# ARITHMETIC

The natural numbers are a structure $< \mathbf{N}, 0, \sigma >$ s.t.
axiom 1: $\mathbf{N}$ is a set and $0 \in \mathbf{N}$ is called zero;

axiom 2: $\sigma : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ is an injective mapping (called successor)

axiom 3: $0 \notin Im(\sigma)$;

axiom 4: *for each* $P \subseteq \mathbf{N}$

**if** $0 \in P$ **&** $\forall n \in \mathbf{N}.(n \in P \Rightarrow \sigma(n) \in P)$ ***then*** $P = \mathbf{N}$

axiom 4: *for each* $P \subseteq \mathbf{N}$

$$[P(0) \ \& \ \forall n \in N.(P(n) \Rightarrow P(\sigma(n)))] \Rightarrow \forall n \in N.P(n)$$

**Theorem 3** *Sia* $h : \mathbb{N} \times A \to A$ *e* $c \in A$. *Esiste (ed è unica) una funzione* $f : \mathbb{N} \to A$ *t.c.:*

*1.* $f(0) = c$

*2. per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $f(\sigma(n)) = h(n, f(n))$.

**Unicità di $f$:** supponiamo che esistano due funzioni $f_1$ e $f_2$ verificanti i punti (1.) e (2.) del teorema. Dimostriamo per induzione che $f_1 = f_2$.

**caso base:** $f_1(0) = f_2(0)$ per definizione. Supponiamo che per un generico naturale $i$, $f_1(i) = f_2(i)$.

**passo induttivo:** Applicando il punto due abbiamo che $f_1(\sigma(i)) = h(i, f_1(i)) = h(i, f_2(i)) = f_2(\sigma(i))$.

**Theorem 3** *Sia* $h : \mathbb{N} \times A \to A$ *e* $c \in A$. *Esiste (ed è unica) una funzione* $f : \mathbb{N} \to A$ *t.c.:*
*1.* $f(0) = c$
*2. per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $f(\sigma(n)) = h(n, f(n))$.

**Esistenza di** $f$ : sia $\Omega$ la classe di tutti gli insiemi $Z \subseteq \mathbb{N} \times A$ t.c. $(0, c) \in Z$ e $(n, x) \in Z \Rightarrow (\sigma(n), h(n, x)) \in Z$; chiamiamo *soddisfacenti* tali insiemi.

E' immediato osservare che $\Omega$ non è vuoto.

Sia $f$ l'intersezione di tutti gli elementi di $\Omega$. L'insieme $f$ è ovviamente soddisfacente ed è contenuto in ogni insieme soddisfacente.

Dimostriamo per induzione che : per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste esattamente un $a \in A$ t.c. $(n, a) \in f$ (ovvero $f$ è una funzione).

**caso base:** sappiamo che $(0, c) \in f$. Supponiamo che $(0, d) \in f$ con $d \neq c$. Allora $f - \{(0, d)\}$ sarebbe sempre sodisfacente e sarebbe contenuto propriamente in $f$, impossibile.
**passo induttivo:** supponiamo che la proprietà valga per un generico naturale $i$, ovvero che esiste unico $w$ t.c. $(i, w) \in f$. Per costruzione di $f$ deve valere che: $(\sigma(i), h(i, w)) \in f$. Supponiamo ora che esista un elemento $e \neq h(i, w)$ t.c. $(\sigma(i), e) \in f$. L'insieme $f - \{(\sigma(i), e)\}$ è soddisfacente e sarebbe strettamente contenuto in $f$, impossibile.

Notiamo infine che la funzione $f$ essendo soddisfacente soddisfa banalmente i punti (1.) e (2.) del teorema.

**Corollary 4** *Sia* $g : A \to A$ *e* $c \in A$. *Esiste (ed è unica) una funzione* $f : \mathbb{N} \to A$ *t.c.:*

*1.* $f(0) = c$

*2. per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $f(\sigma(n)) = h(f(n))$.

## La somma di naturali

?

