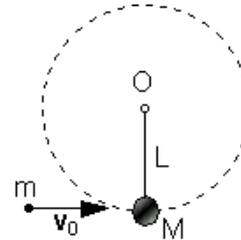


## Dinamica dei sistemi di punti materiali: urti tra particelle libere e/o vincolate.

### A) Urti completamente anelastici:

**Problema n. 1:** Un proiettile di massa  $m = 0.1$  kg sparato da un fucile impatta con velocità  $v_0$  diretta orizzontalmente contro un corpo di massa  $M = 0.9$  kg, inizialmente in quiete, conficcandosi istantaneamente in esso (urto completamente anelastico). Assumendo che la massa  $M$  sia appesa all'estremità libera di un filo ideale di lunghezza  $L = 0.8$  m avente l'altra estremità impernata ad un punto fisso  $O$  del piano verticale, si determini:

- il valore minimo di  $v_0$  affinché il sistema, dopo l'urto, riesca a fare un giro completo attorno al punto  $O$ ;
- l'energia dissipata nell'urto, in corrispondenza a tale valore di  $v_0$ ;
- la tensione  $T$  del filo immediatamente dopo l'urto.



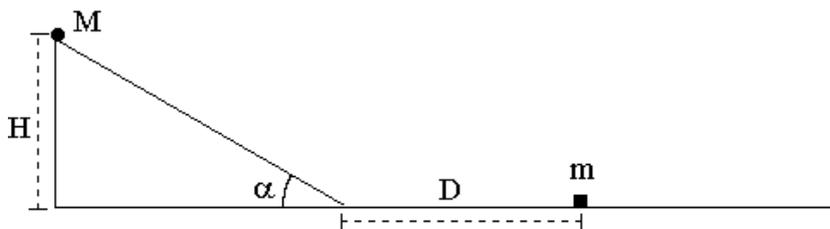
**Problema n. 2:** Un blocco di acciaio, assimilabile ad un corpo puntiforme, di massa  $M = 100$  kg è appoggiato su un piano inclinato di  $\alpha = 30^\circ$  rispetto all'orizzontale. I coefficienti di attrito statico e dinamico fra il blocco e il piano sono  $\mu_s = 0.4$  e  $\mu_d = 0.2$ , rispettivamente. Il corpo, inizialmente mantenuto in quiete ad un'altezza  $H = 3.2$  m rispetto al piano orizzontale, viene lasciato libero di muoversi lungo il piano inclinato scabro con velocità iniziale nulla. Calcolare:

- il lavoro delle singole forze agenti sul blocco dopo che esso si è spostato lungo il piano inclinato, fino a raggiungere la sua base;
- il modulo della velocità del blocco quando raggiunge la base del piano inclinato
- il tempo impiegato a raggiungere tale posizione.

Supponendo che il blocco prosegua il suo moto lungo il piano orizzontale scabro (con coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d = 0.2$ ), e che dopo aver percorso una distanza  $D = 3.55$  m su di esso urti centralmente un carrello, pure assimilabile a un corpo puntiforme, di massa  $m = 40$  kg che sta viaggiando con velocità  $v = 2.5$   $\text{ms}^{-1}$  nella stessa direzione del blocco ma in verso opposto. Supponendo che i due corpi dopo l'urto rimangano attaccati l'uno all'altro, determinare:

- l'energia cinetica interna del sistema nell'istante immediatamente precedente l'urto;
- il vettore velocità del centro di massa  $\mathbf{V}_{CM}$  del sistema dopo immediatamente dopo l'urto;
- il lavoro delle forze interne al sistema durante urto;
- lo spostamento due corpi, rispetto al punto di collisione, percorso sul piano orizzontale prima di fermarsi.

**N.B.:** Si assuma che il raccordo tra piano inclinato e piano orizzontale avvenga tramite un profilo curvo privo di spigoli.



