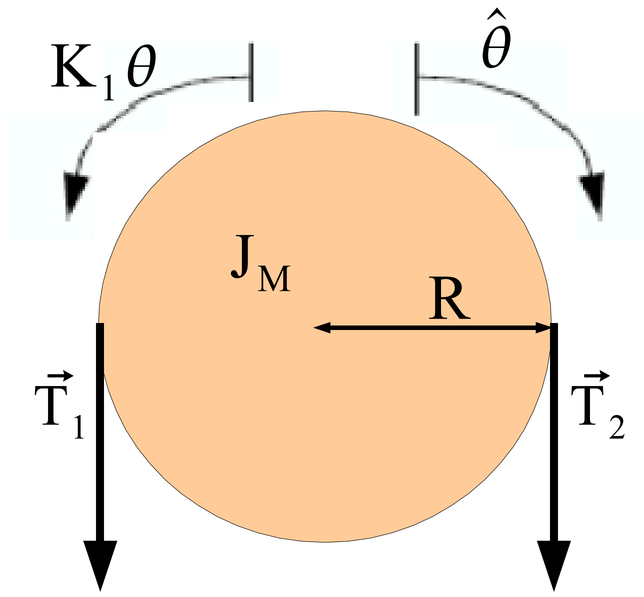
momento della tensione T_2 $\quad \vec{\tau}_2 = T_2 R \ \hat{\theta}$

reazione della molla rotazionale $\quad \vec{\tau}_{K1} = -K_1 \hat{\theta}$

Equazione del moto rotazionale per l'elemento J_M:

$$\sum_{reali} \vec{\tau}_i = I_J \ddot{\theta}$$

$$\boxed{-T_1 R + T_2 R - K_1 \theta = I_J \ddot{\theta}}$$



Osservazione

Salta subito all'occhio come nelle equazioni differenziali per le singole componenti del sistema non ci siano termini in $\dot{x}_2$ o in $\dot{\theta}$.
Ciò è giustificato dall'assenza di elementi che resistono alla velocità (smorzatori, attriti di mezzo, etc.).

In effetti,

le uniche forze in gioco sono conservative

Studio analitico

Approccio Analitico I

Partiamo dall'equazione del moto (traslazionale) per M_1 e per M_2 e dall'equazione del moto (rotazionale) per J_M, sfruttando subito i vincoli noti:

$$
\begin{aligned}
&\text{eq. moto } M_1: && M\ddot{x}_1 = F + Mg - T \\
&\quad \text{da cui ricaviamo T:} && T = F + Mg - M\ddot{x}_1 \\
&\text{eq. moto } M_2: && M\ddot{x}_2 = Mg - K_2(x_1 + x_2) \\
&\text{eq. moto } J_M: && I_J\ddot{\theta} = -TR + RK_2(x_1 + x_2) - K_1\theta
\end{aligned}
$$

Eliminiamo T dall'equazione per J_M usando l'espressione ricavata dall'equazione per M_2

Approccio Analitico II: sistema di equazioni differenziali in θ(t) e x_2(t)

$$\begin{cases} M\ddot{x}_2 = Mg - K_2(x_1 + x_2) \\ I_J\ddot{\theta} = -R(F + Mg - M\ddot{x}_1) + RK_2(x_1 + x_2) - K_1\theta \\ x_1 = -R\theta \;\;,\;\; \ddot{x}_1 = -R\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\ddot{x}_2 = Mg - K_2(x_2 - R\theta) \\ I_J\ddot{\theta} = -R(F + Mg) + RM(-R\ddot{\theta}) + RK_2(x_2 - R\theta) - K_1\theta \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} M\ddot{x}_2 + K_2 x_2 - RK_2\theta = Mg \\ (I_J + R^2M)\ddot{\theta} + (K_1 + R^2K_2)\theta - RK_2x_2 = -R(F + Mg) \end{cases}}$$

Approccio Analitico III: l'equazione per x_2

Siamo arrivati ad un sistema di due equazioni differenziali di ordine 2. Per poterne affrontare la soluzione analitica, dobbiamo prima ricavare equazioni differenziali di ordine 4 nelle sole $x_2(t)$ e $\theta(t)$. Isoliamo θ nella prima equazione, ne troviamo la derivata seconda e sostituiamo nella seconda equazione, per ottenere:

$$\boxed{\begin{aligned} M(I_J + R^2 M)\ x_2^{(iv)} &+ \\ (I_J K_2 + M K_1 + 2R^2 M K_2)\ x_2^{(ii)} &+ \\ K_1 K_2\ x_2^{(0)} &= \\ M g K_1 - R^2 F K_2 & \end{aligned}}$$

Approccio Analitico IV: soluzione per x_2

Procediamo a risolvere l'equazione differenziale:

- la funzione forzante è costante, perciò la soluzione particolare x_p è pure costante e si ricava da:

$$K_1 K_2 x_p = Mg K_1 - FR^2 K_2$$

$$\boxed{x_p = \left(\frac{Mg}{K_2} - \frac{FR^2}{K_1}\right)}$$

- il polinomio caratteristico può essere visto come un polinomio di secondo grado in λ^2, perciò cerchiamo prima il quadrato delle radici.

