2

Calcolo differenziale

2.1 Derivate direzionali, differenziabilità

(1.1) Esercizio *Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni*

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}, \quad f(x,y) = x^4y^2 - 3xy + 2y,$$

$$f(x,y) = \sin(x+y)\cos(x+y), \quad f(x,y) = \frac{x^2+3xz+y^2}{z},$$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad f(x,y) = \log(x^2+y^2)\,.$$

Risoluzione. Per la prima funzione, risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xe^{-x^2-y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2ye^{-x^2-y^2}.$$

Per la seconda funzione, risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yx^4 - 3x + 2.$$

Le altre derivate sono lasciate allo studente. ■

(1.2) Esercizio *Sia f definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(i) *studiare la continuità di f in* $(0,0)$ *;*

(ii) *dire se f ammette derivate parziali in* $(0,0)$ *e, in caso affermativo, calcolarle ;*

(iii) *dire se f è differenziabile in* $(0,0)$ *e, in caso affermativo, calcolarlo .*

Risoluzione. In coordinate polari piane, risulta

$$|F(\varrho,\vartheta)| = |f(\varrho\cos\vartheta,\varrho\sin\vartheta)| = |\varrho\cos\vartheta\sin^2\vartheta| \le \varrho,$$

per ogni $\vartheta \in [0,\pi[$ e $\varrho > 0$. Ne segue che la funzione f è continua in $(0,0)$. Passiamo ora al punto (ii). Evidentemente f ammette entrambe le derivate parziali (nulle) in $(0,0)$, essendo

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \qquad \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$. Quanto alla differenziabilità, essendo le derivate parziali di f nulle, l'unico possibile candidato per il differenziale della funzione è $df(0,0) = 0$. D'altra parte, per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ si ha

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \psi(x,y).$$

Passando in coordinate polari, si ha

$$G(\varrho,\vartheta) = \psi(\varrho\cos\vartheta,\varrho\sin\vartheta) = \cos\vartheta\sin^2\vartheta,$$

da cui si vede che ψ non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$, per cui la funzione data, continua e derivabile parzialmente, non è differenziabile. ■

(1.3) Esercizio *Sia* $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x,y) = \frac{\sin^2(xy)}{x^2+y^2}$$

(i) *mostrare che* f *si prolunga con continuità a tutto* $\mathbb{R}^2$ *;*
(ii) *dire se il prolungamento è differenziabile ;*

Risoluzione. Evidentemente vale la (i), ossia la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua, come si vede subito ragionando in coordinate polari. Passiamo alla (ii). La funzione ammette entrambe le derivate parziali (nulle) nell'origine, come si verifica facilmente con la definizione (quindi, se fosse differenziabile, si avrebbe $df(0,0) = 0$). Risulta

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sin^2(xy)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \psi(x,y)$$

Si verifica subito passando in coordinate polari che ψ va a zero per $(x,y) \to (0,0)$ (si osservi che il numeratore è di grado 4, mentre il denominatore è di grado 3!). ■

(1.4) Esercizio *Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right),$$

fuori dagli assi coordinati e prolungata con continuità. Provare che f è differenziable.

Risoluzione. L'unico prolungamento continuo è

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ o } y = 0. \end{cases}$$

Con un tale prolungamento a funzione ammette derivate parziali (nulle) nell'origine (quindi $df(0,0) = 0$ è l'unico possibile candidato per il differenziale di f). Risulta, per $x \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \psi(x,y).$$

Si verifica subito passando in coordinate polari che ψ va a zero per $(x,y) \to (0,0)$ (si osservi che il numeratore è *stimabile* con termini di grado 2, mentre il denominatore è di grado 1). ∎

(1.5) Esercizio *Sia f definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Verificare che esistono le derivate parziali seconde di f in $(0,0)$ ma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Risoluzione. Anzitutto, la funzione f è derivabile e risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

per ogni (x,y) diverso dall'origine e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Si ha

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = -1, \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1,$$

per ogni h, da cui la tesi. ∎

(1.6) Esercizio *Sappiamo che se $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ed $\ell\in\mathbb{R}$ sono tali che*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\ell,$$

$$\forall y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\ \lim_{x\to 0} f(x,y)=\varphi(y),\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\ \lim_{y\to 0} f(x,y)=\psi(x),$$

allora

$$\lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{x\to 0}\psi(x)=\ell.$$

Verificare che se f è assegnata ponendo

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

si ha

$$\lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{x\to 0}\psi(x)=0,$$

benchè f non ammetta limite in $(0,0)$.

Risoluzione. Si tratta di mostrare che f non ammette limite, nonostante esista il limite (nullo) su ogni sezione. A questo scopo, basta osservare che $f(x,x)=1$ per ogni $x\neq 0$. ■

(1.7) Esercizio *Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ derivabile parzialmente e supponiamo che esistano $\varrho>0$ e $M>0$ tali che*

$$\forall (x,y)\in B(0,\varrho):\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\le M,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\le M.$$

Verificare che, allora, f è continua in $(0,0)$.

Risoluzione. da completare ■

(1.8) Esercizio *Per $\alpha\in\mathbb{R}^+$ sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x,y)=\begin{cases}|x|^\alpha|y|^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x-1} & \text{se } (x,y)\neq(1,y)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(1,y).\end{cases}$$

Al variare di $\alpha\in\mathbb{R}^+$ studiare la continuità e la differenziabilità di f su $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(1.9) Esercizio *Per $\alpha\in\mathbb{R}$ sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x,y)=\begin{cases}|x-y^2||y|^\alpha & \text{se } y\neq 0\\ 0 & \text{se } y=0\,.\end{cases}$$

Studiare la continuità e la differenziabilità di f su $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione. da completare ■

(1.10) Esercizio *Per $\alpha\in\mathbb{R}$ sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}+y & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Studiare la continuità e la differenziabilità di f.

Risoluzione. In coordinate polari si ha

$$f(\varrho\cos\vartheta,\varrho\sin\vartheta)=\varrho^\alpha+\varrho\sin\vartheta,$$

per cui basta che $\alpha>0$ per garantire la continuità di f. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\alpha x(x^2+y^2)^{\frac{\alpha-2}{2}},\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\alpha y(x^2+y^2)^{\frac{\alpha-2}{2}}+1.$$

Per $\alpha\geq 2$ tali derivate parziali sono continue e quindi, per il teorema del differenziale totale, la funzione risulta differenziabile. ■

(1.11) Esercizio *Sia*

$$f(x,y)=y-\int_0^y e^{-x^2t^2}\,dt$$

Dire dove f è definita, dove f è continua e dove è differenziabile.

Risoluzione. La funzione integranda risulta integrabile in senso improprio per ogni $x\neq 0$ D'altra parte, per $x=0$, si ha $f(0,y)=0$ per ogni $y\in\mathbb{R}$. Pertanto, il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\int_0^y t^2e^{-x^2t^2}\,dt,\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1-e^{-x^2y^2},$$

che risultano continue su $\mathbb{R}$ per cui la funzione è differenziabile. ■

(1.12) Esercizio *Sia $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione definita ponendo*

$$g(x,y)=\int_0^{x^2+2y^3}\sin(4x-y+t)\,dt\,.$$

Si calcoli $\frac{\partial g}{\partial x}(3,1)$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(1.13) Esercizio *Sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Provare che le derivate di f non sono continue in $(0,0)$ e ma che f è differenziabile in $(0,0)$.

Risoluzione. L'esercizio mostra come le ipotesi del teorema del differenziale totale siano solo condizioni sufficienti a garantire la differenziabilità. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}h\sin\frac{1}{h^2}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}h\sin\frac{1}{h^2}=0.$$

Pertanto l'unico candidato per il differenziale di f è $df(0,0)=0$. Essendo

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

si verifica subito passando in coordinate polari che la funzione è differenziabile in $(0,0)$. Sempre ragionando in coordinate polari si vede invece che le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ non possono avere limite nullo per $(x,y)\to(0,0)$, quindi non sono continue. ■

(1.14) Esercizio *Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ differenziabile in $(0,0)$. Si sa che $f(x,-x)=0$ e che $f(x,x)=2x$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Calcolare*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(1.15) Controesempio *Fare l'esempio di una funzione derivabile ma non differenziabile.*

Risoluzione. Consideriamo la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Con la definizione di derivata direzionale, si verifica facilmente che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

per cui f è derivabile in $(0,0)$. Daltronde, si ha

$$f(x,x) = \frac{1}{2}, \qquad f(x,-x) = -\frac{1}{2},$$

per cui f non può essere continua in $(0,0)$. A maggior ragione f non può essere differenzabile in $(0,0)$. ∎

(1.16) Esercizio *Provare che la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

è derivabile in $(0,0)$ *rispetto ad ogni direzione ma che non è differenziabile in* $(0,0)$.

