

Università degli studi di Verona
 Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
 Prova scritta di Algebra lineare — 13 dicembre 2007 — Compito D

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

Domande iniziali

1 – Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. È vero che \mathbf{v} è un autovettore di \mathbf{A} ? Se sì, per quale autovalore?

2 – Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V . L'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2\}$ è linearmente indipendente?

3 – Esiste una matrice \mathbf{A} , 2×3 , di rango 3?

Scrivere chiaramente sul primo foglio le risposte alle domande iniziali, con una breve giustificazione. Non saranno presi in considerazione compiti in cui manchino le risposte a queste domande.

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice abbia inversa sinistra.

T2) Dato un insieme linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ nello spazio vettoriale euclideo V , si dimostri che esiste un insieme ortonormale $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$ tale che, per $1 \leq i \leq n$, $\langle \mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_i \rangle$.

E1) Sia α un numero complesso e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & 2 \end{bmatrix}.$$

- Trovare una decomposizione LU di \mathbf{A}_α e, dove non è possibile, la decomposizione $P^T LU$.
- Per $\alpha = 0$, trovare una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$.
- Per $\alpha = 1$, trovare la proiezione ortogonale su $N(\mathbf{A}_1)$ di $[-1 \ 0 \ 2 \ 1]^T$.
- Interpretando \mathbf{A}_α come la matrice completa di un sistema, si dica per quali valori di α il sistema ammette soluzione.

E2) L'applicazione lineare $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ha come matrice associata, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ di \mathbb{C}^3 su dominio e codominio, la matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sapendo che

$$\mathbf{v}_1 = [-1 \ 3 \ 5]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ -1]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [1 \ 1 \ 1]^T,$$

si calcoli la dimensione dell'immagine di f e si dica se il vettore $[1 \ 0 \ 1]^T$ appartiene all'immagine di f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & -2\beta & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per tali valori di β trovare una base di \mathbb{C}^4 formata da autovettori di \mathbf{B}_β e si scrivano le matrici \mathbf{S} e \mathbf{D} tali che $\mathbf{B}_\beta = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$