Approccio Analitico V: soluzione per x_2

Infatti, il polinomio caratteristico dell'equazione e' :

$$M(I_J+R^2 M)\lambda^4+(I_J K_2+MK_1+2R^2 MK_2)\lambda^2+K_1 K_2\lambda=0$$

Rinominando i coefficienti abbiamo:

$$\alpha\lambda^4+\beta\lambda^2+\gamma=0, \quad \text{ovvero } \alpha(\lambda^2)^2+\beta(\lambda^2)+\gamma=0$$

λ^2 si ottiene come: $(\lambda^2)_{1,2}=\dfrac{(-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{(2\alpha)}$

Tuttavia, c'e' una difficolta' evidente nello stabilire il segno del discriminante, che richiede un piccolo gioco di prestigio di raccoglimenti

Approccio Analitico VI: segno di λ^2

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$= (I_J K_2 + MK_1 + 2R^2 MK_2)^2 - 4K_1 K_2 M(I_J + R^2 M)$$

$$= (I_J K_2)^2 + 4(K_2 R^2 M)^2 + (M K_1)^2$$

$$+2(2 I_j K_2^2 R^2 M + K_1 K_2 I_J M + 2K_1 K_2 R^2 M^2)$$

$$-4(K_1 K_2 I_J M + K_1 K_2 R^2 M^2)$$

$$= (I_J K_2)^2 + 4(K_2 R^2 M)^2 + (M K_1)^2$$

$$+4(I_j K_2^2 R^2 M) - 2(K_1 K_2 I_J M)$$

che puo' essere visto come: (magia!)

$$= (I_J K_2 + 2K_2 R^2 M - M K_1)^2 + 4(K_1 K_2 R^2 M^2)$$

che e' garantito essere positivo perche' somma di quadrati e di prodotti di termini positivi

Approccio Analitico VII: segno di λ^2

Come conseguenza della positività di Δ, λ^2 è reale e quindi $\lambda^2{}_1$ e $\lambda^2{}_2$ sono due numeri reali distinti.

Visto che le radici del polinomio in λ^2 sono reali, possiamo applicare la regola di Cartesio: le due permanenze implicano che $\lambda^2{}_1$ e $\lambda^2{}_2$ sono entrambi negativi.

Perciò, i λ cercati per il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale sono 4 numeri *immaginari puri*.

Ora siamo in grado di ricavare i modi elementari del sistema.

Approccio Analitico VIII: modi elementari

Detti

$$\omega_1 = \sqrt{\left|\lambda_1^2\right|} \quad \text{e}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\left|\lambda_2^2\right|},$$

I modi elementari del sistema sono:

$$\mathbf{E} = \left\{ \cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t), \cos(\omega_2 t), \sin(\omega_2 t) \right\}$$

Discussione del risultato analitico: considerazioni energetiche

Nel sistema sono fisicamente presenti 5 elementi in grado di immagazzinare energia:

- K_1, K_2 (energia potenziale elastica)
- M_1, M_2 (energia meccanica: cinetica + potenziale)
- J_M (energia meccanica: cinetica)

L'energia potenziale dell'elemento M_1 si può ricavare a partire dall'energia potenziale di K_1, mentre l'energia cinetica di M_1 si può ricavare dall'energia cinetica di J_M.

Discussione del risultato analitico: considerazioni energetiche

Quindi, a fronte di 5 elementi in grado di immagazzinare energia, vi sono solo 4 elementi in grado di immagazzinarla in modo indipendente, quindi il sistema ha solo 4 gradi di libertà.

Il sistema, dunque, è correttamente rappresentabile da equazioni differenziali di ordine IV.

Le condizioni iniziali naturali sul sistema si riferiscono a ciascuno dei 4 termini di energia, e quindi si esprimono su:

$$\left\{\theta, \dot{\theta}, x_{2,} \dot{x}_2\right\} \text{ oppure } \left\{\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \ddot{x}_{2,} \dot{x}_2\right\}$$

Discussione del risultato analitico I: stabilità

Visto che per tutte le radici dell'equazione caratteristica vale $Re(\lambda) = 0$ e non ci sono radici multiple, il sistema è al limite di stabilità, quindi è da considerarsi instabile.

Tuttavia, un sistema fisico è sempre un sistema stabile rispetto a segnali correlati all'energia, quindi sembra esservi una discrepanza tra realtà e modello.

Discussione del risultato analitico II: stabilità

La questione si risolve ricordando che avevamo dichiarato trascurabili le forze di attrito.

Se considerati, i termini di attrito contribuiscono nella equazione per x_2 ad almeno un termine tra $\{D^3x_2(t)\ ,\ D^1x_2(t)\}$

Tali termini portano a soluzioni con parte reale negativa che, per quanto piccola in valore assoluto, garantiscono la stabilità del sistema.

Discussione del risultato analitico III: risposta ad ingressi limitati

Da notare anche che la risposta del sistema a $F(t)=F$ (ingresso forzante costante e limitato) è limitata, perché combinazione lineare di modi elementari tutti limitati.

Se invece il sistema fosse soggetto ad un ingresso forzante limitato e oscillante, la risposta non sarebbe più sempre limitata.

Discussione del risultato analitico IV: risposta ad ingressi limitati

Definendo l'ingresso oscillante come :

$$F_n = F + A\sin(\omega_f t + \phi)$$

sotto il vincolo $F > A$,

se $\omega_f = \omega_1$ o $\omega_f = \omega_2$, si osserva una componente della risposta del tipo: $t\sin(\omega_f t)$ o $t\cos(\omega_f t)$, che e' chiaramente non limitata.

Vale la pena sottolineare questo punto perche' F_n e' certamente compreso tra $F_{min} = F - |A|$ e $F_{max} = F + |A|$, che portano entrambi ad un comportamento limitato.

Discussione del risultato analitico V: risonanza

Il fenomeno appena evidenziato è dovuto alla risonanza tra il segnale in ingresso e gli oscillatori "virtuali" del sistema, che hanno pulsazione ω_1 e ω_2.

Si nota che ω_1 e ω_2 non dipendono solo da K_1 e K_2, ma da tutti i parametri del sistema, nessuno escluso. Qui troviamo conferma che il sistema "eredita" le tipologie di comportamento indotte dalla presenza di K_1 e K_2, ma non le riconduce ad un unico componente fisico.