Risoluzione. Per ogni direzione (v,w) di $\mathbb{R}^2$, si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(hv,hw)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{hv^2 w}{h^2 v^4 + w^2}\right)^2 = 0.$$

D'altra parte la funzione non è nemmeno continua in $(0,0)$, essendo $f(x,x^2) = 1/4$ per ogni $x \neq 0$ e $f(0,0) = 0$. ∎

(1.17) Esercizio *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Si consideri la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+\alpha}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità e la differenziabilità di f *in* $\mathbb{R}^2$ *al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. Evidentemente f è continua e differenziabile in ogni $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Consideriamo al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità e differenziabilità in $(0,0)$. Se $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\cos(\vartheta)+\alpha}{\varrho^{2\alpha}} = +\infty, \quad \vartheta \in [0, 2\pi[,$$

per cui f non è continua in $(0,0)$. In particolare f non è differenziabile in $(0,0)$. Se $\alpha = 0$ si ha

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (x,y). \end{cases}$$

per cui f è continua in $(0,0)$. Inoltre, per $(x,y) \neq (0,0)$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

fuori dall'origine e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

per cui $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ sono continue e f è differenziabile in $(0,0)$ per il teorema del differenziale totale. Consideriamo ora il caso $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(1-2\alpha)x^2 + y^2 - 2\alpha^2 x}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2\alpha xy - 2\alpha^2 y}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}},$$

fuori dall'origine. D'altra parte si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h+\alpha}{h^{2\alpha+1}}$$

limite che non esiste finito. Pertanto f non è differenziable in $(0,0)$. Nel caso $\alpha < -\frac{1}{2}$ le derivate prime $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ sono continue, e nulle in $(0,0)$, e f è differenziabile in $(0,0)$ nuovamente per il teorema del differenziale totale. ■

2.2 Gradienti, divergenze, Hessiani

(2.18) Esercizio *Siano $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ ed $b \in \mathbb{R}^n$ e definiamo la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ponendo*

$$f(x) = x^t Ax + bx.$$

Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana di f.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(2.19) Esercizio *Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia*

$$\Gamma = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$$

la parametrizzazione di una curva di livello per f. Dimostrare che Γ è ortogonale a ∇f.

Risoluzione. Essendo Γ una curva di livello per f, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x(t), y(t)) = c, \quad \forall t \in I.$$

Derivando rispetto a t, risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0,$$

che equivale a

$$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{t}(t) = 0,$$

dove $\mathbf{t}(t)$ è il vettore tangente alla curva in Γ all'istante t, da cui l'affermazione desiderata. ■

(2.20) Esercizio *Siano* $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile e crescente e sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x, y) = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Provare che per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *con* $(x, y) \neq (0,0)$ *si ha*

$$|\nabla f(x, y)| = \varphi'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Risoluzione. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

da cui

$$|\nabla f(x, y)|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 = \left(\varphi'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)^2,$$

da cui la tesi. ■

(2.21) Esercizio *Verificare che il gradiente delle funzioni*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = x^2 - y^2,$$

è ortogonale alle curve di livello nei punti in cui $\nabla f(x, y) \neq (0,0)$.

Risoluzione. Si proceda come indicato in precedenza. ■

(2.22) Esercizio *Sia* $f_{a,b,c} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da*

$$f_{a,b,c}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2bxz + 2cyz.$$

Calcolare $\nabla f(x, y, z)$, $H_f(x, y, z)$ *al variare di* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Determinare al variare di* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *i punti* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tali che* $\nabla f(x, y, z) = 0$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(2.23) Esercizio *Si determini al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il segno delle forme quadratiche*

$$Q_\lambda(x,y,z) = x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2\lambda yz + z^2$$

$$Q_\lambda(x,y,z,t) = -2x^2 + \lambda y^2 - z^2 - t^2 + 2xz + 4yt + 2\lambda zt$$

Risoluzione. Si ragioni sulle matrici Hessiane delle funzioni Q_λ e si utilizzino poi proprietà di algebra lineare. ■

(2.24) Esercizio *Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due funzioni di classe C^1. Dimostrare la seguente identità differenziale*

$$\mathrm{div}(fg) = \nabla f \cdot g + f\,\mathrm{div}(g)\,,$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(2.25) Esercizio *Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e consideriamo il campo scalare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$f(x) = \varphi(|x|)\,.$$

Calcolare $\nabla f(x)$ e $H_f(x)$. Provare inoltre che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \varphi''(|x|) + (n-1)\frac{\varphi'(|x|)}{|x|}\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. Si procede come indicato in un analogo esercizio precedente. ■

(2.26) Esercizio *Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e consideriamo il campo scalare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$f(x) = \varphi(|x|^2)\,.$$

Provare che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = 4\varphi''(|x|^2)|x|^2 + 2n\varphi'(|x|^2)\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. Si procede come indicato in un analogo esercizio precedente. ■

(2.27) Esercizio *Sia* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *e consideriamo* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \varphi(|x|)\frac{x}{|x|}.$$

Calcolare $\operatorname{div} f(x)$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. Si procede come indicato in un analogo esercizio precedente. ∎

(2.28) Esercizio (Teorema di Eulero). *Sia* $\alpha > 0$ *e* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *tale che*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall t > 0 : \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Allora si ha

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \quad f(x) = \frac{1}{\alpha} \nabla f(x) \cdot x.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. Si tratta di derivare l'ipotesi rispetto a t e di scegliere poi $t = 1$. ∎

(2.29) Esercizio *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2. *Calcolare la matrice Hessiana*

$$\begin{bmatrix} f_{\varrho\varrho} & f_{\varrho\vartheta} \\ f_{\vartheta\varrho} & f_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix}$$

della funzione $f(\varrho\cos(\vartheta), \varrho\sin(\vartheta))$.

Risoluzione. Si tratta di un mero esercizio di derivazione di funzioni composte. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(2.30) Esercizio *Nelle notazioni dell'esercizio precedente dimostrare la seguente identità*

$$f_{xx} + f_{yy} = f_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} f_\varrho + \frac{1}{\varrho^2} f_{\vartheta\vartheta}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(2.31) Esercizio *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la funzione definita da*

$$f(x, y, z) = (e^{-x} y, e^{-y} xz, z^2 - x^2).$$

Calcolare $\operatorname{div} f(x, y, z)$, *la matrice Jacobiana e determinare la direzione di massima pendenza per il modulo di* f *in* $(1, 1, 1)$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. Si ricorda che la direzione di massima pendenza coincide con la direzione individuata dal gradiente. ■

(2.32) Esercizio *Sia $f(x,y) = y - \sin(xy)$. Per ognuno dei punti*

$$A \equiv \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \qquad B \equiv \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

dire se f definisce implicitamente una funzione in un intorno di $x = \frac{\pi}{2}$.

Risoluzione. Si ha

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 0,$$

ed essendo

$$\frac{\partial}{\partial y}(y - \sin(xy)) = 1 - x\cos(xy),$$

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1 - \frac{\pi}{2} \neq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 1 \neq 0,$$

per cui, per il teorema di Dini, la relazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione φ_A in un intorno di A e una funzione φ_B in un intorno di B. ■

2.3 Curve rettificabili

(3.33) Esercizio *Si calcoli la lunghezza delle seguenti curve parametriche*

$$\gamma_1 = \begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = y_0 + R\sin(t), \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq \pi$,

$$\gamma_2 = \begin{cases} x(t) = R\cos(t^2) \\ y(t) = y_0 + R\sin(t^2), \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq \sqrt{\pi}$,

$$\gamma_3 = \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^4, \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq 2$,

$$\gamma_4 = \begin{cases} x(t) = 2 + 2t \\ y(t) = 4 + 4t, \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Risoluzione.Le curve di questo esercizio sono tutte di classe C^1 nei loro intervalli di definizione. Pertanto, per calcolarne la lunghezza é sufficiente derivare le componenti rispetto a t e poi applicare la nota formula

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Calcoliamo la lunghezza della prima curva, lasciando le rimanenti per esercizio. Si ha

$$x'(t) = -R\sin(t)$$

e

$$y'(t) = R\cos(t).$$

Pertanto

$$L(\gamma_1) = \int_0^{\pi} \sqrt{(-R\sin(t))^2 + (R\cos(t))^2}\, dt = R\pi.$$

■

(3.34) Esercizio *Calcolare la lunghezza della curva regolare*

$$\gamma = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = |t|^{\frac{3}{2}} \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

per $0 \le t \le 1$.

