Sistemi

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Anno Accademico 2009-2010
Docenti: Vincenzo Manca, Riccardo Muradore, Tiziano Villa

21 Settembre 2010

Metodi di Specifica
21 Settembre 2010

Nome e Cognome:
Corso di Laurea:
Matricola:
Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	6	
problema 2	4	
totale	10	

1. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i, $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j.

   Si consideri la rete di Petri P_{45} definita da:

   - $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
   - $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
   - $A = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (p_2, t_3), (p_2, t_4), (p_3, t_2), (p_4, t_3), (t_1, p_1), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (t_2, p_4), (t_3, p_1), (t_4, p_3)\}$
   - $\forall i, j \; w(p_i, t_j) = 1$
   - $\forall i, j \; w(t_i, p_j) = 1$, tranne che $w(t_1, p_2) = 2$

   Sia $x_0 = [1, 1, 0, 2]$ la marcatura iniziale.

   (a) Si disegni il grafo della rete di Petri P_{45}.

(b) Si faccia scattare esattamente due volte la rete di Petri a partire da x_0, e si trovi (se esiste) uno stato in cui tutte le transizioni siano disabilitate.

Traccia di soluzione.

Si costruisca l'albero di raggiungibilita' di profondita' due. Si vede che $x_0 = [0, 0, 0, 3]$ e' l'unico stato in cui tutte le transizioni sono disabilitate.

(c) Supponiamo che si voglia applicare alla rete in x_0 la successione infinita di transizioni $(t_3, t_1, t_3, t_1, t_3, t_1, t_3, t_1, \dots)$. E' possibile ? Se non lo e', qual e' il piu' lungo prefisso della successione applicabile e a quale stato conduce ?

Traccia di soluzione.

$[1, 1, 0, 2] \xrightarrow{t_3} [2, 0, 0, 1] \xrightarrow{t_1} [2, 2, 1, 1] \xrightarrow{t_3} [3, 1, 1, 0] \xrightarrow{t_1} [3, 3, 2, 0]$.

In $[3, 3, 2, 0]$ la transizione t_3 non e' abilitata. Percio' non e' possibile continuare la successione indicata.

(d) Si determini lo stato x_s raggiungibile da x_0 applicando la successione di transizioni $(t_1, t_2, t_3, t_3, t_3)$.

Traccia di soluzione.

$[1, 1, 0, 2] \xrightarrow{t_1} [1, 3, 1, 2] \xrightarrow{t_2} [0, 3, 0, 3] \xrightarrow{t_3} [1, 2, 0, 2] \xrightarrow{t_3} [2, 1, 0, 1] \xrightarrow{t_3} [3, 0, 0, 0]$.

(e) Per associare un linguaggio a una rete di Petri s'introduce un insieme di eventi E, una funzione che etichetta le transizioni con eventi $l : T \rightarrow E$, e un insieme di stati che accettano $X_m \subseteq N^n$ (n e' il numero di posti).

Si consideri la rete di Petri P_{49} definita da:

- $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$
- $T = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$
- $A = \{(p_0, t_0), (p_1, t_1), (p_1, t_2), (p_2, t_3), (p_3, t_3), (p_3, t_4), (p_4, t_5), (p_5, t_5), (t_0, p_1), (t_1, p_1), (t_1, p_2), (t_2, p_3), (t_3, p_3), (t_3, p_4), (t_4, p_5), (t_5, p_5)\}$
- $\forall i, j \; w(p_i, t_j) = 1, w(t_i, p_j) = 1$
- $l(t_0) = a, l(t_1) = a, l(t_2) = b, l(t_3) = b, l(t_4) = c, l(t_5) = c$ (dove $E = \{a, b, c\}$)

Sia $x_0 = [1, 0, 0, 0, 0, 0]$, $X_m = \{[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1]\}$.

Si disegni il grafo della rete di Petri P_{49}.

Si determini il linguaggio marcato $\mathcal{L}_m(P_{49})$ associato alla rete di Petri P_{49}.

Traccia di soluzione.

$\mathcal{L}_m(P_{49}) = \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$.

2. Si consideri un impianto G con $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma_{uc} = \{b\}$, $L(G) = \overline{a^\star ba^\star}$ (cioe' il linguaggio ottenuto dai prefissi delle stringhe dell'espressione regolare $a^\star ba^\star$), $L_m(G) = a^\star ba^\star$.

   Si supponga che la specifica definita dal linguaggio marcato desiderato sia $K = \{a^k ba^k, k \geq 0\} \subseteq L_m(G)$, cioe' si richiede che l'impianto controllato riconosca solo quelle stringhe con un numero uguale di a che precedono e seguono un unico b.

   (a) Il linguaggio K e' controllabile ? Si enunci la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si applichi al caso.

   Traccia di soluzione

   Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E, con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K e' controllabile rispetto a M e E_{uc}, se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

   $$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

   [equivalente a $\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$]

   Per la definizione di controllabilita', si ha che K e' controllabile se e solo se $\overline{K}$ e' controllabile. Abbiamo dimostrato in un precedente esercizio che $\overline{K}$ e' controllabile.

   [L'argomento usato per il linguaggio $K = \overline{\{a^k ba^k, k \geq 0\}} \subseteq L(G)$ era il seguente.

   Si applichi la definizione al nostro esempio dove $M = L(G)$. Si consideri una stringa $s \in \overline{K} = K$,

   - se $s = a^\star$ e quindi $s\sigma = sb = a^\star b \in L(G)$ allora $s\sigma = sb \in \overline{K}$, altrimenti
   - se $s \neq a^\star$ allora $s\sigma = sb \notin L(G)$ (cioe' se s deve essere della forma $s = a^k ba^l$ $(k \geq l)$ e quindi $sb = a^k ba^l b \notin L(G)$, poiche' le parole in $L(G)$ non possono contenere un secondo evento b dopo il primo).

   Percio' non esiste una stringa $s \in \overline{K}$ tale che $s\sigma = sb \in L(G) \setminus \overline{K}$, cioe' K e' controllabile.]

(b) Si enunci il teorema di esistenza di un supervisore non-bloccante sotto controllabilita' limitata. Esiste un supervisore non-bloccante S tale che l'impianto controllato riconosca il linguaggio marcato K ? Si mostri un tale supervisore S se esiste, e si descriva in breve la sua strategia di controllo.

Traccia di soluzione

Definizione Siano $G = (X, E, f, \gamma, x_0)$ un impianto, $E_{uc} \subseteq E$ gli eventi incontrollabili, $K \subseteq L(G), K \neq \emptyset$ la specifica. Esiste un supervisore non-bloccante S per G tale che $L_m(S/G) = K$ e $L(S/G) = \overline{K}$ se e solo se

$$\overline{K} E_{uc} \cap L(G) \subseteq \overline{K},$$
$$K = \overline{K} \cap L_m(G).$$

Il supervisore non-bloccante costruito nella dimostrazione del caso NCT (teorema di controllabilita' non-bloccante) e' lo stesso che nel caso CT (teorema di controllabilita'). L'unica differenza e' che bisogna verificare la seconda condizione precedente.

In questo caso non esiste un supervisore non-bloccante perche' la seconda condizione non e' soddisfatta; ad esempio la stringa

$$ab \in \overline{K} \cap L_m(G) \setminus K,$$

cioe' $K \not\supseteq \overline{K} \cap L_m(G)$ e cosi' $K \neq \overline{K} \cap L_m(G)$ (si ha sempre che $K \subseteq \overline{K} \cap L_m(G)$, poiche' $K \subseteq \overline{K}$ e $K \subseteq L_m(G)$).