Soluzione analitica I:

Ritornando alla soluzione analitica per $x_2(t)$, abbiamo fin qui ottenuto:

$$x_2(t)=c_1\cos(\omega_1 t)+c_2\sin(\omega_1 t)+c_3\cos(\omega_2 t)+ c_4\sin(\omega_2 t)+\left(\frac{Mg}{K_2}-\frac{FR^2}{K_1}\right)$$

Ora e' necessario imporre le condizioni iniziali sul sistema, che consideriamo inizialmente a riposo per x_2.

$$\text{C.I. :}\quad D^i x_2(t)=0 \quad \text{per } i\in\{0\ldots3\}$$

Soluzione analitica II:

$$
\begin{cases}
c_1 + c_3 + x_p = 0 \\
-c_1\omega_1^2 - c_3\omega_2^2 = 0 \\
c_2\omega_1 + c_4\omega_2 = 0 \\
-c_2\omega_1^3 - c_4\omega_2^3 = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
c_1 = \dfrac{\omega_2^2 x_p}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \\
c_2 = 0 \\
c_3 = \dfrac{-\omega_1^2 x_p}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \\
c_4 = 0
\end{cases}
$$

Ora $x_2(\mathrm{t})$ e' completamente noto e $\ddot{x}_2(\mathrm{t})$ e' facilmente determinabile per doppia derivazione.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_2(t) = & -\omega_1 c_1 \sin(\omega_1 t) + \omega_1 c_2 \cos(\omega_1 \mathrm{t}) \\
& -\omega_2 c_3 \sin(\omega_2 \mathrm{t}) + \omega_2 c_4 \cos(\omega_2 \mathrm{t})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_2(t) = & -\omega_1^2 c_1 \cos(\omega_1 t) - \omega_1^2 c_2 \sin(\omega_1 \mathrm{t}) \\
& -\omega_2^2 c_3 \cos(\omega_2 \mathrm{t}) - \omega_2^2 c_4 \sin(\omega_2 \mathrm{t})
\end{aligned}
$$

Soluzione analitica III: soluzione per θ

A questo punto siamo in grado di risolvere per θ l'equazione $K_2 x_2 + M \ddot{x}_2 - RK_2 \theta = Mg$ ricavando:

$$\theta(t) = \frac{K_2 - M\omega_1^2}{RK_2}\left(c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)\right) + \frac{K_2 - M\omega_2^2}{RK_2}\left(c_3 \cos(\omega_2 t) + c_4 \sin(\omega_2 t)\right) - \frac{RF}{K_1}$$

In questa forma $\theta(t)$ risulta completamente specificato. Tuttavia, questa forma non si presta alla risoluzione per via numerica, quindi e' necessario derivare un'equazione di ordine 4 anche per $\theta(t)$, come fatto per $x_2(t)$.

Soluzione analitica IV: equazione per θ

Ripartiamo dal sistema di equazioni differenziali di ordine 2, isolando questa volta x_2 nella seconda equazione; ne troviamo la derivata seconda e sostituiamo nella prima equazione, per ottenere:

$$M\left(\frac{I_J+R^2M}{RK_2}\right)\theta^{(iv)}+\left(\frac{I_J}{R}+\frac{MK_1}{RK_2}+2RM\right)\theta^{(ii)}+\frac{K_1}{R}\theta^{(0)}=-F$$

Sebbene questa sia una forma per θ(t) che si presta alla risoluzione numerica, le condizioni iniziali su θ devono comunque essere ricavate dalla forma precedente.

Soluzione analitica V: CI per θ

$$\theta(0)=c_1\left(\frac{K_2-M\omega_1^2}{RK_2}\right)+c_3\left(\frac{K_2-M\omega_2^2}{RK_2}\right)-\frac{RF}{K_1}$$

$$\dot{\theta}(0)=0$$

$$\ddot{\theta}(0)=-\omega_1^2c_1\left(\frac{K_2-M\omega_1^2}{RK_2}\right)-\omega_2^2c_3\left(\frac{K_2-M\omega_2^2}{RK_2}\right)$$

$$\dddot{\theta}(0)=0$$

Questo passaggio è ulteriore conferma che le C.I. su θ dipendono da quelle scelte per x_2. Quindi *non* possiamo imporre condizioni iniziali tutte nulle per θ, anche se verrebbe quasi naturale.

Precauzioni I: applicabilità del modello

Prima di procedere alla stima numerica, è bene ricordarsi che le equazioni descrittive di un sistema fisico effettivamente descrivono il suo comportamento solo in determinati intervalli.

Per controllare se ci troviamo entro le condizioni di applicabilità, dobbiamo chiederci quali sono le possibili fonti di comportamento “a soglia”, ovvero momenti critici in cui possono cambiare le *leggi* del sistema.

Precauzioni II: applicabilità del modello

Gli assunti sul sistema che abbiamo dichiarato in fase di analisi equivalgono ad una effettiva linearizzazione delle equazioni, visto che abbiamo

- linearizzato la risposta delle molle (Hooke)
- dichiarato tracurabili attriti proporzionali a $v^2(t)$

Siamo al riparo da cambiamenti di leggi dovuti alla non-linearità del sistema. Rimane un'unica potenziale fonte di comportamento di soglia, che è la tensione T.

Precauzioni III: applicabilità del modello

Visto che i cavi non trasmettono forze di compressione, se $T(t) < 0$ per qualche t_i dobbiamo riscrivere per gli intervalli $[t_i, t_i + \Delta t)$ le equazioni del sistema.