Risoluzione. Come esercizio precedente osservando che la componente y ammette derivata destra in $t = 0$. ■

(3.35) Esercizio *Sia* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva di classe* C^1. *Provare che*

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \le L_{a,b}(\varphi),$$

dove $L_{a,b}$ *è la lunghezza della curva .*

Risoluzione. Poiché $\varphi \in C^1([a,b])$ allora φ é rettificabile. La sua lunghezza $L_{a,b}(\varphi)$ é definita come l'estremo superiore della lunghezza delle spezzate di φ ottenute con una partizione finita dell'intervallo $[a,b]$, dove l'estremo superiore é calcolato al variare di tutte le partizioni finite di $[a,b]$. La quantitá $|\varphi(b) - \varphi(a)|$ é la spezzata che si ottiene con una particolare partizione dell'intervallo $[a,b]$, ossia la partizione banale composta dai soli punti a e b. Pertanto la disuguaglianza é verificata. ■

(3.36) Esercizio *Determinare il baricentro dell'elica cilindrica*

$$\gamma = \begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \\ z(t) = Kt \end{cases}$$

per $0 \le t \le \pi$*, ossia calcolare*

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\,ds}{L(\gamma)}, \quad y_G = \frac{\int_\gamma y\,ds}{L(\gamma)}, \quad z_G = \frac{\int_\gamma z\,ds}{L(\gamma)}.$$

Risoluzione. La curva é rettificabile. Essendo di classe C^1 possiamo calcolarne la lunghezza con la nota formula. Si ha

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^\pi \sqrt{R^2+K^2}\,dt \\ &= \pi\sqrt{R^2+K^2}. \end{aligned}$$

Calcolando i semplici integrali delle singole componenti si ottengono le coordinate del baricentro utilizzando le formule presentate nel testo dell'esercizio. Si ottiene

$$x_G = 0, \quad y_G = \frac{2R}{\pi\sqrt{R^2+K^2}}, \quad z_G = \frac{K\pi}{2\sqrt{R^2+K^2}}.$$

■

(3.37) Esercizio *Calcolare la lunghezza dell'arco di catenaria*

$$\varphi(t) = \cosh(t), \qquad -a \le t \le a.$$

(3.38) Esercizio *Si determini la lunghezza e il baricentro della spirale (coor. pol.)*

$$\varrho(\vartheta) = e^{-\vartheta}, \qquad 0 \le \vartheta \le +\infty.$$

(3.39) Esercizio *Determinare la lunghezza dell'arco di cicloide*

$$\begin{cases} x(t) = R\vartheta - R\sin(\vartheta) \\ y(t) = R - R\cos(\vartheta), \end{cases}$$

per $0 \le \vartheta \le 2\pi$.

(3.40) Esercizio *Tra le ellissi*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}, \end{cases}$$

per $-a \le t \le a$, determinare quella di lunghezza massima.

(3.41) Esercizio *Sia (φ_h) una successione di curve di classe C^1 che converge ad una curva φ rispetto alla metrica*

$$d^1_\infty(f,g) = d_\infty(f,g) + d_\infty(f',g').$$

Dimostrare che

$$\lim_h L(\varphi_h) = L(\varphi).$$

(3.42) Esercizio *Dare un esempio di curva non rettificabile.*

Risoluzione. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione continua definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \sin \frac{\pi}{2x} & \text{se } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Proviamo che $\varphi(t) = (t, f(t))$ non è rettificabile. In effetti se $\mathfrak{P}_N$ è la poligonale individuata dalla partizione

$$0 = t_N < t_{N-1} < \cdots < t_i = \frac{1}{2i+1} < \cdots < t_0 = 1,$$

risulta

$$\ell(\mathfrak{P}_N) > \sum_{i=1}^{N-1} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\sqrt{4+16i^2}}{4i^2-1} > \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i},$$

per cui

$$\lim_{N\to+\infty} \ell(\mathfrak{P}_N) = +\infty,$$

e la curva non può essere rettificabile. ∎

2.4 Ottimizzazione libera

(4.43) Esercizio *Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto delle funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2, \qquad f(x,y) = \sinh(x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2).$$

Risoluzione. Consideriamo la prima funzione (lo svolgimento per la seconda funzione viene lasciato allo studente). La funzione (illimitata superiormente) risulta continua e differenziabile (più volte), con derivate prime

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2(x-y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 2(x-y),$$

che si annullano lungo $y = -x$, da cui, sostituendo nell'equazione $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, si ricavano i punti $(0,0)$, $(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2)$. Le derivate seconde valgono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2,$$

da cui

$$\mathscr{H}_f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathscr{H}_f(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Si verifica facilmente che la seconda matrice risulta definita positiva e quindi i punti $(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2)$ sono di minimo locale, mentre la prima matrice risulta semi-definita positiva. D'altra parte, ad esempio, si ha

$$f(x, x) - f(0,0) = 2x^4 \geq 0, \qquad f(x,0) - f(0,0) = x^4 - 2x^2 < 0, \text{ per } x \text{ piccolo},$$

per cui l'origine non è nè di massimo nè di minimo. In conclusione, la funzione data non ammette punti di massimo assoluto e ammette due punti di minimo assoluto. ∎

(4.44) Esercizio *Studiare i punti critici delle funzioni*

$$f(x, y) = x^4 - y^4, \qquad f(x, y) = xy(x - y).$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(4.45) Esercizio *Determinare gli estremi locali delle funzioni*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x, \qquad f(x, y) = x^2 + y^3 - (1 + x + y)^3.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(4.46) Esercizio *Determinare gli estremi locali delle funzioni*

$$f(x, y) = e^{x^4+y^3-4x^2-3y^2}, \qquad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(4.47) Esercizio *Determinare i massimi e minimi locali della funzione*

$$f_{a,b,c}(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.48) Esercizio *Determinare i punti di massimo e minimo assoluto per le funzioni*

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 + z^2 - xy, \qquad f(x,y,z) = x(y^2+z^2) - yz.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.49) Esercizio *Determinare gli eventuali massimi e minimi locali e assoluti delle funzioni* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x,y) = \sin(x+y) - \cos(x-y), \quad f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$f(x,y) = x(y-x)^{\frac{2}{3}}, \quad f(x,y) = x^2\log(1+y) + x^2y^2 \quad \text{(nel dominio)}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.50) Esercizio *Si studino, al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i punti di massimo e minimo per la funzione*

$$f(x,y) = \cos^2(x) + y^2 - 2y + 1 + \beta z^2,$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.51) Esercizio *Si calcolino al variare di* $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *i punti di massimo e minimo locali e assoluti della funzione* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f_n(x,y) = (x^2 + 3xy^2 + 2y^4)^n$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.52) Esercizio *Si studi la natura del punto* $(0,0)$ *per la funzione* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x,y) = \log(1+x^2) - x^2 + xy^2 + y^3 + 2.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.53) Esercizio *Si determinino gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto per le funzioni* $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x,y,z) = x^2(y-1)^3(z+2)^2, \quad f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.54) Esercizio *Si determini al variare di* $\lambda \in \mathbb{R}$ *il segno delle forme quadratiche*

$$Q_\lambda(x,y,z) = x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2\lambda yz + z^2$$

$$Q_\lambda(x,y,z,t) = -2x^2 + \lambda y^2 - z^2 - t^2 + 2xz + 4yt + 2\lambda zt$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.55) Esercizio *Si determini al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gli estremi assoluti e locali di della funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha \log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.56) Esercizio *Si determini al variare di* $\lambda \in \mathbb{R}$ *la natura del punto* $(0,0)$ *per le funzioni definite da*

$$f(x,y) = 2 + \lambda x^2 + 4xy + (\lambda - 3)y^2 + (2x+y)^4$$

$$f(x,y,z) = 5 + \lambda x^2 + 2xy + 4\lambda xz - 6y^2 - 3z^2.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.57) Esercizio *Trovare i punti critici della funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

e classificarli.

