INSIEMI

1. Elementi e Classi

Lo scopo di questo primo capitolo è di introdurre in maniera rigorosa le nozioni di classe e insieme, e di studiarne le principali proprietà. Nel seguito useremo il termine *elemento* per indicare qualcosa a cui si attribuisce identità. Si noti che da un punto di vista matematico, nel definire un elemento si è interessati solo al fatto di potergli attribuire una identità, astraendo da tutte le sue caratteristiche eccetto quella di poter essere distinto da un altro elemento.

Definizione 1.1. Si dice *classe* una collezione di elementi su cui si è scelto di fissare la propria attenzione. I singoli elementi considerati si dicono *elementi della classe.*

Esempi 1.2. Sono esempi di classe: la classe delle lettere dell'alfabeto italiano; la classe di tutti gli studenti dell'università di Verona; fissato un piano α, la classe di tutti i punti di α oppure la classe di tutte i poligoni contenuti in α.

Notazioni 1.3. Nel seguito indicheremo gli elementi con lettere minuscole, mentre le classi con lettere maiuscole. Per indicare l'appartenenza o la non appartenenza di un elemento a una certa classe si usano rispettivamente i simboli $\in$ e $\notin$; con la scrittura $a \in A$ si indica che l'elemento a appartiene alla classe A, mentre la scrittura $a \notin A$ indica che l'elemento a non appartiene alla classe A.

Per descrivere una classe si possono usare diverse notazioni. Una prima possibilità è di elencare gli elementi della classe tra parentesi graffe separati da virgole. Ad esempio la scrittura $\{2, 1, d, b, 5, 4, 7\}$ indica la classe formata dalle lettere d e b e dai numeri 1, 2, 4, 5 e 7. Si possono considerare classi formate da un unico elemento a; in tal caso, la classe che si sta considerando si indica con $\{a\}$ e si scrive $a \in \{a\}$.

Se invece gli elementi che formano una classe sono tutti quelli che godono di una certa proprietà P si può denotare la classe nel modo seguente: $\{x \mid x \text{ soddisfa } P\}$, dove il simbolo "|" si legge "tale che". Ad esempio per indicare la classe di tutti i numeri naturali pari si scrive $\{x \mid x \text{ è un numero naturale pari}\}$. Analogamente con la scrittura $\{x \mid x \text{ è un numero naturale dispari e x è minore di } 10\}$ si indica la classe dei numeri naturali dispari minori di 10; si noti che usando la notazione descritta precedentemente, la stessa classe si indica anche con $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Spesso il simbolo "|" viene sostituito dal simbolo ":"; in questo modo si scrive $\{x : x \text{ soddisfa } P\}$.

È importante sottolineare che ogni classe è determinata dagli elementi che la compongono, indipendentemente da come essi vengono descritti. Questa proprietà del concetto di classe viene detta *estensionalità*: infatti per individuare una classe guardiamo a quali elementi si estende e non al modo in cui questi vengono descritti. Perciò due diverse descrizioni indicano la stessa classe se la classe individuata dalla prima descrizione ha gli stessi elementi di quella individuata dalla seconda. In altre parole, due classi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi. Ad esempio la classe $\{0, 6, 9, 3\}$, la classe $\{3, 0, 6, 9, 3, 6\}$ e la classe $\{x \mid x \text{ è un multiplo di 3 minore di 10}\}$ sono tutte coincidenti.

2. Sottoclassi e classe complementare

Definizione 2.1. Date due classi X e Y, Y è una *sottoclasse* di X se tutti gli elementi di Y sono anche elementi di X. In tal caso diciamo che Y è contenuta in X e si scrive $Y \subseteq X$; diciamo anche che X contiene Y e si scrive $X \supseteq Y$.