**Problema n. 3:** Una sferetta di massa  $m = 100 \text{ g}$  e dimensioni trascurabili, posta in quiete su un piano orizzontale privo di attrito, è appoggiata all'estremità libera di una molla, avente l'altra estremità fissata ad una parete verticale fissa, di costante elastica  $k = 120 \text{ N/m}$ , inizialmente compressa di  $2 \text{ cm}$  rispetto alla sua lunghezza di riposo. Una seconda sferetta, identica alla prima, si trova pure essa in quiete e a contatto del piano orizzontale, essendo appesa ad un filo inestensibile, di lunghezza  $1.5 \text{ m}$  e di massa trascurabile, che pende verticalmente da un piolo fisso. All'istante  $t=0$  la molla viene lasciata espandere e la prima sferetta, in seguito all'impulso subito durante l'espansione della molla, si muove lungo il piano orizzontale, perfettamente liscio, e dopo aver abbandonato la molla urta centralmente la seconda sferetta, restandovi attaccata (urto completamente anelastico) formando così un pendolo matematico di massa  $2m$ . Calcolare:

- la velocità con cui la prima sferetta urta la seconda;
- l'energia dissipata nell'urto;
- la legge oraria del moto del pendolo dopo l'urto, tenendo conto delle condizioni iniziali;
- la tensione del filo quando il pendolo, durante il moto successivo all'urto, ritorna nella configurazione di equilibrio.

**Problema n. 4:** Un corpo puntiforme di massa  $M = 1 \text{ kg}$ , è posto (si trova in quiete nella posizione di equilibrio) su un piano inclinato perfettamente liscio e formante un angolo  $\alpha = 30^\circ$  con il piano orizzontale, essendo appoggiato all'estremità libera di una molla ideale (priva di massa) di costante elastica  $k = 49 \text{ N/m}$  e di lunghezza a riposo  $l_0 = 0.8 \text{ m}$ , che ha l'altra estremità fissata alla base del piano inclinato, come indicato in figura. Un secondo corpo puntiforme di massa  $m = 0.2 \text{ kg}$ , che si trova inizialmente in quiete sullo stesso piano inclinato ad un'altezza  $H = 2.4 \text{ m}$  dal piano orizzontale, all'istante  $t=0$  viene lasciato libero di muoversi lungo il piano inclinato, finché non urta il corpo di massa  $M$  rimanendovi attaccato (urto completamente anelastico). Calcolare:

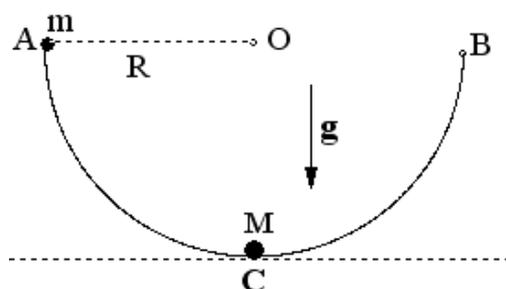
- l'altezza iniziale del corpo di massa  $M$  dal piano orizzontale;
- l'energia totale meccanica iniziale del sistema costituito dai due corpi;
- la velocità del corpo puntiforme di massa  $m$  immediatamente prima e dopo l'urto;
- l'energia dissipata nell'urto.

Con riferimento al moto successivo del sistema costituito dai due corpi uniti, determinare:

- l'equazione del moto, indicando chiaramente le condizioni iniziali;
- la frequenza di oscillazione del sistema costituito dai due corpi;
- la posizione di equilibrio, misurata lungo il piano inclinato, del sistema costituito dai due corpi;
- la distanza massima rispetto al piano orizzontale dei due corpi durante il loro moto successivo all'urto lungo il piano inclinato.