Risoluzione. Mediante calcolo con la definizione, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

Inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

Pertanto tutti i punti $(\alpha,\pm\alpha)$ sulle rette bisettrici $y=\pm x$ sono punti critici. Osserviamo ora che

$$f(x,y)-f(\alpha,\alpha)=\frac{xy}{x^2+y^2}-\frac{1}{2}=\frac{2xy-x^2-y^2}{x^2+y^2}=-\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\le 0$$

per cui si tratta di punti di massimo assoluto per f. Inoltre,

$$f(x,y)-f(\alpha,-\alpha)=\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{1}{2}=\frac{2xy+x^2+y^2}{x^2+y^2}=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\ge 0,$$

per cui si tratta di punti di minimo assoluto per f. Si noti che in $(0,0)$ la funzione data non risulta differenziabile (non risulta nemmeno continua) nonostante sia parzialmente derivabile con derivate nulle. ■

(4.58) Esercizio *Determinare estremi locali e assoluti della funzione*

$$f(x,y)=\frac{|xy|}{x+y-1}.$$

Determinare l'immagine del dominio $D=\mathrm{dom}(f)$ *tramite* f.

Risoluzione. Consideriamo i sottoinsiemi di R^2

$$A^+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y>1\},\qquad A^-=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y<1\}.$$

Si noti che A^+ e A^- sono sottoinsiemi disgiunti e connessi di $\mathbb{R}^2$ (disegnarli), quindi $f(A^+)$ e $f(A^-)$ sono degli intervalli in $\mathbb{R}$, essendo $f|_{A^\pm}$ delle funzioni continue, per il teorema dei valori intermedi. Inoltre, $D=A^+\cup A^-$, $f\ge 0$ su A^+ ed $f\le 0$ su A^-. Osserviamo che i punti (x,x) appartengono ad A^+ per ogni x sufficientemente grande e

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x-1}\to+\infty,\quad \text{per } x\to+\infty.$$

Inoltre, $(0,\gamma)\in A^+$ per ogni $\gamma>1$ e $f(0,\gamma)=0$. Ne segue che $f(A^+)=[0,+\infty)$. Osserviamo che i punti (x,x) appartengono ad A^- per ogni $x<0$ e

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x-1}\to-\infty,\quad \text{per } x\to-\infty.$$

Inoltre, $(0,\gamma)\in A^-$ per ogni $\gamma<0$ e $f(0,\gamma)=0$. Ne segue che $f(A^-)=(-\infty,0]$. Pertanto si deduce che $f(D)=f(A^+\cup A^-)=\mathbb{R}$. ■

(4.59) Esercizio *Discutere la natura dei punti critici della funzione* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x,y,z) = (x^3 - 3x - y^2)z^2 + z^3 .$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(4.60) Esercizio *Descrivere gli insiemi di livello della funzione definita da*

$$f(x,y) = \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} .$$

Risoluzione. L'insieme di livello $f(x,y) = \alpha$ si riduce a

$$(\alpha - 1)x^2 + (\alpha - 1)y^2 + 2(\alpha + 1)x + \alpha - 1 = 0.$$

L'analisi di queste curve al variare di α viene lasciato allo studente. ■

(4.61) Esercizio *Determinare i punti stazionari in* $\mathbb{R}^2$ *della funzione*

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 + 1)e^x ,$$

e classificarli.

Risoluzione. Osserviamo che $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x,y) = 0 , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x,y) = +\infty$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$, per cui f non puó ammettere minimi e massimi assoluti. La funzione è di classe C^∞ e risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ((x+1)^2 + y^2)e^x , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x ,$$

per cui si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 ,$$

nel punto $(-1,0)$. Risulta

$$H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{bmatrix}$$

per cui il metodo dell'Hessiano non è efficace . D'altra parte si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) > 0 ,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui $(-1,0)$ non può essere ne di massimo ne di minimo locale per f. ■

(4.62) Esercizio *Si consideri la funzione*

$$f(x,y) = e^{xy} - \log(x+y)\,.$$

Detto β il numero positivo che soddisfa l'equazione $e^\beta = \frac{1}{2\beta}$, classificare il punto stazionario $P = (\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta})$.

Risoluzione. Si verifica ovviamente che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}) = 0\,.$$

Inoltre, risulta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y^2 e^{xy} + \frac{1}{(x+y)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= x^2 e^{xy} + \frac{1}{(x+y)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= (1+xy)e^{xy} + \frac{1}{(x+y)^2}
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}) &= \beta e^\beta + \frac{1}{4\beta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}) &= \beta e^\beta + \frac{1}{4\beta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}) &= (1+\beta) e^\beta + \frac{1}{4\beta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta} + e^\beta\,.
\end{aligned}$$

Si conclude che $(\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta})$ è punto di sella per f $(\det H_f(P) < 0)$. ■

(4.63) Esercizio *Sia*

$$f(x,y) = 6xy e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,.$$

Detti M ed m il massimo e il minimo assoluto di f in $\mathbb{R}^2$, determinare il rapporto M/m.

Risoluzione. La funzione è di classe C^∞ ed è simmetrica rispetto ad x e y. Si verifica facilmente che ammette un punto di massimo assoluto (x_M, y_M) ed un punto di minimo assoluto (x_m, y_m) tali che

$$f(x_m, y_m) = -f(x_M, y_M),$$

da cui $M/m = -1$. ■

(4.64) Esercizio *Determinare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x,y) = e^{3\cos(x) + y^2}\,.$$

Risoluzione. Si verifica facilmente che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases}$$

se e solo se $\sin(x) = 0$ e $y = 0$ per cui i punti $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono stazionari per f. D'altronde, si ottiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(k\pi,0) = -3(-1)^k e^{3(-1)^k} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(k\pi,0) = 2e^{3(-1)^k},$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(k\pi,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(k\pi,0) = 0\,.$$

Ne segue che

$$\begin{cases} \det H_f(k\pi,0) = -6(-1)^k e^{6(-1)^k} & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(k\pi,0) = -3(-1)^k e^{3(-1)^k} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

per cui se $k \in \mathbb{Z}$ è dispari $(k\pi, 0)$ è un punto di minimo locale, mentre i $k \in \mathbb{Z}$ pari corrispondono a punti di sella. ■

(4.65) Esercizio *Dare la definizione di punto di minimo locale per una funzione reale di $n-$variabili. Enunciare delle condizioni sufficienti affinche un punto x_0 sia di minimo locale. Fare l'esempio di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che ha minimo locale nel punto $(1,2)$ ma non soddisfa le condizioni necessarie.*

Risoluzione. Diciamo che x_0 è un punto di minimo locale per $f : A \to \mathbb{R}$ se esiste un intorno U di x_0 tale che

$$\forall \xi \in U : \ f(\xi) \geq f(x_0)\,.$$

Se $f \in C^2(A)$ e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = 0\,,$$

ed

$$\det H_f(x_0) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) > 0,$$

allora x_0 è punto di minimo. Per esempio, $f(x,y) = |x-1||y-2|$ non è regolare in $(1,2)$ ma $(1,2)$ è comunque punto di minimo per f. ■

(4.66) Esercizio *Sia*

$$f(x,y) = y - \int_0^y e^{-x^2 t^2}\, dt\,.$$

Dire dove f è definita, continua, differenziabile e classificare i punti critici di f.