Si osservi che ogni classe è sottoclasse di sé stessa, cioè $X \subseteq X$ per ogni classe X. Inoltre date due classi X e Y, se $X \subseteq Y$ e anche $Y \subseteq X$, possiamo concludere che $X = Y$; infatti le due inclusioni ci dicono esattamente che X e Y hanno gli stessi elementi e quindi, per la proprietà dell'estensionalità, le due classi coincidono. Se Y è una sottoclasse di X formata da tutti gli elementi di X che godono di una certa proprietà P, si scrive $Y = \{x \mid x \in X \text{ e } x \text{ soddisfa } P\}$. Ad esempio se $\mathbf{N}$ è la classe dei numeri naturali, la classe $\{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ e } x \text{ è multiplo di } 2\}$ è la sottoclasse dei numeri naturali pari.

Un'altra classe molto importante è la classe che non contiene elementi; si consideri ad esempio la classe $\{x \mid x \text{ è un numero reale e } x^2 = -1\}$, oppure la classe dei mesi dell'anno con meno di 20 giorni.

Definizione 2.2. Una classe che non contiene elementi si dice *classe vuota*; essa si indica con il simbolo $\emptyset$.

Si noti che, poiché una classe è determinata dai suoi elementi e due classi coincidono se hanno gli stessi elementi, la classe vuota è unica. Inoltre la classe vuota è sottoclasse di ogni altra classe.

Per concludere, data una classe X, introduciamo la classe formata da tutti gli elementi che non appartengono a X.

Definizione 2.3. Data una classe X, la classe $\{x \mid x \notin X\}$ è detta la classe *complementare* di X e si indica con $\complement X$.

Ad esempio, se X è la classe formata dalle lettere dell'alfabeto italiano, la classe complementare di X è $\complement X = \{x \mid x \text{ non è una lettera dell'alfabeto italiano}\}$; pertanto $\pi \in \complement X$ e anche $7 \in \complement X$.

3. Operazioni tra classi

In questa sezione, date due classi Y_1 e Y_2, introduciamo alcune nuove classi che si ottengono a partire da esse. Si consideri ad esempio la classe formata dagli elementi che appartengono sia a Y_1 che a Y_2.

Definizione 3.1. La classe $\{x \mid x \in Y_1 \text{ e } x \in Y_2\}$ è detta *intersezione* delle classi Y_1 e Y_2 e si indica con $Y_1 \cap Y_2$.

Si noti che dalla definizione di intersezione, segue che $Y_1 \cap Y_2 = Y_2 \cap Y_1$. Inoltre $Y_1 \cap Y_2$ è una sottoclasse sia di Y_1 che di Y_2. Se $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, allora le classe Y_1 e Y_2 si dicono *disgiunte.*

Analogamente, introduciamo la classe formata dagli elementi che appartengono o a Y_1 o a Y_2.

DEFINIZIONE 3.2. La classe $\{x \mid x \in Y_1 \text{ oppure } x \in Y_2\}$ è detta *unione* delle classi Y_1 e Y_2 e si indica con $Y_1 \cup Y_2$.

Dalla definizione di unione segue che $Y_1 \cup Y_2 = Y_2 \cup Y_1$. Si osservi che, data una qualsiasi classe Y, l'unione tra Y e la sua classe complementare $\complement Y$ individua la classe $\{x \mid x \text{ è un elemento}\}$, cioè la classe formata da tutti gli elementi. Tale classe è detta *classe universale* e nel seguito sarà indicata con $\mathcal{U}$. Quindi, per ogni classe Y, si ha che $Y \cup \complement Y = \mathcal{U}$.

Si noti che le operazioni di intersezione e unione tra classi possono essere ripetute successivamente. Ad esempio, date tre classi X, Y e Z, la classe $X \cap Y \cap Z$ si ottiene calcolando prima $X \cap Y$ e poi $(X \cap Y) \cap Z$. Analogamente si costruisce la classe $X \cup Y \cup Z$.

Per finire, date due classi Y_1 e Y_2 consideriamo la classe formata dagli elementi che appartengono a Y_1 ma non a Y_2.

