

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

21 Giugno 2019

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	18	
problema 2	6	
problema 3	6	
totale	30	

1. (a) Si presenti l'algoritmo di minimizzazione di macchine a stati finiti deterministiche.

Traccia di risposta.

Si veda Lez. 13, p. 20, p. 22.

- (b) Si presenti un algoritmo per verificare se due macchine a stati finiti deterministiche sono equivalenti, se ne giustifichi la correttezza (enunciando il teorema su cui si basa) e se ne discuta la complessità.

Traccia di risposta.

Si utilizzano i seguenti teoremi

- Due macchine a stati finiti deterministiche M_1 e M_2 sono equivalenti se e solo se c'è una bisimulazione tra M_1 e M_2 .
- C'è una bisimulazione tra due macchine a stati finiti deterministiche M_1 e M_2 se e solo se c'è un isomorfismo tra $\min(M_1)$ e $\min(M_2)$.
[Si noti che $\min(M)$ produce la macchina unica con meno stati bisimile a M]

Ne risulta l'algoritmo:

- i. Minimizzare M_1 ottenendo $\min(M_1)$;
- ii. Minimizzare M_2 ottenendo $\min(M_2)$;
- iii. Verificare se $\min(M_1)$ e $\min(M_2)$ sono identiche a meno di ridenominazione degli stati (versione semplificata dell'isomorfismo tra grafi perché ci sono stati iniziali e etichette sui lati che guidano la verifica dell'isomorfismo).

La complessità della minimizzazione degli stati di una macchina a stati finiti è quadratica nel numero degli stati (l'algoritmo più efficiente è dell'ordine $O(n \log n)$) e lineare nella cardinalità dell'insieme degli ingressi $|I|$. Questa versione ristretta dell'isomorfismo tra grafi è lineare nel numero degli stati (si noti che è necessario che $\min(M_1)$ e $\min(M_2)$ abbiano lo stesso numero di stati affinché siano isomorfe).

[La procedura comunemente presentata nei libri di testo di reti logiche per minimizzare macchine completamente specificate usando una tabella a scala ha complessità $O(n^4|I|)$: la costruzione della tabella iniziale richiede $O(n^2|I|)$ operazioni (confronto di $(n-1)n/2$ coppie di stati ciascuna per $|I|$ ingressi), ogni iterazione richiede $O(n^2|I|)$ operazioni (esame di $(n-1)n/2$ caselle che contengono al più $|I|$ condizioni) e ci sono al più $O(n^2)$ iterazioni ($(n-1)n/2$ iterazioni se l'unica croce contenuta nella casella iniziale si propaga a tutte le altre caselle un passo per iterazione). Analisi di Luccio-Pagli]

(c) Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina M' :

- stati: $s'_a, s'_b, s'_c, s'_d, s'_e$ con s'_a stato iniziale;
- transizione da s'_a a s'_b : $\bullet/0$,
transizione da s'_a a s'_c : $\bullet/0$,
transizione da s'_b a s'_d : $\bullet/0$,
transizione da s'_c a s'_e : $\bullet/1$,
transizione da s'_d a s'_d : $\bullet/0$,
transizione da s'_e a s'_e : $\bullet/0$.

Macchina M'' :

- stati: $s''_x, s''_y, s''_z, s''_u$ con s''_x stato iniziale;
- transizione da s''_x a s''_y : $\bullet/0$,
transizione da s''_y a s''_z : $\bullet/0$,
transizione da s''_y a s''_u : $\bullet/1$,
transizione da s''_z a s''_z : $\bullet/0$,
transizione da s''_u a s''_u : $\bullet/0$.

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

- i. Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.
- ii. Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.
Traccia di risposta.
 M' e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.
 M'' e' pseudo-nondeterministica.
- iii. Si derivino i comportamenti (successioni d'ingressi/successioni d'uscite) prodotti dalle due macchine e li si confrontino.
Traccia di risposta.
Per descrivere i comportamenti si possono usare le espressioni regolari.
 $\text{Comportamenti}(M') = (\bullet 0)^* + (\bullet 0)(\bullet 1)(\bullet 0)^*.$
 $\text{Comportamenti}(M'') = (\bullet 0)((\bullet 0)^* + (\bullet 1)(\bullet 0)^*).$
Dall'algebra delle espressioni regolari si vede che
 $\text{Comportamenti}(M') = \text{Comportamenti}(M'').$
- iv. Si trovi una simulazione di M' da parte di M'' , se esiste.
Traccia di risposta.
 M' e' simulata da M'' come mostrato dalla relazione

$$R_{M'-M''} = \{(s'_a, s''_x), (s'_b, s''_y), (s'_c, s''_y), (s'_d, s''_z), (s'_e, s''_u)\}.$$

- v. Si trovi una simulazione di M'' da parte di M' , se esiste.

Traccia di risposta.

M'' non è simulata da M' perché s''_x dovrebbe essere simulato da s'_a e quindi a sua volta ci dovrebbe essere uno stato di M' che simula s'_y , ma tale stato non esiste (né s'_b , né s'_c simulano s'_y perché nessuno dei due ha sia una transizione con uscita 1 sia una transizione con uscita 0).

