Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche

Tiziano Villa

18 Febbraio 2011

Nome e Cognome:
Matricola:
Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	10	
problema 2	10	
problema 3	10	
totale	30	

1. Si consideri il seguente sistema di transizione T:

   - stati: a, b, c, d, e; a stato iniziale e tutti gli stati finali;
   - transizione da a a b: con evento 0,
     transizione da a a c: con evento 0,
     transizione da b a d: con evento 0,
     transizione da b a e: con evento 0,
     transizione da c a d: con evento 0,
     transizione da c a e: con evento 0,
     transizione da d a b: con evento 1,
     transizione da e a a: con evento 1.

   Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre la lettera corrispondente in ogni risposta):

   (a) Si mostri il grafo di T.

   (b) Dato il sistema di transizione T e la relazione d'equivalenza R, si definisca T/R, cioe' il sistema di transizione quoziente di T rispetto alla relazione di equivalenza R.
   Data la relazione d'equivalenza $R_0 = \{\{a, b, c, d, e\}\}$, si mostri il grafo di T/R_0.

   (c) Si definisca la nozione di simulazione tra due sistemi di transizione.
   Si verifichi se T simula T/R_0 e viceversa se T/R_0 simula T (esibendo la relazione di simulazione se esiste, o la ragione per cui non esiste).
   Traccia di soluzione.
   Dati $T_1 = (S_1, \Sigma, \rightarrow_1, S_{0_1}, S_{F_1})$ e $T_2 = (S_2, \Sigma, \rightarrow_2, S_{0_2}, S_{F_2})$, una **simulazione** di T_1 da parte di T_2 e' una relazione binaria $\sim \subseteq S_1 \times S_2$ tale che $\forall \sigma \in \Sigma$:

      i. $\forall s_{0_1} \in S_{0_1}\ \exists s_{0_2} \in S_{0_2}$ tale che $s_{0_1} \sim s_{0_2}$
      ii. $s_1 \sim s_2\ \wedge\ (s_1, \sigma, s_1') \in \rightarrow_1\ \Rightarrow\ \exists s_2'\, [s_1' \sim s_2'\ \wedge\ (s_2, \sigma, s_2') \in \rightarrow_2]$

   (definizione adattata da quella della bisimulazione di sistemi di transizione)

   T/R_i simula T, per $i = 0, \ldots, 4$, come spiegato nel punto finale. Ogni stato s in T e' simulato dallo stato B in T/R_i tale che $s \in B$.

T non simula T/R_0; ad es. non c'e' una transizione sotto 1 dallo stato iniziale a di T, mentre c'e' una transizione sotto 1 dallo stato iniziale $\{a, b, c, d, e\}$ di T/R_0.

(d) Data la relazione d'equivalenza $R_1 = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$, si mostri il grafo di T/R_1.

Si verifichi se T simula T/R_1 e viceversa se T/R_1 simula T. Traccia di soluzione

T non simula T/R_1; a dovrebbe simulare $\{a, b, c\}$, ma quando $\{a, b, c\}$ sotto 0 va in $\{d, e\}$, a sotto 0 va in b o c pero' ne' b ne' c simulano $\{d, e\}$ (non hanno transizioni sotto 1).

(e) Data la relazione d'equivalenza $R_2 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$, si mostri il grafo di T/R_2.

Si verifichi se T simula T/R_2 e viceversa se T/R_2 simula T.

Traccia di soluzione

T non simula T/R_2; sotto l'ingresso 00 T/R_2 va in $\{d, e\}$ e T va o in d o in e, ma ne' d ne' e simulano $\{d, e\}$. Infatti $\{d, e\}$ puo' produrre la stringa 1010 che e non puo' produrre, inoltre $\{d, e\}$ puo' produrre la stringa 1001 che d non puo' produrre.

(f) Data la relazione d'equivalenza $R_3 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{e\}\}$, si mostri il grafo di T/R_3.

Si verifichi se T simula T/R_3 e viceversa se T/R_3 simula T.

Traccia di simulazione

T simula T/R_3, come indicato dalla seguente relazione di simulazione

$$R'_{T/R_3-T} = \{(\{a\}, a), (\{b, c\}, b), (\{d\}, d), (\{e\}, e)\},$$

oppure da

$$R''_{T/R_3-T} = \{(\{a\}, a), (\{b, c\}, c), (\{d\}, d), (\{e\}, e)\},$$

la cui unione

$$R_{T/R_3-T} = \{(\{a\}, a), (\{b, c\}, b), (\{b, c\}, c), (\{d\}, d), (\{e\}, e)\}$$

da' la relazione di simulazione massima.

(g) Data la relazione d'equivalenza $R_4 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$, si mostri il grafo di T/R_4.