DEFINIZIONE 3.3. La classe $\{x \mid x \in Y_1 \text{ e } x \notin Y_2\}$ è detta *differenza* tra Y_1 e Y_2 o, equivalentemente, *complementare* di Y_2 *in* Y_1, e si indica con $Y_1 \setminus Y_2$.

Si osservi che, dalla definizione di differenza tra classi, segue che $Y_1 \setminus Y_2 = Y_1 \cap \complement Y_2$. Si noti inoltre che $Y_1 \setminus Y_2$ è una sottoclasse di Y_1 ma non di Y_2.

4. Insiemi

Tra tutte le classi che possiamo costruire ce ne sono alcune che possono essere considerate come una cosa singola; ad esempio, la classe formata da tutti i giocatori della nostra squadra di calcio preferita può essere considerata come una cosa singola, cioè la squadra stessa. A sua volta la nostra squadra preferita può essere vista come un elemento della classe di tutte le squadre di calcio che partecipano al campionato italiano. In generale, quando una classe può essere considerata come una cosa singola, essa può essere elemento di qualche altra classe.

DEFINIZIONE 4.1. Le classi che possono essere considerate come una cosa singola, cioè che a loro volta possono essere considerate come elementi, si dicono *insiemi*. Le classi che non sono insiemi sono dette *classi proprie*.

ESEMPI 4.2. La classe degli studenti dell'Università di Verona è un insieme; infatti tale classe può essere considerata come un elemento, cioè l'Università di Verona stessa, che a sua volta appartiene alla classe di tutti gli Atenei italiani.

La classe di tutti gli esseri umani è un insieme; infatti può essere considerato come l'elemento "genere umano", appartenente alla classe di tutte le specie animali.

Si fissi un piano α e una circonferenza γ contenuta in α. La classe di tutti i punti che appartengono alla circonferenza γ è un insieme; infatti tale classe può essere considerata come la circonferenza γ stessa, che a sua volta è un elemento della classe delle figure contenute nel piano α.

ESEMPIO 4.3. Un esempio importante di classe propria, cioè di classe che non è un insieme, è la classe degli insiemi che non appartengono a se stessi, cioè la classe $R = \{X \mid X \text{ è un insieme e } X \notin X\}$. Se infatti tale classe fosse un insieme, R potrebbe essere visto come elemento o come classe. Dato che tra elementi e classi sussiste la relazione di appartenenza e un dato elemento appartiene o non appartiene a una data classe, sicuramente R dovrebbe verificare una e una sola delle seguenti:

$R \in R$ oppure $R \notin R$. Nel primo caso, se $R \in R$, R dovrebbe soddisfare la proprietà che caratterizza gli elementi della classe R, cioè $R \notin R$. Nel secondo caso, sappiamo che R è un insieme e $R \notin R$; pertanto R come elemento dovrebbe soddisfare la proprietà che caratterizza la classe R, e quindi dovremmo concludere che $R \in R$. In entrambi i casi si trova una contraddizione che deriva dall'aver assunto che R sia un insieme. Pertanto si conclude che R *non è* un insieme.

Remark 4.4. Come risulta evidente dagli esempi precedenti, dato che un insieme può essere visto come elemento, esso può a sua volta appartenere ad altre classi. Al contrario, le classi proprie non possono appartenere ad altre classi, dato che l'appartenenza è prerogativa degli elementi.

Sottolineiamo inoltre che l'Esempio 4.3 è molto significativo non solo perché mostra come ci sia una profonda differenza tra il concetto di classe e di insieme, ma anche perché in esso si è applicato un tipo di ragionamento, detto ragionamento *per assurdo*, molto usato nelle dimostrazioni matematiche.

Si osservi che, poiché gli insiemi sono classi, per essi vale tutto quanto detto finora sulle classi per quanto riguarda notazioni, operazioni e simboli introdotti.