- vi. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste.

Traccia di risposta.

Poiché M'' non è simulata da M' non ci può essere una bisimulazione tra le due macchine.

- vii. Si commentino i risultati precedenti.

Traccia di risposta.

Le due macchine M' e M'' sono un esempio di macchine a stati finiti nondeterministiche equivalenti e ciascuna minimizzata (nella classe delle macchine bisimili), ma non isomorfe; in altri termini, esse mostrano che non esiste un'unica macchina a stati finita nondeterministica che realizza il sistema originale con il minimo numero di stati.

Si ricordi che se M' è simulata da M'' allora M' raffina M'' . In generale non vale il viceversa, cioè per M' e M'' nondeterministiche il fatto che M'' raffini M' non implica che ci sia una simulazione di M'' da parte di M' (ad es. nel nostro caso non c'è). Ma se M' nondeterministica raffina M'' pseudo-nondeterministica allora esiste una simulazione di M' da parte di M'' (e infatti nel nostro caso c'è).

2. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i , $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j .

Si consideri la rete di Petri P_{svinc} definita da:

- $P = \{p_1, p_2\}$
- $T = \{t_1, t_2\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (t_1, p_2), (t_2, p_1)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$

Sia $x_0 = [2, 0]$ la marcatura iniziale.

- (a) Si disegni il grafo della rete di Petri P_{svinc} .

- (b) Si modifichi la rete di Petri P_{svinc} per ottenerne una “rete controllata” P_{vinc} che soddisfa il vincolo $x(p_2) \leq x(p_1)$, per tutte le marcature raggiungibili da quella iniziale (cioè deve valere sempre che il numero di gettoni in p_2 è \leq del numero di gettoni in p_1).

Suggerimento.

Si aggiunga un solo posto.

Traccia di soluzione.

Si consideri la rete di Petri P_{vinc} definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{t_1, t_2\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (p_3, t_1), (t_1, p_2), (t_2, p_1), (t_2, p_3)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$

Sia $x_0 = [2, 0, 1]$ la marcatura iniziale.

- (c) Si costruisca il grafo di raggiungibilit  della rete di Petri iniziale e di quella modificata, verificando che il primo non soddisfa il vincolo, mentre il secondo lo soddisfa.

Traccia di soluzione.

La rete non controllata evolve dalla marcatura iniziale $[2,0]$ a $[1,1]$ e da qui a $[0,2]$ e $[2,0]$, e da $[0,2]$ a $[1,1]$ e poi ripetendo i nodi gi  visti. La marcatura $[0,2]$ non soddisfa il vincolo.

La rete controllata soddisfa il vincolo evolvendo da $[2,0,1]$ a $[1,1,0]$ e da qui a $[2,0,1]$ e poi ripetendo.

La soluzione in questo caso semplice si ottiene agevolmente modificando ad hoc la rete data. Esiste un metodo sistematico per ottenerla in generale, non presentato in classe.

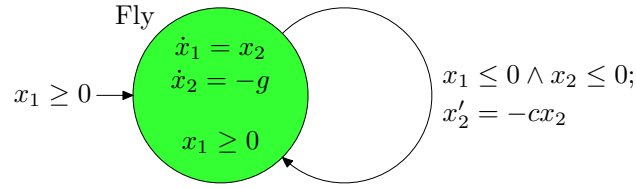


Figure 1: La palla che rimbalza

3. Si consideri l'automa ibrido mostrato nella Fig. 1 che modella un oggetto elastico di posizione $x_1(t)$ e velocità $x_2(t)$ che cade al suolo per la legge di gravitazione e rimbalza con coefficiente di elasticità c . Si assuma che sia $c = 0,5$.

(a) Si descriva formalmente tale automa secondo la notazione usata in classe.

Traccia di soluzione.

- locazioni: $Q = \{l_1\}$, dove l_1 è la locazione iniziale con condizioni iniziali $x_1(t) \geq 0$;
- dinamica della locazione l_1 : $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = -g$,
invariante della locazione l_1 : $x_1(t) \geq 0$
- transizione da l_1 a l_1 : $A/\text{assente}, x'_2(t) := -0,5x_2$,
dove $A = \{(x_1(t), x_2(t), u(t)) \mid x_1(t) \leq 0 \wedge x_2(t) \leq 0 \wedge u(t) = \text{assente}\}$,
(la sintassi delle annotazioni di una transizione è *guardia/uscita, azione*);
- ingresso $u(t) \in \{\text{assente}\}$;
- uscita $y(t) \in \{\text{assente}\}$.

- (b) Si descriva il funzionamento del sistema in base alla semantica dell'automato ibrido che lo rappresenta.

Si descrivano qualitativamente le traiettorie descritte dalle variabili continue x_1 e x_2 . Per fissare le idee, si assumano i valori iniziali $x_1 = 5$ e $x_2 = 0$.

Traccia di soluzione.

Per una descrizione del comportamento e disegni di traiettorie della posizione e della velocità si consulti il materiale di testo (Lee-Varaiya o Lee-Seshia).