Risoluzione. Evidentemente f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre, combinando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale con il teorema fondamentale del calcolo integrale si deduce che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^y 2xt^2 e^{-x^2t^2}\,dt\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - e^{-x^2y^2}\,.$$

Pertanto i punti

$$(0,\lambda), \quad (\mu,0), \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}\,,$$

sono punti critici per f con $f(0,\lambda) = f(\mu,0) = 0$. Essendo $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ come si verifica facilmente dalla proprietà $e^\alpha > 1 \Longleftrightarrow \alpha > 0$ si conclude che i punti critici sono punti di minimo assoluto per f. ∎

2.5 Ottimizzazione vincolata

(5.67) Esercizio *Mostrare che la funzione*

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,,$$

ammette estremi assoluti sull'insieme

$$E_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}, \ \ x \neq 0, \ \ y \neq 0\right\}$$

dove $a > 0$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(5.68) Esercizio *Determinare gli estremi della funzione*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2\,,$$

sotto la condizione

$$x + y + z + 1 = 0\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(5.69) Esercizio *Si determinino gli estremi di*

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^2$$

sotto la condizione

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.70) Esercizio *Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x,y,z) = x^2 + \cos(y)\,,$$

sull'insieme

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + e^{z^2} \le 10\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.71) Esercizio *Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2}\,,$$

sull'insieme

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 - 2x + y^2 + z^2 \le 3\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.72) Esercizio *Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x,y,z) = (1+x^2)e^{-z^2}\,,$$

sull'insieme

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 \le 0\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.73) Esercizio *Quanti sono i punti di minimo relativo di*

$$f(x,y) = \cos^2(x) + y^3 - 3y^2\,,$$

appartenenti all'insieme

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\pi < x < 2\pi,\ \ |y| < 3\pi\} \ ?$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.74) Esercizio *Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x,y,z) = (x^2 + 2z^2)e^{-y},$$

sull'insieme

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + z^2 \leq y\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.75) Esercizio *Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x,y,z) = -\frac{2x^2 + z^2}{y^3},$$

sull'insieme

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + z^2 \leq y^2 - 1\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.76) Esercizio *Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x,y,z) = y^2 + \sin(z^2),$$

sull'insieme

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; e^{x^2} + y^2 + z^2 \leq 2\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.77) Esercizio *Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x,y,z) = (x^3y^2 + xy)e^{-x^2y},$$

sull'insieme

$$C_a = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \leq xy \leq 1, \; 0 \leq x \leq a, \; 0 \leq y \leq a\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.78) Esercizio *Si studino i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x,y,z,t) = xt - yz,$$

sull'insieme

$$C_a = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \; x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.79) Esercizio *Si determinino gli estremi della funzione*

$$f(x,y,z) = x^2(x^2+y^2+z^2-1)$$

sulla sfera

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.80) Esercizio *Si verifichi che la funzione*

$$f(x,y) = e^{-x^2-2y} - e^{-2x^2-y}$$

è dotata di estremi su

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \ge 0, \ y \ge 0\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.81) Esercizio *Si studino, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f_\alpha(x,y,z) = x + \alpha x^2 - \cos(y) + z^2 e^x,$$

sull'insieme

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le x \le 2, \ -\pi \le y \le \pi, -1 \le z \le 1\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.82) Esercizio *Si studino, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f_\alpha(x,y,z) = e^{\alpha\cos(z)+y^2} + \sin^2(x),$$

sull'insieme

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ |y| \le 1\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.83) Esercizio *Siano $f(x,y) = x + 2y$ e $T = T_1 \cup T_2$ dove T_1 è il triangolo di vertici*

$$A \equiv (-7,0), \quad B \equiv (0,0), C \equiv (0,2),$$

e

$$T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 \le 4, \ \ y \ge 0, \ \ x \ge 0\}.$$

Si ponga $M = \operatorname{maxass} f_T$ *e* $m = \operatorname{minass} f_T$. *Calcolare* M/m.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.84) Esercizio *Si studino, al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x, y) = x^2,$$

sull'insieme

$$C_\alpha = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y + 2\alpha^2 - 4 \le 0\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.85) Esercizio *Si studino, al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x, y) = y^2,$$

sull'insieme

$$C_\alpha = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 - 2\alpha x + 2\alpha y + 2\alpha^2 - 9 \le 0\right\}.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.86) Esercizio *Tra i vettori*

$$\mathbf{v} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k},$$

tali che

$$x + y + z = \lambda,$$

determinare quello di lunghezza minima.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.87) Esercizio *Si determinino i punti della superficie*

$$g(x, y, z) = z^2 - xy - 1 = 0$$

più vicini all'origine $(0, 0, 0)$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.88) Esercizio *Si consideri l'ellisse* γ *intersezione dell'iperboloide*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

con il piano

$$x + y + 2z = 0\,.$$

Determinare i punti di γ *aventi quota minima.*

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.89) Esercizio *Si determinino gli estremi vincolati di*

$$f(x_1, .., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log(x_i)\,,$$

sotto la condizione

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.90) Esercizio *Si determinino gli estremi vincolati di*

$$f(x_1, .., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,,$$

sotto la condizione

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.91) Esercizio *Tra i triangoli di perimetro assegnato determinare quelli di area massima.*

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.92) Esercizio *Studiare le curve di livello della funzione*

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(5.93) Esercizio *Una pallina viene posizionata nel punto* $(1, 0, 1)$ *e viene lasciata cadere liberamente lungo il vincolo*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 .$$

Determinare la traiettoria e il tempo per arrivare nell'origine $(0,0,0)$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(5.94) Esercizio *Siano* $g(x,y) = x - 2y$ *e* $T := T_1 \cup T_2$ *dove*

$$T_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1, \ \ x \le 0 \right\},$$

$$T_2 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 \le y \le 2 - x^2, \ \ x \ge 0 \right\}.$$

Posto $M := \operatorname{maxass}(g_T)$ *e* $m := \operatorname{minass}(g_T)$, *si calcoli* M/m .

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(5.95) Esercizio *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Determinare tutti e soli i valori di* α *per cui i punti* $(-\pi, 0)$ *e* $(2\pi, 0)$ *sono entrambi di massimo relativo per la funzione definita su* $\mathbb{R}^2$

$$\varphi_\alpha(x,y) = (5-\alpha)\sin^2(x) + (9-\alpha^2)\sinh(y^2 - 1) .$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(5.96) Esercizio *Sia dato il campo scalare*

$$f(x,y) = x^2 + (y-a)^2.$$

Considerato il punto di minimo di f *vincolato alla curva* $x^2 - y^2 - \frac{1}{2}b^2 = 0$, *trovarne il valore massimo rispetto ai parametri*

$$a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right], \quad b \in [-1,2] .$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(5.97) Esercizio *Sia* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *Determinare i punti di massimo e minimo vincolato per* f *sull'insieme* $T = T_1 \cup T_2$, *dove*

$$T_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \le (x-1)^2, \ x \in [0,1] \right\} ,$$

$$T_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \le (x+1)^2, \ x \in [-1,0] \right\} .$$

Risoluzione. Ragioniamo in modo sintetico. Evidentemente l'unico punto critico di f è il punto $(0,0)$ che, come si vede facilmente, non è ne di massimo ne di minimo locale per f . Ne segue che i massimi e i minimi per f su T sono assunti sul vincolo . Se $y = \pm(x-1)^2$ si ha

$$\varphi(x) = f(x, y(x)) = x^2 - (x-1)^4 \,,$$

che su $0 \le x \le 1$ ammette massimo assoluto nel punto $x = 1$ e minimo assoluto nel punto $x = 0$, per cui i punti $(1,0)$ e $(0,\pm 1)$ sono rispettivamente di massimo e di minimo assoluti vincolati. Ragionando in modo simile per $y = \pm(x+1)^2$ su $-1 \le x \le 0$, si deduce che il punto $(-1,0)$ è di massimo assoluto vincolato. Pertanto i massimi vincolati sono $(\pm 1,0)$ mentre i minimi vincolati sono $(0,\pm 1)$. ■

(5.98) Esercizio *Sia $f(x,y) = x - y$. Determinare i punti di massimo e minimo vincolato per f sull'insieme $T = T_1 \cup T_2$, dove*

$$T_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\right\},$$

$$T_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

Risoluzione. Evidentemente non esistono punti critici nell'interno di T. Sul dominio T_1 il punto $(1,-1)$ è di massimo vincolato mentre il punto $(-1,1)$ è di minimo vincolato. Sul dominio T_2 con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange risulta

$$\Phi(x,y;\lambda) = x - y + \lambda((x-1)^2 + y^2 - 1)\,,$$

da cui

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = 0$$

se e solo se

$$x = \frac{2\lambda - 1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda},$$

per cui sostituendo nel vincolo si trovano i punti critici vincolati

$$(1 + \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), \quad (1 - \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2).$$