$x_2(t)$ e $\theta(t)$ sarebbero funzioni definite a tratti come soluzione di equazioni differenziali diverse. I valori nell'estremo destro di ogni intervallo sarebbero da considerarsi come condizioni iniziali delle equazioni per l'intervallo successivo.

Precauzioni IV: equazione per la tensione

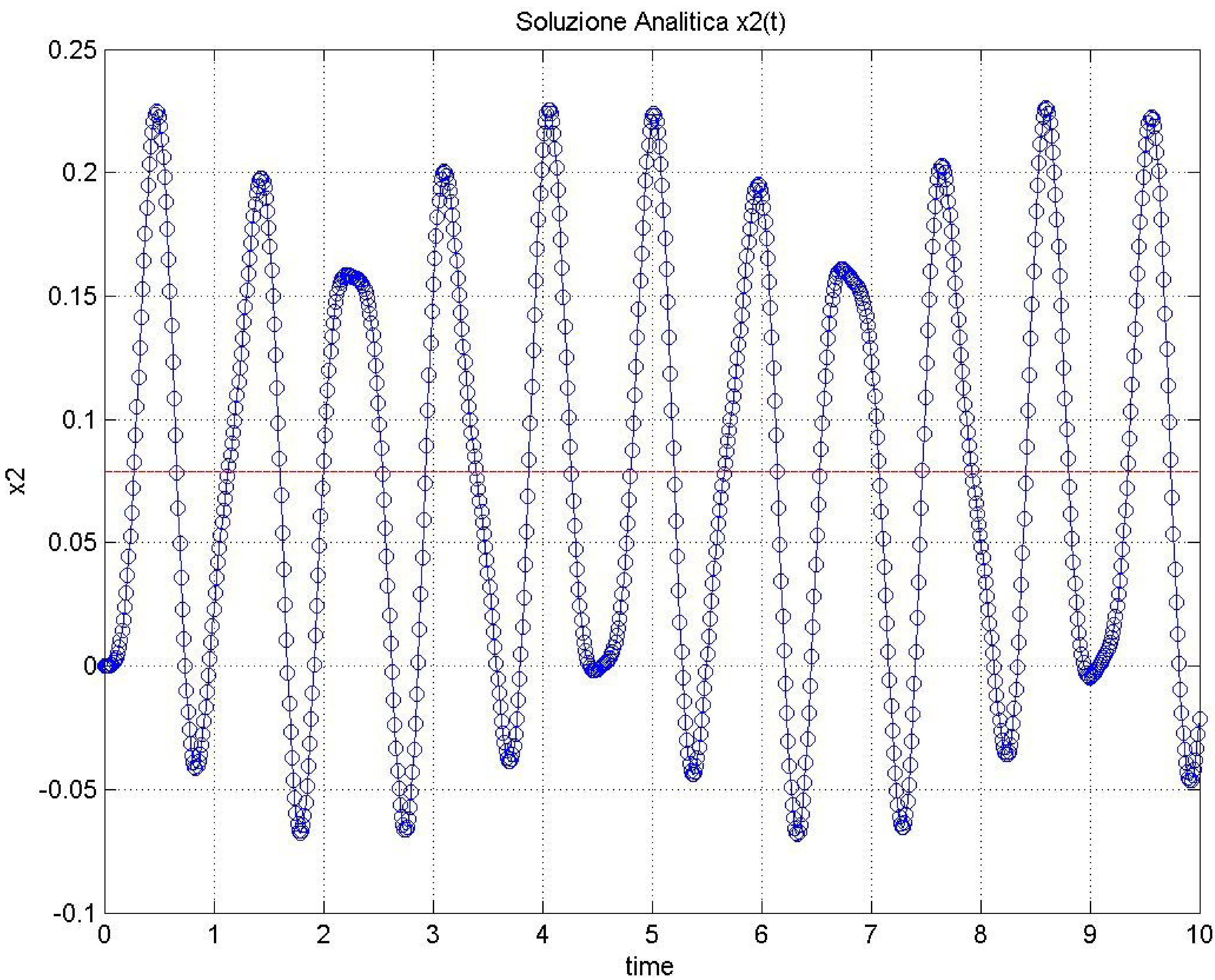
Dal procedimento risolutivo per le equazioni differenziali del sistema, recuperiamo il legame tra T e θ; giungiamo ad un'equazione che possiamo valutare numericamente per verificare che il nostro modello effettivamente corrisponda al sistema.

$$T = F + Mg - M\ddot{x}_1 = F + Mg - M(-R\ddot{\theta}) = F + Mg + RM\ddot{\theta}$$

$$\boxed{T = F + Mg + RM\ddot{\theta}}$$

Grafici

(studio analitico)


Soluzione Analitica x2(t)
x2
time
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Leggere il grafico: soluzione analitica per x_2

In rosso è evidenziata la componente non oscillante della risposta (componente in continua).