5. Assiomi sugli insiemi

Nella sezione precedente abbiamo visto che non tutte le classi sono insiemi. Sorge quindi il problema di riconoscere quali classi sono insiemi. Si può stabilire che una classe è un insieme ogni qual volta questa assunzione non porta a contraddizioni, come nel caso dell'Esempio 4.3. È quindi necessario trovare un metodo per stabilire se l'assumere che una certa classe sia un insieme implichi o meno una contraddizione. Un possibile criterio è quello di partire da alcuni classi che evidentemente sono insiemi e fissare delle regole per costruire nuovi insiemi a partire da queste classi iniziali. Pertanto fissiamo i seguenti *assiomi* sugli insiemi, cioè affermazioni che non sono dimostrabili ma che decidiamo di assumere come vere.

(1) Ogni classe finita è un insieme.
(2) Una sottoclasse di un insieme X è un insieme, detta *sottoinsieme* di X.
(3) L'unione di due insiemi è un insieme.
(4) Se X è un insieme e la classe Y ha tanti elementi quanti X, allora anche Y è un insieme.
(5) Se X è un insieme, si costruisca la classe di tutti i sottoinsiemi di X, cioè $P(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$. Allora $P(X)$ è un insieme, detto *insieme delle parti* di X.
(6) La classe dei numeri naturali, indicata con $\mathbf{N}$, è un insieme.
(7) Non esistono successioni di insiemi X_0, X_1,..., X_n tali che $X_0 \in X_1 \in \cdots \in X_n \in X_0$.

Dagli assiomi introdotti seguono alcune importanti conseguenze:

(a) Dal secondo assioma si ottiene che, dati due insiemi X e Y, sia $X \cap Y$ che $X \setminus Y$ sono insiemi, essendo entrambi sottoclassi di X.
(b) Sempre dal secondo assioma, segue che la classe universale $\mathcal{U}$ non è un insieme. Se infatti lo fosse, la sottoclasse R introdotta nell'Esempio 4.3 (si dimostri per esercizio che $R \subseteq \mathcal{U}$!) per il secondo assioma sarebbe un insieme. Invece abbiamo già visto che R non è un insieme.

(c) La classe vuota è sottoclasse di ogni classe, e in particolare di ogni insieme. Quindi, di nuovo dal secondo assioma, concludiamo che $\emptyset$ è un insieme. Nel seguito lo chiameremo *insieme vuoto.*

(d) Se X è un insieme, il suo complementare $\complement X$ non è un insieme. Se infatti lo fosse, dal terzo assioma si concluderebbe che $X \cup \complement X = \mathcal{U}$ è un insieme, ma abbiamo già osservato che la classe universale è una classe propria.
e) Nel quarto assioma, se si considerano insiemi con infiniti elementi, il concetto di "avere tanti elementi quanti" può risultare confuso: chiariremo nei capitoli successivi cosa si intende con questa espressione.

(e) Se X è un insieme finito con n elementi, allora anche $P(X)$ è un insieme finito con 2^n elementi. (Si veda l'Esercizio 5.)

(f) Il fatto che i numeri naturali siano un insieme, chiaramente infinito, implica che anche la classe dei numeri interi, dei numeri razionali, dei numeri reali e dei numeri complessi sono insiemi; una dimostrazione di ciò sarà vista successivamente. Nel seguito, indicheremo tali insiemi rispettivamente con le lettere **Z**, **Q**, **R** e **C**.

(g) Per ogni insieme X, possiamo affermare che $X \notin X$.

Nel seguito, tranne quando esplicitamente specificato, tutte le classi su cui lavoreremo si intenderanno insiemi.

6. Unione e intersezione su classi e insiemi

Siano Y_1, Y_2, $\dots$, Y_n insiemi; allora possiamo costruire l'insieme $Y_1 \cap Y_2 \cap \cdots \cap Y_n$. Questa intersezione si può indicare anche con $\bigcap X$, dove X è l'insieme $X = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$; in altre parole, $\bigcap X = \{x \mid x \in Y \text{ per ogni } Y \in X\}$. Questo modo di descrivere l'intersezione tra più insiemi può essere generalizzato al caso in cui X sia un insieme infinito, o una classe, i cui elementi siano a loro volta insiemi. Pertanto estendiamo la definizione di intersezione tra insiemi nel modo seguente.