Si verifica che $(1 + \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ è il punto di massimo assoluto, mentre $(-1,1)$ è il punto di minimo assoluto per f su T. ■

(5.99) Esercizio *Determinare i massimi e i minimi della funzione*

$$f(x,y) = x^2(x^2 + y^2 - 1)$$

sull'insieme

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

Risoluzione. Essendo C un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$, la funzione f ammette massimi e minimi assoluti su C. Osserviamo anzitutto che

$$\forall (x,y) \in C: \ f(x,y) \le 0$$

e che

$$\forall (x,y) \in \partial C: \ f(x,y) = 0 \,.$$

Ne segue che tutti i punti (x_0, y_0) tali che $x_0^2 + y_0^2 = 1$ sono di massimo assoluto per f. Inoltre, per ogni $(x,y) \in \operatorname{Int} C$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(2x^2 + y^2 - 1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 y \,.$$

Si verifica facilmente che i punti critici di f sono

$$(0, \pm 1) \in \partial C, \qquad (\pm\sqrt{2}/2, 0) \in C \,.$$

Poichè $(0,\pm 1)$ appartengono alla frontiera di C, $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$ sono necessariamente di minimo assoluto per f $(f(\pm\sqrt{2}/2, 0) = -1/4)$. ■

(5.100) Esercizio *Determinare i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione*

$$f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$$

sul quadrato di vertici $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π) *e* $(0,\pi)$.

Risoluzione. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x)\sin(y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\cos(y)$$

per cui i punti stazionari sono :

$$(0,\pi/2),\ (\pi/2,0),\ (\pi/2,\pi),\ (\pi,\pi/2)\,.$$

D'altra parte risulta :

$$f(0,\pi/2) = 1, \quad f(\pi,\pi/2) = -1, \quad f(\pi/2,0) = 0, \quad f(\pi/2,\pi) = 0,$$

per cui $(0,\pi/2)$ è il punto di massimo e $(\pi,\pi/2)$ è il minimo sul quadrato. ■

(5.101) Esercizio *Trovare il massimo ed il minimo di*

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + y^2,$$

dovendo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *soddisfare il vincolo* C *dato da* $x^2 + y^2 = \frac{16}{9}$.

Risoluzione. Sia $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione di Lagrange

$$\Phi(x,y,\lambda) = x^3 + y^3 - x^2 + y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - \frac{16}{9}\right).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y;\lambda) &= 3x^2 - 2x + 2\lambda x\\
\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y;\lambda) &= 3y^2 + 2y + 2\lambda x\\
\frac{\partial\Phi}{\partial \lambda}(x,y;\lambda) &= x^2 + y^2 - \frac{16}{9}.
\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y;\lambda) &= 0\\
\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y;\lambda) &= 0\\
\frac{\partial\Phi}{\partial \lambda}(x,y;\lambda) &= 0
\end{aligned}$$

se e solo se

$$x = 0, \qquad y = \pm\frac{4}{3}$$

oppure

$$x = \pm\frac{4}{3}, \qquad y = 0.$$

Tra tali punti vi devono essere massimo e il minimo vincolato per f sulla circonferenza C (che è un compatto di $\mathbb{R}^2$) . Si verifica confrontando i valori che $(0,4/3)$ è il massimo mentre $(-4/3,0)$ è il minimo. ■

(5.102) Esercizio *Si consideri la funzione*

$$g(t) = \int_C \left[t^4 y e^{xy} + \frac{1}{8}t^2 y^2\right] dx + \left[5tx^2 + \frac{1}{\pi}x + t^4 x e^{xy}\right] dy,$$

dove $C = C_1 + C_2$ *e* C_1 *è definita da*

$$\gamma(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j},$$

per $0 \le t \le \pi$ *e* C_2 *è il segmento che congiunge* $(-2,0)$ *con* $(2,0)$. *Determinare gli estremi assoluti di* g *in* $[-1,1]$.

Risoluzione. Evidentemente C è il bordo del dominio connesso di $\mathbb{R}^2$

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 4, \ y \ge 0\}.$$

Posto

$$\omega = F_1(x,y;t)\,dx + F_2(x,y;t)\,dy\,,$$

dove

$$F_1(x,y;t) = t^4 y e^{xy} + \frac{1}{8}t^2 y^2\,,\quad F_2(x,y;t) = 5tx^2 + \frac{1}{\pi}x + t^4 x e^{xy}\,,$$

si ha, tenuto conto della simmetria rispetto all'asse y

$$g(t) = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) == \frac{m(\Omega)}{\pi} - \frac{t^2}{4}\iint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,.$$

Pertanto

$$\forall t \in [-1,1]:\;\; g(t) = 2 - \frac{4}{3}t^2\,,$$

per cui il max assoluto vale 2 ed è assunto in $t = 0$ mentre il min assoluto vale $\frac{2}{3}$ e viene assunto in $t = \pm 1$. ∎

2.6 Funzioni implicite

(6.103) Esercizio *Sia $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo*

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \le x^2 \\ y - x^2 & \text{se } y > x^2 \\ y + x^2 & \text{se } y < -x^2\,. \end{cases}$$

Provare che :
(a) *$F(0,0) = 0$ ed $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$;*
(b) *F definisce implicitamente infinite funzioni implicite in un intorno di $(0,0)$.*

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(6.104) Esercizio *Dimostrare che l'equazione*

$$F(x,y) = 2y^3 + 4x^2 y - 3x^4 + x + 6y = 0$$

definisce implicitamente una unica funzione implicita definita su tutto $\mathbb{R}$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(6.105) Esercizio *Applicare il teorema delle funzioni implicite a*

$$F(x,y)=x^2-y^2-2x+2y\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.106) Esercizio *Sia F una funzione di classe $C^2(A)$ e $(x_0,y_0)\in A$ un punto singolare per F, ossia*

$$F(x_0,y_0)=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0\,.$$

Dimostrare che se

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right)^2>0,$$

allora l'equazione

$$F(x,y)=0,$$

ha l'unica soluzione (x_0,y_0) .

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.107) Esercizio *Nell'equazione*

$$F(x,y)=1+xy-\log(e^{xy}+e^{-xy})=0\,,$$

supposto che definisca implicitamente una funzione f di x, calcolare $f'(x)$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.108) Esercizio *Determinare i punti a tangente orizzontale delle curve definite implicitamente da*

$$F(x,y)=4(x^4+x^2y^2)-12x^3y+x^2=0\,,$$
$$F(x,y)=x^4+y^4-3x^2y\,,$$
$$F(x,y)=x^4y+x^2y^3-6x^3y^2+x^2y=0\,,$$
$$F(x,y)=\frac{x^3}{y^3}+\frac{x}{y}+10\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y^3}=0\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.109) Esercizio *Verificare che la funzione*

$$F(x,y,z)=x+y+z-e^{xyz}\,,$$

ammette un unico punto critico $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *che non appartiene al luogo geometrico individuato dall'equazione*

$$F(x, y, z) = 0\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.110) Esercizio *Determinare, quando possibile, le derivate* y' *e* z' *delle funzioni definite implicitamente dal sistema*

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0\,. \end{cases}$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.111) Esercizio *Il sistema*

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ G(x, y, z) = xy + yz - xz + 3 = 0\,. \end{cases}$$

è verificato in particolare per

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 1\,.$$

Dimostrare che esso definisce una unica funzione implicita (y, z) *nell'intorno del punto* $x = 1$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.112) Esercizio *Si verifichi che l'equazione*

$$x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z + y^2 e^z = 0\,,$$

determina un'unica funzione $\varphi(x, y, u)$ *tale che* $\varphi(0, 0, 0) = 1$ *e* $(0, 0, 0)$ *è un punto critico per* φ . *Studiare la natura di* $(0, 0, 0)$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.113) Esercizio *Verificare che per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$ *la relazione*

$$z^2 + \sin z - x^2 y^2 + \lambda xy = 0\,,$$

definisce in un intorno di $(0, 0)$ *una ed una sola* φ_λ *con* $\varphi_\lambda(0, 0) = 0$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.114) Esercizio *Verificare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la relazione*

$$x^4 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - \sin^2(y) + \sin^2(z) + z = 0\,,$$

definisce in un intorno di $(0,0)$ *una ed una sola* φ_λ *con* $\varphi_\lambda(0,0) = 0$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(6.115) Esercizio *Verificare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la relazione*

$$z\cos(y) + z^3 + \lambda x^2 + y^2 = 0\,,$$

definisce in un intorno di $(0,0)$ *una ed una sola* φ_λ *con* $\varphi_\lambda(0,0) = 0$. *Verificare che* $(0,0)$ *è un punto critico per* φ_λ *e classificarlo* .

