

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

25 Febbraio 2013

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	20	
problema 2	10	
totale	30	

1. Si consideri un impianto G con $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma_{uc} = \{b\}$, $L(G) = \overline{a^*ba^*}$ (cioe' il linguaggio ottenuto dai prefissi delle stringhe dell'espressione regolare a^*ba^*), $L_m(G) = a^*ba^*$.

Si supponga che la specifica definita dal linguaggio marcato desiderato sia $K = \{a^kba^k, k \geq 0\} \subseteq L_m(G)$, cioe' si richiede che l'impianto controllato riconosca solo quelle stringhe con un numero uguale di a che precedono e seguono un unico b .

- (a) Il linguaggio K e' controllabile? Si enunci la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si applichi al caso.

Traccia di soluzione

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E , con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K e' controllabile rispetto a M e E_{uc} , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

[equivalente a $\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$]

Per la definizione di controllabilita', si ha che K e' controllabile se e solo se \overline{K} e' controllabile. Abbiamo dimostrato in un precedente esercizio che \overline{K} e' controllabile.

[L'argomento usato per il linguaggio $K = \overline{\{a^kba^k, k \geq 0\}} \subseteq L(G)$ era il seguente.

Si applichi la definizione al nostro esempio dove $M = L(G)$. Si consideri una stringa $s \in \overline{K} = K$,

- se $s = a^*$ e quindi $s\sigma = sb = a^*b \in L(G)$ allora $s\sigma = sb \in \overline{K}$, altrimenti
- se $s \neq a^*$ allora $s\sigma = sb \notin L(G)$ (cioe' se s deve essere della forma $s = a^kba^l$ ($k \geq l$) e quindi $sb = a^kba^lb \notin L(G)$, poiche' le parole in $L(G)$ non possono contenere un secondo evento b dopo il primo).

Percio' non esiste una stringa $s \in \overline{K}$ tale che $s\sigma = sb \in L(G) \setminus \overline{K}$, cioe' K e' controllabile.]

In modo equivalente si puo' rispondere alla domanda verificando se e' soddisfatta la disuguaglianza

$$\overline{K}\Sigma_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}.$$

Osservando che

$$\overline{K} = \{a^k, a^k b a^l, k \geq l \geq 0\}$$

(si noti che $a^k b$ e' un caso speciale di $a^k b a^l$ per $l = 0$),

$$\overline{K}\Sigma_{uc} = \{a^k b, a^k b a^l b, k \geq l \geq 0\},$$

$$M = L(G) = \{a^k, a^k b a^l, k \geq 0, l \geq 0\}$$

(si noti che $a^k b$ e' un caso speciale di $a^k b a^l$ per $l = 0$),

$$\overline{K}\Sigma_{uc} \cap M = \{a^k b, k \geq 0\},$$

si deduce che

$$\overline{K}\Sigma_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}.$$

(b) Dati la specifica K e il linguaggio dell'impianto $L_m(G)$ (con $K \subseteq L_m(G)$), si definisca la proprieta' della chiusura di K rispetto a $L_m(G)$, ovvero la $L_m(G)$ -chiusura di K .

Si verifichi se K soddisfa la proprieta' di $L_m(G)$ -chiusura per K e $L_m(G)$ definiti al punto 1.

Traccia di soluzione.

K soddisfa la proprieta' di $L_m(G)$ -chiusura se e solo se

$$K = \overline{K} \cap L_m(G).$$

Per K e $L_m(G)$ definiti al punto 1 non si ha la proprieta' di $L_m(G)$ -chiusura; ad esempio la stringa

$$ab \in \overline{K} \cap L_m(G) \setminus K,$$

cioe' $K \not\subseteq \overline{K} \cap L_m(G)$ e cosi' $K \neq \overline{K} \cap L_m(G)$ (si ha sempre che $K \subseteq \overline{K} \cap L_m(G)$, poiche' $K \subseteq \overline{K}$ e $K \subseteq L_m(G)$).

In modo equivalente si puo' calcolare

$$\begin{aligned} \overline{K} \cap L_m(G) &= \{a^k, a^k b a^l, k \geq l \geq 0\} \cap \{a^k b a^l, k \geq 0, l \geq 0\} = \\ &= \{a^k b a^l, k \geq l \geq 0\} \neq \{a^k b a^k, k \geq 0\} = K. \end{aligned}$$

- (c) Dato un linguaggio $K \subseteq L_m(G)$, si puo' dimostrare che il sottolinguaggio supremo che soddisfa la proprieta' di $L_m(G)$ -chiusura. denotato da $K^{\uparrow RC}$, esiste e vale

$$K^{\uparrow RC} = K \setminus [(L_m(G) \setminus K)\Sigma^*].$$

Si calcoli $K^{\uparrow RC}$ per K e $L_m(G)$ definiti al punto 1.

Traccia di soluzione.

Sappiamo dal punto precedente che K non e' $L_m(G)$ -chiuso.

Siano $k \geq 0, l \geq 0$.

$$L_m(G) \setminus K = \{a^*ba^*\} \setminus K = \{a^kba^l, k \geq 0, l \geq 0\} \setminus K = (\{a^kba^l, k = l\} \cup \{a^kba^l, k \neq l\}) \setminus \{a^kba^l, k = l\} = \{a^kba^l, k \neq l\}.$$

Da cui $(L_m(G) \setminus K)\Sigma^* = \{a^kba^l, k \neq l\}\{a, b\}^* \supset \{a^kba^l, k = l\} \setminus \{b\} = K \setminus b$. Percio' $K^{\uparrow RC} = K \setminus (K \setminus b) = \{b\}$.