Definizione 6.1. Se X è una classe i cui elementi sono insiemi, allora $\bigcap X$ è la classe $\{x \mid x \in Y \text{ per ogni } Y \in X\}$.

Si noti che, se X non è l'insieme vuoto, allora $\bigcap X \subseteq Y$ per ogni insieme Y contenuto in X e quindi $\bigcap X$ è un insieme. Analizziamo invece nel dettaglio il caso in cui $X = \emptyset$ e quindi $\bigcap \emptyset = \{x \mid x \in Y \text{ per ogni } Y \in \emptyset\}$. Possiamo riscrivere $\bigcap \emptyset$ nella forma equivalente: $\{x \mid \text{ se } Y \in \emptyset \text{ allora } x \in Y\}$; poiché $\emptyset$ non contiene alcun elemento, dato un qualsiasi elemento x esso sicuramente appartiene a $\bigcap \emptyset$; questo perché non è richiesta alcuna verifica sull'elemento x affinché appartenga a $\bigcap \emptyset$. Concludiamo quindi che $\bigcap \emptyset = \mathcal{U}$, dove $\mathcal{U}$ è la classe universale.

Alla luce di quanto osservato, si verifica facilmente che se X e Z sono due classi e $X \subseteq Z$, allora $\bigcap X \supseteq \bigcap Z$ (si veda l'Esercizio 6).

In modo analogo a quanto fatto per l'intersezione, dati gli insieme Y_1, Y_2, $\dots$, Y_n, allora possiamo costruire l'insieme $Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n$. Questa unione si può indicare anche con $\bigcup X$, dove X è l'insieme $X = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$; in altre parole, $\bigcup X = \{x \mid \text{esiste } Y \in X \text{ tale che } x \in Y\}$. Questo modo di descrivere l'unione tra più insiemi può essere generalizzato al caso in cui X sia un insieme infinito, o una classe, i cui elementi siano a loro volta insiemi. Pertanto estendiamo la definizione di unione tra insiemi nel modo seguente:

Definizione 6.2. Se X è una classe i cui elementi sono insiemi, allora $\bigcup X$ è la classe $\{x \mid \text{esiste } Y \in X \text{ tale che } x \in Y\}$.

Consideriamo il caso $X = \emptyset$; allora $\bigcup \emptyset = \{x \mid \text{esiste } Y \in \emptyset \text{ tale che } x \in Y\}$. Poiché $\emptyset$ non contiene elementi, dato un elemento x non esiste alcun $Y \in \emptyset$ che lo contenga. Quindi $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Se invece $X = \mathcal{U}$, $\bigcup \mathcal{U} = \{x \mid \text{esiste } Y \in \mathcal{U} \text{ tale che } x \in Y\}$. Si osservi che per ogni elemento x possiamo costruire l'insieme $\{x\}$, dove $x \in \{x\}$; poiché l'insieme $\{x\}$, in quanto a sua volta elemento, è sicuramente contenuto nella classe universale, concludiamo che $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Quindi $\bigcup \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Questo mostra che in generale, al contrario di quanto sussiste per l'intersezione, l'unione di una classe, o di un insieme infinito, di insiemi non è in generale un insieme. Tuttavia assumiamo che se X è un insieme, allora $\bigcup X$ è un insieme; si consideri questo un assioma da aggiungere alla lista descritta nella Sezione 5.

Si verifica facilmente dalla definizione di unione che, se X e Z sono due classi e $X \subseteq Z$, allora $\bigcup X \subseteq \bigcup Z$ (si veda l'Esercizio 6).

