X. 1

(i) Applichiamo la proprietà $\sum_{i \in S} P(X=i) = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{5} P(X=i) = 1 \Rightarrow P(X=0) + 0.45 + 0.24 + 0.12 + 0.09 + 0.05 = 1$$

$$\Rightarrow P(X=0) = 1 - 0.95 = 0.05$$

(ii) $P(X \geq 2) = \sum_{i=2}^{5} P(X=i) = 1 - \sum_{i=0}^{1} P(X=i)$

$$= 1 - 0.05 - 0.45 = 0.5$$

iii) $E[X] = \sum_{i=0}^{5} i \cdot P(X=i) = 0 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,45 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,12 + 4 \cdot 0,09 + 5 \cdot 0,05 = 1,9$

iv) $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$; allora:

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{5} i^2 \cdot P(X=i) = 0^2 \cdot 0,05 + 1^2 \cdot 0,45 + 2^2 \cdot 0,24 + 3^2 \cdot 0,12 + 4^2 \cdot 0,09 + 5^2 \cdot 0,05 = 5.18$$

$$\Rightarrow Var(X) = 5.18 - (1.9)^2 = 1.57.$$

(In alternativa: $Var(X) = \sum_{i=0}^{5} E\left[(X - E(X))^2\right]$).

$\boxed{\equiv}$

EX. 2

$$f(x) = \begin{cases} C e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) $f(x)$ è densità di prob. se:

- $f(x) \geq 0, \ \forall x$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x) = 1$.

Dalla prima, ricaviamo

$$C e^{-3x} \geq 0, \ \forall x \geq 0 \Rightarrow C \geq 0.$$

Dalla seconda:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^{+\infty} C e^{-3x} dx = C \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$$

$$= -\frac{C}{3} \int_0^{+\infty} -3 e^{-3x} dx = -\frac{C}{3} e^{-3x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{C}{3} \Rightarrow C = 3$$

(ii) $$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} 3x e^{-3x} dx = -\int_0^{+\infty} x \left(-3 e^{-3x}\right) dx$$

Integriamo per parti:

$$\begin{cases} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = -3 e^{-3x} \Rightarrow g(x) = e^{-3x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X) = -\Big[\underbrace{x \cdot e^{-3x} \Big|_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx \Big] = \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{+\infty} -3 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3}$$

(iii) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt = \int_0^{x} 3 e^{-3t} dt = -\int_0^x -3 e^{-3t} dt = -e^{-3t} \Big|_0^x$$

$$= 1 - e^{-3x} \quad \blacksquare$$

EX. 3

Sia X tale che $E(X)=3$, $E(X^2)=13$.

Per determinare un limite inferiore per $P(-2<X<8)$, usiamo la disuguaglianza di Chebychev:

$$P(|X-\mu| \geq k) < \frac{Var(x)}{k^2}.$$

Allora:

$$-2 < X < 8 \Rightarrow -2-3 < X-3 < 8-3 \Rightarrow -5 < X-3 < 5$$

$$\Rightarrow |X-3| < 5$$

$$\Rightarrow P(-2<X<8) = P(|X-3|<5) = 1 - P(|X-3| \geq 5)$$

D'altro canto:

$$Var(x) = E(X^2) - (E(X))^2 = 13 - 3^2 = 4$$

$$\cancel{\Rightarrow P(-2<X<8) = 1 - P(}$$

(Chebychev) $\Rightarrow$ $$P(|X-3| \geq 5) < \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow P(-2<X<8) = 1 - P(|X-3| \geq 5) > 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} = 0.84 \quad \square$$

EX. 4, 5: Vedi appunti lezione 5.

Ex. 6

Sia X_i la v.a. che descrive l'esito dell'i-esimo studente $\Rightarrow \mu = E(X_i) = 75$, $\sigma = \sqrt{Var(X_i)} = 8$, $\forall i = 1, \dots, n$

$$\overset{(TLC)}{\Rightarrow} \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(75, \frac{64}{n}\right)$$

↳ v.a. che descrive il voto medio della classe

Dobbiamo determinare n tale che $P(\overline{X}_n \geq 73) \geq 0.95$

$$\Rightarrow 0.95 \leq P\left(\frac{\overline{X}_n - 75}{\sqrt{\frac{64}{n}}} \geq \frac{73-75}{\sqrt{\frac{64}{n}}}\right) = P\left(Z \geq -\frac{2\sqrt{n}}{8}\right),$$

con $Z \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \geq 0.95 \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \leq 0.05$$

$$\Rightarrow \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \leq 0.05 \Rightarrow -\frac{\sqrt{n}}{4} \leq \Phi^{-1}(0.05) = -1.645$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{4} \geq 1.645 \Rightarrow n \geq (4 \cdot 1{,}645)^2 = 43.29 \Rightarrow n = 44$$

Ex. 7

X_i = v.a. che descrive il rifornimento dell'i-esimo cliente, $i=1, \dots, n$ $(n = 275'000)$ v.a. i.i.d. $\left(\begin{matrix}\mu = E[X_i], \\ \sigma^2 = Var(X_i)\end{matrix}\right)$

$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ è la v.a. che descrive il rifornimento totale

$$\Rightarrow E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mu = n \cdot \mu = 8 \cdot 10^6$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\text{ind.}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n \cdot \sigma^2 = (85'381)^2$$

Inoltre, $X \overset{TLC}{\approx} N(n\mu, n \cdot \sigma^2)$

Vogliamo calcolare $P(X > 8{,}3 \cdot 10^6) =$

$$P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} > \frac{8{,}3 \cdot 10^6 - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right) = P\left(\frac{X - n\cdot\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{8{,}3 \cdot 10^6 - n\cdot\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{8{,}3 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^6}{85'381}\right) = P(Z > 3.51) \approx 0$$

lo si vede dalle tavole

■

Ex. 8

X è la v.a. che descrive quanti studenti frequentano il corso

$\Rightarrow X \sim Bin(n, p)$, con $p = 0.3$ e $n = 450$

$\overset{(TLC)}{\Rightarrow} X \sim N(np, np(1-p))$

$\Rightarrow P(\underbrace{X > 150{,}5}) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{150{,}5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$

lo "0.5" si aggiunge, in quanto stiamo approssimando una v.a. discreta con una continua

$= P\left(Z > \frac{150{,}5 - 450 \cdot 0{,}3}{\sqrt{450 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}}\right)$

$= P(Z > 1.59)$

$= 1 - P(Z \leq 1.59) = 1 - \underbrace{0{,}9441}_{\text{tavole}} = 0.0559$ ∎