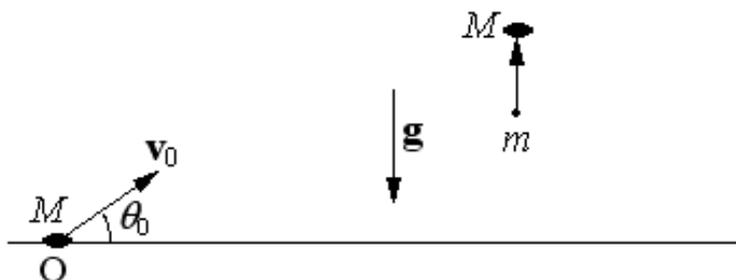
**Problema n. 5:** Un corpo puntiforme di massa  $M = 1.95 \text{ kg}$  può muoversi senza attrito su un profilo semicircolare liscio, assimilabile ad una guida, disposto nel piano verticale e avente raggio  $R = 0.4 \text{ m}$ , rimanendo costantemente a contatto con il profilo. Inizialmente la massa  $M$  giace in quiete nella sua posizione di equilibrio stabile appoggiata al fondo del profilo. Un secondo corpo puntiforme di massa  $m = 0.15 \text{ kg}$ , pure vincolato a muoversi senza attrito sullo stesso profilo, senza mai staccarsi da esso, viene lasciato cadere sotto l'azione della sua forza peso dalla posizione A con velocità iniziale nulla. La massa  $m$ , dopo aver percorso l'arco di circonferenza AC, urta centralmente il corpo puntiforme di massa  $M$  rimanendovi solidalmente attaccata (urto completamente anelastico), formando così un unico sistema puntiforme di massa  $m+M$ . Determinare:

- la velocità  $v$  della massa  $m$  immediatamente prima dell'urto;
- la reazione della guida immediatamente prima dell'urto;
- la velocità  $V$  del sistema  $m+M$  subito dopo l'urto;
- l'energia dissipata durante l'urto;
- la reazione vincolare subito dopo l'urto;
- l'altezza massima raggiunta dal sistema dopo l'urto, calcolata rispetto al fondo della guida;
- l'equazione del moto e la legge oraria del moto del sistema dopo l'urto;



**Problema n. 5:** Durante una gara di tiro un piattello di massa  $M = 0.2 \text{ kg}$  viene sparato da terra con un alzo di  $30^\circ$  e con una velocità  $V_0 = 40 \text{ m/s}$ . Nell'istante in cui esso raggiunge la massima altezza viene centrato da un proiettile di massa  $m = 10 \text{ g}$  che sta viaggiando in direzione verticale verso l'alto con velocità istantanea  $v = 200 \text{ m/s}$ . Il proiettile si conficca nel piattello. Supponendo trascurabili gli effetti dell'attrito con l'aria, calcolare:

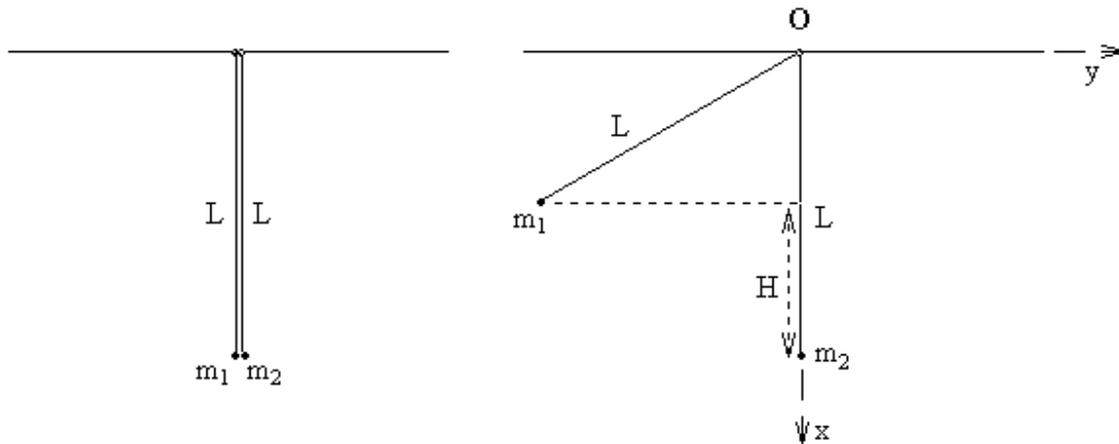
- l'altezza, rispetto al suolo, del piattello al momento dell'urto;
- la velocità di bocca  $v_0$  del proiettile al momento dello sparo da terra;
- la velocità del sistema (piattello + proiettile) immediatamente dopo l'urto;
- l'energia meccanica dissipata dalle forze d'attrito durante l'urto;
- l'altezza massima raggiunta dal sistema nel moto successivo all'urto;
- la distanza, rispetto al punto di lancio del piattello, alla quale il sistema tocca terra;
- la velocità vettoriale di impatto del sistema con il suolo.