7. Insiemi ordinati

Spesso è utile considerare gli elementi di un dato insieme con un certo ordine. Ad esempio, le lettere della parola "mela" formano l'insieme $\{e, a, m, l\}$, ma se vogliamo distinguere la parola "mela" dalla parola "lame", dobbiamo indicare l'ordine delle lettere. Si introduce così il concetto di insieme ordinato.

Definizione 7.1. Un *insieme ordinato* finito è un insieme finito in cui è messo in evidenza un ordine degli elementi.

In generale un insieme ordinato si indica tra parentesi tonde; ad esempio se si considera l'insieme ordinato delle lettere parole "mela", si scriverà (m,e,l,a), mentre l'insieme ordinato delle lettere della parola "lame" sarà (l,a,m,e). Si osservi che mentre nella usuale notazione insiemistica gli insiemi $\{a, b, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{b, a, c\}$ e $\{a, b, a, c, b\}$ coincidono, se si considerino insiemi ordinati gli insiemi (a, b, c), (b, c, a), (b, a, c) e (a, b, a, c, b) sono insiemi tra loro diversi.

In particolare spesso consideriamo il caso di insiemi ordinati formati da due elementi, detti *coppie ordinate*, cioè insiemi del tipo (a, b). Si osservi che mentre gli insiemi $\{a, b\}$ e $\{b, d\}$ coincidono sia nel caso in cui $a = c$ e $b = d$ che nel caso in cui $a = d$ e $b = c$, le coppie ordinate (a, b) e (c, d) coincidono se e solo se $a = c$ e $b = d$.

Esempio 7.2. Dovendo rappresentare da un punto di vista insiemistico le targhe automobilistiche italiane, dobbiamo ricorrere a insiemi ordinati con 7 elementi, dove i primi due elementi sono lettere, i successivi tre sono numeri, gli ultimi due lettere; per esempio $(A, W, 1, 2, 3, F, G)$ e $(W, A, 1, 2, 3, F, G)$ sono due targhe diverse, mentre $(A, 1, W, 2, 3, F, G)$ non rappresenta alcuna targa.

Si osservi che gli insiemi ordinati possono essere descritti usando la notazione insiemistica classica, senza introdurre cioè il concetto di ordine su un insieme. Ad esempio, la coppia ordinata (a, b) si può indicare anche con l'insieme $\{\{a\}, \{a, b\}\}$; infatti in questo insieme si è indicato il fatto che a "viene prima" di b semplicemente ripetendolo due volte, la prima volta formando l'insieme $\{a\}$, la seconda come elemento del sottoinsieme $\{a, b\}$. Si faccia attenzione che l'insieme $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, l'insieme $\{\{a\}, \{b, a\}\}$ e l'insieme $\{\{a, b\}, \{a\}\}$ sono uguali, in quanto in questa notazione non è rilevante l'ordine in cui gli elementi compaiono tra parentesi graffe. Analogamente l'insieme ordinato (a, b, c) si indica anche con $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$; l'insieme così fatto fornisce informazioni su quale elemento ve considerato come primo, quale come secondo e quale come terzo. Allo stesso modo si possono denotare insiemi ordinati finiti arbitrari.

8. Prodotto cartesiano

Date due classi A e B consideriamo la classe i cui elementi sono le coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene alla classe A, il secondo alla classe B. Tale classe si dice *prodotto cartesiano* delle classi A e B.

DEFINIZIONE 8.1. Date due classi A e B il *prodotto cartesiano* di A per B è la classe $\{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$ e si indica con $A \times B$.

Si noti che gli elementi del prodotto cartesiano sono coppie ordinate. Pertanto in generale l'operazione prodotto cartesiano non è commutativa, cioè date due classi A e B in generale $A \times B$ è diverso da $B \times A$; questo perché gli elementi di $A \times B$ hanno come primo termine della coppia elementi di A e come secondo termine elementi di B, mentre gli elementi di $B \times A$ hanno come primo termine della coppia elementi di B e come secondo termine elementi di A.