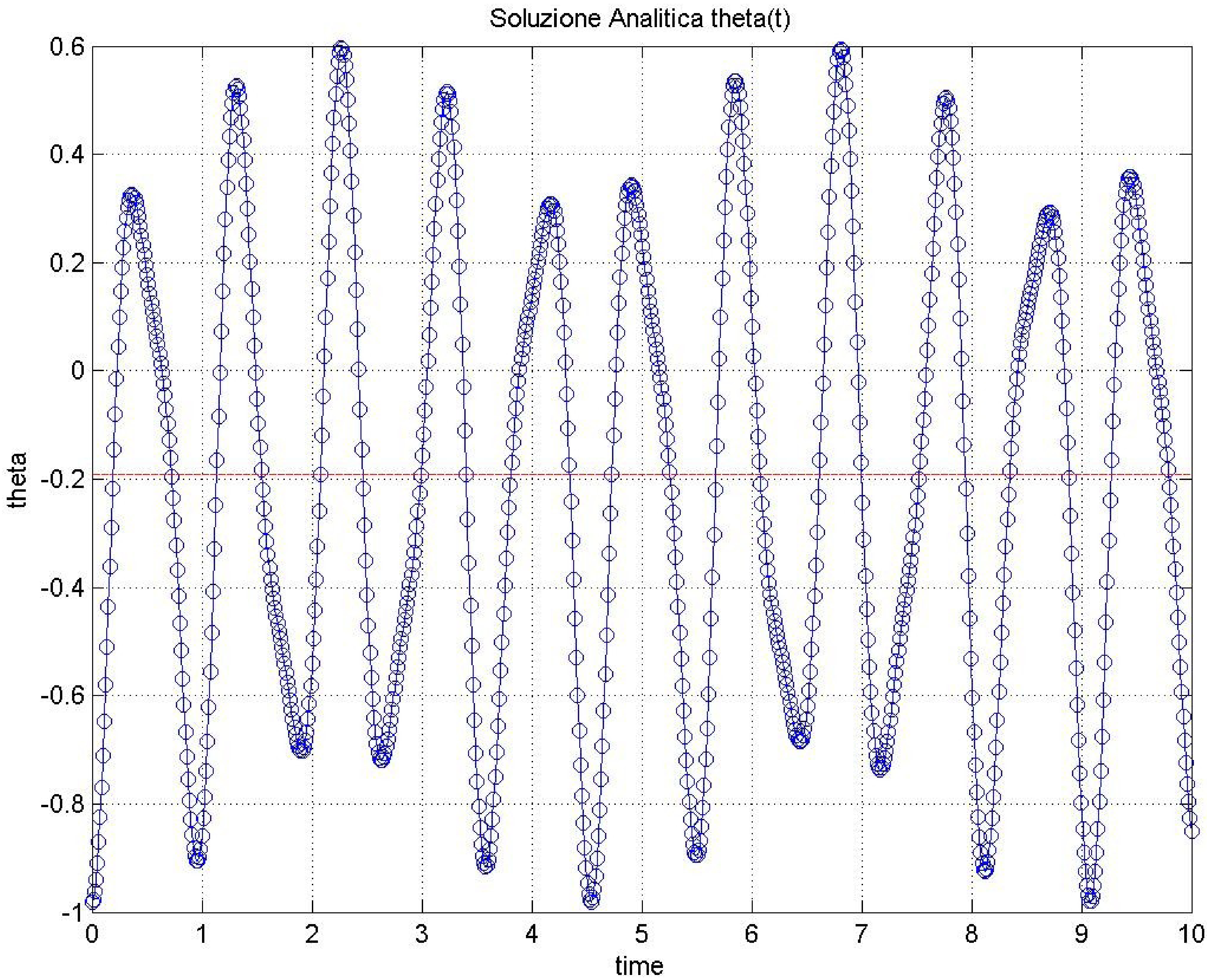
Si nota subito che la funzione è periodica. Un'occhiata al grafico ci dà una stima di circa 4.5 per il periodo.

Ci dobbiamo chiedere come ricondurre questa periodicità alla nostra analisi teorica, per verificare se i risultati numerici sono plausibili.

Leggere il grafico: soluzione analitica per x_2

La soluzione analitica delle equazioni aveva messo in luce che la risposta è riconducibile alla combinazione di sinusoidi e cosinusoidi di pulsazione ω_1 e ω_2.

Le pulsazioni caratteristiche del sistema sono valutate dallo script, e corrispondono a periodi di circa 0.9 e 0.5. Il rapporto dei periodi è $T_1/T_2 \approx 9/5$ e il periodo della funzione è $5T_1$ o $9T_2$, cioè circa 4.5, come evidente dal grafico.