Si verifichi se T simula T/R_4 e viceversa se T/R_4 simula T.

Traccia di soluzione

T simula T/R_4 poiche' i due grafi sono isomorfi.

(h) Si traggano delle conclusioni sull'esistenza di una simulazione tra T e T/R, e viceversa.

Traccia di soluzione

Se R e' una relazione d'equivalenza su T, e' sempre vero che T/R simula T. Ogni stato s in T e' simulato dallo stato B in T/R tale che $s \in B$. Dato che una relazione d'equivalenza partiziona gli stati di T in blocchi disgiunti, per ogni stato s in T c'e' un unico blocco B di T/R che contiene s.

Nell'altro verso in generale non e' vero che T simuli T/R. Cio' avviene solo quando la relazione di equivalenza e' stata definita in modo da preservare la funzione di transizione, intuitivamente quando gli stati accorpati in un medesimo blocco della relazione di equivalenza generano i medesimi linguaggi, cioe' sono equivalenti come comportamento.

2. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i, $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j.

   Si consideri la rete di Petri P_{19} definita da:

   - $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
   - $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$
   - $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (p_3, t_3), (p_4, t_4), (p_4, t_5), (t_1, p_2), (t_2, p_3), (t_3, p_4), (t_4, p_1), (t_5, p_2)\}$
   - $\forall i, j \; w(p_i, t_j) = 1$, tranne che $w(p_3, t_3) = 2$
   - $\forall i, j \; w(t_i, p_j) = 1$, tranne che $w(t_1, p_2) = 3$

   Sia $x_0 = [1, 0, 0, 0]$ la marcatura iniziale.

   (a) Si disegni il grafo della rete di Petri P_{19}.

(b) Una condizione necessaria affinche' uno stato x sia raggiungibile da uno stato iniziale x_0 e' che ci sia una soluzione z con interi non-negativi dell'equazione

$$x = x_0 + zA$$

dove A e' la matrice d'incidenza della rete di Petri.

- Dato $x = [0, 0, 1, 1]$, si risolva il sistema ottenendo z. E' verificata la condizione necessaria ?
  Traccia di soluzione
  Gli elementi della matrice A sono definiti come

  $$a_{j,i} = w(t_j, p_i) - w(p_i, t_j)$$

  da cui

  $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

  Il sistema si riduce a

  $$\begin{aligned} 1 - z_1 + z_4 &= 0 \\ 3z_1 - z_2 + z_5 &= 0 \\ z_2 - 2z_3 &= 1 \\ z_3 - z_4 - z_5 &= 1 \end{aligned}$$

  Ci sono 4 equazioni con 5 incognite ed il sistema e' indeterminato. La soluzione e' $z = [1 + k, 3 + 4k, 1 + 2k, k, k]$; si scelga $k = 0$ e si ha $z = [1, 3, 1, 0, 0]$ (si cercano soluzioni non-negative). La condizione necessaria e' verificata. Si noti che l'esistenza di un numero infinito di soluzioni e' legata ai cicli della rete di Petri, cioe' all'esistenza di un numero infinito di percorsi per raggiungere la locazione destinazione.
- Qual e' l'interpretazione del vettore z ? Dopo aver trovato il vettore z, si stabilisca se in questo esempio la condizione e' anche sufficiente, cioe' se x e' raggiungibile da x_0, esibendo una sequenza ammissibile di scatti che porta la rete dallo stato x_0 allo stato x.
  Traccia di soluzione

La componente i-esima del vettore z denota il numero di volte che la transizione t_i deve scattare per passare dello stato x_0 allo stato x.
Si puo' raggiungere x a partire da x_0. Una sequenza di scatti e' t_1, t_2, t_2, t_2, t_3, un'altra e' t_1, t_2, t_2, t_3, t_2. Percio' la condizione e' anche sufficiente.

(c) Usando lo stesso metodo matriciale si stabilisca se esiste una sequenza di transizioni che dallo stato iniziale x_0 porta la rete nuovamente nello stato iniziale x_0. Se esiste, si mostri una sequenza ammissibile di scatti.

Traccia di soluzione

Si tratta di risolvere il sistema

$$x_0 = x_0 + zA.$$

Il sistema si riduce a

$$\begin{aligned} 1 - z_1 + z_4 &= 1 \\ 3z_1 - z_2 + z_5 &= 0 \\ z_2 - 2z_3 &= 0 \\ z_3 - z_4 - z_5 &= 0 \end{aligned}$$

che per considerazioni come nel caso precedente ha infinite soluzioni. Una soluzione e' $z = [1, 4, 2, 1, 1]$. Una sequenza relativa di scatti e' $t_1, t_2, t_2, t_2, t_3, t_5, t_2, t_3, t_4$; un'altra sequenza di scatti e' $t_1, t_2, t_2, t_3, t_5, t_2$ t_2, t_3, t_4.