Si noti che $\{a^kba^l, k \neq l\}\{a, b\}^*$ potrebbe contenere la stringa b se e solo se $b \in \{a^kba^l, k \neq l\}$ poiche' $\epsilon \in \{a, b\}^*$, oppure $\epsilon \in \{a^kba^l, k \neq l\}$ poiche' $b \in \{a, b\}^*$, ma si ha $b \notin \{a^kba^l, k \neq l\}, \epsilon \notin \{a^kba^l, k \neq l\}$.

- (d) Dato un linguaggio $K \subseteq L_m(G)$, si puo' dimostrare che il sovralinguaggio infimo che soddisfa la proprieta' di $L_m(G)$ -chiusura, denotato da $K^{\downarrow RC}$, esiste e vale

$$K^{\downarrow RC} = \overline{K} \cap L_m(G).$$

Si calcoli $K^{\downarrow RC}$ per K e $L_m(G)$ definiti al punto 1.

Traccia di soluzione.

$$\overline{K} \cap L_m(G) = \overline{\{a^k b a^k, k \geq 0\}} \cap \{a^* b a^*\} = \{a^k b a^l, k \geq l \geq 0\},$$

percio' $K^{\downarrow RC} = \{a^k b a^l, k \geq l \geq 0\}$.

Si noti che

$\overline{\{a^k b a^k, k \geq 0\}} = \{\epsilon, b, a, ab, aba, aa, aab, aaba, aabaa, aaa, aaab, aaaba, aaabaa, aaabaaa, \dots\}$ e che l'intersezione con $\{a^* b a^*\}$ elimina le stringhe del tipo $\{a^*\}$.

2. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i , $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j .

Si consideri la rete di Petri P_{g419} definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{t_1, t_2\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_1), (p_3, t_2), (t_1, p_3), (t_2, p_1), (t_2, p_2)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$

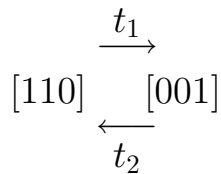
Sia $x_0 = [1, 1, 0]$ la marcatura iniziale.

- (a) Si disegni il grafo della rete di Petri P_{g419} .

Si disegni il grafo di raggiungibilita' della rete di Petri P_{g419} .

Traccia di soluzione.

Il grafo di raggiungibilita' e':



(b) Si enunci la definizione di rete di Petri strettamente conservativa.

La rete di Petri P_{g419} e' strettamente conservativa ? Si giustifichi la risposta.

Traccia di soluzione.

Una rete marcata e' strettamente conservativa se per ogni marcatura raggiungibile e' invariata la somma del numero di gettoni.

La rete di Petri P_{g419} non e' strettamente conservativa (in una marcatura ha due gettoni, nell'altra ne ha uno solo).

(c) Si enunci la definizione di rete di Petri conservativa.

La rete di Petri P_{g419} e' conservativa ? Si giustifichi la risposta.

Traccia di soluzione.

Una rete marcata e' conservativa se esiste un vettore di interi positivi $x \in N_+^m$ tale che per ogni marcatura raggiungibile e' invariata la somma pesata tramite x del numero di gettoni ($x^T.M = x^T.M_0$, con M_0 marcatura iniziale e M marcatura generica raggiungibile da quella iniziale).

La rete di Petri P_{g419} e' conservativa con il vettore $x = [112]^T$.

(d) Si enunci la definizione di rete di Petri limitata.

La rete di Petri P_{g419} e' limitata ? Si giustifichi la risposta.

Traccia di soluzione.

Un posto di una rete marcata e' limitato se esiste un intero $k \geq 0$ tale che, per ogni marcatura raggiungibile, il numero di gettoni del posto e' $\leq k$.

Una rete marcata e' limitata se ogni posto e' limitato.

La rete di Petri P_{g419} e' limitata (ogni posto puo' avere al massimo un gettone).

(e) Si consideri la seguente affermazione:

Una rete di Petri conservativa e' limitata.

E' giusta o sbagliata ? Se e' giusta si dia un argomento per sostenerla, se e' sbagliata si dia un controesempio.

Traccia di soluzione.

Una rete marcata conservativa e' limitata. Infatti esiste il vettore $x \in N_+^m$ tale che per ogni marcatura raggiungibile M vale $\sum_{i=1}^m x_i M(p_i) = x^T \cdot M = x^T \cdot M_0$, e quindi per ogni i vale $x_i M(p_i) \leq x^T \cdot M_0$ e $M(p_i) \leq \frac{x^T \cdot M_0}{x_i}$, per cui il posto p_i e' k -limitato con $k = \lfloor \frac{x^T \cdot M_0}{x_i} \rfloor$.

(f) Si consideri la seguente affermazione:

Una rete di Petri limitata e' conservativa.

E' giusta o sbagliata ? Se e' giusta si dia un argomento per sostenerla, se e' sbagliata si dia un controesempio.

Traccia di soluzione.

Ci sono reti limitate che non sono conservative. Ad esempio, si consideri la rete costituita da un solo posto p con un gettone e un solo arco uscente da p alla transizione t senza archi in uscita da t . L'insieme di raggiungibilita' ha due marcature: $[1]$, $[0]$, e percio' per qualsiasi intero positivo x si ha $0 = x.0 \neq x.1 = x$.