## B) Urti elastici:

**Problema 7:** Due sferette, assimilabili a due corpi puntiformi, di massa  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$  e  $m_2 = 0.2 \text{ kg}$  sono appese ad un soffitto orizzontale tramite due asticelle rigide identiche, di massa trascurabile e di lunghezza  $L = 1.2 \text{ m}$ , a loro volta vincolate a ruotare nel piano verticale  $xy$  attorno al punto di sospensione al soffitto tramite una cerniera liscia di dimensioni trascurabili. Inizialmente le due sferette si trovano a contatto in condizione di quiete nella loro posizione di equilibrio. Ad un certo istante la massa  $m_1$  viene sollevata ad un'altezza  $H = 0.6 \text{ m}$  rispetto alla quota iniziale e da lì lasciata cadere con velocità nulla. Assumendo che l'urto tra le due sferette sia perfettamente elastico, calcolare :

- le coordinate cartesiane  $x_{CM}$  e  $y_{CM}$  del centro di massa del sistema quando la massa  $m_1$  si trova all'altezza  $H$  rispetto alla quota iniziale;
- la velocità  $v_{CM}$  del centro di massa del sistema immediatamente prima dell'urto;
- le velocità delle due sferette immediatamente dopo l'urto;
- l'energia cinetica interna  $E_{k,S}^{(INT)}$  del sistema immediatamente dopo l'urto;
- il valore minimo di  $H$  per il quale la sferetta 2 dopo l'urto arriva al soffitto;
- l'altezza massima raggiunta dalla sferetta 1 dopo l'urto, nelle condizioni di cui al punto precedente;
- la reazione impulsiva  $\mathbf{R}_0$  sviluppata dalla cerniera durante l'urto, in tali condizioni.



**Problema 8:** Una particella di massa  $M = 3.6 \text{ kg}$ , scivola verso il basso lungo una superficie cilindrica, solidale a un tavolo molto pesante, priva di attrito, avente asse di simmetria principale disposto orizzontalmente, sezione circolare e raggio di curvatura  $R = 0.8 \text{ m}$ . La particella inizialmente in quiete sulla sommità della superficie, dopo aver raggiunto la base della superficie cilindrica urta elasticamente una seconda particella di massa  $m = 0.9 \text{ kg}$ , che si trova in quiete sul piano orizzontale scabro del tavolo nel punto di raccordo tra la superficie cilindrica e il piano stesso. Tale punto si trova ad una distanza  $d = 1.2 \text{ m}$  dal bordo del tavolo. Assumendo che il coefficiente di attrito dinamico fra le due particelle e il piano del tavolo sia  $\mu_d = 0.5$  e che l'altezza del piano del tavolo rispetto al suolo sia  $H = 1 \text{ m}$ , calcolare:

- la velocità delle due particelle subito dopo l'urto;
- l'impulso applicato alla particella di massa  $M$  alla particella di massa  $m$  durante l'urto;
- l'energia meccanica dissipata dalle forze di attrito durante il moto successivo all'urto;
- il tempo impiegato da ciascuna particella a raggiungere il suolo, dopo l'urto;
- la posizione della particella di massa  $M$  quando la particella di massa  $m$  urta il suolo;
- l'energia meccanica totale dissipata nell'urto, supposto completamente anelastico, delle due particelle con il suolo.