(d) Si costruisca il grafo di raggiungibilita' della rete di Petri P_{19}.

Traccia di soluzione

Il grafo di raggiungibilita' avrebbe un numero infinito di nodi. Per avere una rappresentazione (semplificata) finita si potrebbe ricorrere all'albero di copertura. In pratica ci si potrebbe limitare a rappresentare la parte del grafo fino a nodi che 1) o dominino nodi precedenti (che generano un ω nell'albero di copertura), 2) o corrispondano a stati morti o ripetuti.

3. Si consideri un impianto G con $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma_{uc} = \{b\}$, $L(G) = \overline{a^\star b a^\star}$ (cioe' il linguaggio ottenuto dai prefissi delle stringhe dell'espressione regolare $a^\star b a^\star$), $L_m(G) = a^\star b a^\star$.

   Si supponga che il linguaggio generato desiderato sia dato da $K^n = \{a^k, k > n\} \cup \overline{\{a^k b a^\star, k \leq n\}} \subseteq L(G)$, cioe' si richiede che l'impianto controllato blocchi l'evento b dopo $n+1$ occorrenze iniziali dell'evento a.

   (a) Il linguaggio K^n e' controllabile ? Si enunci la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si applichi al caso.
   Si mostrino il grafo di G e quello della specifica K^n per $n = 2$.
   Traccia di soluzione
   Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E, con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K e' controllabile rispetto a M e E_{uc}, se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

   $$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

   [equivalente a $\overline{K} E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$]
   Per la definizione di controllabilita', si ha che K e' controllabile se e solo se $\overline{K}$ e' controllabile.
   Si applichi la definizione di controllabilita' al nostro esempio dove $M = L(G)$.
   $K^n, n \geq 0$ non e' controllabile. Ad esempio, $a^{n+1} \in \overline{K^n}$, $a^{n+1} b \in L(G) \setminus \overline{K^n}$.
   Intuitivamente, dopo che l'impianto produce l'evento a per $n+1$ volte di seguito, dovrebbe disabilitare b per rimanere nella parte di specifica pertinente che e' $\{a^k, k > n\}$, ma non puo' farlo perche' b e' incontrollabile.

   (b) Si descriva brevemente un algoritmo per calcolare il sottolinguaggio controllabile supremo $K^{\uparrow C}$ contenuto in una data specifica K e lo si applichi a K^n per $n = 2$.
   Traccia di soluzione
   Si puo' usare l'algoritmo generale per il calcolo di $K^{\uparrow C}$ quando K non e' chiuso rispetto al prefisso, anche se nel nostro caso K^n e' chiuso rispetto al prefisso e percio' potremmo usare la formula esplicita per tale caso ristretto.
   L'algoritmo generale richiede di eseguire il prodotto $H_0 = H \times G$ su cui iterare una procedura di rimozione di stati e transizioni, usando la regola

per cui si elimina uno stato (h, g) del prodotto se c'e' un evento incontrollabile non definito per (h, g) ma definito invece per la componente di stato g nell'automa G. [Inoltre ad ogni iteratione si applica l'operatore di raggiungibilita' e co-raggiungibilita' se il linguaggio marcato e' diverso da quello generato, che non e' il nostro caso]. Si vedano le dispense per la descrizione precisa dell'algoritmo.

Il sottolinguaggio controllabile supremo e' dato da $(K^n)^{\uparrow C} = \overline{\{a^k ba^\star, k \leq n\}}$.

Si allega uno schizzo dei grafi degli automi richiesti e del calcolo di $(K^n)^{\uparrow C}$ per $n = 2$.

Addendum Si noti che l'algoritmo specializzato per K chiuso rispetto al prefisso richiede il calcolo di

$$(K)^{\uparrow C} = K \setminus [(M \setminus K)/E_{uc}^\star]E^\star$$

dove $/$ denota l'operatore quoziente su linguaggi.

L'operatore quoziente per i linguaggi $L_1, L_2 \subseteq E^\star$ si definisce come

$$L_1/L_2 = \{s \in E^\star : (\exists t \in L_2)[st \in L_1]\}.$$

Alternativamente, uno potrebbe calcolare il sottolinguaggio controllabile supremo eliminando iterativamente le stringhe che hanno fallito la verifica di controllabilita' e poi riapplicando la verifica di controllabilita' stessa.

L'algoritmo che lavora sul prodotto $H_0 = H \times G$ e' la procedura piu' adatta ai calcoli manuali e automatici.