## La somma di naturali

La somma di due numeri naturali è ricorsivamente definita da:

$m + 0 = m$
$m + \sigma(n) = \sigma(m + n).$

La definizione rientra perfettamente nello schema delle definizioni per ricorsione (primitiva): per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo la seguente funzione:

$s_m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$s_m(0) = m$
$s_m(\sigma(n)) = \sigma(s_m(n));$

Definiamo $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nel modo seguente: $x + y = s_x(y).$

**Esercizio:** dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze ($m, n \in \mathbb{N}$):

1. $0 + n = n$;
2. $\sigma(m + n) = \sigma(m) + n$;
3. $m + n = n + m$;

# Il prodotto di naturali

Il prodotto di due numeri naturali è ricorsivamente definita da:

$m \times 0 = 0$
$m \times \sigma(n) = m + (m \times n).$

**Esercizio:** dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze $(m, n \in \mathbb{N})$:

1. $0 \times n = 0;$

2. $m \times n = n \times m;$

# Peano Arithmetic

axioms

1. $\forall x(0 \neq S(x))$,
2. $\forall xy(S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$,
3. $\forall x(x + 0 = x)$
4. $\forall xy(x + S(y) = S(x + y))$,
5. $\forall x(x \bullet 0 = 0)$,
6. $\forall x(x^0 = 1)$,
7. $\forall xy(x^{Sy} = x^y \bullet x)$, $\forall x(x \bullet 0 = 0)$,
8. $\forall xy(x \bullet S(y)) = x \cdot y + x)$
9. $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))) \rightarrow \forall x\varphi(x)$

# Arithmetic in a Natural deduction setting

Language $\mathbf{L_0}$:

one unary function symbol S

two binary function symbol +, •

two predicate symbols =, ≤

a) $\dfrac{}{t=t}$

b) $\dfrac{t=u}{S(t)=S(u)}$

c) $\dfrac{t=u \qquad t'=u'}{t+t'=u+u'}$

d) $\dfrac{t=u \qquad t'=u'}{t\bullet t'=u\bullet u'}$

e) $\dfrac{t=t' \quad u=u' \quad t=u}{t'=u'}$

f) $\dfrac{t=t' \quad u=u' \quad t\leq u}{t'\leq u'}$

g) $\dfrac{}{t+0=t}$

h) $\dfrac{}{t+S(u)=S(t+u)}$

i) $\dfrac{}{t\bullet 0=0t}$

j) $\dfrac{}{t\bullet S(u)=t\bullet u+t}$

k) $\dfrac{}{0\leq t}$

l) $$\frac{S(t) \leq u}{t \leq u}$$

m) $$\frac{S(t) \leq u \qquad t = u}{\perp}$$

n) $$\dfrac{t \leq u \qquad \begin{matrix}[t = u] \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{S(t) \leq u}$$

o) $$\frac{S(t) = 0}{\perp}$$

p) $$\frac{S(t) = S(u)}{t = u}$$

q) $$\frac{t \leq u \qquad u \leq t}{t = u}$$

r) $$\dfrac{A(0) \qquad \begin{matrix}[A(x)] \\ \mathscr{D} \\ A(S(x))\end{matrix}}{A(t)}$$

$x \notin FV(hp(\mathscr{D}) - \{A(x)\}$

PA = classical logic + axioms (1)-(9)

PA = classical logic + rules (a)-(r)

EA = classical logic + rules (a)-(q)

HA = intuitionistic logic + axioms (1)-(9)

PA = intuitionistic logic + rules (a)-(r)

**Theorem**

PA$\vdash \perp$ $\Leftrightarrow$ HA$\vdash \perp$

**Proof** Use the following translation and conclude

**Definition 5.2.7** *The mapping* $^\circ : FORM \to FORM$ *is defined by*

(i) $\perp^\circ := \perp$ *and* $\varphi^\circ := \neg\neg\varphi$ *for atomic* $\varphi$ *dinstinct from* $\perp$

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^\circ := \varphi^\circ \wedge \psi^\circ$

(iii) $(\varphi \vee \psi)^\circ := \neg(\neg\varphi^\circ \wedge \neg\psi^\circ)$

(iv) $(\varphi \to \psi)^\circ := \varphi^\circ \to \psi^\circ$

(v) $(\forall x \varphi(x))^\circ := \forall x \varphi^\circ(x)$

(vi) $(\exists x \varphi(x))^\circ := \neg\forall x \neg\varphi^\circ(x)$

**Theorem 5.2.8** $\Gamma \vdash_c \varphi \Leftrightarrow \Gamma^\circ \vdash_i \varphi^\circ$.

By using the technique of normalisation it is possible to prove that:

$$HA \nvdash \perp$$

A theory T is COMPLETE if it is consistent and for each $\alpha$, $\alpha \in T$ or $\neg\alpha \in T$

**FIRST INCOMPLETENESS THEOREM**

Given any consistent axiomatic theory T that includes EA we can find a formula G s.t. $G \notin T$ and $\neg G \notin T$