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(6.116) Esercizio *L'equazione*

$$(x+1)^2 + 3\sin(y-2) - e^{x+1} - x + 4(y-2) = 0\,,$$

definisce in un intorno di $(0,0)$ *una ed una sola* φ *con* $\varphi(0,0) = 0$. *Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di* φ *in* $(-1,2)$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(6.117) Esercizio *L'equazione*

$$y^2 e^{x-2} + 3x - xy - 9 = 0\,,$$

definisce in un intorno di $(2,3)$ *una ed una sola funzione* φ . *Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di* φ *in* $(2,3)$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(6.118) Esercizio *Provare che l'equazione*

$$2xe^y + 1 = 0\,,$$

definisce in un intorno di 0 *una ed una sola funzione* φ . *Calcolare le derivate successive di* φ *in* 0 .

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(6.119) Esercizio *Provare che l'equazione*

$$z^3 - (x+y)z - 8 = 0\,,$$

definisce in un intorno di $(0,0$ *una ed una sola funzione* φ *con* $\varphi(0,0) = 2$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.120) Esercizio *Sia* $z = z(x,y)$ *la funzione definita implicitamente dall'equazione*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 5.$$

Determinare $\frac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.121) Esercizio *Sia* $z = z(x,y)$ *la funzione definita implicitamente dall'equazione*

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 1.$$

Determinare $\frac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.122) Esercizio *Supponiamo che nelle ipotesi del Teorema di Dini l'equazione* $F(x,y,z) = 0$ *definisce implicitamente le funzioni*

$$x = x(y,z), \quad y = y(x,z), \quad z = z(x,y)\,.$$

nel medesimo punto (x_0, y_0, z_0) . *Provare che*

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1\,.$$

in tale punto.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(6.123) Esercizio *L'equazione*

$$F(x,y) = x + x^2 y + ay + e^{xy} - 1 + \sin(xy) = 0\,.$$

definisce una funzione $y = f(x)$ *di classe* C^∞ *in un intorno di* $x = 0$. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{af(x) + x}{x^2}.$$

Risoluzione. Tenuto conto della regola di l'Hopital, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{af(x)+x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{af'(x)+1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{af''(x)}{2}=\frac{af''(0)}{2}\,.$$

Osserviamo ora che si ha

$$f'(x)=y'(x)=-\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}\,,$$

per cui

$$f''(x)=-\frac{(F_{xx}+F_{yx}y')F_y-(F_{xy}+F_{yy}y')F_x}{F_y^2}\,.$$

Si ha

$$F_x(x,y)=1+2xy+ye^{xy}+\cos(xy)y,$$

$$F_y(x,y)=x^2+a+xe^{xy}+\cos(xy)x,$$

da cui $F_x(0,0)=1$ ed $F_y(0,0)=a$. Inoltre risulta

$$F_{xx}(x,y)=2y+y^2e^{xy}-\sin(xy)y^2\,,$$

$$F_{yy}(x,y)=x^2e^{xy}-\sin(xy)x^2\,,$$

$$F_{xy}(x,y)=2x+e^{xy}+xye^{xy}+\cos(xy)-y^2\sin(xy)\,,$$

da cui $F_{xx}(0,0)=0$, $F_{yy}(0,0)=0$ ed $F_{xy}(0,0)=2$. Pertanto, essendo $y'(0)=-1/a$, risulta

$$f''(0)=\frac{4}{a^2},$$

e si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{af(x)+x}{x^2}=\frac{2}{a}\,.$$

■

(6.124) Esercizio *Sia f una funzione di classe C^2 . Inoltre l'equazione $f(x,y)=0$ definisca una funzione implicita $y(x)$ in un intorno di $x=0$ tale che $y(0)=1$. Sapendo che*

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=x\log(1+x^2+y^2)+ye^x(xy^5+2\cos(x^2y))$$

e che

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-1}{x}=1\,,$$

calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

Risoluzione. Combinando l'Hopital con la formula per la derivata prima della funzione implicita,

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} y'(x) = y'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)}.$$

Ne segue che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2.$$

■

(6.125) Esercizio *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Inoltre l'equazione $f(x,y) = 0$ definisca una funzione implicita $y(x)$ in $x = 0$ tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Sapendo che*

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = -\frac{1}{2}$$

e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{2y(x)-x^2}{x^2} = 2,$$

calcolare

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0).$$

Risoluzione. Osserviamo che dalla formula

$$y'(0) = -\frac{f_x(0,y(0))}{f_y(0,y(0))},$$

segue $f_x(0,0) = 0$, per cui ottiene facilmente

$$y''(0) = -\frac{f_{xx}(0,0)}{f_y(0,0)}.$$

D'altra parte si ha

$$2 = \lim_{x\to 0} \frac{2y(x)-x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{y'(x)-x}{x} = \lim_{x\to 0} y''(x) - 1,$$

da cui $y''(0) = 3$. Ne segue che

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0) = 3/2.$$

■

(6.126) Esercizio *L'equazione*

$$x^3 y + e^{2x+y} - 1 + 2x^2 = 0$$

definisce una funzione implicita $y(x)$ in un intorno del punto $x = 0$. Calcolare il polinomio di Taylor di secondo grado di y nel punto $x = 0$.

Risoluzione. L'esercizio può essere risolto in modo canonico mediante la formula della derivata della funzione implicita

$$\forall x \in]-\delta, \delta[: \;\; y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

dove $\delta > 0$ è sufficientemente piccolo e $F(x, y) = 0$ è la relazione che definisce implicitamente y. In questo caso, risolviamo il problema con lo sviluppo di Taylor dell'addendo esponenziale. Al primo ordine, si ha

$$e^{2x+y} \approx 1 + 2x + y\,.$$

Ne segue che (al primo ordine)

$$x^3 y + 2x + y + 2x^2 = 0,$$

da cui, trascurando i termini di ordine superiore al secondo, si deduce

$$P_{2,y}(x) = -2x - 2x^2\,.$$

■

(6.127) Esercizio *Sia $f(x, y) = y - \sin(xy)$. Per ognuno dei punti*

$$A \equiv \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \qquad B \equiv \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

dire se f definisce implicitamente una funzione in un intorno di $x = \frac{\pi}{2}$.

Risoluzione. Si ha

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 0\,,$$

ed essendo

$$\frac{\partial}{\partial y}(y - \sin(xy)) = 1 - x\cos(xy)\,,$$

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1 - \frac{\pi}{2} \neq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 1 \neq 0\,,$$

per cui, per il teorema di Dini la relazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione φ_A in un intorno di A e una funzione φ_B in un intorno di B. ■

2.7 Max e Min per funzioni implicite

(7.128) Esercizio *Determinare i punti di massimo e minimo relativo delle funzioni y definite implicitamente dall'equazione*

$$F(x, y) = x^3 - 6xy + y^3 = 0\,.$$

senza considerare i punti singolari.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(7.129) Esercizio *Determinare i massimi e i minimi relativo delle funzioni definite implicitamente dalla relazione*

$$F_a(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0\,.$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Verificare che $F(x, y) = 0$ è il luogo dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che il prodotto delle loro distanze dai punti $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ sia a^2.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(7.130) Esercizio *Verificare che la funzione y definita implicitamente da*

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \sin(y) = 0\,,$$

tale che $y(0) = 0$, ha un massimo per $x = 0$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(7.131) Esercizio *Determinare i punti di massimo e minimo relativo delle funzioni y definite implicitamente dall'equazione*

$$F(x, y) = x^3 - x^2 y + y^3 - 8 = 0\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(7.132) Esercizio *Determinare i massimi e i minimi della funzione definita implicitamente dall'equazione*

$$F(x, y, z) = z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(7.133) Esercizio *Sia F una funzione di classe $C^2(A)$ e $(x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che*

$$F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

e che

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} > 0\,.$$

Dimostrare che x_0 è un punto di massimo locale per la funzione f definita implicitamente da $F(x, y) = 0$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(7.134) Esercizio *L'equazione*

$$x^2 + \log(1 + x^2 y) + y e^y = 0$$

definisce una funzione implicita $y(x)$ in un intorno di $x = 0$. Dire se il punto $x = 0$ è di massimo, di minimo oppure di sella.

