PROBLEMA: Due corpi puntiformi aventi massa $M = 2.4\ kg$ e $m = 1.2\ kg$, rispettivamente, sono fissati alle estremità opposte di un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza $L = 0.9\ m$, formando un manubrio rigido asimmetrico. Inizialmente il manubrio si trova in quiete sul piano orizzontale xy, supposto perfettamente liscio, con la massa M posta nel punto O, origine del sistema di riferimento cartesiano Oxyz, mentre l'asta rigida forma con l'asse x un angolo $\theta_0 = \pi/3\ rad$. All'istante $t = 0$ viene applicato al corpo di massa m un impulso istantaneo di intensità $J_0 = 5.4\ kg\ m\ s^{-1}$ in direzione parallela all'asse y e verso concorde ad esso, e il manubrio rigido asimmetrico si mette istantaneamente in moto roto-traslatorio nel piano xy. Calcolare:

a) le componenti cartesiane dell'impulso istantaneo $\mathbf{J}_0$;
b) le componenti cartesiane del vettore posizione iniziale $\mathbf{r}_{CM}$ del centro di massa del sistema.

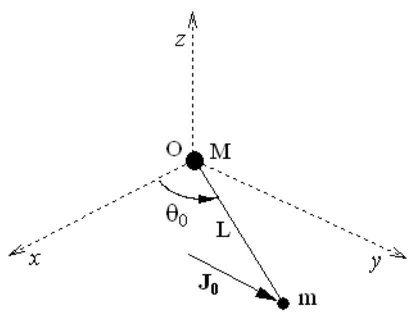
Con riferimento al moto roto-traslazionale dei manubrio rigido asimmetrico dopo l'applicazione dell'impulso determinare:

c) la velocità $\mathbf{v}_{CM}(t)$ del centro di massa del sistema;
d) la legge oraria $\mathbf{r}_{CM}(t)$ del moto del centro di massa del sistema;
e) il momento della quantità di moto del centro di massa del sistema $\mathbf{L}_{CM,S}(t)$ rispetto al polo O;
f) il momento della quantità di moto totale del sistema $\mathbf{L}_{O,S}(t)$ rispetto al polo O;
g) il momento della quantità di moto intrinseco $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$ del manubrio;
h) la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ di rotazione del manubrio;
i) l'energia cinetica interna E_k^{INT} del manubrio;
j) il modulo della tensione $\mathbf{T}$ dell'asta.

SOLUZIONE

Dati del problema:
M= 2.4 kg, m = 1.2 kg, L = 0.9 m, $J_0 = 5.4\ kg\ m\ s^{-1}$, $\theta_0 = \pi/3$ rad (i.e.: $\theta_0 = 60°$)

Si sceglie il sistema di riferimento fisso indicato in figura, in cui l'asse y è parallelo all'impulso $\mathbf{J}_0$.



Prima dell'impulso il sistema è in quiete e quindi sia la risultante delle forze esterne che il momento risultante dei momenti delle forze esterne rispetto all'origine O del sistema sono nulli.

a) le componenti cartesiane dell'impulso istantaneo $\mathbf{J}_0$ sono:

$$J_{0x} = 0,\ J_{0y} = 5.4\ kg\ m\ s^{-1},\ J_{0z} = 0$$

b) le componenti cartesiane del vettore posizione iniziale $\mathbf{r}_{CM,0}$ del centro di massa del sistema sono:

$$x_{CM,0} = mL/\ (M+m)\cos\theta_0 = 0.15\ m$$
$$y_{CM,0} = mL/\ (M+m)\sin\theta_0 = 0.26\ m$$

Nota Bene: L'applicazione dell'impulso $\mathbf{J}_0$ al manubrio comporta una variazione di:
1 - quantità di moto del sistema: $\mathbf{J}_0 = \Delta\mathbf{P}_S$:
2 - momento angolare rispetto al CM, assunti come polo di riferimento: $\Delta\mathbf{L}_{CM,S} = \mathbf{r}_m \wedge \mathbf{J}_0$, oppure, indifferentemente, rispetto al punto fisso O, origine del sistema Oxyz: $\Delta\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{r}_m \wedge \mathbf{J}_0$

c) la velocità $\mathbf{v}_{CM}$ del centro di massa del sistema:
In base al teorema dell'impulso (vedi punto 1) $\mathbf{J}_0 = \Delta\mathbf{P}_S$ e quindi si avrà che

$(M+m)\,(\mathbf{v}_{CM} - \mathbf{v}_{CM,0}) = \mathbf{J}_0$, dove $\mathbf{v}_{CM,0} = \mathbf{0}$ dato che *la velocità iniziale del sistema è nulla*

$$\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{J}_0/(m+M)$$

Poichè l'impulso nel sistema di riferimento scelto ha solo componente orizzontale y anche la velocità del CM avrà solo componente orizzontale y che indichiamo con $v_{CM,y}$:

$$\mathbf{v}_{CM} = 1.5\ \mathrm{ms}^{-1}\ \mathbf{j}$$

d) la legge oraria $\mathbf{r}_{CM}$ (t) del moto del centro di massa del sistema;
Integrando la velocità in funzione del tempo si ottiene la legge oraria (per la posizione del CM a t = 0 vedi $\mathbf{r}_{CM,0}$ sopra):