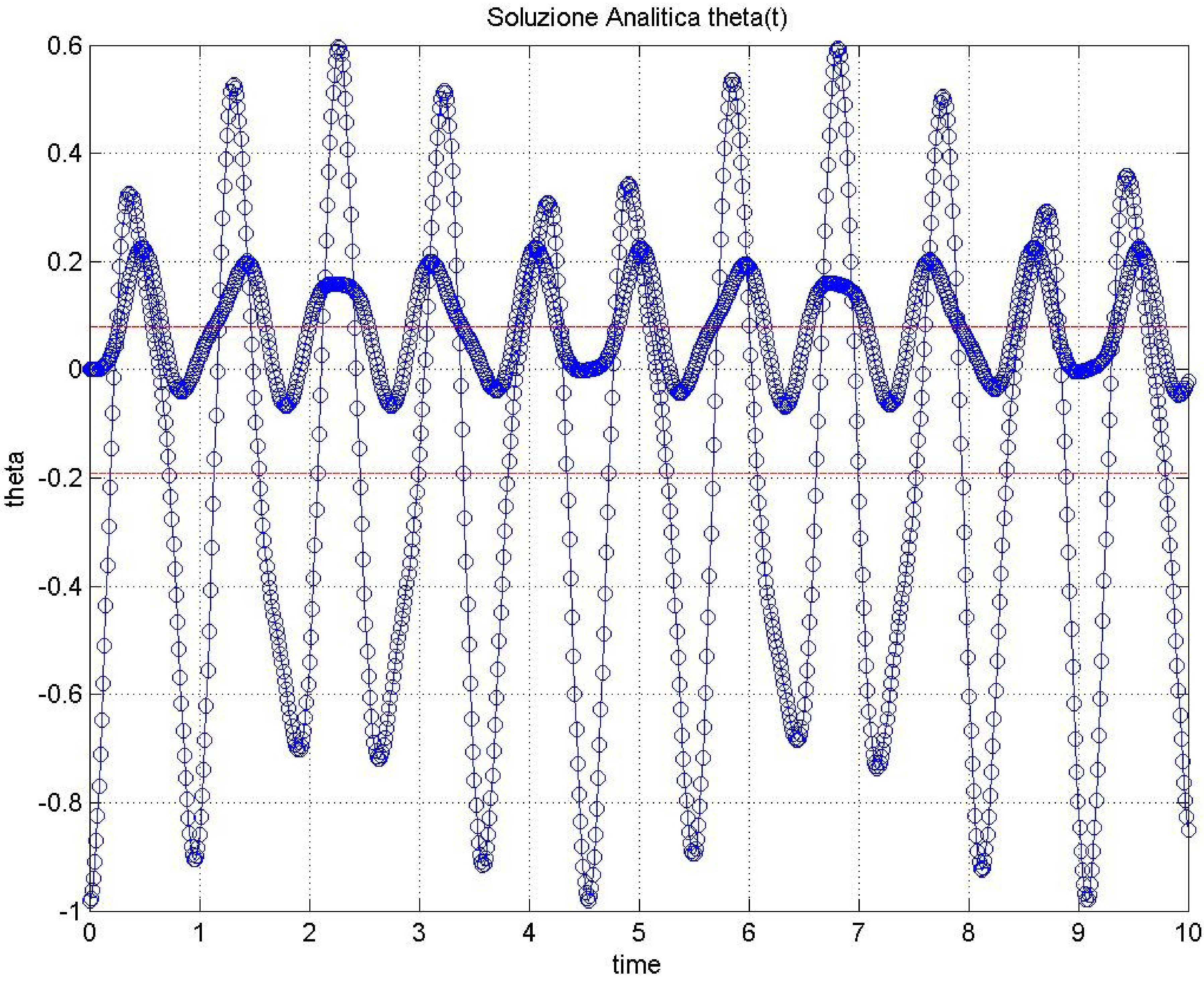

Soluzione Analitica theta(t)
theta
time
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Leggere il grafico: soluzione analitica per θ

In rosso è evidenziata la componente non oscillante della risposta (componente in continua).

Si nota che la funzione è periodica di periodo circa 4.5, ed in questo segue perfettamente l'andamento di $x_2(t)$.

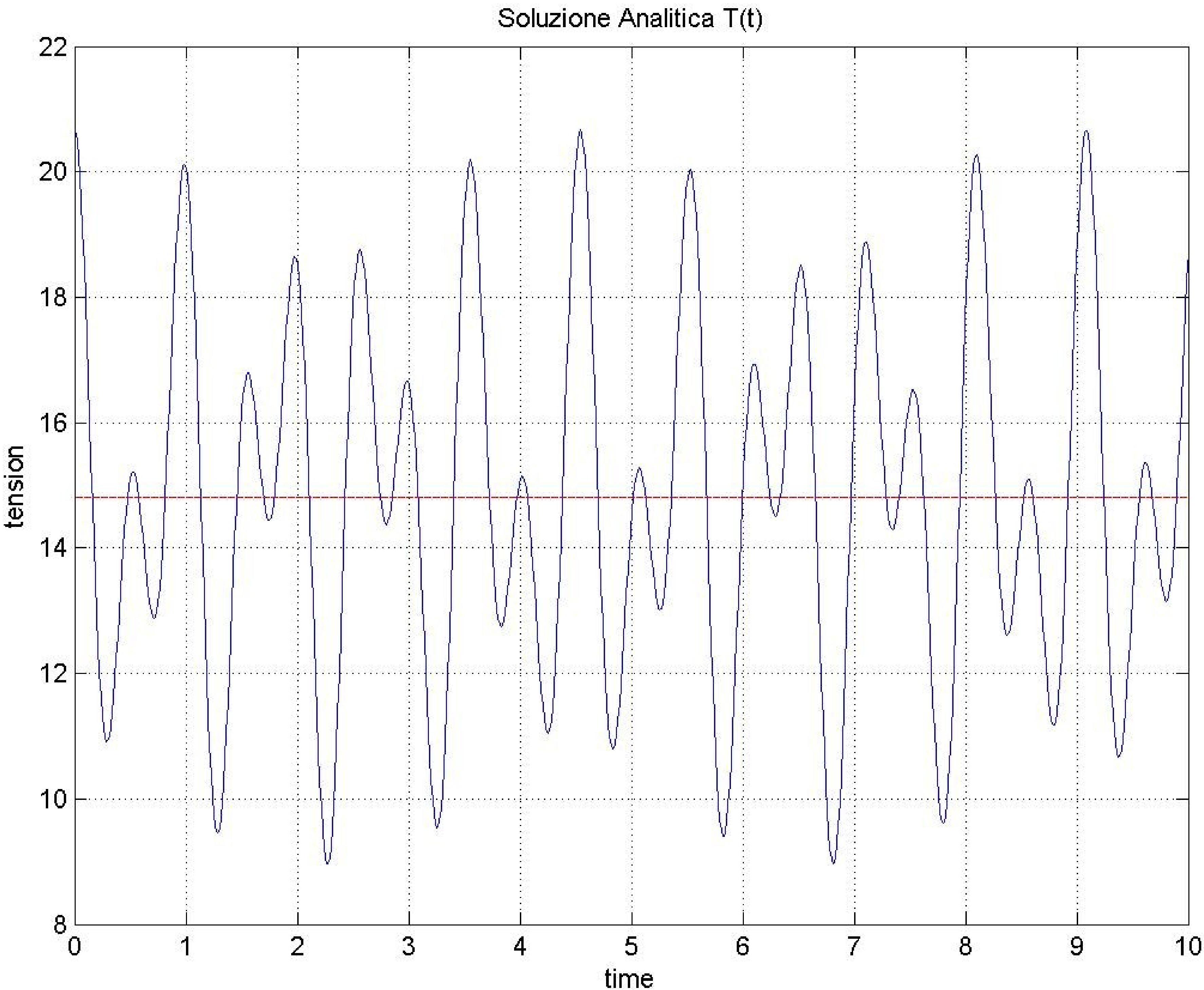
L'andamento dei minimi relativi è speculare rispetto a quello dei minimi relativi di x_2, ma segue una sinusoide con la stessa frequenza.