Risoluzione. L'esercizio si può risolvere derivando la formula della derivata della funzione implicita

$$\forall x \in]-\delta, \delta[: \quad y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

dove $\delta > 0$ è sufficientemente piccolo e $F(x, y) = 0$ è la relazione che definisce implicitamente y. Risolviamo però l'esercizio in modo sintetico. Sviluppando $\log(1 + x^2 y)$ e e^y in serie di Taylor e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ha

$$x^2 + x^2 y + y = 0,$$

ossia

$$\forall x \in]-\delta, \delta[: \quad y(x) = -\frac{x^2}{1 + x^2}\,.$$

Si vede allora subito che $x = 0$ è punto di massimo assoluto per $y(x)$. ■

2.8 Forme differenziali, integrali curvilinei

(8.135) Esercizio *Calcolare l'integrale della forma*

$$\omega(x, y) = x^2\, dx + xy\, dy,$$

lungo la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$$

per $t \in [-1,1]$. $[R = 0]$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(8.136) Esercizio *Calcolare l'integrale della forma*

$$\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

lungo l'arco γ *di circonferenza* $x^2+y^2=4$ *di estremi* (2.0) *e* $(\sqrt{3},1)$. $[R = \pi/6]$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(8.137) Esercizio *Calcolare l'integrale della forma*

$$\omega(x,y) = xy\,dx + (y^2+1)\,dy,$$

lungo
(a) *il segmento di retta che congiunge* $(0,0)$ *con* $(1,1)$ *orientato nel senso delle ascisse positive*.
(b) *l'arco di parabola che congiunge* $(0,0)$ *con* $(1,1)$ *orientato nel senso delle ascisse positive*.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(8.138) Esercizio *Calcolare l'integrale della forma*

$$\omega(x,y) = x^2\,dx + xy^2\,dy,$$

lungo la frontiera del quadrato $[0,1]\times[0,1]$. $[R = 1/3]$.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(8.139) Esercizio *Dimostrare che la forma differenziale su* $\mathbb{R}^2$

$$\omega(x,y) = (2x+5y^3)\,dx + (15xy^2+2y)\,dy,$$

è esatta e calcolare una sua primitiva.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(8.140) Esercizio *Sia*

$$\omega(x,y) = \omega_1(x,y)\,dx + \omega_2(x,y)\,dy$$

una forma esatta su $\mathbb{R}^2$. *Provare che*

$$\varphi(x,y) = \int_0^1 (x\omega_1(tx,ty) + y\omega_2(tx,ty))\,dt,$$

è una primitiva (potenziale) per ω *.*

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(8.141) Esercizio *Dimostrare che le seguenti forme differenziale su* $\mathbb{R}^2$

$$\omega(x,y) = \sin(x)\,dx + \cos(y)\,dy,$$

$$\omega(x,y) = (x^2y + y^2 + 1)\,dx + \left(\frac{x^3}{3} + 2xy\right)dy,$$

$$\omega(x,y) = \frac{1}{1+y^2}\,dx - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}\,dy,$$

sono esatte e e calcolarne una loro primitiva.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(8.142) Esercizio *Determinare il valore di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *per cui la forma*

$$\omega(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}\,dx + \frac{x+y}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}\,dy$$

è chiusa su $\mathbb{R}^2$ *. Per tale valore di* α *la forma* ω *è esatta ?*

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(8.143) Esercizio *Verificare che la forma differenziale*

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{(x^2+y^2)}\,dx + \frac{x}{(x^2+y^2)}\,dy,$$

(a) *è chiusa su* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*;*
(b) *non è esatta su* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*;*
(c) *è esatta nel semipiano* $\{x > 0\}$*;*
(d) *è esatta nel semipiano* $\{y > 0\}$*;*
(e) *è esatta in* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : \ y \le 0\}$*;*
(e) *è esatta in*

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(\varrho,\vartheta) : \ \varrho = \varrho(\vartheta)\},$$

dove $\vartheta :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *è di classe* C^1 *. Determinare inoltre una primitiva nei casi* $(c), (d), (e)$ *ed* (f) *.*

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(8.144) Esercizio *Siano* $\omega_1, \cdots \omega_n$ *funzioni* $C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, *omegenee di grado* $\alpha \neq -1$. *Provare che se la forma differenziale*

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i\,,$$

è chiusa in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *allora* ω *è esatta e un potenziale per* ω *è dato dalla funzione*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha+1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) x_i\,.$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(8.145) Esercizio *Sia*

$$\omega(x,y) = \omega_1(x,y)\, dx + \omega_2(x,y)\, dy$$

una forma chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Provare che*
(a) *Se esiste una curva* γ_0 *che circonda l'origine tale che*

$$\int_{\gamma_0} \omega = 0,$$

allora ω *è esatta su* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(b) *Provare che esistono* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ *tali che*

$$\omega_1(x,y) = \frac{-\lambda y}{x^2+y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\,,$$

$$\omega_2(x,y) = \frac{\lambda x}{x^2+y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\,,$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(8.146) Esercizio *Siano* $f, g \in C^1(]0,+\infty[)$ *e si consideri la forma differenziale su* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\omega(x,y) = \left(x f(x^2+y^2) - \frac{ay}{x^2+y^2} \right) dx + \left(y g(x^2+y^2) + \frac{ax}{x^2+y^2} \right) dx$$

(a) *Dire per quali coppie* f, g *e per quali* $a \in \mathbb{R}$ *la forma* ω *è chiusa*.
(b) *Dire per quali coppie* f, g *e per quali* $a \in \mathbb{R}$ *la forma* ω *è esatta e calcolarne una primitiva*.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ∎

(8.147) Esercizio *Calcolare l'integrale curvilineo della forma*

$$\omega(x,y,z) = e^{yz}\,dx + (xz\,e^{yz} + y)\,dy + (xy\,e^{yz} + 3z^2)\,dz$$

lungo la curva

$$x(t) = 1 - \cos(t), \quad y(t) = \sin(2t), \quad z(t) = \frac{\sin(2t)}{2+\sin(2t)}.$$

con $t \in [0, 1000\pi]$ *percorsa nel verso delle* t *crescenti.*

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(8.148) Esercizio *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y) = \frac{1+x}{1-y}\,dx + \frac{1+y}{1-x}\,dy,$$

dire se ω *è chiusa e esatta calcolandone in caso afferemativo le primitive.*

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

2.9 Teorema di inversione locale

(9.149) Esercizio *Data l'applicazione* $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita da*

$$f_\lambda(x,y,z) = (\lambda xz, 2x^\lambda y, 3yz)$$

si dica in quali punti f_λ *è localmente invertibile.*

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(9.150) Esercizio *Siano* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Stabilire sotto quali condizioni la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definita da*

$$f(x,y) = (ax + by, cx + dy),$$

è invertibile e determinare la sua inversa f^{-1}.

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(9.151) Esercizio *Data l'applicazione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definita da*

$$f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$$

verificare che f *è invertibile in ogni* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *ma che non è globalmente invertibile.*

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(9.152) Esercizio *Studiare l'invertibilità locale della funzione f su $\mathbb{R}^2$ definita da*

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(9.153) Esercizio *Studiare l'invertibilità locale della funzione f su $\mathbb{R}^2$ definita da*

$$f(\varrho,\vartheta) = (\varrho\cos(\vartheta), \varrho\sin(\vartheta)).$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■

(9.154) Esercizio *Studiare l'invertibilità locale della funzione f su $\mathbb{R}^3$ definita da*

$$f(\varrho,\vartheta) = (\varrho\cos(\varphi)\sin(\vartheta), \varrho\sin(\varphi)\sin(\vartheta), \varrho\cos(\vartheta)).$$

Risoluzione. Lo svolgimento viene lasciato allo studente. ■