$$\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{CM,0} + [\mathbf{J}_0/(M + m)]\ t$$

che corrisponde a un moto rettilineo uniforme parallelo all'asse y ad una distanza $x_{CM} = 0\ .15$ m dall'asse stesso. La equazioni parametriche del moto del CM sono:

$$x_{CM} = 0.15 \qquad (m)$$
$$y_{CM} = 0.26 + 1.5\ t \qquad (m)$$

e) il momento della quantità di moto del centro di massa $\mathbf{L}_{CM}(t)$ rispetto al polo O;
Il centro di massa del sistema si muove come un punto materiale libero per cui:

$$\mathbf{L}_{O,CM}(t) = \mathbf{r}_{CM} \wedge (M+m)\ \mathbf{v}_{CM} = 0.81\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}\ \mathbf{k}$$

f) il momento della quantità di moto totale del sistema $\mathbf{L}_{O,S}(t)$ rispetto al polo O:
In base al teorema del momento dell'impulso rispetto al punto fisso O (vedi punto 2) $\mathbf{r}_m \wedge \mathbf{J}_0 = \Delta\mathbf{L}_{O,S}$ dove $\mathbf{r}_m$ è il vettore posizione iniziale della massa m rispetto al punto O

Ora $\Delta\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{L}_{O,S}(t) - \mathbf{L}_{O,S,0}$, dove $\mathbf{L}_{O,S,0} = \mathbf{0}$ dato che *il sistema è inizialmente in quiete.*

Dopo l'applicazione dell'impulso, dato che il momento risultante del momento delle forze esterne al manubrio è nullo, si avrà la conservazione del suo momento angolare, per cui $\mathbf{L}_{O,S}(t) = \mathbf{L}_{O,S}(0)$:

$$\mathbf{L}_{O,S}(t) = \mathbf{r}_m \wedge \mathbf{J}_0 = L\ J_0 \cos\theta_0\ \mathbf{k} = 2.43\ \mathrm{kg\ m^2 s^{-1}}\ \mathbf{k}$$

g) il momento della quantità di moto intrinseco $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$
Dal teorema di Konig per il momento angolare si ottiene immediatamente:

$$\mathbf{L}_{CM}^{INT}(t) = \mathbf{L}_{O,S}(t) - \mathbf{L}_{O,CM}(t) = 1.62\ \mathrm{kgm^2 s^{-1}}\ \mathbf{k}$$

In alternativa, osservando che il momento angolare rispetto al CM, prima dell'impulso era nullo, dal punto 2 si potrà scrivere che l'impulso comunica al sistema un momento angolare rispetto al CM:

$$\mathbf{L}_{CM,S}\,(0_+) = \mathbf{r'}_m \wedge \mathbf{J}_0$$

dove $\mathbf{r}_m$' è il vettore posizione iniziale della massa m rispetto al centro di massa del sistema e $\mathbf{L}_{CM}(0_+)$ è momento angolare rispetto al CM subito dopo l'applicazione dell'impulso.

Dopo alcuni calcoli si ha: $\mathbf{L}_{CM,S}\,(0_+) = ML/(M+m)\ J_0\ \mathbf{k} = 1.62\ \mathrm{kgm^2s^{-1}}\ \mathbf{k}$

h) la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ di rotazione del sistema:
Il momento angolare totale rispetto al CM subito dopo l'impulso (t = 0) vale:

$$\mathbf{L}_{CM}\,(t) = I_{CM,z}\,\omega(t)\,\mathbf{k}$$

dove $I_{CM,z}$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione z passante per il centro di massa e vale:

$$I_{CM,z} = M[mL/(M+m]^2 + m[ML/(M+m)]^2$$

$$I_{CM,z} = [mM/(M+m)]L^2 = 0.648\ \mathrm{kg\ m^2}$$

Sostituendo, si ottiene la velocità angolare del sistema $\omega(t)\ \mathbf{k}$:

$$\omega(t) = J_0\cos\theta/Lm = 2.5\ \mathrm{rad\ s^{-1}}\ k$$

i) l'energia cinetica interna E_k^{INT}:
L'energia cinetica interna è la somma delle energie cinetiche dei due corpi calcolate nel sistema del centro di massa:

$$E_k^{INT} = ½\ m\ [(ML\omega/(M+m)]^2 + ½\ M\ [(mL\omega/(M+m)]^2 = ½\ \mu\ L^2\omega^2 = 2.025\ \mathrm{J}$$

dove $\mu = mM/(m+M)$

Alternativamente, ricordando che il moto del sistema rispetto al CM è puramente rotazionale, l'energia cinetica di rotazione del manubrio rigido si può scrivere come:

$$Ek^{INT} = ½\ I_{CM,z}\ \omega^2 = 2.025\ \mathrm{J}$$

dove $I_{CM,z} = [mM/(M+m)]L^2$.

j) il modulo della tensione **T** dell'asta.
Il sistema, dopo l'applicazione dell'impulso, trasla lungo y ruotando attorno al suo centro di massa con velocità angolare $\omega = 2.5\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$, per cui la tensione dell'asta è data dalla forza centripeta F_N a cui sono soggette le due masse M e m:

$$T = F_{N,M} = F_{N,m} = [mML/(M+m)]\ \omega^2 = 4.5\ \mathrm{N}$$