Soluzione Analitica theta(t)
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
theta
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
time

Leggere il grafico: $\theta(t)$ e $x_2(t)$ a confronto

Oltre alla corrispondenza in periodicità tra $x_2(t)$ e $\theta(t)$, si nota che nel corso del periodo fondamentale (di 4.5), i massimi relativi per $\theta(t)$, prima anticipano e poi ritardano i massimi relativi per x_2. Questo comportamento è coerente con l'interpretazione della molla coassiale come elemento di ritardo.

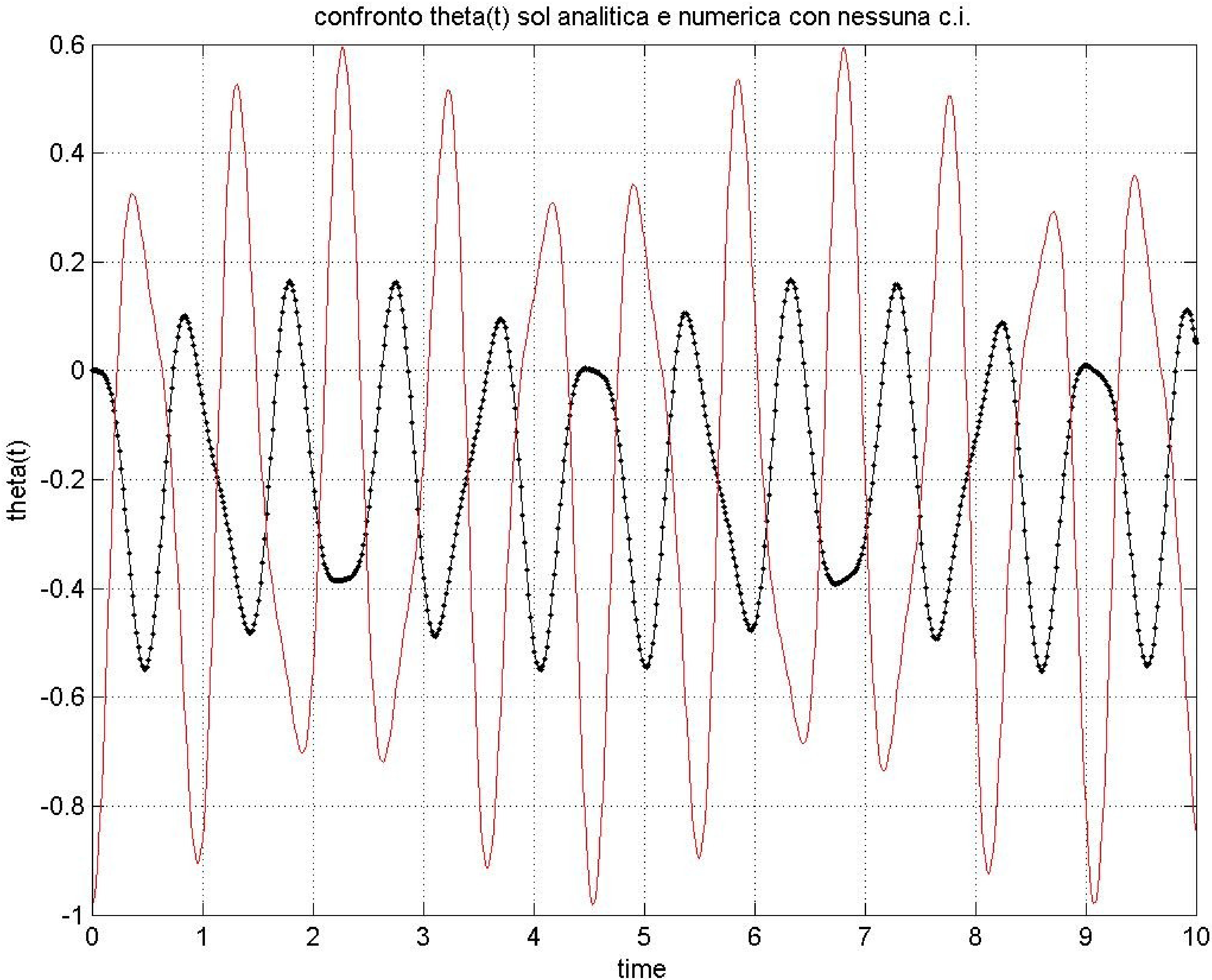
Si nota anche che l'andamento relativo dei massimi oscilla “a pendolo”, passando più tempo in uno stato di piccoli ritardi rispetto a forti ritardi/anticipi.


Soluzione Analitica T(t)
22
20
18
16
14
12
10
8
tension
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
time

Leggere il grafico: l'andamento della tensione

La rilevanza di questo grafico sta solo nell'intervallo di valori assunti, dato che la tensione appartiene all'interfaccia interna del sistema.

La tensione assume valori tutti abbondantemente positivi, per cui il comportamento descritto dal sistema di equazioni differenziali individuato è valido su tutto il dominio.