ESEMPIO 8.2. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c\}$, il prodotto cartesiano $A \times B$ è la classe $\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$, mentre il prodotto cartesiano $B \times A$ è la classe $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$.

Se una delle due classi A e B che si stanno considerando è l'insieme vuoto, allora il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme vuoto: infatti non si possono costruire coppie ordinate con il primo o il secondo termine appartenente all'insieme vuoto, dato che $\emptyset$ non contiene alcun elemento. Inoltre se $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$, è facile verificare che $A' \times B' \subseteq A \times B$.

Si osservi che se A e B sono entrambi insiemi, allora anche il prodotto cartesiano $A \times B$ è un insieme. Infatti abbiamo già visto che ogni coppia ordinata (a, b) si può rappresentare tramite l'insieme $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Dato che $\{a\}$ e $\{a, b\}$ sono elementi dell'insieme delle parti $P(A \cup B)$, in quanto sottoinsiemi di $A \cup B$, si ottiene che $A \times B \subseteq P(A \cup B)$. Quindi applicando il secondo, il terzo e il quinto assioma della Sezione 5, possiamo concludere che $A \times B$ è un insieme.

Per concludere, si può facilmente generalizzare la nozione di prodotto cartesiano tra due classi a quello tra n classi. Infatti se A_1, A_2, $\ldots$, A_n sono n classi, il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ è l'insieme delle n-uple ordinate con il primo termine appartenente a A_1, il secondo a A_2, e in generale l'i-esimo termine appartenente a A_i.

Esercizi

ESERCIZIO 1. Sia X una classe tale che $X \subseteq Y$ per ogni classe Y. Si dimostri che $X = \emptyset$.

ESERCIZIO 2. Si dimostri che, date due classi X e Y, $X \cap Y$ è la più grande classe contenuta sia in X che in Y; analogamente si dimostri che $X \cup Y$ è la più piccola classe contenente sia X che Y.

ESERCIZIO 3. Date due classi X e Y, si dimostri che $X \subseteq Y \Leftrightarrow X \cap Y = X \Leftrightarrow X \cup Y = Y$.

Esercizio 4. Sia X la classe dei numeri naturali multipli di 10 e Y la classe dei numeri naturali la cui scrittura decimale ha come ultima cifra lo zero. Si dimostri che $X = Y$.

Esercizio 5. Si dimostri che se X è un insieme finito con n elementi, allora l'insieme $P(X)$ ha 2^n elementi. (Suggerimento: dato un arbitrario sottoinsieme $Y \subseteq X$ e un arbitrario elemento $x \in X$, sappiamo che $x \in Y$ oppure $x \notin Y$. Quindi i possibili modi per costruire un sottoinsieme Y sono...)

Esercizio 6. Si dimostri che se X e Y sono due classi di insiemi e $X \subseteq Y$, allora $\bigcup X \subseteq \bigcup Y$ e $\bigcap X \supseteq \bigcap Y$ (si faccia attenzione al caso in cui $X = \emptyset$).

Esercizio 7. Si considerino gli insiemi $X = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ e $Y = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Si dimostri che $X = Y$ se e solo se $a = x$ e $b = y$.

Esercizio 8. Si considerino gli insiemi

$$X = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} \text{ e } Y = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}.$$

Si dimostri che $X = Y$ se e solo se $a = x$, $b = y$ e $c = z$.

Esercizio 9. Dati tre insiemi A, B e C si dimostrino le seguenti uguaglianze insiemistiche: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Esercizio 10. Si descrivano, in termine di unione, intersezione e differenza di insiemi, i seguenti insiemi:

$$\{x \mid x \in \mathbf{N}, x \text{ è multiplo di 5 e di 3 ma non di 7}\};$$

$$\{x \mid x \in \mathbf{N}, x \text{ è minore di 100 oppure è multiplo di 3 e di 5}\}.$$