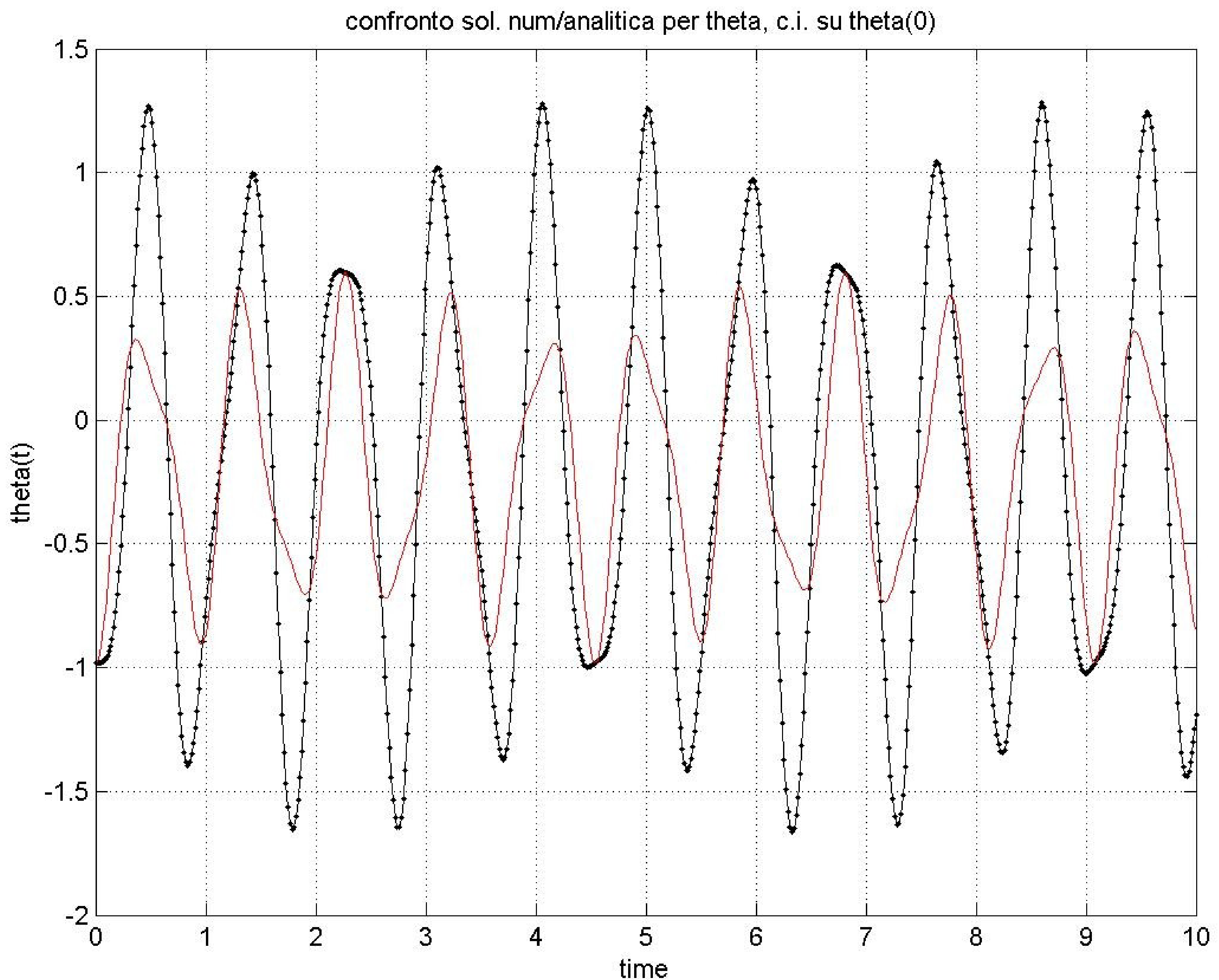

confronto theta(t) sol analitica e numerica con nessuna c.i.
theta(t)
time
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Leggere il grafico: $\theta(t)$ – soluzioni a confronto

In rosso la soluzione analitica per $\theta(t)$, in nero la soluzione numerica RK4 a partire da condizioni iniziali su $\theta^{(i)}(t)$ tutte a zero.

Si nota un pessimo accordo delle due funzioni.

La soluzione numerica sembra catturare solo le caratteristiche di periodicità di $\theta(t)$, e risulta fuori fase di π. L'ampiezza delle oscillazioni non raggiunge mai l'ampiezza massima di $\theta(t)$, e ciò è indice che non sono stati inclusi alcuni termini di energia.


confronto sol. num/analitica per theta, c.i. su theta(0)
theta(t)
time
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Leggere il grafico: θ(t) – soluzioni a confronto

In rosso la soluzione analitica per $\theta(t)$, in nero la soluzione numerica RK4 a partire da condizioni iniziali su $\theta^{(i)}(t)$ tutte a zero eccetto $\theta^{0}(t)$.

Si nota un grande miglioramento dell'accordo delle due funzioni rispetto al grafico precedente.

La soluzione numerica cattura sia le caratteristiche di periodicità di $\theta(t)$ che la fase. L'ampiezza risulta superiore a quella della soluzione analitica; ciò è dovuto al non aver considerato le CI sulle derivate superiori, che portano a “frenare” un po' l'oscillazione del sistema.

Leggere il grafico: θ(t) – soluzioni a confronto

La condizione mancante è sulle derivate superiori all'estremo sinistro dell'intervallo, poiché l'ampiezza dell'oscillazione (come per la soluzione analitica) rimane costante.

Quindi, bastano condizioni puntuali in un punto (lo zero) per determinare l'ampiezza corretta, che viene poi mantenuta, data la natura non smorzata del sistema